# Algebra zbiorów

1. Niech $X$ będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f : X \longrightarrow ]0, \infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n \in \mathbf{N}$ oraz parami różne elementy $x_1, \ldots, x_n \in X$, takie że $f(x_1) + \ldots + f(x_n) > 100$.

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, gdzie $X_n := \{x \in X : f(x) > \frac{100}{n}\}$; co najmniej jeden ze zbiorów $X_n$ jest nieskończony (bo przeliczalna suma zbiorów skończonych jest zbiorem przeliczlnym); biorąc dowolne $x_1, \ldots, x_n \in X_n$ mamy wtedy $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) > \sum_{k=1}^{n} \frac{100}{n} = 100$.

2. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{1}{n} + Q(\frac{n}{3}), \frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n \in \mathbf{N}$, gdzie $Q(x) := x - E(x)$.

2. $\cap = [\frac{4}{3}, \frac{3}{2}]$; $\liminf = ]\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$; $\limsup = ]0, \frac{3}{2}]$; $\cup = ]0, 3]$ (gdyż $0 < x \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow x \in A_{3k}$ dla $k > \frac{1}{3x}$ oraz $\frac{3}{2} < x \leqslant 3 \Rightarrow x \in A_1 = [\frac{4}{3}, 3]$).

3. Niech $A_n \imath X$, $A_n' := X \setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k<n} A_k \cup \bigcup_{k \geqslant n} A_k') = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus A_{n+1})$.

3. $x \notin L \iff x \notin \bigcup_n A_n \vee \exists n \in \mathbf{N} : (x \notin A_1, \ldots, x \notin A_{n-1} \wedge x \in A_k \text{dla } k \geqslant n)$. Na mocy zasady indukcji warunek ten oznacza $(\forall n \in \mathbf{N} : x \in A_n \Rightarrow x \in A_{n+1})$, tzn. $x \notin P$.

4. Dowieść, że jeśli zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są skończone, to $\binom{n-1}{2}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant (n-2)\sum_i A_i - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$, przy czym równość zachodzi $\iff$ każdy $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ należy do $\geqslant n-2$ zbiorów $A_i$.

4. $L - P = \sum_{x \in X}\left\{\binom{n-1}{2} - (n-2)r(x) + \binom{r(x)}{2} - \binom{r(x)}{n}\right\}$, gdzie $X := \cup_i A_i$ a $r(x)$ jest liczbą tych $A_i$, do których należy $x$. Otóż $\binom{n-1}{2} - (n-2)r + \binom{r}{2} = \binom{n-1-r}{2}$ jest $\geqslant 0$ dla $r \in \overline{0, n-1}$, a dla $r = n$ jest to $= 1 = \binom{r}{n}$.
**Inna metoda**: Wprowadzając pomocnicze zbiory $X := \cup A_i, B_i := X \setminus A_i$ sprowadzamy nierówność do standardowego oszacowania $|\cup B_i| \geqslant \sum|B_i| - \sum|B_i \cap B_j|$.

5. Niech dane $n, p, q \in \mathbf{N}$. Wykazać, że jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są $\geqslant (n-1)p + \binom{n-1}{2}q$, a $|A_i \cap A_j|$ są $\leqslant (n-2)p + \binom{n-2}{2}q$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant n$, to $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant np + \binom{n}{2}q$, przy czym równość może mieć miejsce. W szczególności:
$$|A_i| \geqslant 49, |A_i \cap A_j| \leqslant 36 \Rightarrow |A_1 \cup \ldots \cup A_8| \geqslant 64 \qquad (n = 8, p = 1, q = 2).$$

5. $A_i' = \cup_j S_{ij}$, gdzie $S_{ij} = S_{ji}$, $S_{ij}$ rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant n$, $|S_{ii}| = p$, $|S_{ij}| = q$.

6. Jeśli $\emptyset \neq M \not\geqslant \mathbf{Z}$, to $M \setminus (M+1)$ jest zbiorem lewych końców, a $M \setminus (M-1)$ — prawych końców przedzialów (maksymalnych), których $M$ jest sumą. Zatem znając oba zbiory $M \setminus (M \pm 1)$ możemy z reguły odtworzyć $M$; wyjątek stanowi przypadek, gdy oba te zbiory są $= \emptyset$ (wtedy $M = \emptyset$ albo $M = \mathbf{Z}$). Dalej, znając $M \setminus (M+3)$ i $M \setminus (M-3)$ możemy znaleźć $M \imath \mathbf{Z}$ (rozwiązanie $M$ będzie jednoznaczne $\iff \forall k \in \{0,1,2\} : 3\mathbf{Z} + k$ ma $\neq \emptyset$ przecięcie z choćby jednym z tych dwu zbiorów).Przykłady:

♣ $M \setminus (M+3) = \{0, 1, 2, 10\}$, $M \setminus (M-3) = \{3, 4, 5, 16\} \iff M = \overline{0, 5} \cup \{10, 13, 16\}$;

♣ $M \setminus (M+3) = \overline{0, 2} \cup \overline{7, 9}$, $M \setminus (M-3) = \{2, 3, 8, 9, 10\} \iff M = \overline{0, 4} \cup \overline{7, 10}$;

♣ $M \setminus (M+3) = \{1, 2\}$, $M \setminus (M-3) = \{4, 11\} \iff M = M_0 := \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$ lub $M = M_0 \cup 3\mathbf{Z}$.

7. Wykazać, że odwzorowanie $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $f(x, y) := (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć $f^{-1}$.

7. Z równań $u = x + y, v = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ wynika: $\frac{1}{x} = v + \frac{1}{y}$, więc $0 = u\frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = u(v + \frac{1}{y})\frac{1}{y} - (v + \frac{1}{y}) - \frac{1}{y} = u(\frac{1}{y})^2 + (uv - 2)\frac{1}{y} - v$; stąd, skoro $u > 0$, to albo $\frac{1}{y} = \frac{1}{2u}(2 - uv + \sqrt{u^2v^2 + 4})$ i $\frac{1}{x} = \frac{1}{2u}(2 + uv + \sqrt{u^2v^2 + 4})$ (wtedy $x, y > 0$, gdyż $\sqrt{.} > |uv|$), albo $\frac{1}{y} = \frac{1}{2u}(2 - uv - \sqrt{.})$ i $\frac{1}{y} = \frac{1}{2u}(2 + uv - \sqrt{.})$ (lecz ta możliwość odpada, gdyż $2 - |uv| \leqslant 2 \leqslant \sqrt{u^2v^2 + 4}$, musimy zaś mieć $x, y > 0$). *Odp.* $f^{-1}(u, v) = \frac{1}{2u}(2 + uv + \sqrt{u^2v^2 + 4}, 2 - uv + \sqrt{u^2v^2 + 4})$.

8. Określmy następujące podzbiory $\mathbf{R}^3$: $S := \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 > 0,\ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x = y = 0,\ |z| \leqslant 1)\}$, $S_1 := \{(x, y, z) : |z| \leqslant 1,\ y = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}x\}$, $S_2 := \{(x, y, z) : |z| \leqslant 1,\ x = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}y\}$. Dowieść, że $S = S_1 \cup S_2$ oraz wyznaczyć $S_1 \cap S_2$.

8. Zawieranie $S_1, S_2 \imath S$ wynika stąd, że $k := \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}$ spełnia równanie $z(1 + k^2) = 2k$; zawieranie $S \imath S_1 \cup S_2$ wynika z tożsamości $(kx - y)(ky - x) = (1 + k^2)xy - k(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(1 + k^2)[2xy - z(x^2 + y^2)]$. Przecięcie: $(x, y, z) \in S_1 \cap S_2 \iff y = kx, x = ky \iff y = kx, x = k^2x$; otóż $k^2 = \frac{1-(1-z^2)}{(1+\sqrt{1-z^2})^2} = \frac{1-\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}$, więc $1 - k^2 = \frac{2\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}$; stąd $(1 - k^2)x = 0 \iff (x = 0$ lub $z = \pm 1)$. *Odp.* $S_1 \cap S_2 = \{x = y = 0, |z| \leqslant 1\} \cup \{x = y, z = 1\} \cup \{x = -y, |z| = -1\}$.

9. Niech $\triangle := \{u = (u_1, u_2, u_3) : u_1, u_2, u_3 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 + u_3 = 1\} \imath \mathbf{R}^3$ (trójkąt o wierzchołkach $e_1, e_2, e_3$). Określmy odwzorowanie $\phi : \triangle \to \mathbf{R}^3$ wzorem $\phi(u) := 2(\sqrt{u_2u_3}, \sqrt{u_3u_1}, \sqrt{u_1u_2})$. Dowieść, że: (a) $\phi(\triangle) = S := \{x \in \mathbf{R}^3 : 2x_1x_2x_3 = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2,\ 0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1\}$; (b) relacja równoważności w $\triangle$: $u \cong u' \iff \phi(u) = \phi(u')$, jest identyczna z relacją, odpowiadającą sklejeniu z trójkąta $\triangle$ czworościanu foremnego (zginamy powierzchnię trójkąta wzdłuż odcinków łączących środki jego boków, a następnie sklejamy odpowiednie połowki tych boków).

10. Dowieść, że każda funkcja niemalejąca $f : \overline{1, 100} \to \overline{1, 100}$ ma punkt stały: $\exists x \in \overline{1, 100} : f(x) = x$.

10. *Sposób 1.* Niech $M := \{x \in \overline{1,100} : f(x) \geqslant x\}$, a więc $1 \in M \neq \emptyset$; pokażemy, że $x_0 := \max M$ ma żadaną własność. Gdy $x_0 = 100$, wtedy $f(x_0) \geqslant x_0$ wraz z $f(x_0) \in \overline{1,100}$ daje tezę; gdy zaś $x_0 < 100$, wtedy $f(x_0+1) \leqslant x_0$ (bo $x_0+1 \notin M$) daje $f(x_0) \leqslant f(x_0+1) \leqslant x_0$ (monotoniczność), zarazem zaś $f(x_0) \geqslant x_0$ (bo $x_0 \in M$), skąd $f(x_0) = x_0$. *Sposób 2.* Określmy rekurencyjnie ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ warunkami $x_0 := 1, x_{n+1} = f(x_n)$; ciąg ten jest niemalejący (prosta indukcja daje $x_{n+1} \geqslant x_n$) i ma wyrazy należące do $\overline{1,100}$, jeśli więc $x_k$ jest jego maksymalnym wyrazem, to $f(x_k) = x_{k+1} = x_k$. *Sposób 3.* Udowodnimy naturalne uogólnienie (dla $f : \overline{1,n} \to \overline{1,n}$) stosując indukcję względem $n \in \mathbf{N}$: jeśli $f(n) = n$, to teza $T_n$ jest prawdziwa, jeśli zaś $f(n) < n$, to $\tilde{f} := f|_{\overline{1,n-1}} : \overline{1,n-1} \to \overline{1,n-1}$ jest niemalejąca, więc (z założenia indukcyjnego) ma punkt stały, zaś punkt stały $\tilde{f}$ jest punktem stałym $f$.

## Nierówności

1. Wykazać, że $R = \mathbf{Q}_+$ jest jedynym podzbiorem $R$ zbioru $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, spelniającym następujące warunki: 1. $R \cup (-R) = \mathbf{Q}^*$; 2. $R \cap (-R) = \emptyset$; 3. $R \cdot R \subset R$; 4. $R + R \subset R$.

1. Skoro 1 lub -1 należy do $R$ (war. 1.), to $(\pm 1)^2 = 1 \in R$ (war. 3.). Stąd z war. 4. przez indukcję wynika $\forall n \in \mathbf{N} : n \in R$, tzn. $\mathbf{N} \subset R$. Pokażemy teraz, że $\forall l, m \in \mathbf{N} : q := \frac{l}{m} \in R$; istotnie, w przeciwnym razie war. 1. dawałby $-q \in R$, więc z $m \in \mathbf{N} \subset R$ i war. 3. wynika $-l = (-q) \cdot m \in R$; zarazem $l \in \mathbf{N} \subset R$, co jest sprzeczne z war. 2. Tak więc $\mathbf{Q}_+ \subset R$, przy czym $R$ nie może być większy od $\mathbf{Q}_+$ (war. 2.), co daje tezę. *Uwaga.* Każdy $R \subset \mathbf{Q}^*$ spełniający warunki 1., 2. i 3. jest postaci $R = \mathrm{ker} f$ dla pewnego nieparzystego ($f(-x) = -f(x)$) homomorfizmu $f : \mathbf{Q}^* \to \{\pm 1\}$ (mianowicie $f(x)$ jest $= 1$ dla $x \in R$, a $-1$ dla $x \notin R$). Z kolei każde takie $f$ jest postaci $f(\pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots) := \pm \epsilon_1^{k_1} \epsilon_2^{k_2} \ldots$, gdzie $p_1, p_2, \ldots$ oznaczają kolejne liczby pierwsze, a $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ są dowolnymi elementami zbioru $\{1, -1\}$, opisującymi pewne odwzorowanie zbioru liczb pierwszych w $\{1, -1\}$. Przy tym $R = \mathbf{Q}_+$ odpowiada $\epsilon_k = 1 \forall k$; inny wyróżniony podzbiór $R$ dają $\epsilon_k = -1 \forall k$.

2. Dowieść, że dla $x, y \in \mathbf{R}$ mamy: $E(x) + y \geqslant 0 \iff x + E(y) \geqslant 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geqslant$ nierównościami $>$ lub $\leqslant$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geqslant E(x) \iff E(y) > x - 1$.

3. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbf{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geqslant n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$. Zastosować nierówność Bernoulliego.

4. Wykazać, że: (a) $\frac{2n}{2n-1} \leqslant \sqrt[n]{2} \leqslant \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbf{N}$ (zastosować nierówność Bernoulliego); (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geqslant 450$.

4. (b) Połóżmy $n = 50k + r, k \geqslant 9, r \in \overline{0,49}$. Skoro $2^k > 50k$ (indukcja względem $k \geqslant 9$), to $2^{50k} > (50k)^{50}$. Skądinąd $\sqrt[50]{2} > \frac{101}{100}$ (nierówność (a)) daje $2^{\frac{r}{50}} > (1 + \frac{1}{100})^r > 1 + \frac{r}{100} > 1 + \frac{r}{50k}$. Z tych dwóch oszacowań wynika $2^n = 2^r 2^{50k} > (2^{\frac{r}{50}} \cdot 50k)^{50} > (50k + r)^{50} = n^{50}$.

5. Dla jakich $n \in \mathbf{N}$ zachodzą nierówności: $2n + 1 < 2^n$; $3n^3 + 1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \leqslant 2^{n-2} n!$ ?

6. Wykazać, że $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbf{N}$.

6. Łatwa indukcja (sprowadzająca się do nierówności $(1 + \frac{1}{n})^n \geqslant 2$, wynikającej z n.Bernoulliego); prostszym sposobem jest skorzystanie z n.Cauchy'ego.

7. Wykazać, że: (a) $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$; (c) $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbf{N}$; (d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbf{N}$; (e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

8. Dowieść, że z nierówności $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 1$, $-x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 1$, $x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 1$ wynika, że: $1^0$ $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$; $2^0$ $1 + x_1^2 \geqslant x_2^2 + x_3^2$, $1 + x_2^2 \geqslant x_3^2 + x_1^2$, $1 + x_3^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2$.

8. Z założenia wynika: $x_1 - x_2 \leqslant 1 - x_3, x_2 - x_1 \leqslant 1 - x_3$, a więc $\boxed{|x_1 - x_2| \leqslant 1 - x_3}$; mamy też $x_1 + x_2 - 1 \leqslant x_3, -x_1 - x_2 + 1 \leqslant x_3$, co daje $\boxed{|x_1 + x_2 - 1| \leqslant x_3}$. Z tych dwu nierówności wynika $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$, co dzięki równouprawnieniu $x_1, x_2, x_3$ dowodzi $1^0$. Stąd mamy $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2 \leqslant 1 + x_3$; mnożąc to obustronnie przez $|x_1 - x_2| \leqslant 1 - x_3$ dostajemy $|x_1^2 - x_2^2| \leqslant 1 - x_3^2$, a stąd wynika $2^0$.

9. Niech $a_1, a_2 \ldots, a_{100} \in \mathbf{R}$ — dane liczby, $s := |a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}|$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ liczb $a_1, \ldots, a_{100}$, taka że $|b_1| \geqslant \frac{1}{100}s$, $|b_1 + b_2| \geqslant \frac{2}{100}s$, $|b_1 + b_2 + b_3| \geqslant \frac{3}{100}s, \ldots,$ $|b_1 + b_2 + \ldots + b_{99}| \geqslant \frac{99}{100}s$.

9. Stosując indukcję dowiedziemy naturalnego uogólnienia twierdzenia na przypadek $n$ liczb $a_1, \ldots, a_n$. Oznaczając $c_k := \sum_{j: j \neq k} a_j$ mamy $\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{(j,k): j \neq k} a_k = (n-1) \sum_{j=1}^n a_j$, więc $\sum_{k=1}^n |c_k| \geqslant \left|\sum_{k=1}^n c_k\right| = (n-1)s$, zatem $\exists k \in \overline{1,n} : |c_k| \geqslant \frac{n-1}{n}s$. Weźmy $b_n := c_k$; z założenia indukcyjnego zastosowanego do $n-1$ liczb $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ wynika istnienie permutacji $b_1, \ldots, b_{n-1}$ liczb tego ciągu, takiej że $\forall j < n : |b_1 + \ldots + b_j| \geqslant \frac{j}{n-1}s'$, gdzie $s' := |a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_n| = |c_k| \geqslant \frac{n-1}{n}s$; stąd teza.

10. W $n$ kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1, \ldots, x_n$, tzn. w $k$-tym roku ceny rosły $(1 + x_k)$-krotnie. Napisać wzór na średni roczny wskaźnik inflacji za badany okres; wykazać, że jego wartość zawiera się pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

## Zbieżność ciągów liczbowych

*** Dowieść (nie stosując twierdzenia Stolza), że $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})=0$.
Dla danego $\epsilon>0$ weźmy $m\geqslant\frac{2}{\epsilon}$; wtedy dla $n>m$ mamy: $\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})\leqslant\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{m}1+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{m})=\frac{m}{n}+\frac{n-m}{nm}=\frac{m-1}{n}+\frac{1}{m}$, co dla $n\geqslant m(m-1)$ jest $\leqslant\frac{m-1}{n}+\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\leqslant\epsilon$.

*** Zbadać zbieżność: (a) $x_0=1, x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}x_n^2-\frac{1}{3}x_n^3$; (b) $x_0=1, x_{n+1}=\frac{\pi}{2}\sin x_n$; (c) $x_0=1, x_{n+1}=x_n-\sin x_n$.
(a) $x_n\searrow 0$; (b)$x_n\nearrow\frac{\pi}{2}$ (skorzystać z nierówności $x\leqslant\frac{\pi}{2}\sin x$ na $[0,\frac{\pi}{2}]$, tzn. wypukłości sin); (c) $x_n\searrow 0$.

*** Wyliczyć $\inf\{x_n : n\in\mathbf{N}\}, \sup\{x_n : n\in\mathbf{N}\}, \underline{l}:=\liminf x_n$ oraz $\overline{l}:=\limsup x_n$, jeżeli:
(a) $x_n=\frac{n-10}{n^2}$; $\quad\inf=x_1=-9,\ \sup=x_{20}=\frac{1}{40},\ \underline{l}=\overline{l}=0.$
(b) $x_n=\frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$; $\quad\inf=x_2=-\frac{1}{4},\ \sup=x_6=\frac{1}{4},\ \underline{l}=\overline{l}=\frac{1}{5}.$
(c) $x_n=\frac{n-[\sqrt{n}]^2+1}{[\sqrt{n}]}$; $\quad\inf=0,\ \sup=x_3=3,\ \underline{l}=0,\ \overline{l}=2.$
(d) $x_n=n-10[\frac{n}{10}]+\frac{2}{n}$; $\quad\inf=0,\ \sup=x_9=\frac{83}{9},\ \underline{l}=0,\ \overline{l}=9.$
(e) $x_n=n-\frac{5}{n}-5[\frac{n}{5}]$; $\quad\inf=x_1=-4,\ \sup=4,\ \underline{l}=0,\ \overline{l}=4.$
(f) $x_n=\frac{24}{n}+\frac{n}{10}-[\frac{n}{10}]$; $\quad\inf=0,\ \sup=x_1=\frac{241}{10},\ \underline{l}=0,\ \overline{l}=\lim x_{10k-1}=\frac{9}{10}.$

## Relacje równoważności, metryki

*** *Metryka cyklicznego uporządkowania przedziału*: Niech $X:=[a,b[\subset\mathbf{R}$ oraz $h:=b-a$ (lub $X:=\overline{1,n}\subset\mathbf{Z}$ oraz $h:=n$); sprawdzić, że wzór $d(x,y):=\min\big(|x-y|,h-|x-y|\big)$ określa metrykę w zbiorze $X$.
Warunek trójkąta: Niech $x,y,z\in X$; rozważmy cztery możliwości: $1^0$. $d(x,y)=|x-y|$, $d(y,z)=|y-z|$, wtedy $d(x,z)\leqslant|x-z|\leqslant d(x,y)+d(y,z)$. $2^0$. $d(x,y)=|x-y|$, $d(y,z)=h-|y-z|$, wtedy $d(x,z)\leqslant h-|x-z|\leqslant|x-z|+h-|y-z|=d(x,y)+d(y,z)$. $3^0$. $d(x,y)=h-|x-y|$, $d(y,z)=h-|y-z|$, wtedy $d(x,z)\leqslant|x-z|\leqslant 2h-|x-y|-|y-z|=d(x,y)+d(y,z)$, gdyż wielkość $|x-y|+|y-z|+|z-x|$ nie zależy od uporządkowania trójki $x,y,z$, więc zawsze jest równa $2\big(\max\{x,y,z\}-\min\{x,y,z\}\big)\leqslant 2h$.

*** Niech $\emptyset\neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f:X\to X$. Wykazać, że:
(a) $R:=\{(x,y)\in X\times X:\exists k,l\in\mathbf{N}:f^k(x)=f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w $X$;
(b) zbiór $X_0:=\bigcap_{k\in\mathbf{N}}f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0)=X_0$ oraz $f|_{X_0}:X_0\to X_0$ jest bijekcją;
(c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji $R$ i każda z klas relacji $R$ zawiera dokładnie jedną orbitę.
Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_o}$.

*** Niech $R$ będzie relacją równoważności w $X$ oraz $X_0\subset X$. Wykazać, że

$$(X_0 \text{ jest sumą pewnych klas równoważności } R)\iff(\forall x,y\in X:[x\in X_0,(x,y)\in R]\Rightarrow y\in X_0).$$

*** Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w $\mathbf{R}$. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $R\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Znaleźć funkcję $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, której poziomice są klasami równoważności:
(a) $x\sim y\iff(x-y)(1-xy)=0$; (b) $x\sim y\iff(x=y$ lub $x=-y\in[-1,1]$ lub $|x|+|y|=1)$;
(c) $x\sim y\iff(x=y$ lub $\exists n\in\mathbf{Z}:x,y\in[2n-1,2n])$; (d) $x\sim y\iff(x-y\in\mathbf{Z}$ lub $x+y+\frac{1}{2}\in\mathbf{Z})$.
(a) $[x]=\{x,\frac{1}{x}\}$, gdy $x\neq 0$, $f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy}|x|\leqslant 1\\ 1/x, & \text{gdy}|x|>1\end{cases}$; (b) $[x]=\{x\}$, gdy $|x|>1$, $[x]=\{x,-x,1-|x|,|x|-1\}$, gdy $|x|\leqslant 1$, $f(x)=\begin{cases}|2|x|-1|, & \text{gdy}|x|\leqslant 1\\ x, & \text{gdy}|x|>1\end{cases}$; (c) $[x]=[2n-1,2n]$, gdy $x\in[2n-1,2n]$ dla pewnego $n\in\mathbf{Z}$, natomiast $[x]=\{x\}$, gdy $x\notin\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}[2n-1,2n]$; (d) $[x]=(x+\mathbf{Z})\cup(\frac{1}{2}-x+\mathbf{Z})$, $f(x):=\sin 2\pi x$.

*** Niech $I\subset\mathbf{R}$ będzie symetrycznym względem 0 przedziałem, a $X:=\mathbf{R}\times I$. Sprawdzić, że relacja $(x,y)\sim(x',y')\iff[x'-x\in\mathbf{Z},y'=(-1)^{x'-x}y]$ jest równoważnością w $X$. Zbiór $X/_\sim$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* – dlaczego ?

*** Niech $R$ będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1,0,1\}$. Określmy funkcję $d_R:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ wzorem:

$$d(x,y):=\begin{cases}\|x-y\|, & \text{gdy } (\mathrm{sgn}x_1,\mathrm{sgn}y_1)\in R\\ \|x\|+\|y\| & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases},\qquad \text{gdzie } \|x\|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \text{ dla } x\in\mathbf{R}^2.$$

Wykazać, że: (a) $[d_R(x,y)=0\iff x=y]\iff R$ jest zwrotna; (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x,y)=d_R(y,x)\ \forall x,y\in\mathbf{R}^2]\iff R$ jest symetryczna; (c) $d_R$ spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia. Zatem: $d_R$ jest metryką w $\mathbf{R}^2\iff R$ jest relacją równoważności. ($d_R$ ma nazwę "metryka-rzeka" – dlaczego?).

*** Dla jakich wartości $a\in\mathbf{R}$ funkcja $d(x,y):=\begin{cases}|x-y|, & \text{gdy } x-y\in\mathbf{Q}\\ a, & \text{gdy } x-y\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ jest metryką na $[-1,1]$ ? $\quad a\geqslant 1.$

# Zadania z Analizy Matematycznej
# dla grupy 12. i 13.

**Seria 1.** **Październik 1992**

1. Uprościć warunek: (a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$; (d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

2. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$, $D$ zachodzą równości: $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$; $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$; $A \setminus (B \cup C \cup D) = ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D$; $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup (A \cap C \setminus D)$.

3. Niech $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$(*różnica symetryczna* zbiorów). Wykazać, że: działanie $\div$ jest przemienne i łączne; $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$; $A \div A = \emptyset$; $A \div \emptyset = A$; $A_1 \div A_2 \div \cdots \div A_n = \{x \in X : x$ należy do nieparzystej liczby zbiorów $A_1, \ldots, A_n\}$. Wyrazić sumę i różnicę mnogościową zbiorów poprzez operacje $\cap$ i $\div$.

4. Wyliczyć: (a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$; (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$; (c) $\bigcup_{r \in \mathbf{R}} \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : (x_1 - r)^2 + (x_2 + 2r)^2 \leqslant r^2 + 1\}$; (d) $\bigcap_{n=1}^{\infty} ([0, n] \cup [n^2, \infty[,)$; (e) $\bigcup_{t \in [2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in [2,3]} A_t$, gdzie $A_t := [t, 2t] \times [-t, t]$; (f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{(n+1)^2}, \frac{1}{n+1}\right[$; (g) $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n \in \mathbf{N}$.

5. Dla $s \geqslant 0$ oznaczmy $K_s := \{(x, y) : x^2 + (y - s)^2 \leqslant s\} \subset \mathbf{R}^2$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania:
$$\{(x, y) : y \geqslant x^2\} \subset \bigcup_{s \in \mathbf{N}} K_s \subset \bigcup_{s \in ]0, \infty[} K_s = \{(x, y) : y \geqslant x^2 - \tfrac{1}{4}\}.$$

6. Wykazać, że $\bigcap (A_n \cup B_n) \supset (\bigcap A_n) \cup (\bigcap B_n)$. Znaleźć przykład, gdy nie ma równości. Pokazać, że w przypadku, gdy oba ciągi są *zstępujące* (tzn. $\forall n \in \mathbf{N} : A_{n+1} \subset A_n,\ B_{n+1} \subset B_n$), powyższa inkluzja przechodzi w równość.

7. Sprawdzić, że $\limsup (A_n \cup B_n) = (\limsup A_n) \cup (\limsup B_n)$, $\limsup (A_n \cap B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$ oraz $(\limsup A_n)' = \liminf A_n'$ dla dowolnych rodzin $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ i $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (symbole $\liminf$ i $\limsup$ zostały zdefiniowane w zadaniu 4.(g), a znaczek $'$ oznacza dopełnienie). Napisać i wykazać analogiczne wzory dla $\liminf$.

8. Wykazać, że jeśli $A_n \subset X$ dla $n \in \mathbf{N}$, to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B \cup C$ oraz $B \cap C = \emptyset$, gdzie $B$ i $C$ są określone wzorami
$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$, $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k' \cap \bigcap_{l=n}^{\infty} A_l)$, przy czym $A_k' := X \setminus A_k$.

