

1 Równania drugiego stopnia

Zadanie 1.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Odp.: } \alpha = y - \frac{1}{2}x^2, \beta = y + \frac{1}{2}x^2, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{4(\beta - \alpha)} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) = 0.$$

Zadanie 2.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Odp.: } \alpha = ye^{-x}, \beta = ye^x, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{4\beta} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{1}{4\alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Zadanie 3.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Odp.: } \alpha = \frac{1}{2}x^2, \beta = y, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Zadanie 4.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{Odp.: } \alpha = y \cos x, \beta = y \sin x, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Zadanie 5.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\text{Odp.: } \alpha = ye^{-\frac{1}{2}x^2}, \beta = y, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2\beta \ln \frac{\beta}{\alpha}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

Zadanie 6.

Znajdź układ współrzędnych, w którym podane równanie ma postać kanoniczną, i zapisz je w tych współrzędnych.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Odp.: $\alpha = x, \beta = y - \frac{1}{2}x^2, \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$

Zadanie 8.

Znajdź ogólne rozwiązanie równania z zadania 5.

Odp.:

$$u = F_1(\beta) + \int F_2(\alpha) (\ln \frac{\beta}{\alpha})^{-\frac{1}{2}} d\alpha = F_1(y) + \int F_3(ye^{-\frac{1}{2}x^2}) dx.$$

Zadanie 9.

Znajdź rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

W obszarze $y \geq \sqrt{1+x^2}$ z warunkami brzegowymi $u(x, y = \sqrt{1+x^2}) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = \sqrt{1+x^2}) = 0$.

Odp.: $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1 - \ln(y^2 - x^2))$

Zadanie 10.

Znajdź rozwiązanie równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2$$

w obszarze $y \geq 0$ z warunkami brzegowymi $u(x, y = 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y = 0) = 1$.

Odp.: $u = y - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{12}y^4$

Zadanie 11.

Niech u będzie rozwiązaniem

$$\Delta u = 0$$

w obszarze $\Omega = B(0, R)$ z warunkiem brzegowym

$$u|_{\partial B(0, R)} = \operatorname{sgn} z = \begin{cases} 1 & \text{dla } z > 0 \\ -1 & \text{dla } z < 0 \end{cases}$$

Znajdź wartość u na osi z . *Wskazówka:* Wykorzystaj wyprowadzoną na wykładzie funkcję Greena dla kuli.

$$\text{Odp.: } u(0, 0, z) = \frac{1}{z} \left(R - \frac{R^2 - z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \left(1 + \frac{R}{R + \sqrt{R^2 + z^2}} \right).$$

Zadanie 12.

Znajdź rozwiązanie równania

$$\Delta u = 0$$

w obszarze $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq |\vec{r}| \leq 2\}$ z warunkami brzegowymi

$$u(r = 1, \theta, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(r = 2, \theta, \varphi) = 1$$

Wskazówka: Dane brzegowe są sferycznie symetryczne, więc można to samo założyć o rozwiązaniu.

$$\text{Odp.: } u(\vec{r}) = -4 + \frac{4}{r}.$$

Zadanie 13.

Znajdź rozwiązanie równania

$$\Delta u = 0$$

w obszarze $\Omega = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq |\vec{r}| \leq 2\}$ z warunkami brzegowymi

$$u(r = 1, \theta, \varphi) = 1, \quad u(r = 2, \theta, \varphi) = \cos \theta$$

Wskazówka: Szukaj rozwiązania w postaci $u = R_1(r) + R_2(r) \cos \theta$.

$$\text{Odp.: } u(\vec{r}) = -1 + \frac{2}{r} + \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta.$$