

1.1. Rozważmy okrąg jednostkowy $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, zbiory

$$U = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) : \alpha \in]0, 2\pi[\}, \quad V = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) : \alpha \in]-\pi, \pi[\}$$

oraz odwzorowania

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow]0, 2\pi[, & \phi(\cos \alpha, \sin \alpha) &= \alpha \\ \psi : V &\rightarrow]-\pi, \pi[, & \psi(\cos \alpha, \sin \alpha) &= \alpha \end{aligned}$$

Udowodnij, że $\{\phi, \psi\}$ jest atlasem na $\mathbb{S}^1$.

1.2. Niech

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\}, & \phi_1 : U_1 &\rightarrow]-1, 1[, & \phi_1(x, y) &= y \\ U_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\}, & \phi_2 : U_2 &\rightarrow]-1, 1[, & \phi_2(x, y) &= x \\ U_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x < 0\}, & \phi_3 : U_3 &\rightarrow]-1, 1[, & \phi_3(x, y) &= y \\ U_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\}, & \phi_4 : U_4 &\rightarrow]-1, 1[, & \phi_4(x, y) &= x \end{aligned}$$

Udowodnij, że $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$ jest atlasem na $\mathbb{S}^1$, równoważnym atlasowi z poprzedniego zadania.

1.3. Rozważmy przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \sim$, gdzie

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{x} = \lambda \vec{y}$$

Alternatywnie, można $\mathbb{RP}^2$ zdefiniować jako $\mathbb{S}^2 / \sim$, gdzie

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{x} = \pm \vec{y}$$

Niech

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[(x_1, x_2, x_3)]_{\sim} \in \mathbb{RP}^2 : x_1 \neq 0\}, & \phi_1([(x_1, x_2, x_3)]_{\sim}) &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right) \\ U_2 &= \{[(x_1, x_2, x_3)]_{\sim} \in \mathbb{RP}^2 : x_2 \neq 0\}, & \phi_2([(x_1, x_2, x_3)]_{\sim}) &= \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right) \\ U_3 &= \{[(x_1, x_2, x_3)]_{\sim} \in \mathbb{RP}^2 : x_3 \neq 0\}, & \phi_3([(x_1, x_2, x_3)]_{\sim}) &= \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \end{aligned}$$

Udowodnij, że $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ jest atlasem na $\mathbb{RP}^2$.

1.4. Rozważmy na sferze $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ współrzędne (x, y) (zdefiniowane np. na obszarze $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$) oraz współrzędne sferyczne (θ, φ) (zdefiniowane na obszarze $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : x \leq 0 \wedge y = 0\}$). Wyrazić wektory $\frac{\partial}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}$ w bazie wektorów $\frac{\partial}{\partial \theta}$ i $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Dla zanurzenia $\iota : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ znaleźć $\iota_* \frac{\partial}{\partial x}$, $\iota_* \frac{\partial}{\partial y}$, $\iota_* \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\iota_* \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

1.5. Niech $\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie rzutem stereograficznym sfery (z wyjątkiem punktu $(0, 0, -1)$). Zapisać $\phi_* \frac{\partial}{\partial \theta}$ oraz $\phi_* \frac{\partial}{\partial \varphi}$ w bazie wektorów $\frac{\partial}{\partial x}$ i $\frac{\partial}{\partial y}$.

2.1 Wyrazić formy dx , dy , dz , metrykę euklidesową $g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$ oraz formę objętości $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ we współrzędnych sferycznych na $\mathbb{R}^3$.

2.2 Niech $M = \{(\sinh \theta \cos \phi, \sinh \theta \sin \phi, \cosh \theta) : \theta \in \mathbb{R}, \phi \in]0, 2\pi[\}$, ι jest zanurzeniem M w $\mathbb{R}^3$. Dla metryki euklidesowej g na $\mathbb{R}^3$. Znaleźć ι^*g i wyrazić ją we współrzędnych ρ , ϕ na M .

2.3 jak w poprzednim zadaniu, ale znaleźć $\iota^*\eta$ dla $\eta = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$.

2.4 Niech na $\mathbb{R}^3$: $\omega_1 = ydz - zdy$, $\omega_2 = zdx - xdz$, $\omega_3 = xdy - ydx$. Znaleźć $\omega_1 \wedge \omega_2$, $\omega_2 \wedge \omega_3$, $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge dz$, $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$, $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$.