9. Ile liczb naturalnych $\leqslant 1000$ nie dzieli się przez żadną spośród liczb 3, 7, 13, 19 ?

10. Wykazać, że: (a) Jeśli $A_1, \ldots, A_n \subset X$, $X$ jest skończony oraz $|A_1| + \ldots + |A_n| > (n-1)|X|$, to $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$.
(b) Jeśli zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są skończone oraz $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$, to $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
(c) Jeśli $|A_1|, |A_2|, |A_3|$ są $\geqslant p$ oraz $|A_i \cap A_j| \leqslant q$ dla $i \neq j$, to $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \geqslant \max\{p, 2p - q, 3p - 3q\}$, przy czym (przy zadanych $p, q \in \mathbf{N}$) oszacowania tego nie da się poprawić.
(d) Jeśli $|A_1| = \ldots = |A_8| = 15$ oraz $|A_1 \cup \ldots \cup A_8| < 64$, to $|A_i \cap A_j| \geqslant 3$ dla pewnej pary $1 \leqslant i < j \leqslant 8$. Pokazać, że istnieją zbiory $A_1, \ldots, A_8$ dla których $|A_i| = 15$, $|A_1 \cup \ldots \cup A_8| = 64$ oraz $|A_i \cap A_j| = 2$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant 8$.
(e) Jeśli $|A_1|, \ldots, |A_5|$ są $\geqslant 16$ oraz $|A_i \cap A_j| \leqslant 9$ dla $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, to $|A_1 \cup \ldots \cup A_5| \geqslant 25$ i równość jest możliwa.

11. Dane są odwzorowania $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to Z$, $\gamma : Z \to W$. Wykazać, że: (a) $[\beta \circ \alpha$ injektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; (b) $[\beta \circ \alpha$ surjektywne $] \Rightarrow \beta$ surjektywne; (c) $[\beta \circ \alpha$ i $\gamma \circ \beta$ są bijekcjami$] \Rightarrow \alpha, \beta$ i $\gamma$ również są bijekcjami.

12. Niech $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$, $\gamma : X \to X$. Wykazać, że: (a) $\alpha$ jest injektywne $\iff \forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$; (b) $\alpha$ jest surjektywne $\iff \forall B \subset Y : B = f(f^{-1}(B))$; (c) $[\alpha \circ \gamma = \alpha,\ \alpha$ injektywne$] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; (d) $[\gamma \circ \beta = \beta,\ \beta$ surjektywne $] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; (e) $[\alpha \circ \beta$ injektywne, $\beta$ surjektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; (f) $[\beta \circ \alpha$ surjektywne, $\beta$ injektywne $] \Rightarrow \alpha$ surjektywne; (g) $[\forall x \in X : \exists n \in \mathbf{N} : \underbrace{\gamma \circ \cdots \circ \gamma}_{n}(x) = x] \Rightarrow \gamma$ jest bijektywne.

13. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania; w przypadku bijekcji znaleźć odwzorowanie odwrotne:
(a) $f : \square \to \triangle$, gdzie $\square := \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$, $\triangle := \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1,\ 0 < x_2,\ x_1 + x_2 < 1\}$ oraz $f(x) := x \frac{\max\{x_1, x_2\}}{x_1 + x_2}$; (b) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $f(k) := \frac{|4k-1|+1}{2}$; (c) $f : \mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$, $f(k_1, k_2) = k_1 + k_2\sqrt{2}$; (d) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{T} := \left\{\frac{n(n+1)}{2} : n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\right\}$, $f(k) := 2k^2 - k$; (e) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(k, l) := 2^{k-1}(2l - 1)$.

14. Sprawdzić, że $f$ jest bijektywne, opisać $f^{-1}$: (a) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $f(n) := (-1)^n E(\frac{n}{2})$, $E(x) :=$ (część całkowita $x$); (b) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \setminus 3\mathbf{Z} :=$(liczby całkowite niepodzielne przez 3), dane wzorem $f(n) = (-1)^n + 3E(\frac{n}{2})$; (c) $f : S \to \mathbf{N}$, $f(n) := |S \cap \overline{1, n}|$, gdzie $S$ jest zadanym nieskończonym podzbiorem $\mathbf{N}$; (d) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, f(z) := az + b\overline{z}$, gdzie liczby $a, b \in \mathbf{C}$ są zadane, przy czym $|a| \neq |b|$; (e) $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(m, n) := \binom{m+n}{2} - m + 1$.

15. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania: (a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; (b) $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}^2, f(t) := = (t + t^{-1}, t - t^{-1})$; (c) $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, f(z) := az + \overline{z}$, gdzie $a \in \mathbf{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$; (d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; (e) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(n) := 2n^2 - 3n + 1$; (f) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} - y$.

16. Niech $X \neq \emptyset$ będzie zbiorem skończonym, a $f : X \to X$ – dowolnym odwzorowaniem; oznaczmy $f^n := f \circ \cdots \circ f$ ($n$-krotna iteracja odwzorowania $f$). Dowieść, że zbiór $X_0 := \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ jest niepusty, $f(X_0) = X_0$ oraz $f|_{X_0}$ jest bijekcją $X_0$ na $X_0$. Uzasadnić istotność założenia skończoności $X$.

17. Wykazać, że: (a) Jeżeli zbiór $S \subset \mathbf{R}$ jest przeliczalny lub skończony, to $\exists a, b \in \mathbf{R},\ a > 0 : \forall n \in \mathbf{Z} : an + b \notin S$; (b) Jeżeli zbiór $S \subset \mathbf{R}^2$ jest przeliczalny lub skończony, to istnieje trójkąt równoboczny na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$, o bokach długości 1, którego środkiem ciężkości jest punkt $(0, 0)$ i którego brzeg nie zawiera żadnego punktu z $S$.

18. (a) Znaleźć podzbiór $S \subset \mathbf{Z}$, spełniający warunki: $S \setminus (S + 1) = \{0, 3, 8\}$, $S \setminus (S - 1) = \{1, 5\}$. (b) To samo zrobić dla innych warunków: $S \setminus (S + 2) = \{0, 3, 8\}$, $S \setminus (S - 2) = \{4, 7, 10\}$. (*Oznaczenie*: $S \pm k := \{n \pm k : n \in S\}$.)

19. Niech $S_n^m$ oznacza liczbę wszystkich surjekcji $\overline{1, m} \to \overline{1, n}$. Wyprowadzić wzór rekurencyjny $S_n^{m+1} = n(S_n^m + S_{n-1}^m)$. Wypisać 4 początkowe wiersze trójkąta utworzonego z wartości $S_n^m$, $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant 4$.

20. Dowieść metodą indukcji, że: (a) $x_1 + \ldots + x_n \leqslant n - 1 + x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ dla $n \in \mathbf{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$; (b) $(1 - x)^n \leqslant \leqslant 1 - nx + \binom{n}{2}x^2$ dla $n \in \mathbf{N}$ i $x \in [0, 1]$; (c) Każdy skończony zbiór liczb rzeczywistych ma element maksymalny; (d) Jeśli $a_1 = a_2 = 1$ oraz $\forall n \in \mathbf{N} :\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, to $a_{2n} = a_n(a_{n-1} + a_{n+1})$, $a_{2n+1} = = a_n^2 + a_{n+1}^2$, $2|a_{3n}$, $3|a_{4n}$, $5|a_{5n}$ dla $n \in \mathbf{N}$; (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$; (f) Jeżeli $n \in \mathbf{N}$ i liczby $a_0, \ldots, a_n$ spełniają nierówności $a_k \leqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ dla $k \in \overline{1, n-1}$, to $a_k \leqslant (1 - \frac{k}{n})a_0 + \frac{k}{n}a_n$ dla $k \in \overline{0, n}$; (g) Jeśli $x_1 = 0$ oraz $\forall n \in \mathbf{N} : x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$, to $\forall m, n \in \mathbf{N} : x_{m+n} = \frac{1+x_m x_n}{2+x_m+x_n}$; (h) Jeśli ciągi $(x_n)$ i $(y_n)$ są określone rekurencyjnie: $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n},\ y_0 = 1,\ y_{n+1} = \frac{2+y_n^2}{2y_n}$, to $y_n = x_{2^n-1}$ dla $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; (i) Jeżeli $x_0 = 0, x_1 = 1$ oraz $\forall n \in \mathbf{N} : x_{n+1} = \frac{x_n}{n} + x_{n-1}$, to $\forall n \in \mathbf{N} : x_{2n-1} = x_{2n}$; znaleźć wzór ogólny na $x_n$.

## Odpowiedzi.

**1.** (a) $B \subset A \cup C$; (b) $B \subset A \cup C$; (c) $B \cap C = \emptyset$; (d) $A \cap B = \emptyset, A \cup B \subset C$; (e) $A \cap C = \emptyset = B \cap C$; (f) $A = B$; (g) $A \cap B \cap C = \emptyset$. **3.** $A \cup B = A \div B \div (A \cap B), A \setminus B = A \cap (A \div B)$. **4.** (a) $]0, \frac{4}{3}] \cup [\frac{3}{2}, 2] \cup [3, 4]$; (b) $[1, \frac{99}{70}[$; (c) $\{x \in \mathbf{R}^2 : x_1(3x_1 + 4x_2 \leqslant 4\}$; (d) $[0, 2]$; (e) $\bigcup = \{x \in \mathbf{R}^2 : 2 \leqslant x_1 \leqslant 6, |x_2| \leqslant 3, |x_2| \leqslant x_1\}$, $\bigcap = [3, 4] \times [-2, 2]$; (f) $]0, \frac{1}{2}[$; (g) $\{1\}, [1, 2[, ]-1, 2[, ]-1, 2[$. **9.** 501 (da się to wyliczyć w ciągu ok. 3 min. na dowolnym kalkulatorze!). **13.** (a) Bijektywne, $f^{-1}(y) = y\frac{y_1+y_2}{\max\{y_1,y_2\}}$; (b) bijektywne, $f^{-1}(2k) = k, f^{-1}(2k - 1) = 1 - k$ dla $k \in \mathbf{N}$; (c) injektywne, lecz nie surjektywne; (d) bijektywne; (e) bijektywne, $f^{-1}(p) = (1 + \binom{r}{2} - p, p - \binom{r-1}{2})$, gdzie $r \in \mathbf{N}$ taka, że $\binom{r-1}{2} < p \leqslant \binom{r}{2}$. **14.** (a) $f^{-1}(k) = 2k$, gdy $k \geqslant 1, f^{-1}(k) = 1 - 2k$, gdy $k \leqslant 0$; (b) $f^{-1}(p) = 3E(\frac{p+1}{3}) - E(\frac{p}{3})$ dla $p \in \mathbf{Z} \setminus 3\mathbf{Z}$; (c) $f^{-1}(n) = s_n$, jeśli $S = \{s_n : n \in \mathbf{N}\}$, gdzie ciąg $(s_n)$ jest (ściśle) rosnący; (d) $f^{-1}(w) = \frac{\overline{a}w - b\overline{w}}{|a|^2 - |b|^2}$. **15.** (a) Surjektywne, $f^{-1}\{2k\} = \{3k + 1\}, f^{-1}\{2k - 1\} = \{3k - 1, 3k\}$; (b) injektywne, $f(]0, \infty[) = \{(x, y) : x > 0, x^2 - y^2 = 4\}$; (c) Zbiór wartości i poziomice są prostymi: $f(\mathbf{C}) = (a + 1)\mathbf{R} := \{t(a + 1) : t \in \mathbf{R}\}, f^{-1}\{t(a + 1)\} = t + i(\overline{a} + 1)\mathbf{R}$; (d) injektywne, $f(\mathbf{R}) = \{(x, y) : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}, x > 0\}$; (e) injektywne, $f(\mathbf{Z}) = \{\frac{1}{2}k(k + 1) : k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, gdyż $f(n) = \frac{1}{2}k(k + 1)$, gdzie $k := \frac{1}{2}(|4n - 3| - 1)$, przy czym każde $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ odpowiada pewnemu $n \in \mathbf{Z} :\ n := 1 + \frac{k}{2}$ lub $n := \frac{1}{2}(1 - k)$, zależnie od parzystości $k$; (f) $f(\mathbf{R}^2) = [0, \infty[$; poziomicami są parabole (współogniskowe) $y = \frac{x^2-c^2}{2c}$, $c > 0$, wraz z półprostą $x = 0, y \geqslant 0$. **18.** (a) $\{0\} \cup \mathbf{N} \setminus \{2, 6, 7\}$; (b) $\{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10\}$. **20.** (i) $x_{2k-1} = x_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!}$ dla $k \in \mathbf{N}$.

## Wskazówki.

**5.** Zauważyć, że jeśli $\Delta = p^2 - 4q \geqslant 1$, to $\exists s \in \mathbf{Z} : s^2 + ps + q \leqslant 0$. **8.** Niech $S := \bigcup_n A_n$ oraz $\Omega(x)$ dla $x \in X$ oznacza warunek $\forall k \in \mathbf{N} : x \in A_k \Rightarrow x \in A_{k+1}$. Wtedy $B = \{x \in S : \neg\Omega(x)\}$. Z kolei na mocy *zasady indukcji* $\Omega(x)$ oznacza, że zbiór $\{k \in \mathbf{N} : x \in A_k\}$ albo jest pusty (tzn. $x \notin S$), albo ma postać $\overline{n, \infty} = \{n, n + 1, \ldots\}$ dla pewnego $n \in \mathbf{N}$ (tzn. $x \in C$); tak więc $C = \{x \in S : \Omega(x)\}$. **10.** (a) Rozważając dopełnienia $A_k' = X \setminus A_k$ wyprowadzić najpierw nierówność $\sum_{k=1}^{n} |A_k| \leqslant (n - 1)|X| + |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$. (b) Niewprost: gdy np. $x \in A_1 \cap A_2, \widetilde{A_1} := A_1 \setminus \{x\}$, wtedy $|\widetilde{A_1} \cup A_2 \ldots| \leqslant |\widetilde{A_1}| + |A_2| + \ldots$, czyli.... (c) Rozważyć przypadki $p < q, q \leqslant p < 2q, 2q \leqslant p$. (d) $A_i := \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant 8} S_{ij}$, gdzie $S_{ij} = S_{ji}, S_{ij}$ rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 8$, oraz $|S_{ii}| = 1, |S_{ij}| = 2$ dla $i \neq j$. (e) Niech $X := A_1 \cup \cdots \cup A_n, A_i' := X \setminus A_i$; szacując $|A_1' \cup \cdots \cup A_n'|$ przez $|A_i'|$ i $|A_i' \cap A_j'|$ wyprowadzić nierówność $\binom{n-1}{2}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant (n - 2)\sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$. **12.** (g) Surjektywność: Gdy $x = f^n(x)$, wtedy $x = f(x'), x' := f^{n-1}(x)$. Injektywność: Jasne, że $x = f^n(x)$ implikuje $x = f^{mn}(x)$, a $f(x_1) = f(x_2)$ implikuje $f^m(x_1) = f^m(x_2)$ (indukcja względem $m \in \mathbf{N}$). Jeśli więc $x_1 = f^{n_1}(x_1), x_2 = f^{n_2}(x_2)$ oraz $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = f^{n_1 n_2}(x_1) = f^{n_1 n_2}(x_2) = x_2$. **13.** (d) Sprawdzić, że $f(k) = \frac{1}{2}n(n+1)$, jeśli $n := \frac{1}{2}(|4k - 1| - 1)$. **14.** (d) Wyliczyć $z$ z układu równań $w = az + b\overline{z}, \overline{w} = \overline{b}z + \overline{a}\overline{z}$. (e) Zależność $f(m, n) = p$ można traktować jako równanie kwadratowe na $n$; gdy $m, n, p \in \mathbf{N}$, jego wyróżnik $\Delta = 8(m + p) - 7$ musi być kwadratem liczby nieparzystej: $\Delta = (2r - 1)^2$ (dlaczego?), skąd $m = \ldots, n = \ldots$ itd. **16.** $|f^n(X_0)|$ jest monotonicznym ciągiem liczb naturalnych. **17.** (b) Każdy punkt $s \in S$ powoduje "dyskwalifikację" co najwyżej dwóch trójkątów z rozważanej rodziny. **18.** Zauważyć, że $S \setminus (S + 1)$ jest zbiorem lewych końców rozgraniczonych "przedziałów" w $\mathbf{Z}$, z których składa się $S$. **19.** Ile jest dla ustalonego $i \in \overline{1, n}$ surjekcji $f : \overline{1, m + 1} \to \overline{1, n}$ takich, że $f(m + 1) = i$ ? **20.** (d) Dwa pierwsze wzory dowodzić równocześnie; (f) Dla dowodu $Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_n \Rightarrow Z_{n+1}$ skorzystać z oszacowania $a_k$ przez $a_1$ i $a_{n+1}$ oraz $a_1$ przez $a_0$ i $a_k$; (h) Wykazać najpierw, że $x_{2n+1} = g(x_n)$, gdzie $g(x) := \frac{2+x^2}{2x}$.

# Zadania z Analizy Matematycznej 'C'

## Seria 2.

1. Niech $E(x)$ := (maksymalna liczba całkowita $\leqslant x$). Narysować wykresy funkcji $\mathbf{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbf{R}$ oraz $\mathbf{R} \ni x \mapsto E(x) - 3E(\frac{x}{3}) \in \mathbf{R}$. Wyprowadzić wzory: (a) $0 \leqslant E(x+y) - E(x) - E(y) \leqslant 1$; (b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbf{N}$; (c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$; (d) $\sum_{n=1}^{N} E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbf{N}$ jest dostatecznie duża.

2. Niech $n \in \mathbf{N}$. Wykazać, że jeśli $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$, oraz ciąg $(b'_1, \ldots, b'_n)$ różni się od ciągu $(b_1, \ldots, b_n)$ jedynie kolejnością, to $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k > \sum_{k=1}^{n} a_k b'_k$.

3. Jaki warunek muszą spełniać liczby $a, b \in \mathbf{R}$, aby $\forall x \in ]0,1] : \exists k \in \mathbf{N} : a \leqslant kx < b$? Sprawdzić $a := \frac{b^2}{b+1}, b \in \mathbf{N}$.

4. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? *Wskazówka.* Skorzystać z nierówności Bernoulliego.

5. Niech $n \in \mathbf{N}$ oraz dane dodatnie $x_1, \ldots, x_n$; dla $\lambda \geqslant 0$ oznaczmy: $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{(\lambda + x_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda + x_n)} - \lambda$; niech ponadto $A := A(x_1, \ldots, x_n) := \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$, $G := G(x_1, \ldots, x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Wykazać, że: (a) $G \leqslant M_\lambda \leqslant A$ dla $\lambda \geqslant 0$; (b) $M_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ jest niemalejącą funkcją $\lambda$; (c) $\lim_{\lambda \to \infty} M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = A$.

6. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \min\{|x-y|, 3-|x|-|y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1,1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1;r)$ (względem metryki $d$). Wykazać, że (średnica $(X,d)$) $:= \sup_{x,y \in X} d(x,y) = \frac{3}{2}$.

7. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := |(|x|-|y|)| + |\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|$ określa metrykę na $\mathbf{R}$. Wyznaczyć kule (względem $d$) o środku $x_o = 4$ i promieniach $r = 3, 4, 5, 6$. Pokazać, że $K(4;r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leqslant 2$ lub $r \geqslant 6$.

8. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy } xy \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{gdy } xy < 0 \end{cases}$ określa metrykę na $\mathbf{R}$. Pokazać, że istnieją stałe $0 < C_1 < C_2$ takie, że $C_1|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant C_2|x-y|$ dla $x, y \in \mathbf{R}$, tzn. metryka $d$ jest równoważna metryce $d_\diamond$.

9. Czy wzór $d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbf{R}$?

10. Wykazać, że funkcja $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadaje *pseudometrykę* na $\mathbf{R}$ (tzn. spełnia warunki $d(x,x) = 0, d(x,y) = d(y,x), d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$); opisać określoną przez $d$ relację równoważności w $\mathbf{R}$: $x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} d(x,y) = 0$.

    (a) $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\cos x - \cos y|$, (b) $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\sin(x-y)|$.

11. Niech $Z$ – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z \ : \ A \text{ skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A,B) := |A \div B|$ określa metrykę w zbiorze $P$. Opisać kule i odcinki w $P$ względem tej metryki.

12. Dowieść, że: (a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony; (b) jeśli $(x_n)$ i $(y_n)$ są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(X,d)$, to ciąg liczbowy $(d(x_n,y_n))$ jest zbieżny.

13. Niech $(x_n)$ – zbieżny ciąg w przestrzeni metrycznej $(X,d)$, $\overline{x} := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Wykazać, że jeśli $\forall n \in \mathbf{N} : x_n \neq \overline{x}$, to istnieje liczba $n \geqslant 100$ (a nawet nieskończenie wiele $n \in \mathbf{N}$) spełniająca warunek: $\forall k \in \overline{1,n} : d(x_k, \overline{x}) \geqslant d(x_n, \overline{x})$ .

14. Znaleźć liczbę $l \in \mathbf{R}$ oraz funkcję $h : ]0,\infty[ \to \mathbf{N}$ takie, że $\forall \epsilon > 0 : \forall n > h(\epsilon) : |x_n - l| < \epsilon$, jeżeli ciąg $(x_n)$ jest określony wzorem: (a) $x_n := \frac{100}{n} E(\frac{n}{100})$; (b) $x_n := \sqrt{n^2+3n} - n$; (c) $x_n := \sqrt[n]{n+100}$; (d) $x_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

15. Wykazać, że: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}} - n) = \frac{1}{100}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n + 4\sqrt{n^2+n} - 2\sqrt{n^2-n} - 3\sqrt{n^2+2n}\right) = \frac{5}{4}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(2\sqrt{n^2-n+2} - 3\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2n}) = -\frac{1}{4}$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}} - \sqrt{n^2+\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$; (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right) = \frac{7}{3}$; (f) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q - \left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p, q \in \mathbf{N}$; (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right) = 1$; (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3} = \max\{1, a^2\}$ dla $a \in \mathbf{R}$; (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^7+7)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}} = 30\sqrt{22}$; (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(3+x)^n + (1-x)^n} = 2 + |1+x|$ dla $x \in \mathbf{R}$; (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_1 a_1^{n+1} + \ldots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$, jeśli $r \in \mathbf{N}$ i liczby $p_i, a_i$ są dodatnie; (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \dfrac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right) = \dfrac{1}{2}$; (m) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right) = 0$; (n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right) = +\infty$; (o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+2} \cdots \frac{n}{3n} = 0$; (p) $\lim\limits_{n\to\infty} n[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$; (q) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 2$; (r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+1}{n^3+1} + \dfrac{n^2+2}{n^3+2} + \ldots + \dfrac{n^2+n}{n^3+n}\right) = 1$; (s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \dfrac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \dfrac{2}{3}$; (t) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^4+2^4+\ldots+n^4} = 1$; (u) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2-3} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[n]{k^2-2} = 1$.

16. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru: $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbf{N}\}$; $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbf{R}\}$; $\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbf{R}\}$; $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbf{N}\}$; $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbf{N}\}$; $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbf{N}\}$; $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbf{N}\}$; $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbf{N}\}$.

17. Wyznaczyć kresy zbioru $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, zbiór punktów skupienia ciągu $(x_n)$ oraz $\liminf x_n$ i $\limsup x_n$, jeżeli: (a) $x_n := \sqrt[n]{n}$; (b) $x_n := \frac{1}{n}\left(1 + 2E(\frac{n}{\sqrt{2}})\right)$; (c) $x_n := \cos\frac{5\pi}{2n}$; (d) $x_n := \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$; (e) $x_n := \frac{(n-1)(n+5)}{n} - 5E(\frac{n}{5})$.

18. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy $(a_n)$ jest ograniczony, to ciąg $(x_n)$ o wyrazach $x_n =: \dfrac{2^{n-1}a_1 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n}{2^{n-1} + \ldots + 2 + 1}$ jest zbieżny. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. *Wskazówka.* $\tilde{x}_n := (1 - 2^{-n})x_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

19. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy $(a_n)$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + a_n}{n + (n-1) + \ldots + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

20. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy $(a_n)$ jest zbieżny, to zbieżny do tej samej granicy jest także ciąg o wyrazach $x_n := \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$. *Uwaga.* Twierdzenie Stolza pozwala tu jedynie stwierdzić, że opuszczenie skończonej liczby początkowych wyrazów ciągu $(a_n)$ nie wpływa ani na zbieżność, ani na wartość granicy ciągu $(x_n)$.

21. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6} = \dfrac{1}{6}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^5} - \dfrac{n}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + \ldots + \sqrt{n(n+1)}}{n} - \dfrac{n}{2}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}) = 2$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \dfrac{2}{e}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \dfrac{e^2}{2}$.

22. Dla danych liczb dodatnich $a$ i $b$ określmy rekurencyjnie dwa ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$, przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} := \dfrac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n), (b_n)$ są zbieżne oraz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

23. Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy $(a_n)$ jest ograniczony z dołu oraz $\forall n \in \mathbf{N} : a_{n+1} \leqslant a_n + \frac{1}{n^2}$, to jest zbieżny.

24. Wykazać zbieżność ciągu $(a_n)$, jeśli: (a) $a_n := (1 + \frac{1}{1^2})(1 + \frac{1}{2^2}) \cdots (1 + \frac{1}{n^2})$; (b) $a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sqrt{2n}$; (c) $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ (liczba $\lim a_n \approx 0.57721566$ nazywa się *stałą Eulera*); (d) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n+1}$.

25. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1 + \ldots + a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n \searrow 0$ przy $n \to \infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

## Wskazówki.

**1.** (c) $nx = nq + r + \theta$, gdzie $q \in \mathbf{Z}$, $r \in \overline{0, n-1}$, $0 \leqslant \theta < 1$. (d) Z poprzedniego wzoru wynika $E(y + \frac{1}{2}) = E(2y) - E(y)$; podstawić $y = 2^{-n}x$ i wysumować po $n$. **2.** Podstawić $a_k = p_1 + \ldots + p_k$ i oszacować $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k(b_k - b'_k)$. **5.** (a) Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ nierówność Cauchy'ego daje $\binom{n}{k}G^k \leqslant \sum_{i_1 < \ldots < i_k} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$; (b) Zauważyć, że z $0 \leqslant \lambda < \mu$ wynika $M_\mu(x_1, \ldots, x_n) - M_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = M_{\mu-\lambda}(y_1, \ldots, y_n) - G(y_1, \ldots, y_n)$, gdzie $y_k = \lambda + x_k$; (c) $M - \lambda = \frac{(\lambda+x_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda+x_n) - \lambda^n}{\sum \lambda^{n-1-k}G_\lambda^k}$, gdzie $G_\lambda := G(\lambda + x_1, \ldots, \lambda + x_n)$. **15.** (h),(j),(k),(o),(q),(r),(t),(u) Wykorzystać twierdzenie o trzech ciągach; (m),(n) Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$; (s) Uprościć wzór na $x_n$. **16.** Ciąg $(\sqrt[n]{n+100})$ jest malejący (nierówność Bernoulliego). Oszacować $\sqrt[m]{n}$ jako średnią geometryczną $m$ liczb $n, 1, \ldots, 1$. **17.** (e) $x_{5k+r} = r + 4 - \frac{5}{5k+r}$ dla $r \in \overline{0, 4}$. **19.** Twierdzenie Stolza. **22.** Sprawdzić monotoniczność tych ciągów. **23.** Dobrać $(b_n)$ tak, by ciąg $(a_n + b_n)$ był malejący i ograniczony. **24.** Zbadać monotoniczność ciągów $(a_n)$ i $(b_n)$, gdzie: (a) $b_n := (1 + \frac{1}{n})a_n$; (b) $b_n := a_n + \sqrt{2n} - \sqrt{2n+1}$; (c) $b_n := a_n - \frac{1}{n}$; (d) $b_n = a_n\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$.

## Odpowiedzi.

**3.** $[0 < a < b, b + E(\frac{-a}{b-a}) \geqslant 0]$ lub $[a \leqslant 0, b \geqslant 1]$; można to ująć krócej: $b \geqslant 1$ i $a \leqslant \frac{bE(b)}{1+E(b)}$ (gdyż $x + E(y) \geqslant 0 \iff E(x) + y \geqslant 0$). **6.** $K(1; \frac{4}{5}) = \left]\frac{1}{5}, 1\right]$, $K(1; \frac{5}{4}) = \left[-1, -\frac{3}{4}\right[ \cup \left]-\frac{1}{4}, 1\right]$. **7.** $K(4;3) = ]-5, -3[ \cup ]1, 7[$; $K(4;4) = ]-6, -2[ \cup ]0, 8[$; $K(4,5) = ]-7, -1[ \cup ]0, 9[$; $K(4,6) = ]-8, 10[$. *Uwaga.* $\phi(x) := (|x|, \operatorname{sgn} x)$jest izometrycznym zanurzeniem $(\mathbf{R}, d)$ w $(\mathbf{R}^2, d_\diamond)$. **9.** Nie, np. $d(x,0) + d(0, x+1) < d(x, x+1)$ dla $x \gg 0$. **10.** (a) $x \sim y \iff x - y \in 2\pi\mathbf{Z}$; (b) $x \sim y \iff [x, y \in \pi\mathbf{Z}$ lub $x - y \in 2\pi\mathbf{Z}]$. **11.** $[A, B] = \{C \in 2^Z : A \cap B \subset C \subset A \cup B\}$. **20.** Teza jest prawdziwa dla ciągu stałego, wystarczy więc rozważyć przypadek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; wtedy $\forall \epsilon > 0 : \exists m : \forall k > m : |a_k| < \frac{\epsilon}{2}$, więc składnik $II$ w nierówności $|x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}|a_k| =: I + II$ jest $< \frac{\epsilon}{2}$ dla $n > m$, skoro zaś $2^nI$ jest wielomianem (stopnia $\leqslant m$) względem $n$, to $\exists n_0 > m : \forall n > n_0 : I < \frac{\epsilon}{2}$. **17.** (a) $\inf = x_1 = 1, \sup = x_3 = \sqrt[3]{3}, \underline{l} = \overline{l} = 1$; (b) $\inf = x_4 = \frac{5}{4}$, $\sup = x_3 = \frac{5}{3}$, $\underline{l} = \overline{l} = \sqrt{2}$; (c) $\inf = x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sup = \underline{l} = \overline{l} = 1$; (d) $\inf = x_1 = \underline{l} = 0$, $\sup = \overline{l} = 1$; (e) $\inf = x_1 = 0$, $\sup = \overline{l} = 8$, $\underline{l} = 4$. **25.** $\forall \epsilon > 0 : \exists m : \forall n > m : \epsilon \geqslant a_{m+1} + \ldots + a_n \geqslant (n-m)a_n$ (dlaczego?); stąd $\forall n \geqslant 2m : \epsilon \geqslant \frac{n}{2}a_n$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

## Seria 3.

1. Wykazać, że: (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(an)}{E(bn)}=\dfrac{a}{b}$, gdy $b\neq 0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(\sqrt{2n})}{E(\sqrt{n})}=\sqrt{2}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=0$ dla $a>0$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\dfrac{n}{n+2}\cdots\dfrac{n}{2n}=0$; (e) jeśli $x_0>0$ oraz $x_{n+1}=\frac{x_n}{1+x_n}$ dla $n\in\mathbf{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$; (f) jeśli $x_0>0$ i $x_{n+1}=\frac{\sqrt{1+x_n^2}-1}{x_n}$ dla $n\in\mathbf{N}$, to $\lim\limits_{n\to\infty}2^nx_n=\operatorname{arc\,tg}x_0$; (g) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n})=\log 2$.

