

Dodatkowe zadania 2

1. Znajdź długość krzywej ($\int_K ds = \int_K \text{vol}_K$) dla
- $K = \{(3 \cos t - \cos(3t), 3 \sin t - \sin(3t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi]\}$. (Odpowiedź: 24)
 - krzywej K powstałej z przecięcia w $\mathbb{R}^3$ powierzchni o równaniu $3x^2 + y^2 - z^2 = 1$ płaszczyzną o równaniu $x = z$. (Odpowiedź: 2π)

2. Znajdź wartość całki z podanego pola wektorowego/podanej formy po podanej krzywej. ($\int_K \vec{V} \cdot d\vec{r}$, $\int_K \omega$)
- $\vec{V} = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}$, K jest brzegiem prostokąta $[-2, 2] \times [-1, 1]$. (Odpowiedź: 16)
 - $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(-1, 1)$, $(2, -1)$ i $(-1, 2)$. (Odpowiedź: 2π)
 - $\vec{V} = r \frac{\partial}{\partial r}$ (we współrzędnych sferycznych na $\mathbb{R}^3$), $K = \{(\cos t, \cos^2 t, \cos^3 t) \in \mathbb{R}^3, t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. (Odpowiedź: $-\frac{3}{2}$)

3. Znajdź pole powierzchni ($\int_\Sigma dS = \int_\Sigma \text{vol}_\Sigma$) dla
- $\Sigma = \{(\sqrt{1+u^2} \cos \varphi, \sqrt{1+u^2} \sin \varphi, u) : u \in [-1, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^3$. (Odpowiedź: $2\pi(\sqrt{3} + \frac{\text{arsinh } \sqrt{2}}{\sqrt{2}})$)
 - Σ będącego obszarem ograniczonym krzywą z zadania 1.a. (Odpowiedź: 12π)
 - Σ będącej powierzchnią powstałą z obrotu krzywej z zadania 1.a. wokół osi X . (Odpowiedź: $18\pi^2$)
 - Σ będącej powierzchnią powstałą z obrotu krzywej z zadania 1.a. wokół osi Y . (Odpowiedź: 48π)
 - Σ będącej fragmentem powierzchni stożkowej o równaniu $(x - R)^2 + y^2 = z^2$ leżącym wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. (Odpowiedź: $\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$).

4. Znajdź całkę z podanej formy/strumień podanego pola przez podaną powierzchnię. ($\int_\sigma \vec{V} \cdot d\vec{S}$, $\int_\Sigma \omega$)
- $V = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z})$, $\Sigma = \{(\cos \varphi, \sin \varphi, z) : \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]\} \subset \mathbb{R}^3$. (Odpowiedź: π^2)
 - $\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, Σ jest sferą o środku w punkcie $(1, 0, 0)$ i promieniu 2 (Odpowiedź: $\frac{64}{3}\pi$).

5. Znajdź objętość bryły
- powstałej z obrotu krzywej z zadania 1.a. wokół osi X . (Odpowiedź: $\frac{512}{45}$)
 - powstałej z obrotu krzywej z zadania 1.a. wokół osi Y . (Odpowiedź: $\frac{352}{45}$)

6. Znajdź, jeśli istnieje, funkcję rzeczywistą $v(x, y)$ taką by podane funkcje były różniczkowalne w sensie zespolonym.
- $f(x + iy) = \arctg \frac{y}{x} + iv(x, y)$. (Odpowiedź: $v = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C$)
 - $f(x + iy) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} + iv(x, y)$. (Odpowiedź: $v = \frac{x^2 - y^2}{2(x^2 + y^2)^2} + C$)
 - $f(x + iy) = x \cos y - y \sin y + iv(x, y)$. (Odpowiedź: takie v nie istnieje)
 - $f(x + iy) = e^x(x \cos y - y \sin y) + iv(x, y)$. (Odpowiedź: $v = e^x(x \sin y +$

$$y \cos y) + C)$$

7. Znajdź linie nieciągłości i granice funkcji po obu stronach linii nieciągłości dla funkcji:

a. $f(z) = (\ln z)^{\frac{1}{2}}$

b. $f(z) = (z^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$

c. $f(z) = \ln(z^3 - 1)$

8. Wyznacz wartości całek $\int_K f(z)dz$ dla

a. $f(z) = z^n (z^*)^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, K ma parametryzację $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (Odpowiedź: $2\pi i$ gdy $m = n + 1$, 0 w przeciwnym przypadku).

b. $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$, K jest łamaną łączącą kolejno punkty i , $-1 + i$, $-1 - i$, $-i$. (Odpowiedź: $\frac{2}{3}\sqrt{2}$).

c. $f(z) = \frac{\ln z}{z}$, K jest złożona z odcinka $[-b, -a] \subset \mathbb{R}$, półokręgu od punktu $-a$ do a okrążającego punkt 0 od góry, oraz odcinka $[a, b]$. $0 < a < b$. (Odpowiedź: $\frac{\pi^2}{2} - i\pi \ln b$)

9. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego Goursata i całkując funkcję $f(z) = \frac{1}{az+i}$, $a > 0$ po krzywej będącej brzegiem półkola $|z| < 1$, $\text{Im}(z) > 0$ wyznacz wartość całki

$$\int_0^\pi \frac{a + \sin t}{(a + \sin t)^2 + \cos^2 t} dt$$

(Odpowiedź: $\frac{2}{a} \arctg a$)