

Seria 7.: Analiza fourierowska

7.1. Zapisz podane funkcje w postaci szeregu Fouriera (w postaci wykładniczej i trygonometrycznej):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{dla } -\pi < x < 0 \end{cases}, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

$$f(x) = e^{-\lambda x} \quad \text{dla } 0 < x < 2\pi, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

$$f(x) = x \quad \text{dla } |x| < \frac{T}{2}, \quad \text{okresowa z okresem } T$$

$$f(x) = |x| \quad \text{dla } |x| \leq \frac{T}{2}, \quad \text{okresowa z okresem } T$$

7.2 Korzystając z szeregu dla pierwszej funkcji z zadania 7.1. w punktach $x = \frac{\pi}{2}$ oraz $x = \frac{\pi}{4}$, znajdź sumy szeregów

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

Korzystając ze wzoru Parsewala dla funkcji f_1 znajdź również sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

7.3 Korzystając z szeregu dla drugiej funkcji z zadania 7.1. w punkcie $x = 0$ (zwróć uwagę na nieciągłość funkcji w tym punkcie), znajdź sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda^2}$$

Niezależnym rachunkiem znajdź sumę tego szeregu korzystając ze wzoru Parsewala dla funkcji f_2 .

Korzystając z wyniku i z rozwinięcia funkcji $\coth z = z^{-1} + \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + \frac{2}{945}z^5 + \mathcal{O}(z^7)$ znajdź sumy szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

7.4. Znajdź transformaty Fouriera funkcji

$$f(x) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \sigma > 0, x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| < a \\ 0 & \text{dla } |x| > a \end{cases}, \quad a > 0$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)}, \quad a > 0$$