2. Zbadać zbieżność ciągu $(x_n)$, ewentualnie obliczyć granicę: (a) $x_n=n\log\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$; (b) $x_n=\frac{2}{\sqrt[n]{9}-1}-\frac{3}{\sqrt[n]{27}-1}$; (c) $x_n=\frac{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{3}}$; (d) $x_n=\cos\frac{2\pi n^2}{2n+1}$; (e) $x_n=\cos\frac{\pi n^2}{n+3}$; (f) $x_n=\sin\pi\sqrt{n^2+n+1}$; (g) $x_n=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}\sqrt{n(n+1)})$; (h) $x_n=\frac{n}{E(\sqrt{n})}-E(\sqrt{n})$; (i) $x_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; (j) $x_n=(2-\sqrt[n]{10})^n$; (k) $x_n=(\log n)^{-1}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})$.

3. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: (a) $x_0>0$ dane, $x_{n+1}=\frac{x_n+2}{x_n+1}$; (b) $x_0>0$ dane, $x_{n+1}=\frac{1+x_n}{2x_n}$; (c) $x_0>2$ dane, $x_{n+1}=5-\frac{6}{x_n}$; (d) $x_0=0$, $x_{n+1}=\sqrt{2-x_n}$; (e) $x_1=0$, $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$; (f) $x_0\in\,]-1,2[$ dane, $x_{n+1}=x_n(x_n-1)$; (g) $x_0>0$ dane, $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$; (h) $x_0\neq\frac{2}{3}$ dane, $x_{n+1}=\frac{2x_n-1}{3x_n-2}$; (i) $x_0\in[-1,1]$ dane, $x_{n+1}=\frac{10}{1+x_n^2}$; (j) $x_0\in\,]0,1[$ dane, $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n(4-x_n)$; (k) $a>0, k\in\mathbf{N}, x_0>0$ dane, $x_{n+1}=\sqrt[k+1]{ax_n}$.

4. Korzystając z nierówności Bernoulliego wykazać, że $\forall x>-1:\forall n\in\mathbf{N}:\frac{x}{1+x}\leqslant n(\sqrt[n]{1+x}-1)\leqslant x$. Wywnioskować z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(\sqrt[n]{1+b_n}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n}$, jeśli $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ i granica po prawej stronie istnieje. Sprawdzić, że: $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(1-\sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}})=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{n+a}-\sqrt[n]{n+b})=a-b$; $\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sqrt[n]{n^2+a}-\sqrt[n]{n^2+b})=a-b$.

5. Dowieść, że: (a) Jeśli $x_n>0$ oraz $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, to albo granica $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ nie istnieje (podać przykład), albo $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=:l\in[0,1]$ (podać przykłady pokazujące, że dopuszczalne są tu wszystkie wartości $l\in[0,1]$). (b) Jeżeli $\lim_{n\to\infty}x_n>0$, to $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=1$. (c) Jeśli $\lim_{n\to\infty}x_n=1$, to $\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x_n}-1)=0$.

6. Wykazać, że jeśli $r\in\mathbf{N}$, $a_1,\ldots,a_r$ są dodatnie oraz $p_1+\ldots+p_r=1$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(p_1\sqrt[n]{a_1}+\ldots+p_r\sqrt[n]{a_r})^n=a_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot a_r^{p_r}$. W szczególności: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}-1)^n=ab$ (dla $a,b>0$); $\lim\limits_{n\to\infty}(p\sqrt[n]{a}-p+1)^n=a^p$ (dla $a,p\in\mathbf{R}, a>0$).

7. Niech dane $r\in\mathbf{N}$ oraz $a_k,b_k,c_k\in\mathbf{R}$ dla $k\in\overline{1,r}$, takie że $\sum_{k=1}^r a_k=0$, $\sum_{k=1}^r a_kb_k=0$. Wykazać, że
$$\lim_{n\to\infty}n\sum_{k=1}^r a_k\sqrt{n^2+b_kn+c_k}=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^r a_k\Delta_k,\qquad\text{gdzie }\Delta_k:=b_k^2-4c_k.$$
Korzystając z tego wzoru sprawdzić, że: $\lim\limits_{n\to\infty}n(2\sqrt{n^2+7n+3}-5\sqrt{n^2+n-4}+3\sqrt{n^2-3n+2})=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}n(2\sqrt{n^2+7n-2}-5\sqrt{n^2+n-6}+3\sqrt{n^2-3n+2})=1=\lim\limits_{n\to\infty}n[2\sqrt{n^2+9n+6}-\sqrt{n-1}(5\sqrt{n+4}-3\sqrt{n})]$.

8. Oznaczmy $x_k:=\sqrt{k}-E(\sqrt{k})$ dla $k\in\mathbf{N}$. (a) Wykazać, że jeśli $a_n$ dla $n\in\mathbf{N}$ oznacza średnią arytmetyczną liczb $x_k$ dla $k\in\overline{n^2,(n+1)^2-1}$, tzn. $E(\sqrt{k})=n$, to $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$. (b) Wykazać, że $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)=\frac{1}{2}$.

9. Wykazać, że jeśli $\forall n\in\mathbf{N}: x_{n+N}=x_n$, tzn. ciąg $(x_n)$ jest okresowy, to $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\dfrac{x_1+\ldots+x_N}{N}$.

10. Dla zadanych liczb $x_1,\ldots,x_8\in\mathbf{R}$ określmy ciąg $(x_n)$ rekurencją $x_{n+8}=\frac{1}{8}(x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{n+7})$. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{x_1+2x_2+\ldots+8x_8}{1+2+\ldots+8}$, dowodząc kolejno następujących faktów: (1) Ciąg o wyrazach $s_n:=x_n+2x_{n+1}+\ldots+8x_{n+7}$ jest stały, więc *jeżeli* $(x_n)$ *jest zbieżny, to* $s_1=\lim_{n\to\infty}s_n=(1+2+\ldots+8)\lim_{n\to\infty}x_n$; (2) Jeśli $\delta\{x_1,\ldots,x_8\}:=\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 8}|x_i-x_j|=\max\{x_1,\ldots,x_8\}-\min\{x_1,\ldots,x_8\}$, to $\delta\{x_8,\ldots,x_{15}\}\leqslant\frac{7}{8}\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$; (3) $\delta\{x_{7r+1},\ldots,x_{7r+8}\}\leqslant(\frac{7}{8})^r\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$ dla $r\in\mathbf{N}$; (4) $|x_n-x_m|\leqslant(\frac{7}{8})^r\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$ dla $r\in\mathbf{N}$, $m,n>7r$.

11. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem liczbowym, takim że $x_n\geqslant 0$, $x_{m+n}\leqslant x_m+x_n$ dla $m,n\in\mathbf{N}$. Wykazać, że ciąg $(\frac{x_n}{n})$ jest zbieżny, a jego granica jest równa $\inf\{\frac{x_n}{n}:n\in\mathbf{N}\}$.

12. Zdefiniujmy *normę* $\|f\|$ wielomianu $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, $a_k\in\mathbf{C}$, wzorem $\|f\|:=|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|$. Wykazać, że jeżeli $f^n$ oznacza $n$-tą potęgę $f$, tzn. $f^n(z):=(f(z))^n$, to $\forall f$ ciąg liczbowy $(\sqrt[n]{\|f^n\|})$ jest zbieżny.

13. Ciąg liczbowy $(x_n)$ nazwijmy *quasi-rosnącym*, jeżeli $\forall N\in\mathbf{N}: x_n\geqslant x_N$ dla *prawie wszystkich* $n\in\mathbf{N}$. Sprawdzić, że ciąg $\left(\frac{100}{n+1}E(\frac{n}{100})\right)$ jest quasi-rosnący, chociaż $x_n<x_{n-1}$, gdy $n$ nie jest wielokrotnością 100. Wykazać, że jeśli ciąg quasi-rosnący $(x_n)$ jest ograniczony z góry, to jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n:n\in\mathbf{N}\}$.

14. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy $(x_n)$ spełnia warunki: (a) $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$ oraz (b) $\exists N\in\mathbf{N}:\forall n\geqslant N: x_{n+2}\in[x_n,x_{n+1}]$, to jest zbieżny. [Przyjmujemy tu konwencję $[a,b]:=\{x\in\mathbf{R}: a\leqslant x\leqslant b \text{ lub } b\leqslant x\leqslant a\}$]. Podać przykład rozbieżnego ciągu $(x_n)$ spełniającego warunki: $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0,\ \ \forall n\in\mathbf{N}:(-1)^n(x_{n+1}-x_n)>0$.

15. Wykazać, że: (a) $\limsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$; (b) $\liminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|>1 \Rightarrow$ ciąg $(x_n)$ jest rozbieżny.

16. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej $(X,d)$. Rozważmy następujące warunki $(C),(C_1),(C_2),(C_3)$: $(C)$ $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbf{N}:\forall m,n\geqslant N: d(x_m,x_n)\leqslant\epsilon$ (*Cauchy*); $(C_1)$ $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbf{N}:\forall n\geqslant N: d(x_n,x_N)\leqslant\epsilon$; $(C_2)$ $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbf{N}:\exists x\in X:\forall n\geqslant N: d(x_n,x)\leqslant\epsilon$; $(C_3)$ $\forall\epsilon>0:\exists N\in\mathbf{N}:\forall n\geqslant N: d(x_n,x_{n+1})\leqslant\epsilon$. Wykazać, że $(C_1)\iff(C)\iff(C_2)$, $(C)\Rightarrow(C_3)$. Znaleźć przykład pokazujący, że $(C_3)\not\Rightarrow(C)$.

17. Dowieść, że jeśli ciąg $(x_n)$ w przestrzeni metrycznej spełnia warunek $\exists\ C>0:\forall n\in\mathbf{N}:\sum\limits_{k=1}^{n}d(x_k,x_{k+1})<C$, to jest ciągiem Cauchy'ego. Podać przykład liczbowego ciągu Cauchy'ego nie spełniającego powyższego warunku.

18. Wyznaczyć punkty ciągłości funkcji $f:D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}$, jeśli

(a) $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ dla $x>0$; (b) $f(x):=\begin{cases}x(x^2-2), & x\in\mathbf{Q}\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q};\end{cases}$ (c) $f(x):=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ \sin\frac{1}{x}, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

19. Korzystając z własności Darboux wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja: (a) $]0,1[$ na $[0,1[$; (b) $[0,1[$ na $]0,1[$.

20. Wykazać, że jeśli $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f$-obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to $f$ jest stała.

21. Dowieść, że jeśli $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest ciągła i istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, to $f$ jest ograniczona.

22. Dowieść, że dane równanie ma co najmniej trzy pierwiastki rzeczywiste: (a) $x+5\cos x=0$, (b) $x^5-3x=1$.

23. Wykazać, że każda ciągła surjekcja $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$ ma punkt stały, tzn. $\exists x\in[0,\infty[: f(x)=x$.

24. Wyznaczyć $f([0,\infty[)$, jeśli $f:[0,\infty[\to\mathbf{R}$ dane jest wzorem: (a) $f(x):=\sin x$; (b) $f(x):=\frac{x}{1+x}$; (c) $f(x):=\frac{x\sin x}{1+x}$ (posłużyć się własnością Darboux). Korzystając z tego wykazać, że dla dowolnego przedziału $Y\subset\mathbf{R}$ (niekoniecznie ograniczonego) istnieje funkcja ciągła $f:[0,\infty[\to\mathbf{R}$ taka, że $f([0,\infty[)=Y$.

25. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że jeśli $X,Y\subset\mathbf{R}$ są niepustymi przedziałami, przy czym $X$ jest niezwarty, to istnieje funkcja ciągła $f:X\to\mathbf{R}$ taka, że $f(X)=Y$.

26. Dowieść, że : (a) jeśli podzbiory $A$ i $B$ przestrzeni $\mathbf{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A+B:=\{a+b\ :\ a\in A,\ b\in B\}$ też jest zwarty; (b) jeśli $A$ jest zwarty, a $B$ domknięty, to $A+B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A,B\subset\mathbf{R}^2$, dla których zbiór $A+B$ nie jest domknięty.

27. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność zbioru $A:=\{x\in\mathbf{R}\ :\ 6x^{10}-5x^8-4x^6+3x^4-2x^2+1\leqslant 0\}$.

28. Ciągi $(x_n)$ i $(y_n)$ w przestrzeni metrycznej $(X,d)$ spełniają warunek $\{x_n : n\in\mathbf{N}\}=\{y_n : n\in\mathbf{N}\}=:Z$. Udowodnić, że jeśli ciągi te są zbieżne, przy czym $x:=\lim_{n\to\infty}x_n\neq y:=\lim_{n\to\infty}y_n$, to zbiór $Z$ jest skończony.

## Wskazówki.

**1.** (g) Wykazać, że $\log\frac{n+1}{n}\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\log\frac{n}{n-1}$ dla $n\geqslant 2$. **2.** (i) Pokazać, że $x_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **3.** (a),(b),(d) osc.; (b) $|x_{n+2}-1|\leqslant\frac{1}{2}|x_n-1|$; (c) monotoniczny; (e),(j) rosnący; (f) osc.; zacząć od $x_0\in[0,1]$; zauważyć, że $g([0,1])\subset[0,1]$ i $g(x)\leqslant x$ na $[0,1]$; (g),(k) malejący; (h) obliczyć $g:=f\circ f$; (i) $\forall n: |x_n|\leqslant 1$ lub $x_n\geqslant 5$. **5.** (b) Zauważyć, że $|\sqrt[n]{x}-1|\leqslant|x-1|$ dla $x\geqslant 0$, gdyż $\sqrt[n]{x}\in[1,x]$. **9.** Sprawdzić, że ciąg $(x_1+\ldots+x_n-ns)$, gdzie $s:=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_n$, jest okresowy, a więc ograniczony. **10.** (2) Dla $8\leqslant i<j\leqslant 15$ mamy $x_i-x_j=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}(x_i-x_{j-k})$; (4) $x_n,x_m\in[\min\{x_{7r+1},\ldots,x_{7r+8}\},\max\{*\}]$. **12.** Zauważyć, że $\|fg\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$, więc ciąg $(\log\|f^n\|)$ spełnia ... **21.** $\exists x^-<0:\forall x\leqslant x^-: f(x)\in[l^--1,l^-+1]$ oraz $\exists x^+>0:\forall x\geqslant x^+:\ldots$ itd., gdzie $l^\pm:=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$.

## Odpowiedzi.

**2.** (a) $l=2$; (b) $l=\frac{1}{2}$; (c) $l=\log\frac{3}{2}/\log\frac{5}{3}$; (d) $l=0$; (e),(f),(g),(h) rozbieżny; (i) $l=0$; (j) $l=\frac{1}{10}$; (k) $l=1$. **3.** (a),(g) $l=\sqrt{2}$; (b),(j),(d) $l=1$; (c) $l=3$; (e) $l=2$; (f) $l=0$; (h) zbieżny $\iff$ $x_0=\frac{1}{3}$ lub $x_0=1$; (i) rozbieżny; (k) $l=\sqrt[k]{a}$. **7.** $x_n=n\sum_k a_k\sqrt{*}=n\sum_k a_k(\sqrt{*}-n)=n\sum_k\frac{a_k(b_kn+c_k)}{n+\sqrt{*}}=x_n'+x_n''$, gdzie $x_n'=n^2\sum_k a_kb_k(\frac{1}{n+\sqrt{*}}-\frac{1}{2n})=-n^2\sum_k a_kb_k\frac{b_kn+c_k}{2n(n+\sqrt{*})^2}\xrightarrow{n\to\infty}-\frac{1}{8}\sum_k a_kb_k^2$, $x_n''=n\sum_k\frac{a_kc_k}{n+\sqrt{*}}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_k a_kc_k$. **8.** (a) $S_n:=\sum_{k=n^2}^{n(n+2)}x_k=\sum_{l=0}^{2n}x_{n^2+l}\in[n,n+\frac{1}{2}]$, gdyż $x_{n^2+l}=\frac{l}{n+\sqrt{n^2+l}}\in[\frac{l}{2n+1},\frac{l}{2n}]$; stąd $a_n\in[\frac{n}{2n+1},\frac{1}{2}]$. (b) Niech $m:=E(\sqrt{n})$, wtedy $m^2\leqslant n\leqslant m^2+2m$, więc $\sum_{k=1}^{m-1}S_k\leqslant x_1+\ldots+x_n\leqslant\sum_{k=1}^{m}S_k$; stąd oszacowanie $S_k$ daje $x_1+\ldots+x_n\in[\frac{m(m-1)}{2},\frac{m(m+2)}{2}]$. **18.** (a) $]0,1[\cup]1,\infty[$; (b) $\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}$; (c) $\{\frac{1}{n\pi}: n\in\mathbf{Z}, n\neq 0\}$. **20.** Gdyby $\exists x_1,x_2: f(x_1)<f(x_2)$, wtedy $U:=\{x\in\mathbf{R}: f(x_1)<f(x)<f(x_2)\}$ byłby otwarty (ciągłość), podczas gdy $f(U)=]f(x_1),f(x_2)[$ (własność Darboux) nie jest domknięty. **26.** Np. $A:=\mathbf{R}\times\{0\}$ (prosta), $B:=\{(x,y): xy=1\}$ (hiperbola). **27.** Domknięty, nieotwarty, zwarty, niespójny. **28.** Kule $K(x;r)$, $K(y;r)$ dla $r:=\frac{1}{2}d(x,y)$ są rozłączne, tzn. ich dopełnienia dają w sumie całą przestrzeń $X$, a każde z tych dopełnień zawiera jedynie skończoną liczbę elementów zbioru $Z$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

## Seria 4.

1. Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbf{N}$ w topologii zadanej metryką $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Czy metryka $d_\circ(m,n) := |m-n|$ określa tę samą co $d$ topologię w zbiorze $\mathbf{N}$?

2. Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną; dla $A \subset X$ i $\epsilon \geqslant 0$ oznaczmy $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x,a) \leqslant \epsilon\}$. Rozważmy następujące implikacje: (D) $A$ domknięty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ domknięty; (O) $A$ otwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ otwarty; (Z) $A$ zwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ zwarty; (S) $A$ spójny $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ spójny. Dowieść, że: (a) $A$ zwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ domknięty; (b) w przestrzeni $X := \mathbf{R}^n$ z metryką $d(x,y) := \|x-y\|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe; (c) dla $X := ]-\infty,-1[ \cup \{0\} \cup ]+1,+\infty[$ z metryką $d(x,y) := |x-y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.

3. Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $\operatorname{Fr} A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ nazywa się *brzegiem* (topologicznym) podzbioru $A \subset X$. Dowieść, że: (a) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = (A \setminus \operatorname{Int} A) \cup (\overline{A} \setminus A)$; (b) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$; (c) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$; (d) $X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A)$; (e) $A$ jest domknięty $\iff$ $\operatorname{Fr} A \subset A$; (f) $A$ jest otwarty $\iff$ $A \cap \operatorname{Fr} A = \emptyset$.

4. Sprawdzić, że: $\overline{\bigcap_t A_t} \subset \bigcap_t \overline{A_t}$; $\operatorname{Int}(\bigcup_t A_t) \supset \bigcup_t \operatorname{Int} A_t$; $F$ domknięty $\Rightarrow$ $\overline{\operatorname{Int} F} \subset F$; $G$ otwarty $\Rightarrow$ $\operatorname{Int} \overline{G} \supset G$.

5. Sprawdzić, że jeśli $F$ jest domkniętym, a $G$ — otwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej, to $\operatorname{Int} F = \operatorname{Int} \overline{\operatorname{Int} F}$, $\overline{G} = \overline{\operatorname{Int} \overline{G}}$. Wywieść stąd, że: $A = \operatorname{Int} \overline{A} \iff \exists\, F$ domknięty: $A = \operatorname{Int} F$, $\quad A = \overline{\operatorname{Int} A} \iff \exists\, G$ otwarty : $A = \overline{G}$.

6. Dowieść, że jeśli $A$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej $X$, to: (a) $\overline{A} \setminus A$ jest domknięty $\iff \exists F, G : A = F \cap G$; (b) $A \setminus \operatorname{Int} A$ jest domknięty $\iff \exists F, G : A = F \cup G$ $\quad$ ($F$ oznacza tu domknięty, a $G$ — otwarty podzbiór $X$).

7. Wykazać, że jeżeli $X$ i $Y$ są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne: (a) $f$ jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w $Y$ są otwarte w $X$); (b) przeciwobrazy zbiorów domkniętych w $Y$ są domknięte w $X$; $\quad$ (c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \subset X$.

8. Niech $X$ będzie przestrzenią zwartą, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem ciągłym. Wykazać, że: (a) jeśli $A \subset X$ jest domknięty, to $f(A)$ jest domknięty; (b) jeśli $f$ jest injektywne, to jest homeomorfizmem $X$ na $f(X)$.

9. Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.

10. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(X,d)$, a $Z := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Dowieść, że jeśli $x \in X$ jest punktem skupienia zbioru $Z$, to $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wywnioskować z tego, że jeśli ciąg Cauchy'ego jest rozbieżny, to zbiór jego wyrazów jest *dyskretny* (tzn. nie ma punktów skupienia), a w szczególności — domknięty.

11. Odwzorowanie $f$ nazywa się *domknięte* (*otwarte*), jeżeli $f$-obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbf{R}$) odwzorowanie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest domknięte lub otwarte:
(a) $f(x) := \sqrt{1+x^2}$; $\quad$ (b) $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\quad$ (c) $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$; $\quad$ (d) $f(x) := \sin x$.

12. Niech dane $n \in \mathbf{N}$, $a_0 < \ldots < a_n$ oraz dodatnie $b_0, \ldots, b_n$. Wykazać, że równanie $\frac{b_0}{x-a_0} + \frac{b_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{b_n}{x-a_n} = 0$ ma dokładnie $n$ rzeczywistych pierwiastków, po jednym w każdym z przedziałów $]a_0,a_1[$, $]a_1,a_2[$, $\ldots$, $]a_{n-1},a_n[$.

13. Zbadać zbieżność szeregów: (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$; (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$;
(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$; (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$; (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$; (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;
(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n$; (11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(10 - p\sqrt[n]{5}\right)^n$; (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}$; (13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$;
(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^p$; (15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; (16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$; (17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$;
(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$; (21) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$; (22) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$;
(24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\log(1+\frac{1}{n})$; (25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n(n+1)}{n^2+1}$; (26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{n}$; (27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt[n]{n^3+n}$; (28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$;
(29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1}$; (30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (31) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$; (32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$; (33) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$;

$$(34)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n}\right);\ (35)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};\ (36)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{n};\ (37)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{E(\sqrt{n})}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$(38)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{E(n/\sqrt{5})};\ (39)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})};\ (40)\ \sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt[n]{n})^n;\ (41)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}};\ (42)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n}\right).$$

14. Niech $s := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ oraz $s' := 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$ ($s'$ różni się od $s$ jedynie kolejnością składników: po dwóch składnikach dodatnich następuje jeden składnik ujemny). Wykazać, że $s' = \frac{3}{2}s$.

15. Dowieść, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\ldots+na_n}{n(n+1)}$ jest zbieżny do tej samej sumy.

16. Wykazać, że jeśli $a_n > 0$ i istnieje $l := \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log a_n}{\log n}$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest przy $l < -1$ zbieżny, a przy $l > -1$ — rozbieżny.

17. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n > 0$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich; dla $n \in \mathbf{N}$ oznaczmy $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$, $r_n := \sum_{k=n}^{\infty} x_k$. Wykazać, że: (a) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{s_n}$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{s_n^2}$ — zbieżny. (b) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{r_n}$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\sqrt{r_n}}$ — zbieżny.

18. Niech $x_n > 0$ dla $n \in \mathbf{N}$. Wykazać, że: (a) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest rozbieżny, to istnieje ciąg $(t_n)$ taki, że $t_n \searrow 0$, dla którego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest rozbieżny. (b) Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny, to istnieje ciąg $(t_n)$ taki, że $t_n > 0$ oraz $t_n \nearrow +\infty$, dla którego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest zbieżny.

19. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem rosnącym i dodatnim. Wykazać, że dla $\alpha > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^{\alpha}x_{n+1}}$ jest zbieżny. *Wskazówka.* Rozważyć przypadki: (a) $(x_n)$ ma skończoną granicę; (b) $\alpha > 1$, $x_n \nearrow +\infty$; (c) $0 < \alpha \leqslant 1$.

20. Załóżmy, że $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna i istnieje $f''(0)$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0) = f'(0) = 0$. *Uwaga.* Przykład $f(0) = 0$, $f(x) := x(\log\frac{1}{x})^{-1}$ dla $0 < x \leqslant 1$ (wtedy $f$ różniczkowalna, $f(0) = f'(0) = 0$, a $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ — rozbieżny), pokazuje istotność założenia o istnieniu $f''(0)$.

## Wskazówki.

**6.** (a)[$\Rightarrow$]$F := \overline{A}$, $G := X \setminus (\overline{A} \setminus A)$; (b)[$\Rightarrow$]$F := A \setminus \operatorname{Int} A$, $G := \operatorname{Int} A$. **9.** Wyrazy ciągu Cauchy'ego $(x_n)$ należą do $\overline{Z}$, gdzie $Z := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$; skoro $\overline{Z}$ jest zwarty, to $(x_n)$ ma zbieżny podciąg... **10.** Zauważyć, że: $1^0$ punkt skupienia zbioru jest granicą różnowartościowego ciągu jego elementów; $2^0$ różnowartościowy ciąg liczb naturalnych ma rosnący podciąg; $3^0$ ciąg Cauchy'ego mający zbieżny podciąg jest zbieżny. **11.** (a) $f : [0,\infty[ \to [1,\infty[$ i $f : ]-\infty,0] \to [1,\infty[$ są homeomorfizmami; (b) $f : \mathbf{R} \to ]-1,1[$ jest homeomorfizmem; (c) $f([1,\infty[) = ]0,1] = f(]0,2[)$; (d) wyznaczyć $f(A)$ dla $A := \bigcup_{n=1}^{\infty}[2n\pi, 2n\pi + a_n]$, gdzie $0 \leqslant a_n \nearrow \frac{\pi}{2}$. **13.** (9) $a_n \leqslant 2^{-\sqrt{n}} \leqslant n^{-2}$ dla p.w.$n$; (10),(17),(36) $\lim_{n\to\infty}|a_n| =?$; (11),(13),(16) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = ?$; (12),(40) $\lim_{n\to\infty} na_n =?$; (18) $a_n < n^{-2}$ dla p.w.$n$; (20) porównać z $\sum\frac{1}{n}$ lub $\sum\frac{1}{n^2}$; (21) $\log\log n > e^{-2}$ dla p.w.$n$; (22) $a_n > \frac{1}{n}$ dla p.w.$n$; (26) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $|\sin x| \leqslant |x|$; (27) $\frac{1}{n} \leqslant \sqrt[n]{n^3+n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$ dla p.w.$n$; (31) $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$; (33) skorzystać z (32); (37) oszacować $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n$; (39) sprawdzić, że $a_n \searrow 0$ lub oszacować $|a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}|$; (41) $\lim_{n\to\infty} n^{1-p}a_n =?$; (42) oszacować $a_{2k-1}$ i $a_{2k}$. **15.** Sprawdzić, że dla $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ i $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k$ mamy $\tilde{s}_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} s_k$ i zastosować tw. Stolza. **17.** (a) $\sum_{k=m+1}^{n}\frac{x_k}{s_k} \geqslant \frac{s_n - s_m}{s_n}$, $\frac{x_n}{s_n^2} \leqslant \frac{x_n}{s_n s_{n-1}}$; (b) $\sum_{k=m}^{n}\frac{x_k}{r_k} \geqslant \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m}$, $\frac{x_n}{\sqrt{r_n}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}} \leqslant 2\frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n}+\sqrt{r_{n+1}}}$. **18.** Skorzystać z (17). **19.** (a) Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, wtedy zbieżny jest $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ i teza wynika z kryterium porównawczego. (b) Dla p.w. $n$ mamy $\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^{\alpha}x_{n+1}} \leqslant \frac{x_{n+1}-x_n}{x_n x_{n+1}}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}})$ jest zbieżny. (c) Dla $t, \alpha \in ]0,1]$ mamy nierówność $\alpha(1-t) \leqslant 1 - t^{\alpha}$ (tw. Lagrange'a o przyrostach); dla $t = \frac{x_n}{x_{n+1}}$ wynika stąd $\alpha\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n^{\alpha}x_{n+1}} \leqslant \frac{1}{x_n^{\alpha}} - \frac{1}{x_{n+1}^{\alpha}}$, a $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{x_n^{\alpha}} - \frac{1}{x_{n+1}^{\alpha}})$ jest oczywiście zbieżny.

