

# 1 Metoda Frobeniusa

Przypomnienie: symbol Pochhammera  $(a)_k$ :

$$(a)_k = \begin{cases} a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1) & \text{dla } k \in \mathbb{N}_+ \\ 1 & \text{dla } k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

**Zadanie 1.** Znajdź rozwiązania równania

$$u''(x) + \frac{1}{2x}u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = 0 \quad (2)$$

w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . (Wyznacz możliwe wartości  $\lambda$ , znajdź rekurencję na współczynniki  $a_n$ , i rozwiąż tą rekurencję.)

*Odpowiedź: Z dokładnością do stałej:*

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\frac{1}{2})_n n!}, \quad u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{(\frac{3}{2})_n n!}$$

**Zadanie 2.** Znajdź rozwiązania równania

$$u''(x) + \frac{1}{2x}u'(x) - u(x) = 0 \quad (3)$$

w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . (Wyznacz możliwe wartości  $\lambda$ , znajdź rekurencję na współczynniki  $a_n$ , i rozwiąż tą rekurencję.)

*Odpowiedź: Z dokładnością do stałej:*

$$u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m}(\frac{3}{4})_m m!}, \quad u_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2^{2m}(\frac{5}{4})_m m!}$$

**Zadanie 3.** Znajdź rozwiązania równania

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = 0 \quad (4)$$

w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . (Wyznacz możliwe wartości  $\lambda$ , znajdź rekurencję na współczynniki  $a_n$ , i rozwiąż tą rekurencję.)

*Odpowiedź: Z dokładnością do stałej, jest tylko jedno rozwiązanie w postaci szeregu*

$$u_1(x) = C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

**Zadanie 4.** Znajdź rozwiązanie równania z poprzedniego zadania w postaci

$$u(x) = \ln x \cdot u_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (5)$$

gdzie

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \quad (6)$$

jest rozwiązaniem tego równania znalezionym w poprzednim zadaniu. Wystarczy znaleźć rekurencję na współczynniki  $a_n$ .

*Odpowiedź:*

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2} + \frac{2}{n \cdot (n!)^2} \quad \text{dla } n \geq 1$$

wystarczy; ale jakby komuś się chciało znaleźć rozwiązanie rekurencji, jest to

$$a_n = \frac{a_0}{(n!)^2} + \frac{2}{(n!)^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

**Zadanie 5.** Udowodnij, że równanie

$$u''(x) - \frac{1}{x}u'(x) - \frac{1}{x}u(x) = 0 \quad (7)$$

ma tylko jedno liniowo niezależne rozwiązanie w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$  i znajdź je. Jakiej postaci jest drugie, liniowo niezależne rozwiązanie?

*Odpowiedź: To jedno rozwiązanie w postaci szeregu jest równe (z dokładnością do stałej)*

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!n!}$$

Nie ma rozwiązania zaczynającego się od  $x^0$ , jak mogłoby się wydawać, bo rekurencja prowadzi co sprzeczności. Drugiego rozwiązania należy szukać w postaci

$$u_2(x) = \ln x \cdot u_1(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

**Zadanie 6.** Znajdź rozwiązania równania

$$u''(x) - \frac{1}{x^2}u'(x) - \frac{3}{4x^2}u(x) = 0 \quad (8)$$

w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . (Wyznacz możliwe wartości  $\lambda$ , znajdź rekurencję na współczynniki  $a_n$ , i rozwiąż tą rekurencję.)

*Odpowiedź: Z dokładnością do stałej, jest tylko jedno rozwiązanie w postaci szeregu*

$$u_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_m (-\frac{5}{2})_m}{m!} x^m.$$

*Można zauważyć, że ten szereg ma zerowy promień zbieżności, jest więc wyłącznie szeregiem formalnym.*

**Zadanie 7.** Znajdź rozwiązania równania

$$u''(x) - \frac{1}{x^2}u'(x) - \frac{3}{x^3}u(x) = 0 \quad (9)$$

w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . (Wyznacz możliwe wartości  $\lambda$ , znajdź rekurencję na współczynniki  $a_n$ , i rozwiąż tą rekurencję.)

*Odpowiedź: Z dokładnością do stałej, jest tylko jedno rozwiązanie w postaci szeregu*

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)_n (-4)_n}{n!} x^{n-3} = x^{-3} + 12x^{-2} + 36x^{-1} + 24.$$

$(-3)^n = 0$  dla  $n \geq 4$ , więc ten szereg jest skończony, i jest to prawdziwa funkcja, nie tylko szereg formalny.

**Zadanie 8.** Uzasadnij, że równanie

$$u''(x) - \frac{1}{x^2} u'(x) - \frac{2}{x^4} u(x) = 0 \quad (10)$$

nie ma nietrywialnych (czyli innych niż  $u = 0$ ) rozwiązań w postaci szeregu  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ . Znajdź funkcje  $r(x)$  dla których podstawienie  $u(x) = e^{r(x)} v(x)$  sprowadza powyższe równanie do postaci posiadających rozwiązania w postaci szeregu, i w ten sposób znajdź rozwiązania tego równania.

*Odpowiedź:  $r(x) = x^{-1}$  prowadzi do równania*

$$v''(x) - \frac{3}{x^2} v'(x) + \frac{2}{x^3} v(x) = 0 \quad (11)$$

którego rozwiązaniem jest

$$v_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})_n (-\frac{1}{3})_n}{3^n n!} x^{n+\frac{2}{3}};$$

z kolei podstawienie  $r(x) = -2x^{-1}$  prowadzi do równania

$$v''(x) + \frac{3}{x^2} v'(x) - \frac{4}{x^3} v(x) = 0 \quad (12)$$

którego rozwiązaniem jest

$$v_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{4}{3})_n (\frac{1}{3})_n}{(-3)^n n!} x^{n+\frac{4}{3}}.$$

Ogólnym rozwiązaniem (formalnym) równania jest więc

$$u(x) = C_1 e^{\frac{1}{x}} v_1(x) + C_2 e^{-\frac{2}{x}} v_2(x).$$

**Zadanie 9.** Pokaż że podstawienie  $x = y^{-1}$ ,  $u(x) = v(y)$  przekształca równanie

$$u''(x) - \frac{1}{x^2} u'(x) - \frac{2}{x^4} u(x) = 0 \quad (13)$$

do postaci posiadającej jedno rozwiązanie w postaci szeregu  $v(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^{n+\lambda}$ ,  
i znajdź to rozwiązanie (wystarczy rekurencja na współczynniki).

*Odpowiedź: po przekształceniu równanie ma postać*

$$v''(y) + \left(1 + \frac{2}{y}\right)v'(y) - 2v(y) = 0$$

*i posiada rozwiązanie  $v_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  gdzie  $a_1 = 0$  oraz*

$$a_n = \frac{2a_{n-2} - (n-1)a_{n-1}}{n(n+1)} \quad \text{dla } n \geq 2.$$