2.5 Niech na $\mathbb{R}^3$: $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$. Dla dowolnego wektora $v = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ znaleźć $v \lrcorner \text{vol}$.

2.6 Niech g i vol będą metryką euklidesową i standardową formą objętości na $\mathbb{R}^3$. Dla dowolnych wektorów $A = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$ oraz $B = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}$ Niech α i β będą jednoformami, takimi, że dla dowolnego wektora v :

$$v \lrcorner \alpha = g(v, A), \quad v \lrcorner \beta = g(v, B)$$

Niech C będzie wektorem takim, że

$$C \lrcorner \text{vol} = \alpha \wedge \beta$$

Znaleźć wzory na α , β , $\alpha \wedge \beta$ oraz C , i pokazać, że $C = A \times B$ (iloczyn wektorowy).

2.7. Jak w poprzednim zadaniu, ale wykonać obliczenia używając współrzędnych sferycznych, używając wyników zadania 2.1.

3.1. Obliczyć $d\omega$, dla **a.** $\omega = xyz(dx + dy)$, **b.** $\omega = xy^2dx + x^2ydy$, **c.** $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, **d.** $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Dla tych ω , dla których $d\omega = 0$ znaleźć funkcję f (zdefiniowaną przynajmniej lokalnie) taką, by $\omega = df$.

3.2. Rozważmy dwuformę w $\mathbb{R}^4$: $F = E_x dt \wedge dx + E_y dt \wedge dy + E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$, gdzie E_i i B_i są pewnymi funkcjami współrzędnych (x, y, z, t) . Zapisać równanie $dF = 0$ w terminach pól wektorowych $\vec{E}$ i $\vec{B}$ (rozumianych jako zależne od czasu pola wektorowe na $\mathbb{R}^3$).

3.3. Rozważmy rozmaitość 3-wymiarową z metryką $g = g_{ab} du^a du^b$ oraz formą objętości $\text{vol} = \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$. Używając definicji:
Gradient funkcji f to takie pole wektorowe $A = \nabla f$, że $A \lrcorner g = df$
Rotacja pola wektorowego A to takie pole wektorowe $B = \nabla \times A$, że $B \lrcorner \text{vol} = d(A \lrcorner g)$
Dywergencja pola wektorowego A to taka funkcja $f = \nabla \cdot A$, że $f \text{vol} = d(A \lrcorner \text{vol})$
Wyprowadzić wzory na gradient, rotację i dywergencję na $\mathbb{R}^3$ w układzie kartezjańskim i sferycznym.

3.4. Rozważmy sferę 3-wymiarową $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ z metryką i formą objętości odziedziczoną z $\mathbb{R}^4$, tzn.

$$g_{S^3} = \iota^* g_{\mathbb{R}^4}, \quad \text{vol}_{S^3} = \iota^* (N \lrcorner \text{vol}_{\mathbb{R}^4})$$

gdzie ι jest zanurzeniem sfery w $\mathbb{R}^4$ a $N = \sum_{i=1}^4 x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ jest polem jednostkowych wektorów prostopadłych do sfery.

Pokazać, w wybranym układzie współrzędnych, że $\text{vol}_{S^3} = \sqrt{\det g_{S^3}} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$ (z dokładnością do znaku), oraz wyprowadzić wzory na gradient, rotację i dywergencję w tych współrzędnych.

3.5. Niech (r, θ, φ) będzie sferycznym układem współrzędnych na $\mathbb{R}^3$. Niech $f \in C^\infty([0, \infty[)$. Znaleźć wszystkie możliwe pola wektorowe postaci $A(r, \theta, \varphi) = A^r(r) \frac{\partial}{\partial r}$ takie, że $\nabla \cdot A = f(r)$.

3.5 Niech (ρ, φ, z) będzie cylindrycznym układem współrzędnych na $\mathbb{R}^3$. Niech j będzie polem wektorowym postaci $j(\rho, \varphi, z) = j^z(\rho) \frac{\partial}{\partial z}$. Znaleźć wszystkie możliwe pola wektorowe postaci $B(\rho, \varphi, z) = B_\varphi(\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi}$ takie, że $\nabla \times B = j$.