## Odpowiedzi i rozwiązania.

**2.** (a) Niech $A_\epsilon \ni x_n \to x$ i $d(x_n, a_n) \leqslant \epsilon$; ciąg $(a_n)$ ma zbieżny podciąg $a_{n_k} \to a \in A$; ciągłość $d$ i $d(x_{n_k}, a_{n_k}) \leqslant \epsilon$ dają $d(x,a) \leqslant \epsilon$, tzn. $x \in A_\epsilon$. (b) (przypadek $X = \mathbf{R}^n$) Ad(D): Niech $A_\epsilon \ni x_n \to x$ i $a_n \in A$ t.że $\|x_n - a_n\| \leqslant \epsilon$; ciąg $(b_n)$, $b_n := x_n - a_n$, ma zbieżny podciąg $b_{n_k} \to b$, $\|b\| \leqslant \epsilon$; stąd $a_{n_k} \to a := x - b \in A$ (domkniętość $A$), więc $x = a + b \in A_\epsilon$. Ad(O): Gdy $A = K(x;r)$ jest otwartą kulą, wtedy $A_\epsilon = K(x; r+\epsilon)$ jest otwarty; w ogólnym przypadku $A$ jest sumą pewnych $K(x;r)$, a operacja $A \mapsto A_\epsilon$ jest oczywiście przemienna z operacją $\bigcup$. Ad(Z): Dane $x_n \in A_\epsilon$ mają rozkład $x_n = a_n + b_n$, $a_n \in A, b_n \in B := \overline{K}(0;\epsilon)$. Ciąg $(a_n)$ ma zbieżny podciąg $(a_{n_k})$ (zwartość $A$), a $(b_{n_k})$ ma zbieżny podciąg $(b_{n_{k_i}})$ (zwartość $B$), więc $(x_n)$ ma zbieżny podciąg $(x_{n'_i})$, $n'_i := n_{k_i}$. Ad(S): Niech $B := A_\epsilon$ będzie sumą $B' \cup B''$ dwóch zbiorów rozgraniczonych; spójność $A \subset B$ daje np. $A \subset B'$; tak samo spójność kuli $\overline{K}(a;\epsilon) \subset A_\epsilon \subset B$ (i to, że $a \in B'$) daje $\overline{K}(a;\epsilon) \subset B'$; stąd $B = A_\epsilon = \bigcup_{a\in A}\overline{K}(a;\epsilon) \subset B'$, czyli $B'' = \emptyset$. **11.** (a) domknięte i nieotwarte; (b) niedomknięte i otwarte; (c),(d) niedomknięte i nieotwarte. **13.** Bezwzgl. zbieżne: (1),(3),(4),(9),(13),(16),(18),(21),(23), (26),(32),(34),(35); warunkowo: (2),(24),(28),(29),(30),(33),(38),(39); rozbieżne: (6),(7),(8),(10),(12),(15),(17),(22),(25),(27),(36),(37),(40); (5) zb. $\iff p > 1$; (11) zb.(bezwzgl.) $\iff 9 < p < 11$; (14) zb.(bezwzgl.) $\iff p > 2$; (19) zb. $\iff p > 1$; (20) zb. $\iff (q < 0)$ lub $(q = 0, p < -1)$; (31) zb. $\iff \alpha \in \pi\mathbf{Z}$; (40) $na_n = (1 + x_n)^n$, gdzie $x_n = -(\sqrt[n]{n} - 1)^2$, więc $nx_n \to 0$; (41) zb. $\iff p < 0$. **14.** $s' = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}) + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) = s + \frac{1}{2}s$. **15.** $\tilde{s}_n = \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l(l+1)}\sum_{k=1}^{l} ka_k = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{l(l+1)})ka_k = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1})ka_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1-k)-(n-k)}{n+1}s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} s_k$. **20.** [$\Rightarrow$] $0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0), 0 = \lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x) - f(0)) = f'(0)$. [$\Leftarrow$] Skoro istnieje $f''(0) = \lim_{x\to 0} f'(x)/x$, to $\exists M > 0 : \exists n_0 \in \mathbf{N} : \forall x \in ]0, 1/n_0] : |f'(x)/x| \leqslant M$. Z tw.Lagrange'a $f(x) = xf'(\xi)$ dla pewnego $\xi \in ]0,x]$, a więc $|\frac{f(x)}{x^2}| = |\frac{f'(\xi)}{x}| \leqslant |\frac{f'(\xi)}{\xi}| \leqslant M$ dla $x \in ]0, 1/n_0]$, czyli $a_n := f(1/n)$ spełnia $|n^2 a_n| \leqslant M$ dla $n \geqslant n_0$.

6. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \min\{|x-y|, 3-|x|-|y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1,1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1;r)$ (względem metryki $d$). Wykazać, że (średnica $(X,d)) := \sup_{x,y\in X} d(x,y) = \frac{3}{2}$.

7. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := |(|x|-|y|)| + |\mathrm{sgn}x - \mathrm{sgn}y|$ określa metrykę na $\mathbf{R}$. Wyznaczyć kule (względem $d$) o środku $x_o = 4$ i promieniach $r = 3,4,5,6$. Pokazać, że $K(4;r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leqslant 2$ lub $r \geqslant 6$.

8. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy } xy \geqslant 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{gdy } xy < 0 \end{cases}$ określa metrykę na $\mathbf{R}$. Pokazać, że istnieją stałe $0 < C_1 < C_2$ takie, że $C_1|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant C_2|x-y|$ dla $x,y \in \mathbf{R}$, tzn. metryka $d$ jest równoważna metryce $d_\diamond$.

9. Czy wzór $d(x,y) := \dfrac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbf{R}$?

10. Wykazać, że funkcja $d : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadaje *pseudometrykę* na $\mathbf{R}$ (tzn. spełnia warunki $d(x,x) = 0, d(x,y) = d(y,x), d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$); opisać określoną przez $d$ relację równoważności w $\mathbf{R}$: $x \sim y \iff d(x,y) = 0$.
   (a) $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\cos x - \cos y|$, (b) $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\sin(x-y)|$.

11. Niech $Z$ – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z : \ A \text{ skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A,B) := |A \div B|$ określa metrykę w zbiorze $P$. Opisać kule i odcinki w $P$ względem tej metryki.

12. Dowieść, że: (a) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony; (b) jeśli $(x_n)$ i $(y_n)$ są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(X,d)$, to ciąg liczbowy $(d(x_n,y_n))$ jest zbieżny.

13. Niech $(x_n)$ – zbieżny ciąg w przestrzeni metrycznej $(X,d)$, $\overline{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$. Wykazać, że jeśli $\forall n \in \mathbf{N} : x_n \neq \overline{x}$, to istnieje liczba $n \geqslant 100$ (a nawet nieskończenie wiele $n \in \mathbf{N}$) spelniająca warunek: $\forall k \in \overline{1,n} : d(x_k,\overline{x}) \geqslant d(x_n,\overline{x})$ .

6. $K(1;\frac{4}{5}) = \left]\frac{1}{5},1\right]$ , $K(1;\frac{5}{4}) = \left[-1,-\frac{3}{4}\right[ \cup \left]-\frac{1}{4},1\right]$.

7. $K(4;3) = ]-5,-3[\cup]1,7[$; $K(4;4) = ]-6,-2[\cup]0,8[$; $K(4,5) = ]-7,-1[\cup]0,9[$; $K(4,6) = ]-8,10[$.
   *Uwaga.* $\phi(x) := (|x|, \mathrm{sgn}x)$ jest izometrycznym zanurzeniem $(\mathbf{R},d)$ w $(\mathbf{R}^2, d_\diamond)$.

9. Nie, np. $d(x,0) + d(0,x+1) < d(x,x+1)$ dla $x \gg 0$.

10. (a) $x \sim y \iff x-y \in 2\pi\mathbf{Z}$; (b) $x \sim y \iff [x,y \in \pi\mathbf{Z}$ lub $x-y \in 2\pi\mathbf{Z}]$.

11. $[A,B] = \{C \in 2^Z : A\cap B \subset C \subset A\cup B\}$.

9. Wykazać, że jeśli $\exists N \in \mathbf{N} : \forall n \in \mathbf{N} : x_{n+N} = x_n$, tzn. ciąg $(x_n)$ jest okresowy, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \frac{x_1+\ldots+x_N}{N}$.

10. Dla zadanych liczb $x_1,\ldots,x_8 \in \mathbf{R}$ określmy ciąg $(x_n)$ rekurencją $x_{n+8} = \frac{1}{8}(x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+7})$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{x_1+2x_2+\ldots+8x_8}{1+2+\ldots+8}$, dowodząc kolejno następujących faktów: (1) Ciąg o wyrazach $s_n := x_n + 2x_{n+1} + \ldots + 8x_{n+7}$ jest stały, więc *jeżeli* $(x_n)$ *jest zbieżny, to* $s_1 = \lim_{n\to\infty} s_n = (1+2+\ldots+8)\lim_{n\to\infty} x_n$; (2) Jeśli $\delta\{x_1,\ldots,x_8\} := \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 8} |x_i - x_j| = \max\{x_1,\ldots,x_8\} - \min\{x_1,\ldots,x_8\}$, to $\delta\{x_8,\ldots,x_{15}\} \leqslant \frac{7}{8}\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$; (3) $\delta\{x_{7r+1},\ldots,x_{7r+8}\} \leqslant (\frac{7}{8})^r\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$ dla $r \in \mathbf{N}$; (4) $|x_n - x_m| \leqslant (\frac{7}{8})^r\delta\{x_1,\ldots,x_8\}$ dla $r \in \mathbf{N}$, $m,n > 7r$.

11. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem liczbowym, takim że $x_n \geqslant 0$, $x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$ dla $m,n \in \mathbf{N}$. Wykazać, że ciąg $(\frac{x_n}{n})$ jest zbieżny, a jego granica jest równa $\inf\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbf{N}\}$.

12. Zdefiniujmy *normę* $\|f\|$ wielomianu $f(z) = a_0 + a_1z + \ldots + a_nz^n$, $a_k \in \mathbf{C}$, wzorem $\|f\| := |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$. Wykazać, że jeżeli $f^n$ oznacza $n$-tą potęgę $f$, tzn. $f^n(z) := (f(z))^n$, to $\forall f$ ciąg liczbowy $(\sqrt[n]{\|f^n\|})$ jest zbieżny.

13. Ciąg liczbowy $(x_n)$ nazwijmy *quasi-rosnącym*, jeżeli $\forall N \in \mathbf{N} : x_n \geqslant x_N$ dla *prawie wszystkich* $n \in \mathbf{N}$. Sprawdzić, że ciąg $\left(\frac{100}{n+1}E(\frac{n}{100})\right)$ jest quasi-rosnący, chociaż $x_n < x_{n-1}$, gdy $n$ nie jest wielokrotnością 100. Wykazać, że jeśli ciąg quasi-rosnący $(x_n)$ jest ograniczony z góry, to jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$.

14. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy $(x_n)$ spełnia warunki: (a) $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ oraz (b) $\exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant N : x_{n+2} \in [x_n, x_{n+1}]$, to jest zbieżny. [Przyjmujemy tu konwencję $[a,b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leqslant x \leqslant b$ lub $b \leqslant x \leqslant a\}$]. Podać przykład rozbieżnego ciągu $(x_n)$ spełniającego warunki: $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbf{N} : (-1)^n(x_{n+1}-x_n) > 0$.

15. Wykazać, że: (a) $\limsup\limits_{n\to\infty} |\dfrac{x_{n+1}}{x_n}| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$; (b) $\liminf\limits_{n\to\infty} |\dfrac{x_{n+1}}{x_n}| > 1 \Rightarrow$ ciąg $(x_n)$ jest rozbieżny.

16. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej $(X,d)$. Rozważmy następujące warunki $(C),(C_1),(C_2),(C_3)$:
   $(C)$ $\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall m,n \geqslant N : d(x_m,x_n) \leqslant \epsilon$ (*Cauchy*); $(C_1)$ $\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n, x_N) \leqslant \epsilon$;
   $(C_2)$ $\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \exists x \in X : \forall n \geqslant N : d(x_n,x) \leqslant \epsilon$; $(C_3)$ $\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant N : d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \epsilon$.
   Wykazać, że $(C_1) \iff (C) \iff (C_2)$, $(C) \Rightarrow (C_3)$. Znaleźć przykład pokazujący, że $(C_3) \not\Rightarrow (C)$.

17. Dowieść, że jeśli ciąg $(x_n)$ w przestrzeni metrycznej spełnia warunek $\exists\ C > 0 : \forall n \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^{n} d(x_k, x_{k+1}) < C$, to jest ciągiem Cauchy'ego. Podać przykład liczbowego ciągu Cauchy'ego nie spełniającego powyższego warunku.

18. Wyznaczyć punkty ciągłości funkcji $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, jeśli:
(a) $f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ dla $x > 0$; (b) $f(x) := \begin{cases} x(x^2-2) & x \in \mathbf{Q} \\ 0 & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$; (c) $f(x) := \begin{cases} 0 & x \in \mathbf{Q} \\ \sin\frac{1}{x} & x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$.

19. Korzystając z własności Darboux wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja: (a) $]0,1[$ na $[0,1[$; (b) $[0,1[$ na $]0,1[$.

20. Wykazać, że jeśli $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz $f$-obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to $f$ jest stała.

21. Dowieść, że jeśli $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła i istnieją skończone granice $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, to $f$ jest ograniczona.

22. Dowieść, że dane równanie ma co najmniej trzy pierwiastki rzeczywiste: (a) $x + 5\cos x = 0$, (b) $x^5 - 3x = 1$.

23. Wykazać, że każda ciągła surjekcja $f : [0,\infty[ \to [0,\infty[$ ma punkt stały, tzn. $\exists x \in [0,\infty[ : f(x) = x$.

24. Wyznaczyć $f([0,\infty[)$, jeśli $f : [0,\infty[ \to \mathbf{R}$ dane jest wzorem: (a) $f(x) := \sin x$; (b) $f(x) := \frac{x}{1+x}$; (c) $f(x) := \frac{x \sin x}{1+x}$ (posłużyć się własnością Darboux). Korzystając z tego wykazać, że dla dowolnego przedziału $Y \subset \mathbf{R}$ (niekoniecznie ograniczonego) istnieje funkcja ciągła $f : [0,\infty[ \to \mathbf{R}$ taka, że $f([0,\infty[) = Y$.

25. Korzystając z poprzedniego zadania wykazać, że jeśli $X, Y \subset \mathbf{R}$ są niepustymi przedziałami, przy czym $X$ jest niezwarty, to istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbf{R}$ taka, że $f(X) = Y$.

26. Dowieść, że : (a) jeśli podzbiory $A$ i $B$ przestrzeni $\mathbf{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A + B := \{a + b \ : \ a \in A\,,\ b \in B\}$ też jest zwarty; (b) jeśli $A$ jest zwarty, a $B$ domknięty, to $A + B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbf{R}^2$, dla których zbiór $A + B$ nie jest domknięty.

27. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność zbioru $A := \{x \in \mathbf{R} \ : \ 6x^{10} - 5x^8 - 4x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1 \leqslant 0\}$.

28. Ciągi $(x_n)$ i $(y_n)$ w przestrzeni metrycznej $(X, d)$ spełniają warunek $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = \{y_n : n \in \mathbf{N}\} =: Z$. Udowodnić, że jeśli ciągi te są zbieżne, przy czym $x := \lim_{n\to\infty} x_n \neq y := \lim_{n\to\infty} y_n$, to zbiór $Z$ jest skończony.

9. Sprawdzić, że ciąg $(x_1 + \ldots + x_n - ns)$, gdzie $s := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_n$, jest okresowy, a więc ograniczony.

10. (2) Dla $8 \leqslant i < j \leqslant 15$ mamy $x_i - x_j = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{8}(x_i - x_{j-k})$; (4) $x_n, x_m \in [\min\{x_{7r+1}, \ldots, x_{7r+8}\}, \max\{*\}]$.

12. Zauważyć, że $\|fg\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$, więc ciąg $(\log \|f^n\|)$ spełnia ...

21. $\exists x^- < 0 : \forall x \leqslant x^- : f(x) \in [l^- - 1, l^- + 1]$ oraz $\exists x^+ > 0 : \forall x \geqslant x^+ : \ldots$ itd., gdzie $l^\pm := \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

18. (a) $]0,1[ \cup ]1,\infty[$; (b) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$; (c) $\{\frac{1}{n\pi} : n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\}$.

20. Gdyby $\exists x_1, x_2 : f(x_1) < f(x_2)$, wtedy $U := \{x \in \mathbf{R} : f(x_1) < f(x) < f(x_2)\}$ byłby otwarty (ciągłość), podczas gdy $f(U) = ]f(x_1), f(x_2)[$ (własność Darboux) nie jest domknięty.

26. Np. $A := \mathbf{R} \times \{0\}$ (prosta), $B := \{(x,y) : xy = 1\}$ (hiperbola).

27. Domknięty, nieotwarty, zwarty, niespójny.

28. Kule $K(x;r)$, $K(y;r)$ dla $r := \frac{1}{2}d(x,y)$ są rozłączne, tzn. ich dopełnienia dają w sumie całą przestrzeń $X$, a każde z tych dopełnień zawiera jedynie skończoną liczbę elementów zbioru $Z$.

1. Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbf{N}$ w topologii zadanej metryką $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Czy metryka $d_\circ(m,n) := |m - n|$ określa tę samą co $d$ topologię w zbiorze $\mathbf{N}$?

2. Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną; dla $A \subset X$ i $\epsilon \geqslant 0$ oznaczmy $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x,a) \leqslant \epsilon\}$. Rozważmy następujące implikacje: (D) $A$ domknięty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ domknięty; (O) $A$ otwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ otwarty; (Z) $A$ zwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ zwarty; (S) $A$ spójny $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ spójny. Dowieść, że: (a) $A$ zwarty $\Rightarrow$ $A_\epsilon$ domknięty; (b) w przestrzeni $X := \mathbf{R}^n$ z metryką $d(x,y) := \|x - y\|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe; (c) dla $X := ]-\infty,-1[ \cup \{0\} \cup ]+1,+\infty[$ z metryką $d(x,y) := |x - y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.

3. Niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $\mathrm{Fr}A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ nazywa się *brzegiem* (topologicznym) podzbioru $A \subset X$. Dowieść, że: (a) $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}A = (A \setminus \mathrm{Int}A) \cup (\overline{A} \setminus A)$; (b) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}A$; (c) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Fr}A$; (d) $X = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Fr}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$; (e) $A$ jest domknięty $\iff$ $\mathrm{Fr}A \subset A$; (f) $A$ jest otwarty $\iff$ $A \cap \mathrm{Fr}A = \emptyset$.

4. Sprawdzić, że: $\overline{\bigcap_t A_t} \imath \bigcap_t \overline{A_t}$; $\quad \mathrm{Int}\bigcup_t A_t \supset \bigcup_t \mathrm{Int}A_t$; $\quad F$ domknięty $\Rightarrow \overline{\mathrm{Int}F} \imath F$; $\quad G$ otwarty $\Rightarrow \mathrm{Int}\overline{G} \supset G$.

5. Sprawdzić, że jeśli $F$ jest domkniętym, a $G$ — otwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej $X$, to $\mathrm{Int}F = \mathrm{Int}\overline{\mathrm{Int}F}$, $\overline{G} = \overline{\mathrm{Int}\overline{G}}$. Wywieść stąd, że: $A = \mathrm{Int}\overline{A} \iff \exists\, F$ domknięty : $A = \mathrm{Int}F$, $\quad A = \overline{\mathrm{Int}A} \iff \exists\, G$ otwarty : $A = \overline{G}$.

6. Dowieść, że jeśli $A$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej $X$, to: (a) $\overline{A}\setminus A$ jest domknięty $\iff \exists F, G : A = F \cap G$; (b) $A \setminus \mathrm{Int}A$ jest domknięty $\iff \exists F, G : A = F \cup G$ $\quad$ ($F$ oznacza tu domknięty, a $G$ — otwarty podzbiór $X$).

7. Wykazać, że jeżeli $X$ i $Y$ są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne: (a) $f$ jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w $Y$ są otwarte w $X$); (b) przeciwobrazy zbiorów domkniętych w $Y$ są domknięte w $X$; $\quad$ (c) $f(\overline{A}) \imath \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \imath X$.

8. Niech $X$ będzie przestrzenią zwartą, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem ciągłym. Wykazać, że: (a) jeśli $A \imath X$ jest domknięty, to $f(A)$ jest domknięty; (b) jeśli $f$ jest injektywne, to jest homeomorfizmem $X$ na $f(X)$.

9. Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.

10. Niech $(x_n)$ będzie ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej $(X, d)$, a $Z := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Dowieść, że jeśli $x \in X$ jest punktem skupienia zbioru $Z$, to $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wywnioskować z tego, że jeśli ciąg Cauchy'ego jest rozbieżny, to zbiór jego wyrazów jest *dyskretny* (tzn. nie ma punktów skupienia), a w szczególności — domknięty.

11. Odwzorowanie $f$ nazywa się *domknięte* (*otwarte*), jeżeli $f$-obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbf{R}$) odwzorowanie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest domknięte lub otwarte:
   (a) $f(x) := \sqrt{1 + x^2}$; $\qquad$ (b) $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\qquad$ (c) $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$; $\qquad$ (d) $f(x) := \sin x$.

12. Niech dane $n \in \mathbf{N}$, $a_0 < \ldots < a_n$ oraz dodatnie $b_0, \ldots, b_n$. Wykazać, że równanie $\frac{b_0}{x-a_0} + \frac{b_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{b_n}{x-a_n} = 0$ ma dokładnie $n$ rzeczywistych pierwiastków, po jednym w każdym z przedziałów $]a_0, a_1[,\ ]a_1, a_2[, \ldots,\ ]a_{n-1}, a_n[$.

2. (a) Niech $A_\epsilon \ni x_n \to x$ i $d(x_n, a_n) \leqslant \epsilon$; ciąg $(a_n)$ ma zbieżny podciąg $a_{n_k} \to a \in A$; ciągłość $d$ i $d(x_{n_k}, a_{n_k}) \leqslant \epsilon$ dają $d(x, a) \leqslant \epsilon$, tzn. $x \in A_\epsilon$. (b) (przypadek $X = \mathbf{R}^n$) Ad(D): Niech $A_\epsilon \ni x_n \to x$ i $a_n \in A$ t.że $\|x_n - a_n\| \leqslant \epsilon$; ciąg $(b_n)$, $b_n := x_n - a_n$, ma zbieżny podciąg $b_{n_k} \to b$, $\|b\| \leqslant \epsilon$; stąd $a_{n_k} \to a := x - b \in A$ (domkniętość $A$), więc $x = a + b \in A_\epsilon$. Ad(O): Gdy $A = K(x; r)$ jest otwartą kulą, wtedy $A_\epsilon = K(x; r + \epsilon)$ jest otwarty; w ogólnym przypadku $A$ jest sumą pewnych $K(x; r)$, a operacja $A \mapsto A_\epsilon$ jest oczywiście przemienna z operacją $\bigcup$. Ad(Z): Dane $x_n \in A_\epsilon$ mają rozkład $x_n = a_n + b_n$, $a_n \in A, b_n \in B := \overline{K}(0; \epsilon)$. Ciąg $(a_n)$ ma zbieżny podciąg $(a_{n_k})$ (zwartość $A$), a $(b_{n_k})$ ma zbieżny podciąg $(b_{n_{k_i}})$ (zwartość $B$), więc $(x_n)$ ma zbieżny podciąg $(x_{n'_i})$, $n'_i := n_{k_i}$. Ad(S): Niech $B := A_\epsilon$ będzie sumą $B' \cup B''$ dwóch zbiorów rozgraniczonych; spójność $A \imath B$ daje np. $A \imath B'$; tak samo spójność kuli $\overline{K}(a; \epsilon) \imath A_\epsilon \imath B$ (i to, że $a \in B'$) daje $\overline{K}(a; \epsilon) \imath B'$; stąd $B = A_\epsilon = \bigcup_{a \in A} \overline{K}(a; \epsilon) \imath B'$, czyli $B'' = \emptyset$.

6. (a) $[\Rightarrow] F := \overline{A}$, $G := X \setminus (\overline{A} \setminus A)$; (b)$[\Rightarrow]$ $F := A \setminus \mathrm{Int}A$, $G := \mathrm{Int}A$.

9. Wyrazy ciągu Cauchy'ego $(x_n)$ należą do $\overline{Z}$, gdzie $Z := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$; skoro $\overline{Z}$ jest zwarty, to $(x_n)$ ma zbieżny podciąg...

10. Zauważyć, że: $1^0$ punkt skupienia zbioru jest granicą różnowartościowego ciągu jego elementów; $2^0$ różnowartościowy ciąg liczb naturalnych ma rosnący podciąg; $3^0$ ciąg Cauchy'ego mający zbieżny podciąg jest zbieżny.

11. (a) $f : [0, \infty[\ \to [1, \infty[$ i $f : ]-\infty, 0] \to [1, \infty[$ są homeomorfizmami; (b) $f : \mathbf{R} \to ]-1, 1[$ jest homeomorfizmem; (c) $f([1, \infty[) = ]0, 1] = f(]0, 2[)$; (d) wyznaczyć $f(A)$ dla $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} [2n\pi, 2n\pi + a_n]$, gdzie $0 \leqslant a_n \nearrow \frac{\pi}{2}$.

11. (a) domknięte i nieotwarte; (b) niedomknięte i otwarte; (c),(d) niedomknięte i nieotwarte.

1. Niech $A$ będzie dowolnym podzbiorem przestrzeni metrycznej $X$. Wykazać, że zbiór $A^d := \{x \in X : x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$ punktów skupienia zbioru $A$ jest domknięty.

2. Niech $A$ będzie podzbiorem, a $(B_i)_{i \in I}$ — rodziną podzbiorów przestrzeni metrycznej $X$; oznaczmy $B := \bigcup_{i \in I} B_i$. Wykazać, że ($A$ jest rozgraniczony z $B$) $\Rightarrow$ ($\forall i \in I$ : $A$ jest rozgraniczony z $B_i$). Podać przykład dowodzący nieprawdziwości przeciwnej implikacji; dowieść, że dla skończonego $I$ implikacja przeciwna także jest prawdziwa.

3. Dowieść, że jeśli funkcje $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ są ciągłe oraz $f_1 \leqslant f_2$, to $Z := \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$ jest jest spójnym i zwartym podzbiorem $\mathbf{R}^2$ . Podać przykład, pokazujący istotność założenia ciągłości.

4. Zbadać domkniętość, otwartość, spójność i zwartość zbioru $Z := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 - 4x^2y^2 + 4y^6 \leqslant 0\}$.

5. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ podzbiór $Z_p := \{x > 0 : \frac{x \log x}{x^{\log x}} \leqslant p\}$ przestrzeni metrycznej $(X, d)$, gdzie $X := ]0, \infty[$ oraz $d(x, y) := |x - y|$ dla $x, y \in X$, jest: (D) domknięty, (O) otwarty, (S) spójny, (Z) zwarty?

6. Niech $(X, d)$ będzie przestrzenią metryczną zupełną, a ciąg $(F_n)$ niepustych podzbiorów $X$ spełnia warunki: $1^0$ $F_n$ są domknięte; $2^0$ $F_{n+1} \imath F_n$ dla $n \in \mathbf{N}$; $3^0$ $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, gdzie $\delta(F) := \sup\{d(x,y) : x, y \in F\} =$ średnica $F$. Dowieść, że przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ jest zbiorem 1-elementowym.

7. Zbadać domkniętość, otwartość, spójność i zwartość zbioru $Z := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^4 + y^2 \leqslant x^2\}$.

8. Zbadać, czy podzbiór $A := \{(x,y) : x(x+y)^2 = 1\} \imath \mathbf{R}^2$ jest: (D) domknięty; (O) otwarty; (S) spójny; (Z) zwarty.

9. Dowieść, że jeśli $f : [0,1] \to [0,1]$ jest ciągłą bijekcją, to $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

10. Niech $A$ i $B$ będą podzbiorami przestrzeni metrycznej $X$. Dowieść, że jeśli $A$ i $B$ są otwarte lub $A$ i $B$ są domknięte, to zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$ są rozgraniczone.

