

W poniższych zadaniach należy wykazać znikanie niektórych części całek w odpowiednich granicach.

8.1. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego-Goursata ($\oint_K f(z)dz = 0$ dla funkcji holomorficznej na obszarze ograniczonym krzywą K) znaleźć wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

przez całkowanie funkcji e^{iz}/z po półkolu obejmującym górną półpłaszczyznę omijając półokręgiem punkt $z = 0$.

8.2. Całkując funkcję e^{-az^2} po prostokącie o wierzchołkach $-R, R, R + i\frac{b}{2a}, -R + i\frac{b}{2a}$ znaleźć wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx$$

8.3. Całkując funkcję e^{-z^2} po konturze złożonej z odcinka od punktu $z = 0$ do $z = R$, następnie łuku $z(t) = Re^{it}$ do punktu $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}R$, a następnie odcinka z powrotem do $z = 0$, znaleźć wartości całek

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

8.4. Zidentyfikować punkty osobliwe podanych funkcji i określić czy są to punkty osobliwe izolowane/nieizolowane, punkty rozgałęzienia, bieguny; dla biegunów znaleźć ich rząd.

$$\frac{1}{(z^3-1)^3}, \frac{1}{(z-1)^3(z^2-1)^2}, \tan(\pi z), \frac{\sqrt{z}}{z+1}, \arcsin z, \arctan z, \frac{1}{1-e^z}, \frac{1}{1+e^z}$$

8.5. Rozwinąć podaną funkcję w szereg Taylora wokół podanego punktu, znaleźć obszar zbieżności tego szeregu.

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = 2 + i$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2}, \quad z_0 = 1 - i$$

$$f(z) = \log z, \quad z_0 = 1 - i$$

$$f(z) = \sqrt{z+1}, \quad z_0 = i$$