4.1 Rozważmy funkcję $f(\theta, \varphi) = P(\cos \theta)e^{ik\varphi}$ na sferze $\mathbb{S}^2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ a P jest pewną funkcją. Pokaż, że $\Delta f = Q(\cos \theta)e^{ik\varphi}$, gdzie Q jest jakąś funkcją. Znajdź związek pomiędzy Q oraz P .

4.2 Niech f będzie funkcją na $\mathbb{R}^3$, która we współrzędnych sferycznych ma postać $f(r, \theta, \varphi) = u(r) \sin \theta e^{i\varphi}$. Pokaż, że istnieje taka funkcja $u(r)$, że funkcja f spełnia równanie $\Delta f = 0$. Znaleźć równanie różniczkowe spełnianie przez funkcję $u(r)$.

4.3 Oblicz całkę $\int_M \omega$, gdzie

- a. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest półokręgiem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ (wybrać jedną z orientacji)
- b. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest półokręgiem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0\}$ (wybrać jedną z orientacji)
- c. $\omega = (x - y)dx + xdy$, M jest okręgiem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (wybrać jedną z orientacji)
- d. $\omega = d((x - y)dx + xdy)$, M jest kołem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (orientacja zgodna z orientacją $\mathbb{R}^2$)
- e. $\omega = \text{vol}_{\mathbb{S}^2} = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$, M jest sferą $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (orientacja indukowana z orientacji $\mathbb{R}^3$ przez kierunek na zewnątrz)
- f. $\omega = \sin^n \theta \cos^m \theta e^{ik\varphi} d\theta \wedge d\varphi$, $n, m, k \in \mathbb{N}$, M jest sferą $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (orientacja indukowana z orientacji $\mathbb{R}^3$ przez kierunek na zewnątrz)
- g. $\omega = ydx$, M jest łukiem cykloidy wyznaczonej przez okrąg o promieniu R tocący się po osi X
- h. $\omega = \text{vol}_M$, M jest łukiem cykloidy wyznaczonej przez okrąg o promieniu R tocący się po osi X , vol_M jest formą objętości indukowaną na cykloidzie z $\mathbb{R}^2$ (czyli w wybranej parametryzacji $\text{vol}_M = \sqrt{\det g} dt = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$).

4.4 Znajdź długość $L = \int_M \text{vol}_M$ spirali logarytmicznej o parametryzacji $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ dla $t \in [-\infty, 0]$. (Wybrać orientację taką, by $L > 0$).

4.5 Znajdź masę $m = \int_M \rho \text{vol}_M$ i energię potencjalną $E = \int_M \rho \phi \text{vol}_M$ jednorodnego ($\rho = \text{const.}$) sznura wiszącego w polu grawitacyjnym o potencjale $\phi(\vec{r}) = gy$ w kształcie krzywej o równaniu $y = a \cosh \frac{x}{a}$, $x \in [-a, a]$. (Wybrać orientację taką, by $m > 0$).

4.6. Znajdź pole $S = \int_M \text{vol}_M$ powierzchni $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}$.

4.7. Znajdź pole powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^3$, wyciętej walcem o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ z paraboloidy o równaniu $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$. $a, b, c > 0$.

Zad. 5.1. Znaleźć pole powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^3$, wyciętej powierzchnią walcową o równaniu $(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2$ ze sfery o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Zad. 5.2. Znaleźć pole powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^3$, wyciętej sferą o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z powierzchni walcowej o równaniu $(x - \frac{1}{2}R)^2 + y^2 = \frac{1}{4}R^2$.

Zad. 5.3. Znaleźć pole elektryczne wytworzone w punkcie $(0, 0, 0)$ przez półsfere daną warunkami $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \leq 0$, naładowaną jednorodnie ładunkiem elektrycznym ze stałą gęstością powierzchniową σ .

Zad. 5.4. Znaleźć pole wycinka płaszczyzny ograniczonej kardoidą o parametryzacji $(x, y) = (2R \cos t - R \cos(2t), 2R \sin t - R \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Zad. 5.4. Znaleźć pole wycinka płaszczyzny ograniczonej krzywą o parametryzacji $(x, y) = (a \sin t, a \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Zad. 5.6. Znaleźć pole tzw. liścia kartezjusza, czyli obszaru płaszczyzny ograniczonego krzywą o równaniem $x^3 + y^3 = 3axy$. (Wskazówka: tą krzywą można sparametryzować parametrem $t = \frac{y}{x}$).