11. Na przestrzeni $C([0,1])$ określmy metrykę wzorem $d(x,y) := \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0,1]\}$. Zbadać domkniętość, otwartość, spójność i zwartość podzbioru $Z := \{x \in C([0,1]) : x(0)x(1) > 1\}$.

1. Wystarczy pokazać, że każdy $x \notin A^d$ ma rozłączne z $A^d$ otoczenie. Z założenia $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$, a więc istnieje otwarta kula $K \ni x$ taka, że $K \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, tzn. $K \cap A \imath \{x\}$. Pokażemy, że $K \cap A^d = \emptyset$: Dla $y \in K$ mamy $K \cap (A \setminus \{y\}) = (K \cap A) \setminus \{y\} \imath \{x\} \setminus \{y\} = \emptyset$, przy czym $K$ jest otoczeniem $y$; zatem $y \notin \overline{A \setminus \{y\}}$, tzn. $y \notin A^d$, Q.E.D.

2. Implikacja $\Rightarrow$ wynika wprost z inkluzji $B_i \imath B$, $\overline{B_i} \imath \overline{B}$. Kontrprzykład dla $\Leftarrow$: $A := [-1, 0]$, $I := \mathbf{N}$, $B_i := [\frac{1}{i}, 1]$. Implikacja $\Leftarrow$ dla skończonego $I$ wynika wprost ze wzoru $\overline{B} = \bigcup_i \overline{B_i}$.

3. $\Phi(x,t) := (x, (1-t)f_1(x) + tf_2(x))$ jest ciągłą surjekcją $[a,b] \times [0,1]$ na $Z$. Kontrprzykład: $f_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in [a, x_0] \\ 1, & x \in \,]x_0, b] \end{cases}$, $f_2(x) := f_1(x) + c$, gdzie $a < x_0 < b, 0 \leqslant c < 1$.

4. Zwartość: $(x,y) \in Z \Rightarrow 0 \geqslant (x^2 - 2y^2)^2 + 4y^6 - 4y^4 \geqslant 4y^4(y^2 - 1) \Rightarrow y^2 \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant 1$ oraz $|x^2 - 2y^2| \leqslant 2y^2\sqrt{1 - y^2} \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4 \Rightarrow |x| \leqslant 2$ (w istocie $\sup_{x\in Z} |x| = \sqrt{2}$), więc $Z$ jest ograniczony. Spójność: $(x,y) \in Z \Rightarrow \forall t \in [0,1] : (tx)^4 + 4(ty)^6 \leqslant t^4(x^4 + 4y^6) \leqslant 4(tx)^2(ty)^2$, tzn. $(tx, ty) \in Z$, więc $Z$ jest "gwiaździsty". Inny sposób: $(x,y) \in Z \iff 2y^2(1 - \sqrt{1-y^2}) \leqslant x^2 \leqslant 2y^2(1 + \sqrt{1 - y^2}) \iff |y|(\sqrt{1+|y|} - \sqrt{1-|y|}) \leqslant |x| \leqslant |y|(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y})$, $|y| \leqslant 1$ (patrz wyżej), zatem każda z czterech części $Z_{\pm,\pm} := \{(x,y) \in Z : \pm x \geqslant 0, \pm y \geqslant 0\}$ jest spójna (ciągły obraz kwadratu) i każda zawiera punkt $(0,0)$.

5. $Z_p = \{x \in X : f(x) \leqslant p\} = f^{-1}(]-\infty, p])$, gdzie $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{x \log x}{x^{\log x}} = \log x \cdot e^{\log x - \log^2 x}$, jest funkcją ciągłą (ciągłość log, exp i mnożenia); zatem $Z_p$ jest domknięty (w $X$, a nie w $\mathbf{R}$!) *dla każdego* $p \in \mathbf{R}$. Skoro $f'(x) = \frac{1}{x}e^{l - l^2}(1 - l)(2l - 1)$, $l := \log x$, to $f' > 0$ na $\left]e^{-1/2}, e\right[$ oraz $f' < 0$ na $\left]0, e^{-1/2}\right[ \cup \,]e, \infty[$, a więc $f$ maleje na $\left[0, e^{-1/2}\right[$ (od $f(0+) = 0$ do $p_0 := f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2}e^{-3/4}$), rośnie na $\left]e^{-1/2}, e\right[$ (od $p_0$ do $f(e) = 1$) i maleje na $]e, \infty[$ (od 1 do $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$). Stąd i z własności Darboux wynika, że dla poszczególnych przypadków: $p < p_0$, $p_0 \leqslant p < 0$, $p = 0$, $0 < p < 1$, $1 \leqslant p$, mamy odpowiednio: $Z_p = \emptyset$, $Z_p = [x_1(p), x_2(p)]$, $Z_p = \,]0, 1]$, $Z_p = \,]0, x_3(p)] \cup [x_4(p), \infty[$, $Z_p = \,]0, \infty[$, gdzie $0 < x_1(p) \leqslant x_2(p) < 1$ i $1 < x_3(p) < e < x_4(p)$. *Odpowiedź*: (D) zawsze; (O) $\iff$ $p < p_0$ lub $1 \leqslant p$; (S) $\iff$ $p \leqslant 0$ lub $1 \leqslant p$; (Z) $\iff$ $p < 0$.

6. Jeśli $x, y \in \bigcap_n F_n$, to $\forall n \in \mathbf{N} : [\, x, y \in F_n$, w konsekwencji $d(x,y) \leqslant \delta(F_n)]$; stąd $3^0$ daje $0 \leqslant d(x,y) \leqslant \lim_n \delta(F_n) = 0$, tzn. $d(x,y) = 0$, czyli $x = y$; zatem $\bigcap_n F_n$ ma co najwyżej jeden element. Należy jeszcze pokazać, że $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$. W tym celu utwórzmy ciąg $(x_n)$ elementów $X$, wybierając dla kazdego $n \in \mathbf{N}$ dowolny element $x_n \in F_n$. Taki ciąg spełnia warunek Cauchy'ego (dla zadanego $\epsilon > 0$ dobierzmy $N \in \mathbf{N}$ tak, by $\delta(F_N) \leqslant \epsilon$ — jest to możliwe dzięki $3^0$ — a wtedy $\forall m, n \geqslant N : d(x_m, x_n) \leqslant \delta(F_N) \leqslant \epsilon$, gdyż z $2^0$ mamy $x_m \in F_m \imath F_N$ i $x_n \in F_n \imath F_N$), jest więc (dzięki zupełności $X$) zbieżny. Skoro zaś dla każdego $N \in \mathbf{N}$ zbiór $F_N$ zawiera prawie wszystkie wyrazy ciągu ($x_n \in F_N$ dla $n \geqslant N$), to $x := \lim_n x_n$ należy do domknięcia $F_N$, więc $x \in F_N$ dzięki $1^0$. Zatem $x \in \bigcap_N F_N$, a więc $\bigcap_N F_N \neq \emptyset$.

7. $Z = f^{-1}(\,]-\infty, 0])$, gdzie $f(x,y) := x^4 + y^2 - x^2$, $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest ciągła; zatem $Z$ jest, tak jak przedział $]-\infty, 0]$, domknięty. $Z$ nie jest otwarty, gdyż np. punkt $(0,0) \in Z$ nie ma otoczenia zawartego w $Z$ (bo $Z \not\ni (0, \frac{1}{n}) \to (0,0)$); inny argument: jedynymi podzbiorami domknięto-otwartymi w $\mathbf{R}^2$ są $\emptyset$ i $\mathbf{R}^2$ (spójność $\mathbf{R}^2$). Zwartość: $(x,y) \in Z \iff (x^2 - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow |x^2 - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$, $|y| \leqslant \frac{1}{2}$, czyli $Z \imath [-1, 1] \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ jest ograniczony (i domknięty). Spójność: $(x,y) \Rightarrow \forall t \in [0,1] : (tx)^4 + (ty)^2 \leqslant t^2(x^4 + y^2) \leqslant (tx)^2$, tzn. $(tx, ty) \in Z$, więc $Z$ wraz z każdym swoim punktem $p$ zawiera odcinek $[\mathbf{0}, p]$ łączący $p$ z $\mathbf{0} = (0,0)$ (*jest gwiaździsty wzgl.* $\mathbf{0}$); zatem $Z$, jako suma spójnych zbiorów $[\mathbf{0}, p]$ mających wspólny punkt $\mathbf{0}$, jest spójny. Inny sposób: $\Phi(x,t) := (x, tx\sqrt{1 - x^2})$ jest ciągłą surjekcją zbioru (spójnego!) $[-1, 1] \times [-1, 1]$ na $Z$.

8. (D) $A = f^{-1}(\{0\})$ jest domknięty ($f(x,y) := x(x+y)^2$ ciągła); (O) nie jest otwarty (tylko $\emptyset$ i cała przestrzeń są domknięto-otwarte w $\mathbf{R}^2$; bezp. dowód: $p_n := (1, \frac{1}{n}) \notin A$, a $\lim p_n = (1, 0) =: p \in A$, więc żadna kula $K(p; r)$ nie jest zawarta w $A$); (S) nie jest spójny: $A = A_+ \cup A_-$, gdzie $A_\pm := \{(x,y) : x \geqslant 0, \pm(x+y)\sqrt{x} = 1\} \neq \emptyset$ są domknięte (ciągłość $\varphi(x,y) := (x+y)\sqrt{x}$) i rozłączne, więc rozgraniczone; (Z) nie jest zwarty, gdyż nie jest ograniczony (bo $(x, \frac{1}{\sqrt{x}} - x) \in A$ dla $x > 0$).

9. $\exists x_0, x_1 \in [0,1] : f(x_0) = 0, f(x_1) = 1$ (surjektywność). Gdyby $x_0 \in \,]0, 1[$, wtedy $f(0) > 0, f(1) > 0$ (injektywność) i wartość $\min\{f(0), f(1)\}$ byłaby osiągana przez $f$ dwukrotnie (wł. Darboux), sprzeczność; zatem $x_0 = 0$ lub $x_0 = 1$; analogicznie...

10. Gdy otwarte: $(A \setminus B) \cap \overline{B \setminus A} \imath A \cap \overline{X \setminus A} = A \cap (X \setminus A)$. Gdy domknięte: $(A \setminus B) \cap \overline{B \setminus A} \imath (X \setminus B) \cap \overline{B} = (X \setminus B) \cap B$.

11. Odpowiedź: niedomknięty, otwarty, niespójny, niezwarty.

# Zadania z rachunku różniczkowego

1. Wykazać, że: (a) $\frac{1+x}{x}\operatorname{arc\,tg} x \geqslant \frac{\pi}{2}$ dla $x > 1$; (b) $\frac{\log x}{x-1} > \frac{2}{x+1}$ dla $0 < x \neq 1$; (c) $\frac{x}{e^x-1} > \frac{2}{e^x+1}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

1'. Wykazać, że (a) $|\log t| \leqslant \frac{1}{2}|t - t^{-1}|$ dla $t > 0$; (b) $(1+x)\log^2(1+x) \leqslant x^2$ dla $1+x > 0$; (c) $\frac{1}{2}\log^2(x+\sqrt{1+x^2}) \leqslant \sqrt{1+x^2}-1$ dla $x \in \mathbf{R}$; (d) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{3})\log(1+x) < 1$ dla $|x| < 1$; (e) $\pi < \frac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leqslant 4$ dla $x \in ]0,1[$; (f) $\sin x < \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}$ dla $x > 0$; (g) $\frac{x+1}{x-1}\log x > 2$ dla $x > 0, x \neq 1$.

2. Sprawdzić, że dla $0 < \epsilon < 1$ nieparzysta funkcja $f_\epsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, określona dla nieujemnych argumentów wzorami:
$$f_\epsilon(x) := \begin{cases} 2x - \frac{x^3}{3\epsilon}, & 0 \leqslant x \leqslant \epsilon \\ 1+\epsilon - \frac{\epsilon^2}{12} - (x-1-\frac{\epsilon}{2})^2, & \epsilon \leqslant x \leqslant 1 \\ 1+\epsilon + \frac{1}{3\epsilon}(x-1-\epsilon)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 1+\epsilon \\ 1+\epsilon, & 1+\epsilon \leqslant x \end{cases}$$
jest klasy $C^2$ oraz spełnia następujące warunki: $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_\epsilon(x)| = 1+\epsilon$, $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'_\epsilon(x)| = 2$, $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f''_\epsilon(x)| = 2$.

3. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) := \begin{cases} ax+b, & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \\ (\frac{1}{x}\arcsin x)^{1/x^2}, & \text{gdy} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$ jest różniczkowalna?

4. Zbadać przebieg funkcji $f : D \to \mathbf{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^n}$, gdzie $D := \{x \in \mathbf{R} : \lim_{n\to\infty} \ldots \text{ istnieje}\}$.

5. Niech funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie klasy $C^n, n \geqslant 1$. Dowieśc, że jeśli $n$-ta pochodna $f$ jest funkcją okresową, to istnieje taki wielomian $w(x)$ stopnia $\leqslant n$, że funkcja $x \mapsto f(x) + w(x)$ też jest okresowa.

6. Niech $0 < a < b$ będą ustalone. Dla $n \in \mathbf{N}$ niech $\alpha_n$ i $\gamma_n$ będą, odpowiednio, średnią arytmetyczną i geometryczną z $n+1$ liczb $\frac{nab}{ka+(n-k)b}$, $k \in \overline{0,n}$. Wykazać, że $\frac{2ab}{a+b} \leqslant \lim_n \gamma_n = e\left(\frac{a^b}{b^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} \leqslant \lim_n \alpha_n = \frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a} \leqslant \sqrt{ab}$. (*jest to ulepszona wersja zadania 27. z Anal5*)

7. Dla danych $n \geqslant 2$ parami różnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ określmy na $\mathbf{R}^n$ formy liniowe $\phi_0(x) := x_1 + \ldots + x_n$, $\phi_r(x) := a_1^r x_1 + \ldots + a_n^r x_n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{N}$. Dowieść, że jedyne rozwiązanie układu $n$ równań $\phi_0(x) = \ldots = \phi_{n-2}(x) = 0$, $\phi_{n-1}(x) = 1$, dane jest wzorami $x_k := \prod_{l\neq k} \frac{1}{a_k - a_l}$, przy czym $\phi_n(x) = a_1 + \ldots + a_n$.

8. Niech $a, b \in \mathbf{R}$, przy czym $a > 0$. Dowieść, że jeśli równanie $x^3 - 3a^2x + b = 0$ ma więcej niż jeden rzeczywisty pierwiastek, to ma ono po jednym pierwiastku w każdym z trzech przedziałów $[-2a, -a]$, $[-a, a]$ i $[a, 2a]$.

9. Dowieść, że jeśli funkcja $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ jest wypukła oraz spełnia warunek $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to jest malejąca.

10. Funkcja $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ jest wypukła oraz ma asymptotę dla $x \to \infty$. Dowieść, że wykres $f$ leży nad asymptotą.

11. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ oraz dwukrotnie różniczkowalna na $]a, b[$. Dowieść, że
$$\exists\, \xi \in ]a, b[ : f(a) - 2f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b) = \tfrac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$
Uogólnienie (*uogólnione twierdzenie Lagrange'a o przyrostach*):

12. Niech funkcja $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ będzie $n$-krotnie różniczkowalna, a liczby $x_0, \ldots, x_n \in ]a, b[$ — parami różne; oznaczmy $c_k := \prod_{l\neq k}(x_k - x_l)$, $k, l \in \overline{0,n}$. Wykazać, że istnieje liczba $\xi \in ]a, b[$, zawarta między najmniejszą a największą z liczb $x_k$, taka ze $\sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{c_k} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Ponadto, gdy w szczególności $x_k = x_0 + ks$ tworzą postęp arytmetyczny, wtedy tezę można przedstawić w postaci $\exists\, \xi : \Delta_s^n f(x_0) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(x_k) = s^n f^{(n)}(\xi)$.

13. Dowieść, że $\lim_{b\to a} \frac{1}{(b-a)^3}\left[f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right)\right] = -\frac{1}{12}f'''(a)$, jeśli $f$ jest klasy $C^3$ na otoczeniu $a$.

14. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest klasy $C^3$, to $\exists\, \xi \in ]a, b[ : f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) = -\frac{1}{12}f'''(\xi)$.

15. Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną i niech $y = L(x)$ będzie równaniem prostej łączącej punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Dowieść, że $\forall x \in ]a, b[ : \exists\, \xi_x \in ]a, b[ : f(x) = L(x) - \frac{1}{2}(x-a)(b-x)f''(\xi_x)$.

16. Dowieść, że jeśli $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest klasy $C^2$, to $\exists\, \xi \in ]a, b[ : \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(S_n(f) - \int_a^b f(x)dx\right) = \frac{1}{12}(b-a)^2\left(f'(b) - f'(a)\right)$, jeśli $S_n(f) := \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) + \frac{f(b)}{2}\right.$ dla $f \in C^2([a, b])$. Wykazać to i zastosować do dowodu, że $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} - \log 2 + \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{16}$.

18. Sprawdzić, że jeśli $f(x) := \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$, to $\int f(x)dx = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1-x^2} + \text{const}$. Korzystając z tego wyliczyć $\int_0^2 f(x)dx$.

19. Zbadać, w zależności od parametrów $p, q \in \mathbf{R}$, zbieżność ciągu o wyrazach $x_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - pn^q$.

20. Zbadać, w zależności od parametru $p \in \mathbf{R}$, zbieżność ciągu o wyrazach $x_n := \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \ldots + \frac{1}{\log(n+1)} - \frac{pn}{\log(n+1)}$.

21. Zbadać zbieżność ciągu $(x_n)$ określonego rekurencyjnie: $x_1 := \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = 2\sqrt{3-2x}$ dla $n \in \mathbf{N}$.

## Wskazówki.

**1'.** Funkcja $f(t) := \arcsin t - \frac{t}{\sqrt{1-t^2/3}}$ jest rosnąca na $[0,1]$, bo $f'(t) = (1-t^2)^{-1/2} - (1-\frac{t^2}{3})^{-3/2} \geqslant 0$. **5.** Indukcja. **7.** Układ jest cramerowski (wyznacznik Vandermonde'a jest $\neq 0$, gdy...). Funkcja $\varphi(t) := \frac{t^{n-1}}{(1-a_1t)\cdot\ldots\cdot(1-a_nt)}$ ma jednoznaczny rozkład na ułamki proste; sprawdzić, że ma on postać $\frac{x_1}{1-a_1t} + \ldots + \frac{x_n}{1-a_nt}$ ze współczynnikami $x_k$ określonymi w zadaniu; sprawdzić też, że $\varphi^{(r)}(0) = r!\phi_r(x)$. **11.** Jeśli $W(x)$ jest trójmianem kwadratowym, takim że $f - W$ zeruje się w punktach $a$, $\frac{a+b}{2}$ i $b$, to $\exists\ \xi \in\ ]a,b[\ : f''(\xi) - W''(\xi) = 0$. **13.** Tw. de l'Hospitala. **14.** Istnieje taki wielomian 3. stopnia $W(x)$, że $f - W$ znika wraz z pochodną w obu końcach przedziału $[a,b]$; wtedy $\frac{d^3}{dx^3}(f(x) - W(x))$ znika w pewnym punkcie z $]a,b[$.

## Odpowiedzi i rozwiązania.

**1.** (a) $f(x) := \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{1+x}$; wtedy $f(1) = f(+\infty) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2(x+1)^2} = -\frac{\pi-2}{M}\left(x^2 - \frac{4}{\pi-2}x + 1\right)$. Skoro $\Delta = \frac{4\pi(4-\pi)}{(\pi-2)^2} > 0$, to $f'$ ma dwa dodatnie pierwiastki $x_0 < x_1$, t.że $x_0x_1 = 1$. Stąd $f$ rośnie na $[1,x_1]$, maleje na $[x_1,\infty[$, skąd teza. (b) $f : ]0,\infty[\ \to \mathbf{R}$, $f(x) := \log x - 2\frac{x-1}{x+1}$; wtedy $f'(x) = x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \geqslant 0$ i $f(1) = 0$; stąd $f(x)/(x-1) > 0$. (c) Wynika z (b) przez podstawienie $x = e^t$. Bezpośr. dowód: $f(x) := \frac{e^x-1}{e^x+1} - \frac{x}{2}$ (nieparzysta!); wtedy $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leqslant 0$, a zatem $f(x)$ jest $> 0$ dla $x < 0$ i $< 0$ dla $x > 0$; dzieląc te nierówności przez $e^x - 1$ dostajemy tezę. **1'.** (a) $f(t) := \frac{1}{2}(t - t^{-1}) - \log t$ jest rosnąca ($f'(t) = \frac{(t-1)^2}{2t^2} \geqslant 0$), $f(1) = 0$, przy czym znak $\log t$ jest taki, jak znak $t-1$, skąd teza. (b) *I. sposób*: $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x)$ jest rosnąca na $]-1,\infty[$ (bo $f'(x) = (1+x)^{-3/2}(1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}) \geqslant 0$) i $f(0) = 0$; stąd i z tego, że $\log(1+x)$ ma taki sam znak, jak $x$, wynika teza. *II. sposób*: Podstawmy $t = \sqrt{1+x}$ do (a); otrzymujemy $|\log(1+x)|^2 \leqslant |(1+x)^{1/2} - (1+x)^{-1/2}|^2 = \frac{x^2}{1+x}$. (c) $f(x) := \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\log^2(x + \sqrt{1+x^2})$ jest parzysta i $f(0) = 1$; wystarczy więc sprawdzić, że $f$ rośnie, tzn. $f'(x) \geqslant 0$, dla $x \geqslant 0$; otóż $f'(x) = (1+x^2)^{-1/2}g(x)$, gdzie $g(x) = x - \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant 0$, gdyż $g(0) = 0$ i $g'(x) = 1 - (1+x^2)^{-1/2} \geqslant 0$. (g) Funkcja $f : ]0,\infty[\ \to \mathbf{R}$, $f(x) := \log x - 2\frac{x-1}{x+1}$, jest rosnąca, gdyż $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geqslant 0$; to i $f(1) = 0$ daje tezę. **3.** $a = 0, b = e^{\frac{1}{6}}$. **4.** $D = \mathbf{R}\setminus[-2,-1]$, $f(x) = x^2/2$ dla $|x| > 2$, $f(x) = 1$ na $]-1,1[$, $f(x) = x$ na $[1,2]$ (ciągła na $D$). **5.** $[T_1] : \frac{d}{dx}[f(x+T) - f(x)] = 0 \Rightarrow f(x+T) - f(x) = C =$const.; stąd $f(x) - \frac{C}{T}x$ jest okresowa. $[T_{n-1} \Rightarrow T_n, n \geqslant 2]$: dla $g := f'$ okresowa jest $g^{(n-1)}$, więc $\exists\ v(x) : f'(x) + v(x)$ — okresowa; stąd $f(x) + V(x)$, $V(x) := \int_0^x v(\xi)d\xi$, spełnia założenia $T_1$, a zatem $\exists\ c \in \mathbf{R} : f(x) + V(x) + cx$ — okresowa. Można też inaczej: skoro $h := f^{(n-1)}$ ma okresową pochodną, to $\exists c : h(x) + cx = [f(x) + \frac{c}{n!}x^n]^{(n-1)}$ — okresowa; $T_{n-1}$ daje więc $\exists v(x) : f(x) + \frac{c}{n!}x^n + v(x)$ — okresowa. **6.** Średnią harmoniczną liczb $\frac{nab}{ka+(n-k)b}$ jest $\frac{2ab}{a+b}$, co daje 1. nierówność. Obliczenie obu granic: $\log\gamma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \log\frac{nab}{ka+(n-k)b} \to \int_0^1 \log\frac{ab}{ax+b(1-x)}dx = \left[\log(ab) + x + \frac{ax+b(1-x)}{b-a}\log(ax+b(1-x))\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{b-a}\log\frac{a^b}{b^a}$, $\alpha_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{nab}{ka+(n-k)b} \to \int_0^1 \frac{ab}{ax+b(1-x)}dx = \frac{ab}{a-b}\left[\log(ax+b(1-x))\right]_0^1 = \frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}$. To i nier. dla średnich daje nier. 2. Nierówność 3., postaci $2\log x \leqslant x - \frac{1}{x}$, $x = \sqrt{b/a} > 1$, jest łatwa do sprawdzenia (przez badanie funkcji). **7.** $\frac{1}{r!}\frac{d^r}{dt^r}\frac{1}{1-a_1t} = \frac{a_1^r}{(1-a_1t)^{r+1}}$ (przez indukcję), skąd $\varphi^{(r)}(0) = r!\phi_r(x)$. Z kolei $\varphi(t) = t^{n-1}\psi(t)$, gdzie $\psi$ jest klasy $C^\infty$ na otoczeniu $t = 0$ i $\psi'(0) = a_1 + \ldots + a_n$ (reguła Leibniza); to wraz ze wzorem na $(uv)^{(r)}$ pozwala wyliczyć $\varphi^{(r)}(0)$ dla $r \leqslant n$. **8.** Skoro dla $W(x) := x^3 - 3a^2x + b$ mamy $W(-a) = W(2a) = b + 2a^3 > b - 2a^3 = W(-2a) = W(a)$, to w przypadku $W(-a)W(a) \leqslant 0$ teza jest spełniona (własność Darboux). Rozważmy więc przeciwny przypadek $W(-a)W(a) > 0$, tzn. $W(a) > 0$ albo $W(-a) < 0$. Zauważmy, że skoro $W'(x) = 3(x^2 - a^2)$, to $W$ maleje na $[-a,a]$, a rośnie na $]-\infty,-a]$ i na $[a,\infty[$; stąd $W(-a) = \max_{x\leqslant a} W(x)$, $W(a) = \min_{x\geqslant -a} W(x)$, więc w przypadku $W(a) > 0$ albo $W(-a) < 0$ wielomian $W$ ma, wbrew założeniu, tylko jeden rzeczywisty pierwiastek. **9.** Niech dane $0 < x_0 < x_1$; wtedy dla $x > x_1$ wypukłość $f$ daje $f(x_1) \leqslant \frac{x-x_1}{x-x_0}f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x-x_0}f(x)$, skąd przy $x \to \infty$ wynika $f(x_1) \leqslant f(x_0)$. **10.** $f(x_1) \leqslant \frac{x-x_1}{x-x_0}f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x-x_0}f(x)$ dla $0 < x_0 < x_1 < x$; przy $x \to \infty$ daje to $f(x_1) \leqslant f(x_0) + a(x_1 - x_0)$, a więc $x \mapsto f(x) - ax$ maleje. Stąd $\forall x \geqslant 0 : f(x) \geqslant b = \lim_{\xi\to\infty} f(\xi)$. **11.** $W(x) := \sum_k \frac{f(x_k)}{c_k}\prod_{l\neq k}(x - x_l)$ jest wielomianem, takim że $f - W$ zeruje się w punktach $x_0,\ldots,x_n$; stąd $\exists\ \xi : f^{(n)}(\xi) = W^{(n)}(\xi)$, a $W^{(n)}(\xi) = \sum_k \frac{f(x_k)}{c_k}$. W przypadku $x_k = x_0 + ks$ mamy $c_k = \prod_{l\neq k}(sk - sj) = s^n(-1)^{n-k}k!(n-k)!$. **14.** Jeśli $W(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + (c_0x + c_1)(x-a)(b-x)$, to $W'''(x) = 6c_0$ oraz $f - W$ znika w $a$ i $b$; ponadto $W'(a) + W'(b) = \frac{2}{b-a}(f(b) - f(a)) - (b-a)^2c_0$, więc żadając by $f' - W'$ znikało w $a$ i $b$ otrzymamy $c_0 = \ldots$. **15.** Przy *ustalonym* $x$ niech $\varphi(t) := f(t) - L(t) + C(t-a)(b-t)$, gdzie $C = C_x \in \mathbf{R}$ — dobrana tak, by $\varphi(x) = 0$. Wtedy $\exists\ \xi_x : \varphi''(\xi_x) = 0$ (zob. ***); daje to $C = \frac{1}{2}f''(\xi_x)$, więc $0 = \varphi(x) = \ldots$. **16.** W oznaczeniach 15. mamy $f(x) - L(x) = \varphi(x)(x-a)(b-x)$, przy czym $\varphi$ jest ciągła na $]a,b[$ (a nawet na $[a,b]$, jeśli $\varphi(a) =: \frac{1}{b-a}\lim\frac{f(x)-L(x)}{x-a} = \frac{f'(a)-L'(a)}{b-a}$ oraz $\varphi(b) := -\frac{f'(b)-L'(b)}{b-a}$). Z tw. o wart. śr. dostajemy: $\int_a^b(f - L) = \int_a^b \varphi(x)(x-a)(b-x) = \varphi(x_0)\int_a^b(x-a)(b-x)dx = \varphi(x_0)\frac{1}{6}(b-a)^3$ dla pewnego $x_0$, a z 1. mamy $\varphi(x_0) = -\frac{1}{2}f''(\xi)$, skąd teza. **17.** Napisać wzór z zad.16. dla $f$ na $[a_{k-1},a_k]$, $a_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$, i wysumować po $k \in \overline{1,n}$; uwzgl.tożsamość $\int_a^b f''(x)dx = f'(b) - f'(a)$. **18.** $\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$. **19.** Jasne, że $\lim_n x_n = \lim_n(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = +\infty$, gdy $p \leqslant 0$ lub $q \leqslant 0$. Dla $p,q > 0$: $\lim_n \frac{x_{n+1}-x_n}{n^{q-1}} = \lim_n \frac{n}{n+1}\frac{1}{n^q} - p\lim_n \frac{(1+\frac{1}{n})^q - 1}{\frac{1}{n}} = 0 - p\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^q-1}{x} = -pq < 0$; skoro zaś $\sum_{n=1}^\infty n^{q-1} = +\infty$, to kryterium porównawcze daje $\lim_n x_n = x_1 + \sum_{n=1}^\infty(x_{n+1} - x_n) = -\infty$. **20.** $x_{n+1} - x_n = \frac{1-p(n+1)}{\log(n+2)} + \frac{pn}{\log(n+1)} = \frac{1-p}{\log(n+2)} + \frac{pn\log\frac{n+2}{n+1}}{\log(n+1)\log(n+2)}$. Zatem $(x_{n+1} - x_n)\log n \to 1 - p$ przy $n \to \infty$; jeśli więc $p \neq 1$, to kryterium porównawcze i rozbieżność $\sum_n \frac{1}{\log n}$ daje $\lim_n x_n = x_1 + \sum_{n=1}^\infty(x_{n+1} - x_n) = \pm\infty$, gdzie $\pm = \operatorname{sgn}(1-p)$. Z kolei dla $p = 1$ mamy $(x_{n+1} - x_n)\log^2 n = \frac{\log^2 n}{\log(n+1)\log(n+2)}\cdot n\log(1 + \frac{1}{n+1}) \to 1$, więc rozbieżność $\sum_n \frac{1}{\log^2 n}$ daje $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. *Odpowiedź.* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dla $p \leqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dla $p > 1$. **21.** Pokażę, że $\exists n \in \mathbf{N} : x_n > 3$, a wtedy $x_{n+1}$ jest nieokreślone; oznacza to, że dana rekurencja nie określa nieskończonego ciągu liczbowego, więc nie ma sensu pytanie o zbieżność. Weźmy $g(x) = f\circ f(x) = 2\sqrt{3 - 2\sqrt{3-x}}$, $g : [\frac{3}{4},3] \to \mathbf{R}$; wtedy $g(x) < x$ dla $\frac{3}{4} < x < 2$ (sprowadza się to do $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 < 0$, tzn. $(x-2)^3(x+6) < 0$), więc $g$-ciąg $(x_{2k-1})$ jest malejący; gdyby był nieskończony, musiałby zbiegać do punktu stałego $g$, a jedynym punktem stałym jest $x_0 = 2$ (równanie $(x-2)^3(x+6) = 0$); jest to niemożliwe (bo $x_1 = \frac{3}{2} < 2$), więc $x_{2k-1} < \frac{3}{4}$, $x_{2k} > 3$, dla pewnego $k$. *Uwaga.* $x_{30} = 3.174339$ (z bezp. wyliczenia), czyli $k = 15$.

