

Dodatkowe zadania 1

1. Znajdź rozwiązanie ogólne podanych równań różniczkowych:
- a. $\frac{dx}{dt} = \frac{1+x}{1+t}$
 - b. $\frac{dx}{dt} = \frac{1+t}{1+x}$
 - c. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t^2-1}$
 - d. $\frac{dx}{dt} = \frac{\sin x}{t}$
 - e. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x+t}$
 - f. $\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{t} + 3$
 - g. $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{\sin t \cos t} - \frac{\sin^2 t}{\cos t}$

2. Znajdź funkcję f , której wykres jest w każdym punkcie prostopadły do
- a. wykresów funkcji $g_a(t) = \frac{a}{t}$.
 - b. rodziny okręgów o równaniach $x^2 + (y-a)^2 = a^2 + 1$.

3. Znajdź funkcję f o tej własności, że prosta styczna do jej wykresu w dowolnym punkcie $(a, f(a))$ przecina oś OX w punkcie $(a^2, 0)$.

4. Znajdź rozwiązanie ogólne podanych układów liniowych równań różniczkowych:

- a. $\frac{dx}{dt} = y + t, \frac{dy}{dt} = -x$
- b. $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -x + \sin t$
- c. $\frac{dx}{dt} = x + z, \frac{dy}{dt} = x + y + e^t, \frac{dz}{dt} = x + y$

5. Znajdź ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = \sin t$$

6. Znajdź ogólne rozwiązanie równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \tan t \frac{dx}{dt} + (1 + 2 \tan^2 t)x = \cos t$$

mając dane, że jednym z rozwiązań równania jednorodnego jest $x_1(t) = t \cos t$.

7. Dla podanych rozmaitości M, N i odwzorowania $f : M \rightarrow N$:

- a. $M = N = \mathbb{R}^2$, f jest obrotem płaszczyzny o kąt α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, $p = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, $v = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$. Znajdź f_*v .
- b. $M = \{(\cos \varphi, \sin \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi \in]0, 2\pi[, z \in \mathbb{R}\}$, $N = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $f(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $p = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, z_0)$, $v = \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial z}\right)_p$. Znajdź f_*v .
- c. $M = \mathbb{R}^4$ ze współrzędnymi oznaczanymi (x_1, x_2, p_1, p_2) , $N = \mathbb{R}^4$ ze współrzędnymi oznaczanymi (y_1, y_2, q_1, q_2) . Dla ustalonych $m_1, m_2 > 0$ niech

$$f(x_1, x_2, p_1, p_2) = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, x_1 - x_2, p_1 + p_2, \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Dla $\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2$ znajdź $f^*\omega$.

d. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $N = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$,

$$f((\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta)) = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta)$$

$g_N = \iota^* g_{\mathbb{R}^4}$, gdzie $\iota : N \rightarrow \mathbb{R}^4$ jest zanurzeniem. Znajdź f^*g_N .

8. Znajdź metrykę i formę objętości na $M \subset \mathbb{R}^n$ otrzymaną ze standardowej metryki i formy objętości na $\mathbb{R}^n$. Zapisz je w wybranych przez siebie współrzędnych.

a. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2, 0 < r < R\}$

b. $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xyzt = 1, x, y, z, t > 0\}$

c. $M = \{(x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, \varphi \in]0, 2\pi[\}$, gdzie f jest pewną gładką funkcją $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

9. Znajdź wzory na gradient, rotację, dywergencję i laplasjan.

a. Na $M = \mathbb{R}^3$ we współrzędnych (u, v, φ) związanych ze współrzędnymi kartezjańskimi wzorami $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \sin \varphi$, $z = uv$.

b. Na rozmaitości M z zadania 8.b.

c. Na rozmaitości M ze współrzędnymi (r, θ, φ) w których $g_M = dr^2 + f(r)^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, gdzie f jest pewną gładką funkcją $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.