

1 Wielomiany Hermite'a

Równanie

$$h''(x) - 2xh'(x) + 2\lambda h(x) = 0 \quad (1)$$

nazywamy *równaniem Hermite'a*.

Zadanie 1. Niech

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty \right\} \quad (2)$$

Udowodnij, że operator $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$:

$$(Lh)(x) = h''(x) - 2xh'(x) \quad (3)$$

jest hermitowski względem iloczynu skalarnego

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) e^{-x^2} dx, \quad (4)$$

czyli, że

$$\forall f, g \in \mathcal{H} \quad \langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle. \quad (5)$$

Z tej hermitowskości wynika, że rozwiązania równań Hermite'a o różnych wartościach λ są do siebie ortogonalne względem podanego iloczynu skalarnego (o ile leżą w przestrzeni $\mathcal{H}$).

Zadanie 2. Udowodnij, że równanie Hermite'a posiada rozwiązanie wielomianowe (czyli w postaci skończonego szeregu potęgowego z wykładnikami będącymi liczbami naturalnymi) wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Udowodnij, że tymi wielomianami są (z dokładnością do stałej proporcjonalności)

$$h_{2n}(x) = C \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(\frac{1}{2})_k} \frac{x^{2k}}{k!} \quad \text{dla } \lambda = 2n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6)$$

$$h_{2n+1}(x) = C \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k}{(\frac{3}{2})_k} \frac{x^{2k+1}}{k!} \quad \text{dla } \lambda = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N} \quad (7)$$

gdzie $(a)_k$ jest tzw symbolem Pochhammera:

$$(a)_k = \begin{cases} a(a+1)(a+2) \dots (a+k-1) & \text{dla } k \in \mathbb{N}_+ \\ 1 & \text{dla } k = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Zadanie 4. Niech

$$e^{2xt-t^2} =: \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (9)$$

Udowodnij, że funkcje $H_n(x)$ są wielomianami stopnia n , i spełniają równanie Hermite'a dla $\lambda = n$.

Wskazówka: Znajdź, jakie operacje należy wykonać na funkcji e^{2xt-t^2} , aby otrzymać szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} (H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x)) \frac{t^n}{n!}$.

Wielomiany $H_n(x)$ nazywamy wielomianami Hermite'a.

Zadanie 5. Znajdź stałe C których należy użyć we wzorach z zadania 3. by otrzymać wielomiany Hermite'a.

Wskazówka: Rozważ $e^{2xt-t^2}|_{x=0}$ oraz $(\frac{\partial}{\partial x} e^{2xt-t^2})|_{x=0}$.

Odpowiedź: $C_{2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$, $C_{2n+1} = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!}$.

Zadanie 6. Znajdź współczynnik wielomianu Hermite'a $H_n(x)$ w wyrazie proporcjonalnym do x^n .

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru (9) i znajdź współczynnik stojący przy $x^n t^n$. Alternatywnie skorzystaj ze wzorów z zadania 3. i wyników zadania 5.

Odpowiedź: 2^n .

Zadanie 7. Udowodnij, że

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (10)$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru (9).

Zadanie 8. Udowodnij, że

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (11)$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru (9) zapisując $e^{2xt-t^2} = e^{x^2-(x-t)^2}$ i korzystając ze wzoru na współczynniki szeregu Taylora.

Zadanie 9. (wzór Rodrigues'a) Udowodnij, że

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right)^n 1 \quad (12)$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru (11) zapisując $e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \cdot e^{-x^2} = (e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx} \cdot e^{-x^2})^n$.

Ze wzoru Rodrigues'a wynika natychmiast, że

$$H_{n+1}(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_n(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) \quad (13)$$

czyli (wykorzystując wynik zadania 7.):

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (14)$$

Zadanie 10. Udowodnij, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_n(x))^2 e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (16)$$

Wskazówka: Rozpisz jeden z wielomianów używając wzoru Rodrigues'a i wykonaj całkowanie przez części. Zauważ, że $(2x + \frac{d}{dx}) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot \frac{d}{dx}$. Skorzystaj z wyniku zadania 6. lub z wyniku zadania 7.

Zadanie 11. Udowodnij, że

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2y)^{n-k} H_k(x) \quad (17)$$

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru (11).

Zadanie 12. Znajdź transformatę Fouriera funkcji $u_n(x) = H_n(x) e^{-x^2}$, czyli policz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) e^{-x^2 - ikx} dx \quad (18)$$

Wskazówka: Przesuń zmienną całkowania i skorzystaj ze wzoru z zadania 11.

Odpowiedź: $\sqrt{\pi} (-ik)^n e^{-\frac{k^2}{4}}$

Zadanie 13. Udowodnij, że

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^n e^{-y^2} dy \quad (19)$$

Wskazówka: Użyj wzoru na odwrotną transformatę Fouriera funkcji z poprzedniego zadania. (Istnieją też inne sposoby.)

Zadanie 14. Udowodnij, że funkcje

$$u_n(x, t) = H_n(x) \exp \left(-\frac{x^2}{2} - i(n + \frac{1}{2})t \right) \quad (20)$$

są rozwiązaniami równania

$$2i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 u = 0 \quad (21)$$

z warunkiem początkowym

$$u(x, t=0) = H_n(x) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right). \quad (22)$$

Zadanie 15. Udowodnij, że rozwiązaniem równania (21) z ogólnym warunkiem początkowym

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \quad (23)$$

jest

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; t) u_0(y) dy \quad (24)$$

gdzie

$$G(x, y; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y) e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}. \quad (25)$$

Zadanie 16.* Znajdź rozwiązanie równania (21) z warunkiem początkowym

$$u(x, t = 0) = \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2}\right) \quad (26)$$

dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź: $u(x, t) = \exp\left(-\frac{(x-a \cos t)^2}{2} - i(xa \sin t + \frac{1}{4}a^2 \sin(2t) + \frac{1}{2}t)\right)$