# Zadania z Analizy Matematycznej 'C'

## Seria 5.

1. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbf{N}$.
2. (a) Która z dwóch liczb jest większa: $e^\pi$ czy $\pi^e$ ? (b) Wykazać dla $m, n \in \mathbf{N}$ nierówność $2^n > (\frac{n}{m})^m$.
3. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres: (a) $f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbf{R}$; (b) $f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; (c) $f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$; (d) $f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbf{R}$; (e) $f(x) := (x+1)\operatorname{arc\,tg} x$, $x \in \mathbf{R}$.
4. Niech $a, b \in \mathbf{R}$. Dowieść, że: (1) jeśli $b > 0$, to $ab \leqslant e^{a-1} + b \log b$; q(2) jeśli $a \neq b$, to $e^{\frac{1}{2}(a+b)} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a+e^b}{2}$.
5. Dowieść, że: (a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$; (b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$; (c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$; (d) $(4 - \cos x)^{\frac{\sin x}{x}} < 3$ dla $x \neq 0$; (e) $|\frac{1+x}{x} \operatorname{arc\,tg} x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$; (f) $1 + x\log(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}$.
6. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1+x)^{1/x}, -1 < x \neq 0$, da się przedłużyc do funkcji różniczkowalnej na $]-1, \infty[$. Obliczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ — rosnąca na $]-1, \infty[$.
7. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że $f$ jest: (a) klasy $C^1$ na $\mathbf{R}$ (wyliczyć $f'(0)$); (b) malejąca; (c) jednostajnie ciągła na $\mathbf{R}$. Sprawdzić, że funkcja $\mathbf{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$ jest nieparzysta.
8. Dowieść, że funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.
9. Sprawdzić, że: (a)$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f(\frac{1}{x})\right) = (-1)^n x^{-n-1} f^{(n)}(\frac{1}{x})$ dla $n \in \mathbf{N}$, jeśli $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna $n$-krotnie; (b) $S(f) = S(g)$, jeśli $S(f) := \frac{f^{(3)}}{f^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}}\right)^2$, $f$ jest 3-krotnie różniczkowalna oraz $g(x) = \frac{a_1 f(x) + b_1}{a f(x) + b}$.
10. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbf{N}$ oraz $a_k \in \mathbf{R}$ spełniają warunek $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, to $\exists\, x \in ]0, 1[ : \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$.
11. Niech $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, taką że $f''$ jest ograniczona i istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wykazać, że $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Sprawdzić te założenia i tezę dla $f(x) := \frac{1}{x}\sin(x^2)$.
12. Dowieść, że jeśli $f : ]0, \infty[ \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna oraz $\exists\; c > 0, \alpha \leqslant 1 : \lim_{x\to\infty}[f(x) + cx^\alpha f'(x)] = 0$, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ . Skonstruować przykłady, uzasadniające istotność poczynionych założeń $c > 0, \alpha \leqslant 1$.
13. Dowieść, że jeśli ciągła na $[0, 1]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]0, 1[$ funkcja $f$ spełnia warunki $f(0) = f(1) = 0$ oraz $\inf_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = -1$, to istnieje $\xi \in ]0, 1[$, takie że $f''(\xi) \geqslant 8$. Pokazać, że tego oszacowania nie da się poprawić.
14. Niech $T > 0$, $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ dwukrotnie różniczkowalna, przy czym $f(T) - f(0) =: L > 0$, $f'(0) = f'(T) = 0$. Wykazać, że istnieje $t \in ]0, T[$ takie, że $|f''(t)| \geqslant 4T^{-2}L$. *Interpretacja.* Punkt materialny, poruszający się tak, że od startu do zatrzymania przebywa drogę $L$ w czasie $T$, musi mieć w pewnej chwili przyspieszenie $\geqslant 4T^{-2}L$.
15. Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą i dwukrotnie różniczkowalną na $]a, b[$. Wykazać, że jeśli $f(a) = f(b)$ oraz $M_2 := \sup_{a<x<b} |f''(x)| < +\infty$, to $M_1 := \sup_{a<x<b} |f'(x)| \leqslant \frac{b-a}{2} M_2$. Sprawdzić to dla $f(x) := (x-a)(b-x)$.
16. Niech funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna; oznaczmy $M_k := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(k)}(x)|$ dla $k \in \{0, 1, 2\}$. Dowieść, że jeśli kresy $M_0$ i $M_2$ są skończone, to $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$, przy czym oszacowania tego nie da się poprawić.
17. Dowieść, że: (a) Jeśli $n \in \mathbf{N}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, funkcja $f : [x_0, x_n] \to \mathbf{R}$ jest ciągła na $[x_0, x_1]$ i $n$-krotnie różniczkowalna na $]x_0, x_1[$ oraz $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, to $\exists\, \xi \in ]x_0, x_n[ : f^{(n)}(\xi) = 0$. (b) Jeśli $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]a, b[$, to $\exists\; \xi \in ]a, b[ : \varphi(a) - 2\varphi(\frac{a+b}{2}) + \varphi(b) = (\frac{b-a}{2})^2 \varphi''(\xi)$.
18. Załóżmy, że $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ (może być $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest ciągła oraz ma skończone granice jednostronne $l_1 := \lim_{x\to a+} f(x), l_2 := \lim_{x\to b-} f(x)$. Dowieść, że: (a) $f$ jest ograniczona na $]a, b[$; (b) jeśli $l_1 = l_2$, to $f$ przyjmuje co najmniej jeden ze swoich kresów na $]a, b[$; (c) jeśli $l_1 = l_2$ i $f$ jest różniczkowalna, to $\exists\; \xi \in ]a, b[ : f'(\xi) = 0$.
19. Dowieść, że jeśli funkcja $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ (dopuszczamy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest $n$-krotnie różniczkowalna oraz $\forall k \in \overline{0, n-1} : \lim_{x\to a+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to b-} f^{(k)}(x)$, to $f^{(n)}$ ma co najmniej $n$ pierwiastków w $]a, b[$. Korzystając z tego pokazać, że tzw. *wielomian Laguerra* $L_n(x) := e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ ma dokładnie $n$ dodatnich pierwiastków.
20. Obliczyć: (a) $f^{(10)}(0)$ dla $f(x) := x^2 \cos 2x$; (b) $f^{(100)}(1)$ dla $f(x) := \frac{x^2-7x+12}{x^2-2x+2}$; (c) $f^{(10)}(3)$ dla $f(x) := \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$.

21. Obliczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$; (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - x^4 \log(1+x^{-2})\right)$; (e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; (f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x-1}{\log^2 x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; (g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-5}\left(x - \sqrt{1+\dfrac{x^2}{3}}\sin x\right)$; (i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{ax}-ax}{e^{bx}-bx}\right)^{x^{-2}}$; (j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$; (l) $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos(x+\dfrac{1}{x}) - \cos(x-\dfrac{1}{x})\right)$; (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; (p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(\cos x)-\sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2}$; (r) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$; (s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; (t) $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)^{1-x}$; (u) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$.

22. Dowieść, że jeśli funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek $\forall x \in \mathbf{R} : \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$, to jest okresowa.

23. Niech $f : [0,\infty[ \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że funkcja $\hat{f} : [0,\infty[ \to \mathbf{R}$, zadana wzorami $\hat{f}(0) := f(0)$, $\hat{f}(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ dla $x > 0$, też jest ciągła, przy czym jeśli $f$ jest niemalejąca, to $\hat{f}$ jest także niemalejąca.

24. Wykazać, że jeśli $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna, to $\exists\ \xi \in\ ]a,b[\ : \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi)$.

25. Niech dane $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{N}$. (a) Podać interpretację (*pole wielokąta ograniczonego łamaną ...*) wielkości $S_n(f) := \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(a) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) + \frac{1}{2}f(b)\right]$. (b) Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(S_n(f) - \int\limits_a^b f(x)dx\right) = 0$ dla $f \in C^1[a,b]$. Wywnioskować stąd, że $n\left(\log 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \ldots - \frac{1}{2n}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}$, $n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{n}{n^2+1^2} - \frac{n}{n^2+2^2} - \ldots - \frac{n}{n^2+n^2}\right) \longrightarrow \frac{1}{4}$.

26. Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranej całki wykazać, że:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n^2+k^2} = \tfrac{\pi}{4};\ \text{(b)} \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \ldots + \tfrac{1}{kn}\right) = \log k \ \text{ dla } 2 \leqslant k \in \mathbf{N};\ \text{(c)} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \tfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \tfrac{1}{\log 2}.$$

27. Dla ustalonych $0 < a < b$ niech $H_n$ i $G_n$ oznaczają, odpowiednio, średnią harmoniczną i geometryczną z $n+1$ liczb $a + \frac{k}{n}(b-a)$, $k \in \overline{0,n}$. Wykazać, że $\sqrt{ab} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} H_n = \dfrac{b-a}{\log b - \log a} \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} G_n = \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

## Wskazówki.

**1.** Zbadać $x \mapsto e^{-x}W_n(x)$. **2.**(a) Zbadać $e^{-x}x^e$ na $]0,\infty[$. (b) Należy wykazać, że $2 > x^{-x}$ dla wszystkich $x = \frac{m}{n}$, $m,n \in \mathbf{N}$. **3.**(d) $f'(x) = \pm\frac{3}{1+x^2}$. **4.**(b) Pomnożyć stronami przez $e^{-b}$. **7.**(c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$. **9.**(b) $S(f) = D(f)' - \frac{1}{2}D(f)^2$, gdzie $D(f) := \frac{f''}{f'}$. Lepszy sposób: sprawdzić, że $S(af+b) = S(f)$, $S(f^{-1}) = S(f)$, po czym zauważyć, że $g - \frac{a_1}{a} = \ldots$ dla $a \neq 0$. **10.** Tw. Rolle'a. **11.** Ze wzoru Taylora $\forall x,h > 0 : \exists\xi : |f'(x)| \leqslant \frac{1}{h}|f(x+h)-f(x)| + \frac{h}{2}|f''(\xi)|$; dla zadanego $\epsilon > 0$ wziąć $h := \frac{\epsilon}{M}$, $M := \sup_\xi |f''(\xi)|$. **12.** Zastosować tw. de l'Hospitala, licząc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}}$ dla $g(x) := \int \frac{dx}{cx^\alpha}$. **13.** Napisać wzór Taylora dla $f(0)$ i $f(1)$. **14.** Wyrazić $f(T/2)$ wzorem Taylora, biorąc $t_0 = 0$ (gdy $f(T/2) - f(0) \geqslant L/2$) lub $t_0 = T$ (w przec. razie). **15.** Dla $a < x_0 < b$ napisać rozwinięcia Taylora dla $f(a) - f(x_0)$ i $f(b) - f(x_0)$. **16.** $\forall x,h : \exists \xi_+, \xi_- : f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{h^2}{2}f''(\xi_\pm)$. **17.**(a) Indukcja wzgl. $n$. (b) Zastosować $(\text{a})_{n=2}$ do $f(x) := \varphi(x) - q(x)$, dobierając trójmian kwadratowy $q(x)$ tak, by $f(a) = f(\frac{a+b}{2}) = f(b)$. **18.**(a),(b) Funkcja $F : ]\operatorname{arc\,tg} a, \operatorname{arc\,tg} b[ \to \mathbf{R}$, $F(t) := f(\operatorname{tg} t)$, przedłuża się do funkcji ciągłej na (zwartym) domknięciu swej dziedziny; (c) skorzystać z tw.Fermata lub z tw. Rolle'a. **19.** Indukcja: $T_1$ wynika z (18). Załóżmy, że $n \geqslant 2$, $T_{n-1}$ jest prawdziwe i $f$ spełnia założenia $T_n$; wtedy $f$ spełnia założenia $T_{n-1}$, więc $g := f^{(n-1)}$ ma $n-1$ pierwiastków $x_1 < \ldots < x_{n-1}$; stąd... **20.**(a) $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}$; (b) $\frac{1}{1+u^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-)^n u^{2n}$, $|u| < 1$, $u := x-1$; (c) podstawiając $x = 3+2u$ mamy $f(x) = (1+u)(1-u^2)^{-1/2}$; zastosować wzór Maclaurina dla $(1+v)^{-\frac{1}{2}}$. **24.** Wyrazić wzorem Taylora $F(b) - F(a)$ dla $F(x) := \int_a^x f(\xi)d\xi$. **25.**(b) Zastosować (25) do $f$ na $[a_{k-1}, a_k]$, $a_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$; wysumować po $k \in \overline{1,n}$. **26.**(c) Sprawdzić, że $\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} > \frac{2^{\frac{k-1}{n}}}{n}$ dla $2 \leqslant k \leqslant n$. **27.** $\frac{1}{H_n}$ i $\log G_n$ są sumami Riemanna dla całek $\int_0^1 \frac{dx}{a+x(b-a)} = \frac{\log b - \log a}{b-a}$ i $\int_0^1 \log\left(a + x(b-a)\right)dx = -1 + \frac{b\log b - a\log a}{b-a}$.

## Odpowiedzi i rozwiązania.

**2.**(b) $x^{-x} = \exp(-x\log x)$, a $\min\limits_x x\log x = -\frac{1}{e}$ dla $x = \frac{1}{e}$, skąd $x^{-x} \leqslant e^{\frac{1}{e}} = 1.4446 < 2$. **3.**(a) Wart.kryt.: $f(-3) = \sqrt{11}$ (min.), $f(1) = 5\sqrt{3}$ (maks.lok.), $f(2) = \frac{7}{2}\sqrt{6}$ (min.lok.); p.przeg.: $f(-\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$, $f'(-\frac{1}{2}) = \frac{25}{9}$, $f(\frac{7}{5}) = \frac{13}{5}\sqrt{11}$, $f'(\frac{7}{5}) = -\frac{4}{9\sqrt{11}}$; asymptoty: $y = \pm(x+3)$ dla $x \to \pm\infty$; wykres *nad* asymptotami. (b) $f(-1) = e^{-1}$ (maks.lok.), $f(2) = 4e^{\frac{1}{2}}$ (min.lok.); p.przeg.: $f(-\frac{2}{5}) = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}$; asympt.: $y = x+3$ dla $x \to \pm\infty$; $x = 0$ — as.pion. dla $x \to 0+$. (c) $f(1) = -2e^{-2}$ — jedyna wart.kryt. (min.lok.); p.przeg.: $x = 6 \pm \sqrt{30}$; asympt. dla $x \to \pm\infty$: $y = x - 2$ (przecina wykres dla $x \approx 3.5$). (d) $f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{\pi}{2}$ — maks. i min.; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$ (e) P.przeg.: $f(1) = \frac{\pi}{2}$; min.: $f(x_0) \approx -0.23$ dla $x \approx -0.45$; asymptota: $y = -1 \pm \frac{\pi}{2}(x+1)$. **5.** $f(x) := \frac{1+x}{x}\operatorname{arc\,tg} x$; skoro $f(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ oraz $f(1) = \frac{\pi}{2}$, to wystarczy sprawdzić monotoniczność $f$; otóż $f'(x) = \frac{1}{x^2}g(x)$, $g(x) = \frac{x^2+x}{x^2+1} - \operatorname{arc\,tg} x$, $g'(x) = \frac{2x(1-x)}{(x^2+1)^2}$, więc $\forall x \leqslant 1 : g(x) \geqslant g(0) = 0$, czyli $f'(x) \geqslant 0$. **6.** $f(0) = e, f'(0) = -\frac{e}{2}$. **7.**(a) $f'(0) = -\frac{1}{12}$. **8.** Punkty przegięcia leżą na prostej $y = \frac{3}{4}(x-1)$. **12.** Dla $c \neq 0$ niech $f(x) := e^{g(x)}$, gdzie $g(x) := \frac{x^{1-\alpha}}{c(\alpha-1)}$ gdy $\alpha \neq 1$, $g(x) := \frac{1}{c}\log x$, gdy $\alpha = 1$. Wtedy $f(x) + cx^\alpha f'(x) = 0$, a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ jest $= 1$ (gdy $\alpha > 1$) lub $= +\infty$ (gdy $\alpha \leqslant 1, c < 0$). **15.** $|f'(x_0)(b-a)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_1)(a-x)^2 - f''(\xi_2)(b-x)^2| \leqslant \frac{M_2}{2}[(a-x_0)^2 + (b-x_0)^2]$, przy czym $[\ldots] \leqslant (b-a)^2$. **16.** $f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h}{4}[f''(\xi_+) - f''(\xi_-)]$; stąd $\forall h > 0 : |f'(x)| \leqslant \frac{1}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$, co daje $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$. Rozważyć $f(x) := (-1)^n(x-n)(n+1-x)$, $n := E(x)$. **20.**(a) $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 = 23040$; (b) $5 \cdot 100!$; (c) $2^{-10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. **21.**(a) $e^{-1}$; (b) $\frac{1}{2}$; (c) $\frac{1}{3}$; (d) $\frac{1}{2}$; (e) $\frac{1}{2}$; (f) 1; (g) $e^2$; (h) $\frac{1}{30}$; (i) $e^{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}$; (j) $a^a(\log a - 1)$; (k) $\frac{1}{12}$; (l) $e^{-1}$; (m) $e^{-1/6}$; (n) 0; (o) 0; (p) $\frac{1}{6}$; (q) $e^{-1}$; (r) 14; (s) $\frac{1}{3}$; (t) 1; (u) $e^{-1}$.

1. Dowieść, że dla $p \in \mathbf{R}$ równanie $x^4 + px^3 + x^2 - px = 1$ ma po jednym pierwiastku w przedziałach $]-1, 0[$ i $]0, 1[$.

Niech $0 < |x| < 1$; wtedy $x^4 + px^3 + x^2 - px - 1 = 0 \iff p = f(x) := \frac{x^4+x^2-1}{x-x^3}$; skoro $f(x) = \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x(1-x^2)} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{1+x^2}{x}$, to $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1-x^2}{x^2} > 0$, czyli $f$ jest rosnąca na obu przedziałach; zarazem $f(-1+) = f(0+) = -\infty$, $f(0-) = f(1-) = +\infty$.

2. Zbadać przebieg funkcji: (a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$; (b) $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \arcsin(4x^3 - 3x)$; (c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x + 8)$; (d) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x - 1)$; (e) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x + 3)$; (f) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}(x^2 + 4x + 20)$; (g) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 20x - 12)$; (h) $f : \mathbf{R} \setminus \{-3, 5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{x^3}{(x+3)(5-x)}$; (i) $f : \mathbf{R} \setminus \{3, 8\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{x^3}{(x-3)(8-x)}$; (j) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sin x e^{\cos x}$.

(a) $f'(x) = \frac{2\,\mathrm{sgn}(1-x^2)}{x^2+1}$, więc $f(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x$ dla $|x| \leqslant 1$ i $f(x) = \pi \,\mathrm{sgn}\, x - 2 \operatorname{arc\,tg} x$ dla $|x| \geqslant 1$; (b) $f'(x) = \frac{3\,\mathrm{sgn}(4x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$, więc $f(x) = -3 \arcsin x$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ i $f(x) = 3 \arcsin x - \pi \,\mathrm{sgn}(x)$ dla $\frac{1}{2}x \leqslant |x| \leqslant 1$; (c) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-1)(x-2)(x+4)$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(7x-2)(3x-4)$, $f(1) = 7e^{-1} \approx 2.575$ — max. lok., $f(2) = 4e^{-1/2} \approx 2.426$ — min. lok., $f(-4) = -8e^{1/4} \approx -10.272$ — max. lok., $y = x-3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{2}{7}[ \cup ]\frac{4}{3}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (d) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-1)(x+1)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(3x-1)(x+1)$, $f(1) = -2e^{-1} \approx -0.736$ — min. lok., $f(-1) = -2e \approx -5.437$ — p. przeg., $f(1 \pm \sqrt{2}) = 0$, $y = x - 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]-1, 0[ \cup ]\frac{1}{3}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (e) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x+3)(x-1)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(11x-3)(x-1)$, $f(1) = 2e^{-1} \approx 0.736$ — p. przeg., $f(-3) = -6e^{1/3} \approx -8.374$ — max. lok., $y = x - 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{3}{11}[ \cup ]1, \infty[$ — przedz. wypukłości; (f) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x+5)(x-2)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(33x-10)(x-2)$, $f(2) = \frac{3}{2}e^{-12} \approx 0.9098$ — p. przeg., $f(-5) = -\frac{38}{5}e^{1/5} \approx -9.283$ — max. lok., $y = x + 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{10}{33}[ \cup ]2, \infty[$ — przedz. wypukłości; (g) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-3)(x+2)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(17x-6)(x+2)$, $f(-2) = -16e^{1/2} \approx -26.38$ — p. przeg., $f(3) = -21e^{-1/3} \approx -15.047$ — min. lok., $f(10 \pm 4\sqrt{7}) = 0$, $y = x-21$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]-2, 0[ \cup ]\frac{6}{17}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (h) $f'(x) = -\frac{1}{M^2}x^2(x-9)(x+5)$, $f''(x) = \frac{2}{M^3}xq(x)$, gdzie $q(x) = 19x^2+90x+675 > 0$, $f(-5) = \frac{25}{4}$ — min. lok., $f(9) = -\frac{243}{16} = -15.1875$ — max. lok., $]-\infty, -3[ \cup ]0, 5[$ — przedz. wypukłości, $y = -x - 2$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$; (i) $f'(x) = -\frac{1}{M^2}x^2(x-4)(x-18)$, $f''(x) = \frac{2}{M^3}xq(x)$, gdzie $q(x) = 97x^2 - 792x + 1728 > 0$, $f(4) = 16$ — min. lok., $f(18) = -\frac{972}{25} = 38.88$ — max. lok., $]-\infty, 0[ \cup ]3, 8[$ — przedz. wypukłości, $y = -x - 11$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$. (j) $f$ jest okresowa i nieparzysta; $f'(x) = e^{\cos x}(\cos^2 x + \cos x - 1)$, więc $f'(x) = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033$, wtedy $f(x) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \exp \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \pm 1.45852$; zatem $\sup_x f(x) = 1.45852$. Druga pochodna: $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{\cos x}(\cos x + 3)\sin 2x$.

3. Wykazać, że funkcja $f : [1, \infty[ \to \mathbf{R}$, $f(x) := (1 - \frac{1}{x})^x$, jest rosnąca.

$f'(x) = f(x)g(x)$, gdzie $g(x) = \log(1-\frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1} = \log(1+u) - \frac{u}{1+u} \geqslant 0$ (można inaczej: $g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2} \leqslant 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0+0 = 0$, co daje $g \geqslant 0$). *Inny sposób*: $f'(x) = \frac{f(x)}{x-1}h(x)$, gdzie $h(x) = 1 + (x-1)\log(1 - \frac{1}{x})$, $h'(x) = \log(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x} \leqslant 0$, co wraz z $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1 - \lim_{u\to 0-}(1+u)\frac{\log(1+u)}{u} = 0$ daje $h \geqslant 0$.

4. Obliczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x+3^{-x}-2}{x^2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} - e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^6+1}\right)$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log|\sin ax|}{\log|\sin bx|}$; (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(e^x-1) - e^{\sin x} + 1}{(\sin 3x)^4}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^5}$; (l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \log \frac{\cos(a-x)}{\cos(a+x)}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \log \frac{\cos bx}{\cos ax}$.

(a) 1; (b) $-\frac{1}{4}$; (c) $(\log 3)^2$; (d) $\frac{3}{2}$; (e) $-2$; (f) 2; (g) $\frac{1}{6}$;(h) 1; (i) $-1$; (j) $-\frac{1}{972}$; (k) $\frac{1}{15}$; (l) $2 \operatorname{tg} a$; (m) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$.

5. Sprawdzić, że dla $0 < \varepsilon < 1$ funkcja $f_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *nieparzysta* i określona dla *nieujemnych* argumentów wzorami

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 2x - \frac{x^3}{3\varepsilon}, & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{12} - (x - 1 - \frac{\varepsilon}{2})^2, & \varepsilon \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 + \varepsilon + \frac{1}{3\varepsilon}(x - 1 - \varepsilon)^3, & 1 \leqslant x \leqslant 1 + \varepsilon \\ 1 + \varepsilon, & 1 + \varepsilon \leqslant x \end{cases}$$

jest klasy $C^2$ oraz spełnia następujące warunki: $\sup\limits_x |f_\varepsilon(x)| = 1 + \varepsilon$, $\sup\limits_x |f'_\varepsilon(x)| = 2$, $\sup\limits_x |f''_\varepsilon(x)| = 2$.

[Przykład ten dowodzi, że dla $f \in C^2(\mathbf{R})$ oszacowania $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_1}$, $M_k := \sup|f^{(k)}|$, nie da się poprawić; zob. ANAL05 z.16.]

# Zadania niewykorzystane z anal5

0. Dowieść, że dla $p \in \mathbf{R}$ równanie $x^4 + px^3 + x^2 - px = 1$ ma po jednym pierwiastku w przedziałach $]-1, 0[$ i $]0, 1[$.
**0.** Niech $0 < |x| < 1$; wtedy $x^4+px^3+x^2-px-1 = 0 \iff p = f(x) := \frac{x^4+x^2-1}{x-x^3}$; skoro $f(x) = \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x(1-x^2)} = \frac{x}{1-x^2} - \frac{1+x^2}{x}$, to $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1-x^2}{x^2} > 0$, czyli $f$ jest rosnąca na obu przedziałach; zarazem $f(-1+) = f(0+) = -\infty$, $f(0-) = f(1-) = +\infty$.

