

10.1. Wyznacz wartości całek

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + x + 1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^3 - 1} dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{(x+1)^3}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}, \quad \alpha > 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x) dx}{1+x^3}$$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{-a} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{4-x^2}$$

10.2. Zapisz poniższe funkcje w postaci szeregu Fouriera (zarówno w postaci wykładniczej, jak i trygonometrycznej):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } -\pi < x < 0 \end{cases}, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

$$f(x) = x \text{ dla } -\pi < x < \pi, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

$$f(x) = x \text{ dla } 0 < x < 2\pi, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

$$f(x) = |x| \text{ dla } -\pi < x < \pi, \quad \text{okresowa z okresem } 2\pi$$

10.3. Znajdź, wartości jakich szeregów liczbowych można znaleźć z wartości szeregów z poprzedniego zadania np. w $x = \frac{\pi}{2}$, a także ze wzoru Parsevala.

10.4. Znajdź transformaty Fouriera funkcji

$$f(x) = N \exp\left(\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad N, x_0, \sigma \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |x| < a \\ \frac{1}{2} & \text{dla } |x| = a \\ 0 & \text{dla } |x| > a \end{cases}, \quad a > 0$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2$$

$$f(x) = \frac{a}{1 + a^2 x^2}, \quad a > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)}$$

10.5. (Ciekawostka, jeśli starczy czasu - Borwein integrals.) Używając transformaty Fouriera iloczynu funkcji, pokaż, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \frac{\sin(x/5)}{x/5} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/13)}{x/13} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin(x/3)}{x/3} \dots \frac{\sin(x/15)}{x/15} < \pi$$