

1 Metoda charakterystyk dla równań pierwszego stopnia

Zadanie 1. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2x}{1+t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = \cos x$.

Odpowiedź: $u(t, x) = \cos \frac{x}{(1+t)^2}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = xt \quad (2)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = x^2$.

Odpowiedź: $u(t, x) = x^2 e^{-2t} + x(e^{-t} - 1 + t)$.

Zadanie 3. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = 2x$.

Odpowiedź: $u(t, x) = \frac{2x}{1+2t}$.

Zadanie 4. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\cosh x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = e^x$.

Odpowiedź: $u(t, x) = \frac{\sinh x + \sqrt{\cosh^2 x + 2t}}{1+2t}$.

Zadanie 5. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 6t \quad (5)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = \frac{1}{2}x$.

Odpowiedź: $u(t, x) = \frac{x-t^3}{2+t} + 3t^2$.

Zadanie 6. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = 0$ dla $x < 0$, $u(t=0, x) = 1$ dla $x > 0$.

Odpowiedź: $u(t, x) = 0$ dla $x \leq 0$, $u(t, x) = \frac{x}{t}$ dla $0 \leq x \leq t$, $u(t, x) = 1$ dla

$x \geq t$.

Zadanie 7. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + 6t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

z warunkiem początkowym $u(t = 0, x) = 0$ dla $x < 0$, $u(t = 0, x) = 1$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 0$ dla $x \leq 3t^2$, $u(t, x) = \frac{x}{t} - 3t$ dla $3t^2 \leq x \leq t + 3t^2$,
 $u(t, x) = 1$ dla $x \geq t + 3t^2$.

Zadanie 7. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

z warunkiem początkowym $u(t = 0, x) = 0$ dla $x < 0$, $u(t = 0, x) = 1$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 0$ dla $x \leq 0$, $u(t, x) = \frac{x}{e^t - 1}$ dla $0 \leq x \leq e^t - 1$, $u(t, x) = 1$ dla $x \geq e^t - 1$.

Zadanie 8. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 6t \quad (9)$$

z warunkiem początkowym $u(t = 0, x) = 0$ dla $x < 0$, $u(t = 0, x) = 1$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 3t^2$ dla $x \leq t^3$, $u(t, x) = \frac{x}{t} + 2t^2$ dla $t^3 \leq x \leq t + t^3$,
 $u(t, x) = 1 + 3t^2$ dla $x \geq t$.

Zadanie 9. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + 6t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

z warunkiem początkowym $u(t = 0, x) = 1$ dla $x < 0$, $u(t = 0, x) = 0$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 1$ dla $x < \frac{1}{2}t + 3t^2$, $u(t, x) = 0$ dla $x > \frac{1}{2}t + 3t^2$.

Zadanie 10. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u + x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

z warunkiem początkowym $u(t = 0, x) = 1$ dla $x < 0$, $u(t = 0, x) = 0$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 1$ dla $x < \frac{1}{2}(e^t - 1)$, $u(t, x) = 0$ dla $x > \frac{1}{2}(e^t - 1)$.

Zadanie 11. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 6t \quad (12)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = 1$ dla $x < 0$, $u(t=0, x) = 0$ dla $x > 0$.
Odpowiedź: $u(t, x) = 1 + 3t^2$ dla $x < \frac{1}{2}t + t^3$, $u(t, x) = 3t^2$ dla $x > \frac{1}{2}t + t^3$.

Zadanie 12. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 6t \quad (13)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = \frac{1}{2}x$ dla $x \leq 0$, $u(t=0, x) = 0$ dla $x \geq 0$.

Odpowiedź: $u(t, x) = \frac{x-t^3}{2+t} + 3t^2$ dla $x \leq t^3$, $u(t, x) = 3t^2$ dla $x \geq t^3$.

Zadanie 13*. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = x \quad (14)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = 0$ dla $x < 0$, $u(t=0, x) = 1$ dla $x > 0$.

Odpowiedź: $u(t, x) = x \tanh t$ dla $x \leq 0$, $u(t, x) = x \coth t$ dla $0 \leq x \leq \sinh t$,
 $u(t, x) = \frac{1+x \sinh t}{\cosh t}$ dla $x \geq \sinh t$.

Zadanie 14. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = 0$ dla $x \leq -1$, $u(t=0, x) = 1$ dla $-1 < x < 1$, $u(t=0, x) = 0$ dla $x \geq 1$.

Odpowiedź:

Dla $t \leq 4$:

$u(t, x) = 0$ dla $x \leq -1$ oraz $x > 1 + \frac{1}{2}t$, $u(t, x) = \frac{x+1}{t}$ dla $-1 \leq x \leq -1+t$,
 $u(t, x) = 1$ dla $-1+t \leq x < 1 + \frac{1}{2}t$.

Dla $t \geq 4$:

$u(t, x) = 0$ dla $x \leq -1$ oraz dla $x > -1 + 2\sqrt{t}$, $u(t, x) = \frac{x+1}{t}$ dla $-1 \leq x < -1 + 2\sqrt{t}$

Zadanie 15. Rozwiąż równanie (w obszarze $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

z warunkiem początkowym $u(t=0, x) = x + 2$ dla $x \leq -1$, $u(t=0, x) = -x$ dla $-1 \leq x \leq 1$, $u(t=0, x) = -1$ dla $x \geq 1$.

Odpowiedź:

Dla $t \leq 1$:

$u(t, x) = \frac{x+2}{1+t}$ dla $x \leq -1+t$, $u(t, x) = \frac{-x}{1+t}$ dla $-1+t \leq x \leq 1-t$, $u(t, x) = 1$ dla $-1-t \leq x$.

Dla $t \geq 1$:

$u(t, x) = \frac{x+2}{1+t}$ dla $x < 3\sqrt{1+t} - 3 - t$, $u(t, x) = -1$ dla $3\sqrt{1+t} - 3 - t < x$