1. Zbadać przebieg funkcji: (a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$; (b) $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \arcsin(4x^3 - 3x)$; (c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x + 8)$; (d) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x - 1)$; (e) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 2x + 3)$; (f) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 + 4x + 20)$; (g) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}(x^2 - 20x - 12)$; (h) $f : \mathbf{R} \setminus \{-3, 5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{x^3}{(x+3)(5-x)}$; (i) $f : \mathbf{R} \setminus \{3, 8\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{x^3}{(x-3)(8-x)}$; (j) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sin x e^{\cos x}$.
**1.**(a) $f'(x) = \frac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{x^2+1}$, więc $f(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x$ dla $|x| \leqslant 1$ i $f(x) = \pi\operatorname{sgn} x - 2\operatorname{arc\,tg} x$ dla $|x| \geqslant 1$; (b) $f'(x) = \frac{3\operatorname{sgn}(4x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$, więc $f(x) = -3\arcsin x$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ i $f(x) = 3\arcsin x - \pi\operatorname{sgn}(x)$ dla $\frac{1}{2}x \leqslant |x| \leqslant 1$; (c) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-1)(x-2)(x+4)$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(7x-2)(3x-4)$, $f(1) = 7e^{-1} \approx 2.575$ — max. lok., $f(2) = 4e^{-1/2} \approx 2.426$ — min. lok., $f(-4) = -8e^{1/4} \approx -10.272$ — max. lok., $y = x - 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{2}{7}[\cup]\frac{4}{3}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (d) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-1)(x+1)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(3x-1)(x+1)$, $f(1) = -2e^{-1} \approx -0.736$ — min. lok., $f(-1) = -2e \approx -5.437$ — p. przeg., $f(1 \pm \sqrt{2}) = 0$, $y = x - 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]-1, 0[\cup]\frac{1}{3}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (e) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x+3)(x-1)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(11x-3)(x-1)$, $f(1) = 2e^{-1} \approx 0.736$ — p. przeg., $f(-3) = -6e^{1/3} \approx -8.374$ — max. lok., $y = x - 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{3}{11}[\cup]1, \infty[$ — przedz. wypukłości; (f) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x+5)(x-2)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(33x-10)(x-2)$, $f(2) = \frac{3}{2}e^{-12} \approx 0.9098$ — p. przeg., $f(-5) = -\frac{38}{5}e^{1/5} \approx -9.283$ — max. lok., $y = x + 3$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]0, \frac{10}{33}[\cup]2, \infty[$ — przedz. wypukłości; (g) $f'(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^3}(x-3)(x+2)^2$, $f''(x) = \frac{e^{-1/x}}{x^5}(17x-6)(x+2)$, $f(-2) = -16e^{1/2} \approx -26.38$ — p. przeg., $f(3) = -21e^{-1/3} \approx -15.047$ — min. lok., $f(10 \pm 4\sqrt{7}) = 0$, $y = x - 21$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$, $]-2, 0[\cup]\frac{6}{17}, \infty[$ — przedz. wypukłości; (h) $f'(x) = -\frac{1}{M^2}x^2(x-9)(x+5)$, $f''(x) = \frac{2}{M^3}xq(x)$, gdzie $q(x) = 19x^2 + 90x + 675 > 0$, $f(-5) = \frac{25}{4}$ — min. lok., $f(9) = -\frac{243}{16} = -15.1875$ — max. lok., $]-\infty, -3[\cup]0, 5[$ — przedz. wypukłości, $y = -x - 2$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$; (i) $f'(x) = -\frac{1}{M^2}x^2(x-4)(x-18)$, $f''(x) = \frac{2}{M^3}xq(x)$, gdzie $q(x) = 97x^2 - 792x + 1728 > 0$, $f(4) = 16$ — min. lok., $f(18) = -\frac{972}{25} = 38.88$ — max. lok., $]-\infty, 0[\cup]3, 8[$ — przedz. wypukłości, $y = -x - 11$ — asympt. dla $x \to \pm\infty$. (j) $f$ jest okresowa i nieparzysta; $f'(x) = e^{\cos x}(\cos^2 x + \cos x - 1)$, więc $f'(x) = 0 \iff \cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618033$, wtedy $f(x) = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \exp \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \pm 1.45852$; zatem $\sup_x f(x) = 1.45852$. Druga pochodna: $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{\cos x}(\cos x + 3)\sin 2x$.

2. Wykazać, że funkcja $f : [1, \infty[ \to \mathbf{R}$, $f(x) := (1 - \frac{1}{x})^x$, jest rosnąca.
**2.** $f'(x) = f(x)g(x)$, gdzie $g(x) = \log(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x-1} = \log(1+u) - \frac{u}{1+u} \geqslant 0$ (można inaczej: $g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2} \leqslant 0$ i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 + 0 = 0$, co daje $g \geqslant 0$). *Inny sposób*: $f'(x) = \frac{f(x)}{x-1}h(x)$, gdzie $h(x) = 1 + (x-1)\log(1 - \frac{1}{x})$, $h'(x) = \log(1 - \frac{1}{x}) + \frac{1}{x} \leqslant 0$, co wraz z $\lim_{x\to\infty} h(x) = 1 - \lim_{u\to 0-}(1+u)\frac{\log(1+u)}{u} = 0$ daje $h \geqslant 0$.

3. Wyliczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}} - \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$; (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x + 3^{-x} - 2}{x^2}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)}$; (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2} - e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^6+1}\right)$; (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log|s}{\log|s}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$; (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(e^x - 1) - e^{\sin x} + 1}{(\sin 3x)^4}$; (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^5}$; (l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\log\dfrac{\cos(a-x)}{\cos(a+x)}$; (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\log\dfrac{\cos bx}{\cos ax}$.
**3.**(a) 1; (b) $-\frac{1}{4}$; (c) $(\log 3)^2$; (d) $\frac{3}{2}$; (e) $-2$; (f) 2; (g) $\frac{1}{6}$;(h) 1; (i) $-1$; (j) $-\frac{1}{972}$; (k) $\frac{1}{15}$; (l) $2\operatorname{tg} a$; (m) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$.

4. Terminologia: Funkcja $f : ]a, b[ \to \mathbf{R}$ jest *niemalejąca w punkcie* $x_0 \in ]a, b[$, jeśli $(x - x_0)(f(x) - f(x_0)) \geqslant 0$ dla $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\imath]a, b[$ dla pewnego $\delta = \delta(x_0) > 0$. Wykazać, że: (a) Funkcja niemalejąca w każdym punkcie przedziału $]a, b[$ jest niemalejąca. (b) Funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dana wzorami $f(x) := x + x^2 \sin\frac{\pi}{2x}$ dla $x \neq 0$, $f(0) := 0$, jest niemalejąca w punkcie $x_0 = 0$ (co więcej: $f'(0) = 1$), lecz nie jest niemalejąca na żadnym otoczeniu $x_0$.
**4.**(a) Przypuśćmy, że $S_x := \{s \in ]x, b[ : f(x) > f(s)\} \neq \emptyset$ dla pewnego $x \in ]a, b[$; niech $s_0 := \inf S_x$, wtedy $x < s_0$ (gdyż $S_x\imath\ ]x + \delta(x), b[$). Są dwie możliwości: $1^0$ $f(x) \leqslant f(s_0)$, wtedy $[s_0, s_0 + \delta(s_0)] \cap S_x = \emptyset$; $2^0$ $f(x) > f(s_0)$, wtedy $[s_0 - \delta(s_0), s_0]\imath S_x$. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność z definicją $s_0$, a więc $\forall x \in ]a, b[ : S_x = \emptyset$, tzn. $f$ jest niemalejąca. (b) $xf(x) = x^2(1 + x\sin\frac{\pi}{2x}) \geqslant x^2(1 - |x|) \geqslant 0$ dla $x \in [-1, 1]$, więc $f$ jest niemalejąca w 0. Oznaczmy $x_n := \frac{1}{2n-1}$ dla $n \in \mathbf{N}$; gdyby $f$ była niemalejąca na jakimś otoczeniu 0, wtedy dla pewnego $n_0 \in \mathbf{N}$ ciąg $(f(x_n))_{n\geqslant n_0}$ byłby nierosnący (gdyż $x_n \searrow 0$), co jest niemożliwe, skoro $(-1)^n(f(x_{n+1}) - f(x_n)) = x_n^2 + x_{n+1}^2 - (-1)^n(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} - (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{4}{(4n^2-1)^2} > 0$ .

5. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!) = 2\pi$.
**5.** Oznaczmy $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$; wtedy $n!s_n \in \mathbf{N}$ oraz $\frac{1}{n+1} < (e - s_n)n! < \frac{1}{n}$ (gdyż $\frac{1}{(n+1)!} < \sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k!} = e - s_n < \sum_{k=n+1}^\infty \frac{q^{k-n}}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{q}{1-q}$, gdzie $q := \frac{1}{n+1}$). Stąd $\sin(2\pi en!) = \sin(2\pi(e - s_n)n!) \in ]\sin\frac{2\pi}{n+1}, \sin\frac{2\pi}{n}[$ dla $n \geqslant 4$, skąd teza.

6. Napisać wzór Taylora w $x_0 = 0$ dla funkcji $f(x) := \log(1+x)$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$: (a) dla $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, przedstawiając resztę w postaci Lagrange'a; (b) dla $x \in ]-1, 1[$ , przedstawiając resztę w postaci Cauchy'ego.

**6.** $f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}$ (indukcja), więc $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + r_n(x)$, gdzie: (a) $r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1}$ (Lagrange), przy czym $\xi_n = \theta_n x$, $\theta_n \in ]0,1[$ , więc $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1+\xi_n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$, gdyż $\frac{|x|}{1+\xi_n} \leqslant |x| \leqslant 1$ dla $x \in [0,1]$ oraz $\frac{|x|}{1+\xi_n} \leqslant \frac{|x|}{1-|x|} \leqslant 1$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$; (b) $r_n(x) = (-1)^n \frac{x(x-\xi_n)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}}$ (Cauchy), więc $|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right|^n$; przy tym $\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right| \leqslant \frac{|x|-|\xi_n|}{1-|\xi_n|} \leqslant \frac{|x|-|\xi_n x|}{1-|\xi_n|} = |x| < 1$, co daje $r_n(x) \to 0$.

8. Zbadać zbieżność (punktową, jednostajną, niemal jednostajną) ciągu funkcyjnego: (a) $f_n(x) := \frac{x^2}{n^2+(x-n)^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (b) $f_n(x) := \frac{n^2}{n^2+(x-n)^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (c) $f_n(x) := \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (d) $f_n(x) := \frac{nx^3}{1+nx^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (e) $f_n(x) := \frac{nx-(n+1)x^2}{n-(n-1)x}$, $x \in [0,1]$; (f) $f_n(x) := \frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (g) $f_n(x) := \frac{1}{1+(x-n)^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (h) $f_n(x) := \log(e^x + \frac{1}{n})$, $x \in \mathbf{R}$; (i) $f_n(x) := nxe^{-n^2x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (j) $f_n(x) := \frac{nx^2+(n+1)x}{nx+1}$, $x \in [0,1]$;

**8.** (e)$f(x) = x$ dla $x \in [0,1[$, $f(1) = -1$ — nieciągła, więc zb. niejednost. (zwartość $[0,1]$; (j) $f(0) = 0$, $f(x) = x+1$ dla $x \in ]0,1]$ — nieciągła, więc zb. niejednost.

9. Zbadać zbieżność (punktową, jednostajną, niemal jednostajną) szeregu funkcyjnego: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n^7+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x+n^2}$, $x \in ]0,\infty[$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $x \in ]-1,\infty[$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^5x^2}$, $x \in [0,\infty[$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in [0,\infty[$;

**9.** (c) $|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{-1+2^{n+1}} \Rightarrow$ zb. jednost.;

10. Obliczyć całki nieoznaczone: (a) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$, jeśli $b > a > 0$; (b) to samo, gdy $a > b > 0$;

**10.** (a) Podstawienie $x = b \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{b\,dt}{\cos^2 t}$, daje $I = \int \frac{\cos t\,dt}{b^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = \int \frac{ds}{a^2+c^2s^2} = \frac{1}{ac}\operatorname{arctg}\frac{cs}{a} = \frac{1}{ac}\operatorname{arctg}\frac{cx}{a\sqrt{x^2+b^2}}$, gdzie $s = \sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}$ oraz $c := \sqrt{b^2-a^2}$. (b) Tak samo licząc: $I = \frac{1}{2ac}\log\left|\frac{a+cs}{a-cs}\right| = \frac{1}{2ac}\log\left|\frac{a\sqrt{x^2+b^2}+cx}{a\sqrt{x^2+b^2}-cx}\right|$, gdzie $c := \sqrt{a^2-b^2}$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

## Seria 6.

1. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest (słabo) rosnąca, to jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$.

2. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła i nieujemna, to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b (f(x))^n\,dx} = \sup f([a,b])$.

3. Obliczyć całki nieoznaczone: (1) $\int (x^2-2x+3)e^x\,dx$; (2) $\int \sin^3 x\,dx$; (3) $\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$; (4) $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$; (5) $\int x^{-\frac{3}{2}}\log(1+\sqrt{x})dx$; (6) $\int \frac{\log|1-x|}{x^{n+1}}dx$; (7) $\int (\frac{x}{\operatorname{arc\,tg} x}-1)^{-2}dx$; (8) $\int \frac{x^4\,dx}{x^2+1}$; (9) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$; (10) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (11) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; (12) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$; (13) $\int \frac{1}{x^2}\arcsin x\,dx$; (14) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$; (15) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}}$; (16) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$; (17) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$; (18) $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$; (19) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; (20) $\int \sin(\log x)dx$; (21) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x\,dx}{2-3\cos^2 x}$; (22) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; (23) $\int \frac{\sin x\cos^3 x\,dx}{2+\sin^2 x}$; (24) $\int e^{-x}\frac{x^n}{n!}dx$; (25) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}}$; (26) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}}$; (27) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}}$; (28) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$; (29) $\int \sqrt{e^{2x}+2e^x+4}\,dx$.

4. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli: (a) $F_n(x) := \int \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^n dx$; (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyć $F_4(x)$); (c) $F_n(x) := \int \frac{x^p\,dx}{\log^n x}$, $p \in \mathbf{R}$; (d) $F_n(x) := \int x^{p-n}e^x\,dx$, $p \in [0,1[$ ; (e) $\int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzić wzór na $F_n(x)$).

5. Znaleźć wzór rekurencyjny, wyrażający $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli: (a) $F_n(x) := \int \cos^n x\,dx$; (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$; (c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$ (znaleźć wzory na $F_{2k}(x)$ i $F_{2k+1}(x)$); (d) $F_n(x) := \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; (e) $F_n(x) := \int x^n \cos x\,dx$.

6. Dla $k \in \mathbf{Z}_+$ oznaczmy $c_k := \int_0^a x^k \cos x\,dx$, gdzie $a := \frac{\pi}{2}$. Wykazać, że: (a) $c_{2n} = (-1)^n(2n)!\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}$; (b) $c_{2n+1} = (-1)^n(2n+1)!\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!}-1\right)$; (c) $0 \leqslant \frac{a}{(k+1)(k+2)} - \frac{c_k}{a^{k+1}} \leqslant \frac{k!a^3}{(k+4)!}$; (d) $\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{a^{k+1}}c_k = a = \frac{\pi}{2}$.

7. Obliczyć: (a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$; (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbf{R}$; (c) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$; (d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; (e) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$; (f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$; (g) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; (h) $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n\,dx$, $m,n \in \mathbf{N}$, $a<b$; (i) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbf{N}$; (j) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$; (k) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; (l) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$; (m) $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx\,dx$; (n) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$, $n \in \mathbf{N}$.

8. Niech $f(x) := e^{\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ dla $x \in \mathbf{R}$. Dowieść, że: (a) Dla $n \in \mathbf{N}$ zachodzi wzór $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!} + r_n(x)$, gdzie $r_n(x) := \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{(2n-1)!!}\int_0^x t^{2n}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$; (b) $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ dla $x \in \mathbf{R}$, skąd wynika wzór $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}$.

9. Zbadać (w zależności od $p,q \in \mathbf{R}$) zbieżność całki niewłaściwej: (a) $\int_0^1 (1-x)^p e^{-\frac{1}{\log x}}dx$; (b) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x^p|\log x|^q}$; (c) $\int_0^1 \frac{dx}{|\log(1-x)|^p|\log x|^q}$; (d) $\int_{-1}^1 (\cos\frac{\pi}{2}x)^{p+qx}dx$; (e) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg}(\sin x)}{x}dx$; (f) $\int_\pi^\infty \frac{(1+p\cos x)dx}{(5+4\cos x)x}$; (g) $\int_0^\infty e^{-x\sin^2 x}dx$; (h) $\int_0^\infty e^{-x\sin^2 x}\frac{dx}{x+1}$; (i) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p\sin^2 x}$; (j) $\int_0^\infty (1-e^{-\frac{1}{x}})\frac{dx}{x^p}$; (k) $\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x}dx$; (l) $\int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x}dx$; (m)$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^2+\sin^2 x}}$.

10. Wykazać zbieżność i wyliczyć całkę niewłaściwą: (a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^{3/2}}$; (b) $\int_{-\infty}^\infty (\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})\frac{dx}{x^2+1}$; (c) $\int_1^\infty \frac{e^{1/\log x}dx}{x^2+e^{2/\log x}}$; (e) $\int_0^\infty \frac{(1-x+x\log x)dx}{(x+1)^2(x-1)\log x}$; (f) $\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{x^2+p^2}$; (g) $\int_0^\infty \frac{x^n\,dx}{(x^2+1)^{n+1}}$; (h) $\int_0^\infty \frac{x^n\log x\,dx}{(x^2+p^2)^{n+1}}$; (i) $\int_0^\infty \frac{x\log^3 x}{x^4+1}dx$; (j) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; (k) $\int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{x}}dx$; (l) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}dx$; (m) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$; (n) $\int_0^\infty \frac{dx}{6x^3+\sqrt{x^2+1}}$; (o) $\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{x^8+1}$; (p) $\int_1^\infty \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x^2}$; (q) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$.

11. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [0,\infty[ \to [0,\infty[$ jest (słabo) malejąca, to całka $\int_0^\infty [f(E(x))-f(x)]dx$ jest zbieżna.

12. Obliczyć sumę szeregu: (1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; (2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$; (3) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n(n+1)(n+2)x^{n-1}}{(n-1)!}$; (4) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

### Wskazówki.

**3.**(9) Podstawić $t = x+\frac{1}{x}$. (10) Podstawić $t = x-\frac{1}{x}$. **7.**(d) Zast. 2. podst. E.: $\sqrt{x^2+1} = tx-1$; (h) zauważyć, że $I_{m,n} = \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$ ;(i) $I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$; (j) zast. 1. podst. E.; (k) wzór $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$ wymaga korekty!; (l) podst. $t = \operatorname{tg} x$ daje $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{2}}$, lecz ...; (m) $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$; (n) $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$. **8.**(a) Indukcja. **9.**(a) $\log[(1-x)f(x)] = \frac{1}{\log x}[(p+1)\log(1-x)\ \log x - 1]$; (b) podst. $x = e^{-t}$; (c) $\lim_{x\to 0+}\frac{|\log(1-x)|}{x} = 1$, $\lim_{x\to 1-}\frac{|\log x|}{1-x} = 1$; skorzystać z (b); (d) $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{(1-x)^{p+q}} = 1$, $\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)}{(1+x)^{p-q}} = 1$; (e) kr. Dirichleta; (f) $g_p := \frac{1+p\cos x}{5+4\cos x}$ jest okresowa i $\int_0^{2\pi} g_p(x)dx = \frac{\pi}{3}(2-p)$, więc $\int_\pi^\infty \frac{g_2(x)}{x}dx$ jest zb. (kr. Dirichleta), zaś $\frac{g_p(x)}{x} = \frac{5p-4}{6}\cdot\frac{g_2(x)}{x} + \frac{2-p}{6}\cdot\frac{1}{x}$; (g) $a_n := \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x)dx \geqslant \int_0^\pi e^{-n\pi\sin^2 x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \geqslant 2\int_0^{\pi/4} \geqslant 2\int_0^{\pi/4} e^{-2nx}dx = \frac{1}{n}(1-e^{-n\pi/2})$, bo $\sin^2 x \leqslant \frac{2}{\pi}x$ na $[0,\frac{\pi}{4}]$; (h) $a_n := \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx \leqslant \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-n\pi\sin^2 x}dx \leqslant \frac{2}{n\pi}\int_0^\infty e^{-4nx^2/\pi}dx = Cn^{-3/2}$, gdzie $C := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt$; (i) $\varphi(r) := \int_0^\pi \frac{dx}{1+r\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+r}}$, wtedy $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)dx \in [c_{n+1}, c_n]$, gdzie $c_n = \varphi((n\pi)^p) \approx Cn^{-p/2}$ dla $p>0$; (k) $p>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{p-1}} = 1$, $p<0 \Rightarrow$ podst. $t = x^p$ daje $(-\frac{1}{p})\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}dt$;

(l) $p > 0 \Rightarrow$ podst. $t = x^p$ daje $\frac{1}{p}\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}dt$; $p < 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{p-1}} = 1$; (m) spr. że $\int_0^\infty (f(x) - \frac{\sin x}{x})dx$ jest bezwzgl. zb. **10.** (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)f(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty}(x^2+1)f(x) = 0$, skąd wynika zbieżność; podst. $x = -y$ daje $I = \int_{-\infty}^\infty (\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{1}{x})\frac{dx}{x^2+1}$, więc ... (c) podst. $t = \log x - \frac{1}{\log x}$ (zal. rosnąca, $\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}})dt$) daje sumę dwoch zb. całek, z których jedna jest $= 0$; (e) podstawić $x = \frac{1}{t}$ i porównać z wyjściową postacią $I$; (f) podst. $x = \frac{p^2}{t}$; (g) spr. wzór $4nf_n'(x) - (n-1)f_{n-2}'(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}-x^{n-1}}{(x^2+1)^n}$; (h) podst. $x = \frac{p^2}{t}$ daje $I = -I + \ldots$; (i) podst. $x = \frac{1}{t}$; (j) 2. podst. E.; (l) $x^4+1 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2$; (m) $\frac{d}{dx}\frac{x}{(x^4+1)} = \ldots$; (n) 1. podst. E.: $x + \sqrt{x^2+1} = t$, następnie $u = t^2$ daje $I = \int_1^\infty \frac{(u+1)du}{(3u-1)(u^2-2u+3)}$; (o) podst. $x = \frac{1}{t}$ daje (!) $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+x^{-2})dx}{x^4+x^{-4}}$, więc można podst. $x - \frac{1}{x} = u$; (p) podst. $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. **11.** $0 \leqslant \int_n^{n+1}[f(n) - f(x)]dx \leqslant f(n) - f(n+1)$.

## Odpowiedzi i rozwiązania.

**1.** Jeśli $S^*(f,\mathcal{P})$ i $S_*(f,\mathcal{P})$ oznaczają górną i dolną sumę Riemanna odpow. podziałowi $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, to $0 \leqslant S^*(f,\mathcal{P}) - S_*(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})) \leqslant \delta(\mathcal{P})\sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(\mathcal{P})(f(b) - f(a))$, co dąży do 0 przy $\delta(\mathcal{P}) := \sup_k(x_k - x_{k-1}) \to 0$.

**2.** Dla dowolnego $0 < K < M := \sup f([a,b])$ zbiór $f^{-1}(]K,\infty[)$ jest $\neq \emptyset$ i otwarty w $[a,b]$, więc $f(x) > K$ na pewnym $\neq \emptyset$ przedziale $P \subset [a,b]$; zatem $(b-a)M^n \leqslant \int_a^b f^n \leqslant |P| \cdot K^n$, skąd ...

**3.** (1) $e^x(x^2 - 4x + 7)$; (2) $-\frac{1}{3}(2 + \sin^2 x)\cos x$; (3) $\frac{2}{27}x^{3/2}(9\log^2 x - 12\log x + 8)$; (4) $(x+1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} - \sqrt{x}$; (5) $\log x - 2(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})\log(1+\sqrt{x})$; (6) $\frac{1}{n}[(1 - x^{-n})\log|1-x| - \log|x| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{kx^k}]$; (7) $\frac{x \operatorname{arc\,tg} x + 1}{\operatorname{arc\,tg} x - x}$; (8) $\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x^3}{3} - x$; (9) $\frac{\sqrt{2}}{4}\log\frac{x^2 - x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$; (10) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$; (11) $\operatorname{tg} x - x$; (12) $\frac{2\sqrt{7}}{21}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) - \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x+2)$; (13) $-\frac{1}{x}\arcsin x + \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}$; (14) $\frac{2}{3}\arcsin(x^{3/2})$; (15) $-\frac{2}{n}\log\frac{1+\sqrt{x^n+1}}{x^{n/2}}$; (16) $\frac{2}{n}\arccos(x^{-n/2})$; (17) $\frac{1}{2}\log(x^2 + \sqrt{1+x^4})$; (18) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6}\log(x^2 - x + 1) - \frac{1}{3}\log(x+1)$; (19) $x\operatorname{tg} x + \log\cos x$; (20) $\frac{x}{2}(\sin\log x - \cos\log x)$; (21) $\frac{1}{4}\log|2\operatorname{tg}^2 2x - 1|$; (22) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x)$; (23) $\frac{3}{2}\log(2 + \sin^2 x) - \frac{1}{2}\sin^2 x$; (24) $-e^{-x}\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$; (25) $-\frac{2}{15x^3}(8x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2+x}$; (26) $x - \sqrt{x^2+x} + \frac{1}{2}\log(1 + 2x + 2\sqrt{x^2+x})$; (27) $\frac{1}{2}\log(1 + 2\sqrt{x - x^2}) - \frac{1}{2}\arcsin(1-2x)$; (28) $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2\sqrt{x-x^2}}{x\sqrt{3}} - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-x^2}}{x}$ (zast. 3. podst. E.); (29) $q - 2x + 2\log(2q - e^x - 4) + \log(q + e^x + 1)$, gdzie $q := \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4}$.

**4.**(a) $F_{n+1}(x) = -\frac{x^{2n+1}}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n+1}{2n}F_n(x)$; (b) $F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n(x^2+1)^n} + F_n(x)$, $F_4(x) = \log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{6x^4+15x^2+11}{12(x^2+1)^3}$; (c) $F_{n+1}(x) = -\frac{x^{p+1}}{n\log^n x} + \frac{p+1}{n}F_(x)$; (d) $F_{n+1}(x) = \frac{1}{n-p}(F_n(x) - x^{p-n})$; (e) $F_{n+1}(x) = -\frac{1}{nx^n} - F_n(x)$, $F_n(x) = (-1)^n\log|1+\frac{1}{x}| + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{kx^k}$.

**5.**(a) $F_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2}\cos^{n+1} x\sin x + \frac{n+1}{n+2}F_n(x)$; (b) $F_{n+2}(x) = -\frac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1} x} + \frac{n}{n+1}F_n(x)$; (c) $F_{n+2}(x) = -\frac{1}{(n+1)x^{n+1}} - F_n(x)$, $F_{2k}(x) = (-1)^k\operatorname{arc\,tg} x - \sum_{l=1}^k \frac{(-1)^{k-l}}{(2l-1)x^{2l-1}}$, $F_{2k+1}(x) = (-1)^k\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} - \sum_{l=1}^k\frac{(-1)^{k-l}}{2l\,x^{2l}}$;
(d) $F_{n+2}(x) = \frac{1}{n+2}\left(x^{n+1}\sqrt{x^2+1} - (n+1)F_n(x)\right)$; (e) $F_{n+2}(x) = x^{n+1}(x\sin x + (n+2)\cos x) - (n+2)(n+1)F_n(x)$.

**6.** Całkując przez części otrzymujemy $c_k = a^k - ks_{k-1}$, $s_k = kc_{k-1}$, $s_k := \int_0^a x^k\sin x\,dx$ ; stąd $c_k = a^k - k(k-1)c_{k-2}$, więc $c_0 = 1$ i $c_1 = a - 1$ dają przez indukcję (a) i (b). Z kolei $\cos x = \sin(a - x)$, więc $a - x \geqslant \cos x \geqslant a - x - \frac{1}{6}(a-x)^3$ dla $x \in [0,a]$, skąd, całkując, dostajemy (c) i w konsekwencji (d).

**7.**(a) $\frac{\pi^2}{16}$; (b) $\frac{\pi}{4}$; (c) $\frac{\pi}{3} + 2 - \sqrt{3}$; (d) $\int \ldots dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{|x|} - \frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^2}$, więc $I = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2(\sqrt{2}+1)} - \frac{\sqrt{5}}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; (e) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; (f) $2 - \frac{\pi}{2}$; (g) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{4\sqrt{2}+9}{7}$; (h) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}$;(i) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$; (j) $\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\log(2 + \sqrt{17})$; (k) $\sqrt{2}\pi$; (l) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; (m) $\frac{\pi}{2^n}$; (n) 0 dla $n = 2k$, $\pi$ dla $n = 2k+1$.

**8.**(b) $|r_n(x)| \leqslant \frac{e^{x^2/2}}{(2n-1)!!}|\int_0^x t^{2n}dt| = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!!}e^{x^2/2}$.

**9.**(a) rozb. $\forall p \in \mathbf{R}$; (b) zb. $\iff$ $(p < 1)$ lub $(p = 1, q > 1)$; (c) zb. $\iff$ $p < 1, q < 1$; (d) zb. $\iff$ $|q| < 1 + p$; (e) zb.; (f) zb. $\iff$ $p = 2$; (g) rozb.; (h) zb.; (i) zb. $\iff$ $p > 2$; (j) zb. $\iff$ $0 < p < 1$; (k),(l) zb. $\iff$ $p \neq 0$; (m) zb.

