

7.1 Sprawdź, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zespolonym. Jeśli tak, zapisać je explicité jako funkcje zmiennej zespolonej.

- a. $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
- b. $f(x, y) = (x^2 + y^2) - i2xy$
- c. $f(x, y) = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x)$
- d. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 - i2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
- e. $f(x, y) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

7.2 Sprawdź, czy podane funkcje mogą być częścią rzeczywistą jakiejś funkcji holomorficznej (z warunku $\Delta u = 0$). Jeśli tak, znajdź tę funkcję holomorficzną.

- a. $u(x, y) = x - y$
- b. $u(x, y) = xy + x$
- c. $u(x, y) = \sin x - \sin y$
- d. $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$

7.3 Zakładając, że funkcje $\ln z$ i z^a są zdefiniowane tak, że są nieciągłe na dodatniej półosi rzeczywistej, znajdź zbiór punktów nieciągłości podanych funkcji i wyznacz granice funkcji po obu stronach tych nieciągłości.

- a. $f(z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$
- b. $f(z) = z^{\frac{1}{3}}(z - 1)^{\frac{2}{3}}$
- c. $f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

7.4 Policz z definicji całkę krzywoliniową $\int_K f(z)dz$, gdzie

- a. $f(z) = z^3$, krzywa K ma parametryzację $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$
- b. $f(z) = z^2$, krzywa K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach 0, 1 oraz $1 + i$
- c. $f(z) = \frac{1}{z}$, krzywa K jest złożona z półprostej $(-\infty, -a) \times \{0\}$, półokręgu od punktu $(-a, 0)$ do punktu $(a, 0)$ okrążającego punkt $(0, 0)$ od góry, oraz półprostej $(a, \infty) \times \{0\}$.