

Zad.1. Dla podanego odwzorowania $\Phi : M \rightarrow N$ i wektora $v \in T_p M$ znaleźć transport $\Phi_* v$

a. $M = N = \mathbb{R}^2$, Φ jest obrotem płaszczyzny wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt $\alpha \in \mathbb{R}$, $p = (x_0, y_0)$, $v = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$

b. $M = N = \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, $p = (x_0, y_0)$, $v = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)_p$

c. $M = \{(\cos \varphi, \sin \varphi, z) : \varphi, z \in \mathbb{R}\}$, $N = \mathbb{S}^2$, $\Phi(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$p = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, z_0)$, $v = \left(\cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial z}\right)_p$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zad.2. Dla podanego odwzorowania $\Phi : M \rightarrow N$ i formy $\omega \in \Lambda^k N$ znaleźć transport $\Phi^* \omega$

a. $M = N = \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u(x, y), v(x, y))$, $\omega = u dv - v du$

b. $M = T^* \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}\}$, $N = T^* \mathbb{R}^2 = \{(y_1, y_2, q_1, q_2) \in \mathbb{R}\}$, $\Phi(x_1, x_2, p_1, p_2) = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, x_1 - x_2, p_1 + p_2, \frac{m_2 p_1 - m_1 p_2}{m_1 + m_2}\right)$ gdzie $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\omega = dy_1 \wedge dq_1 + dy_2 \wedge dq_2$

c. $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $N = \mathbb{S}^3 = \{(\sin \tau \sin \theta \cos \varphi, \sin \tau \sin \theta \sin \varphi, \sin \tau \cos \theta, \cos \tau) : \tau, \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$, $\Phi((\cos \alpha, \sin \alpha), (\cos \beta, \sin \beta)) = (\cos \alpha \cos \beta, \cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta)$, $\omega = \text{vol}_{\mathbb{S}^3} = \sin^2 \tau \sin \theta d\tau \wedge d\theta \wedge d\varphi$

Zad.3. Znaleźć metrykę i formę objętości na rozmaitości $M \subset \mathbb{R}^n$ indukowane ze standardowej metryki i objętości na $\mathbb{R}^n$.

a. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}$, $0 < r < R$

b. $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xyz t = 1, x, y, z, t > 0\}$

c. $M = \{(x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi) : x, \varphi \in \mathbb{R}\}$ dla pewnej danej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$

Zad.4. Znaleźć wzory na gradient, dywergencję, rotację i laplasjan w podanych układach współrzędnych:

a. $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv \cos \varphi$, $z = uv \sin \varphi$

b. $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \cos \varphi$, $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \sin \varphi$, $z = uv$

c. $x = \cosh \alpha \cos \beta$, $y = \sinh \alpha \sin \beta$, $z = z$

Zad.5. Znaleźć długość krzywej:

a. $K = \{(2 \cos t - \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin 2t) : t \in [0, 2\pi]\}$

b. $K = \{(\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$, ρ jest pewną funkcją o warunkach dodatnich

c. powstałej z przecięcia powierzchni $3x^2 + y^2 - z^2 = 1$ płaszczyzną $x = z$.

Zad.6. Znaleźć pole powierzchni

a. $K = \{(\sqrt{1+u^2} \cos \varphi, \sqrt{1+u^2} \sin \varphi, u), u \in [-1, 1], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ b. powstałej z obrotu wykresu funkcji $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, wokół osi X

c. wyciętej z paraboloidy obrotowej o równaniu $z = x^2 + y^2$ powierzchnią walcową $x^2 + y^2 = 1$

Zad.7. Znaleźć całkę z danej formy/pola wektorowego po krzywej

- a. $\vec{V} = (x^3 - z^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 + y^3) \frac{\partial}{\partial y} + xz^2 \frac{\partial}{\partial z}$, $K = \{(\cos t, \sin t, \cos t) : t \in [0, 2\pi]\}$
b. $\omega = \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $K = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in [0, 2\pi]\}$
c. $\vec{V} = r \frac{\partial}{\partial r}$ (we współrzędnych sferycznych), $K = \{(\cos t, \cos^2 t, \cos^3 t) \in \mathbb{R}^3 : t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

Zad.8. Znaleźć całkę z danej formy po powierzchni/strumień danego pol wektorowego przez powierzchnię a. $\vec{V} = (x^3 - z^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 + y^3) \frac{\partial}{\partial y} + xz^2 \frac{\partial}{\partial z}$, $D = \{(u \cos t, u \sin t, u \cos t) : t \in [0, 2\pi], u \in [0, 1]\}$
b. $\omega = \frac{x dx + y dy + z dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $D = \{(\cos t, \sin t, u) : t \in [0, 2\pi], u \in [-1, 1]\}$
c. $\vec{V} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial z}$, D jest powierzchnią sfery o środku w punkcie $(1, 0, 0)$ i promieniu 2.