**10.** (a) 2; (b) $I = \frac{\pi}{2}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (e) $\frac{1}{2}$; (f) $\frac{\pi}{2|p|}\log|p|$; (g) $I_{2k+1} = 2^{-k-1}\frac{k!}{(2k+1)!!}$, $I_{2k} = 2^{-2k-1}\pi\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$; (h) $|p|^{-n-1}I_n\log|p|$, gdzie $I_n$ jest z (g); (i) 0; (j) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$; (k) $n!$; (l) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (m) $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi$; (n) $\frac{1}{11}(\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi + \log\frac{9}{2})$; (o) $\frac{\pi}{4}\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$; (p) $\frac{\pi}{2} - 1$; (q) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

**12.**(1) $a_n = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$, więc $S = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; (2) $f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ dla $|x| < 1$; wtedy $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, więc $f(x) = x + (1-x)\log(1-x)$, zatem (suma)$= 1 + \frac{(1-x)}{x}\log(1-x)$; (3) $a_{n+1} = \frac{x^n}{n!}[n(n-1)(n-2) + 9n(n-1) + 18n + 6]$, więc $S = e^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6)$; (4) $f(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}$ dla $|x| < 1$; wtedy $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $f''(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$; stąd, wobec $f(0) = f'(0) = 0$, dostajemy: $f'(x) = x + (1-x)\log(1-x)$, $f(x) = \frac{1}{4}x(3x-2) - \frac{1}{2}(1-x)^2\log(1-x)$, a zatem (suma)$= \frac{3x-2}{4x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\log(1-x)$ dla $0 < |x| < 1$.

wykorzystane: 3.(a)(e), 4.(g), 5.(h) (kolokwium 3.IV.93)

1. Dla $p \in \mathbf{R}$ określmy wzorami $T_p(x) := \cos(p \arccos x)$, $U_p(x) := \sin(p \arccos x)$ dwie funkcje $T_p, U_p : ]-1,1[ \to \mathbf{R}$. Sprawdzić, że każda z tych dwóch funkcji spełnia równanie różniczkowe $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + p^2 f(x) = 0$.

1. Oznaczmy $f(x) := \cos(\theta + p \arccos x)$, wtedy $f = T_p$ dla $\theta = 0$ oraz $f = U_p$ dla $\theta = -\frac{\pi}{2}$; mamy: $f'(x) = \frac{p}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\theta + p \arccos x)$, $f''(x) = \frac{px}{(1-x^2)^{3/2}} \sin(\theta + p \arccos x) - \frac{p^2}{1-x^2} \cos(\theta + p \arccos x)$, skąd wynika teza.
*Uwaga.* $U_p(x) = \sqrt{1-x^2}[T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \ldots + T_{1-n}(x)]$ dla $n \in \mathbf{N}$.

1' Dla $n \in \mathbf{N}$ funkcja $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z} \ni \varphi \to \frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi} \in \mathbf{R}$ jest okresowa o okresie $\pi$, więc da się wyrazić przez $\operatorname{ctg}\varphi$: $\frac{\sin n\varphi}{\sin^n \varphi} = f_n(\operatorname{ctg}\varphi)$. Dowieść, że: (a) $f_n'(u) = nf_{n-1}(u)$; (b) $f_n(u)$ są wielomianami, takimi że $f_n(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$.

1' Różniczkując wzgl. $\varphi$ tożsamość $\sin n\varphi = \sin^\varphi f_n(\operatorname{ctg}\varphi)$ dostajemy $n \cos n\varphi = n \sin^{n-1}\varphi \cos\varphi\, f_n(u) + \sin^n \varphi \left(-\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) f_n'(u)$, skąd $f_n'(u) = n \sin\varphi \cos\varphi\, f_n(u) - n\frac{\cos n\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} = n\frac{\sin n\varphi \cos\varphi - \cos n\varphi \sin\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} = n\frac{\sin(n\varphi-\varphi)}{\sin^{n-1}\varphi} = nf_{n-1}(u)$. Stąd, skoro $f_1(u) = 1$, przez indukcję wnosimy, że $f_n(u)$ są wielomianami. *Uwaga.* Można pokazać, że $f_n(u) = \operatorname{Im}(u+i)^n$, np. $f_2(u) = 2u$, $f_3(u) = 3u^2-1$, $f_4(u) = 4u^3-4u$.

1" Niech $\mu \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$. Sprawdzić, że jeśli funkcja $y \in C^{m+2}(]-1,1[)$ spełnia tzw. *równanie Legendre'a* $(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0$, to funkcja $]-1,1[ \ni x \mapsto w(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y^{(m)}(x)$ spełnia tzw. *stowarzyszone równanie Legendre'a* $(1-x^2)w'' - 2xw + \left(\mu - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right) w = 0$.

1" $w' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[y^{(m+1)} - \dfrac{mx}{1-x^2} y^{(m)}\right]$, $w'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[y^{(m+2)} - \dfrac{2mx}{1-x^2} y^{(m+1)} + \dfrac{m\big((m-1)x^2-1\big)}{(1-x^2)^2} y^{(m)}\right]$. Stąd $(1-x^2)w'' - 2xw' + \left(\mu - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right) w = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left[(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \big(\mu - m(m+1)\big)y^{(m)}\right]$. Otóż stosując uogólniony wzór Leibniza $(uv)^{(m)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} u^{(m-k)} v^{(k)}$ łatwo się przekonać, że ostatnie wyrażenie $[\ldots]$ jest równe $\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y\right]$.
*Uwaga.* Wynika z tych rachunków, że $\mathcal{L} \circ \mathcal{F}_m - \mathcal{F}_m \circ \mathcal{L} = \dfrac{m^2}{1-x^2}\mathcal{F}_m$, gdzie $\mathcal{L}[y] := (1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y$, $\mathcal{F}_m[y] := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} y^{(m)}$.

2. Niech $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją wypukłą, $M(f) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Wykazać nierówności: (a) $M(f) \geqslant f(\frac{a+b}{2})$; ($b_1$) $M(f) \leqslant \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$; ($b_n$) $M(f) \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + f(\frac{n-1}{n}a + \frac{1}{n}b) + \ldots + f(\frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}b) + \frac{1}{2}f(b)\right)$ dla $n \in \mathbf{N}$.

2. (a) Dla $n \in \mathbf{N}$ oznaczmy $S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)$, gdzie $\xi_k) := a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)$; wtedy $\lim_{n\to\infty} S_n = M(f)$, a nierówność Jensena daje $S_n) \geqslant f(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}) = f(\frac{a+b}{2})$; ($b_1$) $f(x) \leqslant f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$; całkując tę nierówność dostajemy tezę; ($b_n$) stosujemy ($b_1$) do $f$ na każdym z $n$ przedziałów $[a, a+\frac{b-a}{n}], \ldots, [b-\frac{b-a}{n}, b]$, po czym dodajemy stronami otrzymane nierówności.

3. Obliczyć całki nieoznaczone: (a) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}$; (b) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$; (c) $\int \sin(\sqrt{x})dx$; (d) $\int x^3 \sin(x^2)dx$; (e) $\int(\arcsin x)^2 dx$; (f) $\int \operatorname{tg}^{2n} x\,dx$; (g) $\int \sin(\sqrt[3]{x})dx$; (h) $\int \frac{\log^2 x}{x^2}dx$; (i) $\int(\sin x)\log|\operatorname{tg} x|dx$; (j) $\int(\cos x)\log|\operatorname{tg} x|dx$; (k) $\int \frac{dx}{1+8\sin^4 x}$.

3. (a) $\frac{1}{1+\cos x} = (\operatorname{tg}\frac{x}{2})'$, skąd (przez części) $\int \ldots dx = x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\log|\cos\frac{x}{2}|$. (b) $x\operatorname{tg} x + \log|\cos x|$. (c) $2\sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$. (d) $\frac{1}{2}[\sin(x^2) - x^2\cos(x^2)]$. (e) $x(\arcsin^2 x - 2) + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$. (f) Podst. $t = \operatorname{tg} x$ i całkujemy $\frac{t^{2n}}{t^2+1} = \frac{(-1)^n}{t^2+1} + t^{2n-2} - t^{2n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}$; stąd $\int \ldots dx = (-1)^n x + \frac{1}{2n-1}\operatorname{tg}^{2n-1} x - \frac{1}{2n-3}\operatorname{tg}^{2n-3} x + \ldots + (-1)^{n-1}\operatorname{tg} x$. (g) $3(2-\sqrt[3]{x^2})\cos\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}$. (h) $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2\log x + 2)$. (i) $\log|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - (\cos x)\log|\operatorname{tg} x|$. (j) $(\sin x)\log|\operatorname{tg} x| - \log|\frac{1+\sin x}{\cos x}|$. (k) Podst. $t = \operatorname{tg} x$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$ daje $\int \ldots dx = \int \frac{(t^2+1)dt}{9t^4+2t^2+1} = \frac{1}{12}\int(\frac{(6t+2)+4}{3t^2+2t+1} - \frac{(6t-2)-4}{3t^3-2t+1})dt = \ldots = \frac{1}{12}\log\frac{2-\cos 2x+\sin 2x}{2-\cos 2x-\sin 2x} + \frac{1}{3\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x+1}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{2}})$.

4. Obliczyć całki: (a) $\int_1^\infty \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x^2}$; (b) $\int_0^\infty \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$; (c) $\int_1^\infty \frac{(1+x)dx}{(1+xe^x)x}$; (d) $\int_1^2 \frac{x^2-2}{x^4+4}dx$; (e) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$; (f) $\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x-x^2}}$; (g) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2\sqrt{x-x^2}}$; (h) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$;

4. (a) podst. $t := \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 1$ daje $I = 4\int_1^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} = [2\operatorname{arctg} t - \frac{2t}{t^2+1}]_1^\infty = 1 + \frac{\pi}{2}$. (b) $3f(x) = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1} + \frac{2}{x^2+1} = \frac{1/2}{x^2-x\sqrt{3}+1} + \frac{1/2}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{2}{x^2+1}$, więc $I = \frac{1}{3}[\operatorname{arctg}(2x-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2x+\sqrt{3}) + 2\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \frac{2\pi}{3}$. *Uwaga.* $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$ w postaci "zwiniętej" $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3x(1-x^2)}{x^4-4x^2+1}$ ma skoki dla $x = \pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. (c) $t := xe^x$ daje $\int \ldots dx = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \log|\frac{xe^x}{1+xe^x}|$, więc $I = \log(1+\frac{1}{e})$. (d) $t := x + \frac{2}{x}$ daje $\int \ldots dx = \int \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4}\log|\frac{t-2}{t+2}| = \frac{1}{4}\log\frac{x^2-2x+2}{x^2+2x+2}$, więc $I = 0$. (e) 3. p. E.: $t = \sqrt{\frac{1}{x}-1}$ daje $x = \frac{1}{t^2+1}$, $dx = \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)^2}$, $\int \ldots dx = \int \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)(t^2+t+1)} = \int\left(\frac{2}{t^2+t+1} - \frac{2}{t^2+1}\right)dt = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{\sqrt{3}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$, więc $\int_0^1 = (1 - \frac{4}{3\sqrt{3}})\pi$. (f) podst. jak w (e) daje: $\int \ldots dx = \int \frac{-2t\,dt}{(t^2+1)(t^2-t+1)} = \int\left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{t^2-t+1}\right)dt = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}-1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1-2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{\sqrt{3}}$, więc $\int_0^1 = (\frac{8}{3\sqrt{3}} - 1)\pi$. (g) podst. jak w (e) daje $\int \ldots dx = \int\left(\frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = -\frac{1}{t+1} - \operatorname{arctg} t = -\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}-1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$, więc $\int_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$. (h) $I = [\log|\frac{x}{x+1}| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}]_1^\infty = \log 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

5. Obliczyć: (a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1}$; (b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$; (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$; (d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(2n+1)}$; (e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{-n}}{2n+1}$; (f) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$; (g) $\sum_{n=0}^\infty (16n^2-4n+1)a^n$; (h) $\sum_{n=0}^\infty \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$; (i) $\sum_{n=0}^\infty \frac{15n^2-4n+1}{2^n}$; (j) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$; (k) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$; (l) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$; (m) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$;

5. (a) $\frac{1}{2}$, gdyż $\frac{2}{4n^2-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$; (b) $1 - \log 2$; (c) $1 - 3\log\frac{3}{2}$; (d) $2(1-\log 2)$; (e) $\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})$; (f) $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}$; (g) $\frac{(1+a)(1+7a)}{(1-a)^3}$ dla $|a|<1$; (h) $\frac{(2x-1)(3x+1)}{(1-x)^3}|_{x=1/2} = 0$; (i) $\frac{(1+4x)(1+5x)}{(1-x)^3}|_{x=1/2} = 84$; (j) $S = -f_2(-1) - f_3(-1)) = \frac{2}{3}\log 2$, bo $f_2(-1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{3n+1} = -\frac{1}{3}\log 2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, $f_3(-1) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{3n+2} = -\frac{1}{3}\log 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; (k) $S = \frac{1}{3}(-f_2(-1) + f_3(-1)) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$, bo $\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} = \frac{3(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$; (l) $f(x) := \sum_0^\infty \frac{x^{6n}}{(2n+1)(3n+2)} = \sum_0^\infty \frac{2x^{6n}}{2n+1} - \sum_0^\infty \frac{3x^{6n}}{3n+1} = \frac{2}{x^3}f_1(x^3) - \frac{3}{x^4}f_2(x^2) = \frac{1}{x^3}\log\frac{1+x^3}{1-x^3} - \frac{1}{2x^4}\log\frac{1+x^2+x^4}{(1-x^2)^2} + \frac{\sqrt{3}}{x^4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\,x^2}{2+x^2}$, wtedy $S = f(1-) = \log 2 - \frac{1}{2}\log 3 + \sqrt{3}\frac{\pi}{6} + \lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^4}[\log(1-x^2) - x\log(1-x^3)] = 2\log 2 - \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; (m) $S = 2\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)} - 3\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{3n+2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 3f_3(-1) = \log 2 - (\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2})\pi$.

6. Niech $a > 1$; dowieść, że: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{k=n}^\infty \frac{1}{k^2} = 1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{a^n}\sum\limits_{k=n}^\infty \frac{a^k}{k!} = 1$.

6. (1) $S_n := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \geqslant (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \ldots = \frac{1}{n}$ oraz $S_n \leqslant (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + \ldots = \frac{1}{n-1}$, zatem $\lim_{n\to\infty} nS_n = 1$. (2) Dla $n > a$ mamy: $\frac{a^n}{n!} \leqslant \sum_{k=n}^\infty \frac{a^k}{k!} \leqslant \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}[\frac{a}{n} + (\frac{a}{n})^2 + (\frac{a}{n})^3 + \ldots] = \frac{a^n}{(n-1)!(n-a)}$, skąd teza.

7. Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x,y) := e^{-2x}(x+y)(x^2+x-y)$. (a) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne $f$; (b) wyznaczyć zbiór wartości $f$.

7. **Wsk.** Wyliczyć $\hat{f}(x) := \sup_y f(x,y)$. **Odp.** $f(0,0) = 0$, $f(-2,2) = 0$, $f(\sqrt{2},1) = e^{-\sqrt{8}}(3+\sqrt{8}) \approx 0.344$, $f(-\sqrt{2},1) = e^{\sqrt{8}}(3-\sqrt{8}) \approx 2.903$; wartości $(f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy})$ w tych punktach są następujące: $(2,0,-2)$, $2e^4(-3,-2,-1)$, $2e^{-\sqrt{8}}(-\sqrt{2}-4, \sqrt{2}, -1)$, $2e^{\sqrt{8}}(\sqrt{2}-4, -\sqrt{2}, -1)$, a więc pierwsze dwa punkty są siodłowe, a w pozostałych dwóch są (lok.) maksima; ponadto $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$.

8. Dla danej funkcji $\varphi : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} = \{(u,v) : u > 0\} \to \mathbf{R}$ oraz symetrycznego operatora $A \in \mathrm{End}\mathbf{R}^n$ określmy funkcję $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $f(x) := \varphi(|x|^2, \langle x|Ax\rangle)$. Wtedy $\frac{1}{2}f'(x) = \varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot Ax$, zatem $f'(x) = 0$ w trzech przypadkach: $1^0$ $x = 0$; $2^0$ $(u,v) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ jest p. kryt. $\varphi$ oraz $u = |x|^2, v = \langle x|Ax\rangle$ — musi być wtedy $\frac{v}{u} \in [\inf \mathrm{Sp}A, \sup \mathrm{Sp}A]$; $3^0$ $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, oraz $\varphi'_u + \lambda\varphi'_v = 0$, tzn. $\hat{u} = |x|^2$ jest p. kryt. funkcji $\mathbf{R}_+ \ni u \mapsto \varphi(u, \lambda u)$. *Przykład.* Dla $\varphi(u,v) := \frac{e^v}{1+au}$, $a > 1$, mamy: $\varphi'_u + \lambda\varphi'_v = \frac{e^v}{(1+au)^2}[\lambda(1+au) - a] = 0 \iff \lambda = \frac{a}{1+au} \in [1, a[$ .

9. Wykazać że zbiorem wartości funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$ jest zwarty odcinek; wyznaczyć go.

9. $f'_x = \frac{1-2xy-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)}$, $f'_y = \frac{1-2xy-y^2}{(x^2+1)(y^2+1)^2}$; zatem w p. kryt. jest $x^2 = 1 - 2xy = y^2$, skąd $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli $f$ ma 2 p. kryt.: $f(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.65$. Zauważmy, że dla $|x| > 2$ mamy: $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leqslant \left|\frac{x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$, a więc $|f(x,y)| \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{y^2+1} + \frac{\frac{1}{5}y}{y^2+1} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0.6$; analog. jest dla $|y| > 2$, a zatem poza zwartym zbiorem $K := \{(x,y) : |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$ mamy $|f(x,y)| \leqslant 0.6$.

10. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x,y) := \sin(x+y) - \sin x - \sin y$.

10. $f'_x = \cos(x+y) - \cos x$, $f'_y = \cos(x+y) - \cos y$, więc w p. kryt. $\cos x = \cos y =: \lambda$, oraz $\lambda = \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$, tzn. $\pm(1-\lambda^2) = \lambda^2 - \lambda$, gdzie $\pm = \mathrm{sgn}(\sin x\sin y)$. Stąd $\lambda = 1$ lub $0 = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda+1)(\lambda-1)$, czyli $\lambda = 1$ lub $\lambda = -\frac{1}{2}$. Mamy więc trzy rodziny p. kryt.: $1^0$ $f(2k\pi, 2l\pi) = 0$ — są to zdegen. p. kryt. typu «małpie siodło», gdyż np. $f(x,y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 - x + \frac{1}{6}x^3 - y + \frac{1}{6}y^3 + \ldots = -\frac{1}{2}xy(x+y) + \ldots$; $2^0$ $f(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2l\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2.598$ — są to glob. minima; $3^0$ $f(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.598$ — są to globalne maksima.

11. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem: (a) $f(x,y) := \sin(x+y) + \sin x + \sin y$; (b) $f(x,y) := 6\sin(x+y) + \sin x + \sin y$; (c) $f(x,y) := 7\sin(x+y) + 2\sin x + 7\sin y$; (d) $f(x,y) := \sin(x+y) + 6\sin x + \sin y$; (e) $f(x,y) := 17\sin(x+y) + 3\sin x + 17\sin y$; (f) $f(x,y) := 17\sin(x+y) + 10\sin x + 17\sin y$.

11. Dla $f(x,y) = \sin(x+y) + \frac{1}{a}\sin x + \frac{1}{b}\sin b$ mamy: $0 = f'_x = \cos(x+y) + \frac{1}{a}\cos x$, $0 = f'_y = \cos(x+y) + \frac{1}{b}\cos y \Rightarrow L := \cos(x+y) = -\frac{1}{a}\cos x = -\frac{1}{b}\cos y$, przy czym $L = \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y = abL^2 \mp \sqrt{1-a^2L^2}\sqrt{1-b^2L^2}$, co po uproszczeniu daje $\boxed{2abL^3 - (a^2+b^2+1)L^2 + 1 = 0}$, przy czym dopuszczalne są tylko te pierwiastki $L$, dla których $|L| \leqslant \min\{1, \frac{1}{|a|}, \frac{1}{|b|}\}$. (a) $0 = 2L^3 - 3L^2 + 1 = (L-1)^2(2L+1)$, co daje: $\cos x = \cos y = -1$, $\sin x = \sin y = 0$, $f(x,y) = 0$ (siodła) lub $\cos x = \cos y = \frac{1}{2}$, $\sin x = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(x,y) = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$. (b) $0 = 72L^3 - 73L^2 + 1 = (L-1)(9L+1)(8L-1)$, co daje: $\cos x = \cos y = -\frac{3}{4}$, $\sin x = \sin y = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$, $f(x,y) = \pm\frac{7}{4}\sqrt{7} \approx 4.63$ (siodła) lub $\cos x = \cos y = \frac{2}{3}$, $\sin x = \sin y = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $f(x,y) = \pm\frac{10}{3}\sqrt{5} \approx 7.45$ (min. i max.); (c) $7L^3 - \frac{53}{4}L^2 + 1 = \frac{1}{4}(L-2)(4L+1)(7L-2)$, co daje: $\cos x = \frac{7}{8}$, $\sin x = \pm\frac{1}{8}\sqrt{15}$, $\cos y = \frac{1}{4}$, $\sin y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{15}$, $f(x,y) = \pm\frac{205}{64}\sqrt{15} \approx 12.41$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{2}{7}$, $\sin y = \frac{3}{7}\sqrt{5}$, $f(x,y) = 0$ (siodła). (d) $0 = \frac{1}{36}(12L^3 - 73L^2 + 36) = \frac{1}{36}(L-6)(3L+2)(4L-3)$, co daje: $\cos x = \frac{1}{9}$, $\sin x = \pm\frac{4}{9}\sqrt{5}$, $\cos y = \frac{2}{3}$, $\sin y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$, $f(x,y) = \pm\frac{265}{81}\sqrt{5} \approx 7.32$ (max. i min.) lub $\cos x = -\frac{1}{8}$, $\sin x = \frac{3}{8}\sqrt{7}$, $\cos y = -\frac{3}{4}$, $\sin y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{7}$, $f(x,y) = \pm\frac{137}{64}\sqrt{7} \approx 5.66$ (siodła). (e) $0 = \frac{1}{9}(102L^3 - 307L^2 + 9) = \frac{1}{9}(L-3)(6L+1)(17L-3)$, co daje: $\cos x = \frac{17}{18}$, $\sin x = \pm\frac{1}{18}\sqrt{35}$, $\cos y = \frac{1}{6}$, $\sin y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{35}$, $f(x,y) = \pm\frac{707}{162}\sqrt{35} \approx 25.82$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{3}{17}$, $\sin y = \pm\frac{2}{17}\sqrt{70}$, $f(x,y) = 0$ (siodła). (f) $0 = \frac{1}{100}(340L^2 - 489L^2 + 100) = \frac{1}{100}(4L-5)(5L+2)(17L-10)$, co daje: $\cos x = \frac{17}{25}$, $\sin x = \pm\frac{4}{25}\sqrt{21}$, $\cos y = \frac{2}{5}$, $\sin y = \frac{1}{5}\sqrt{21}$, $f(x,y) = \pm\frac{5131}{625}\sqrt{21} \approx 37.62$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{10}{17}$, $\sin y = \pm\frac{3}{17}\sqrt{21}$, $f(x,y) = 0$ (siodła).

12. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem (a) $f(x,y) := \frac{xy(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$; (b) $f(x,y) := \frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1}$;

12. (a) $f'_x = \frac{(x^2y-2x-y)y}{(x^2+1)^2(y^2+1)}$, $f'_y = ...$, więc w p. kryt. $(x,y) \neq (0,0)$ mamy $(2-\lambda)x+y=0$, $x+(2-\lambda)y=0$, gdzie $\lambda := xy$; stąd $0=(2\lambda)^2-1=(\lambda-1)(\lambda-3)$. Gdy $\lambda=1$ dost. $x+y=0, xy=1$, tj. sprzeczność; gdy $\lambda=3$ dostajemy $x=y, xy=3$, tj. $x=y=\pm\sqrt{3}$ przy czym $f(\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{3})=\pm\frac{3}{8}\sqrt{3}$; są to odpow. maks. i min. lokalne (nawet globalne!); z kolei pkt. $(x,y)=(0,0)$ jest typu «małpie siodło». (b) $f'_x = \frac{1}{y^2+1} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$, $f'_y = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2xy}{(y^2+1)^2}$, więc w p. kryt. $\frac{(x^2+1)^2}{y^2+1} = 2xy = \frac{(y^2+1)^2}{x^2+1}$, skąd $y^2=x^2$ i $2xy>0$, tzn. $y=x$. Są więc dwa p. kryt.: $f(\pm\mathbf{p})=\pm 1$, gdzie $\mathbf{p}=(1,1)$; w obu są siodła, bo np. $f''_{xx}(\mathbf{p}) = f''_{yy}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}$, $f''_{xy}(\mathbf{p}) = -1$; $f$ jest nieograniczona z dołu i z góry, gdyż np. $f(x,0)=x$.

13. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}_+^3 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x,y,z) := \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$.

13. $f$ jest (dod.) jednorodna stopnia 1, więc $f(x,y,z) = \varphi(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, gdzie $\varphi(x,y) := f(x,y,1) = \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$. Warunek $0 = \varphi'_x - \varphi'_y = \frac{1+x+y}{(y+1)^2} - \frac{1+x+y}{(x+1)^2}$ daje $x = y$, co po wstaw. do $0 = \varphi'_x$ daje $0 = \frac{(x-1)(3x+1)}{4x^2(x+1)^2}$. Zatem jedynym p. kryt. $\varphi$ jest $\mathbf{p} = (1,1)$; skoro $\varphi''(\mathbf{p})$ ma $\varphi''_{xx} = \varphi''_{yy} = \frac{1}{2}$, $\varphi''_{xy} = -\frac{1}{4}$, to $f(\mathbf{p}) = \frac{3}{2}$ jest (lokalnym) minimum. Pok. że jest to min. *globalne*: $\frac{d}{dx}\varphi(x, t-x) = \frac{(t+1)(t+2)(2x-t)}{(t-x+1)^2(x+1)^2}$, więc $\inf\{\varphi(x,y) : x,y \in \mathbf{R}_+,\ x+y = t\} = \varphi(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) = 2 + \frac{1}{t} - \frac{4}{t+2} =: \psi(t)$; z kolei $\psi'(t) = \frac{4}{(t+2)^2} - \frac{1}{t^2}$, a zatem $\forall t > 0 : \psi(t) \geqslant \psi(2) = \frac{3}{2}$.

14. Wykazać, że zbiór $S := \{(x,y,z) : x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 1\} \subset \mathbf{R}^3$ jest gładką, zwartą i spójną rozmaitością.

14. Sprawdzimy, że $f'(\mathrm{p}) = 4[x^3 - yz, y^3 - zx, z^3 - xy]$ jest $\neq 0$ dla $\mathrm{p} \in S$: Jeśli $f'(\mathrm{p}) = 0$ i $z \neq 0$, to $z^3 = yz$ daje $x \neq 0, y \neq 0$, więc $0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log|x| \\ \log|y| \\ \log|z| \end{bmatrix}$, skąd $|x| = |y| = |z| = 1$, $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 3 \pm 4 \neq 1$, tzn. $\mathrm{p} \notin S$; jeśli zaś $f'(\mathrm{p}) = 0$ i $z = 0$, to $x^3 = yz = 0, y^3 = xz = 0$, więc także $\mathrm{p} \notin S$. **Zwartość**: $x^4 + y^4 - 4xyz = 2(z - xy)^2 - 2z^2 + (x^2 - y^2)^2 \geqslant -2z^2$, zatem dla $\mathrm{p} = (x,y,z) \in S$ mamy $1 = f(\mathrm{p}) \geqslant z^4 - 2z^2$, więc $|z^2 - 1| \leqslant \sqrt{2}$, tzn. $|z| \leqslant \sqrt{1+\sqrt{2}}$; w konsekwencji $S$ jest ograniczony. [*Inny sposób*: Wyznaczamy minimum $h(x,y) := x^4 + y^4 - 4xyz$ najpierw po $x$: $h(x,y) \geqslant h((yz)^{1/3}, y) = y^4 - 3(yz)^{4/3}$, a następnie po $y$: $h((yz)^{1/3}, y) =: g(y) \geqslant g(\pm|z|^{1/2}) = -2z^2$.] *Uwaga.* Krytyczne wartości $z$ na $S$: płaszczyzna styczna $T_{\mathrm{p}}(S) = \ker f'(\mathrm{p})$ musi być «pozioma», tzn. $f'_x(\mathrm{p}) = f'_y(\mathrm{p}) = 0$; daje to $x^3 = yz, xz = y^3$, skąd $x^4 z = y^4 z$, przy czym $z \neq 0$, więc $y = \epsilon x$ i $z = \epsilon z^2$, gdzie $\epsilon = \pm 1$; dostajemy stąd cztery p.kty krytycznej wartości $z$: $(\epsilon_1 \sqrt[4]{c}, \epsilon_2 \sqrt[4]{c}, \epsilon_1 \epsilon_2 \sqrt{c})$, gdzie $c := 1 + \sqrt{2}$, $\epsilon_{1,2} = \pm 1$. **Spójność**: $S = \{(x,y,z) : \varphi_{xy}(z) = 1 - x^4 - y^4, (x,y) \in S_0\}$, gdzie $\varphi_p(z) := z^4 - 4pz$ (ma globalne minimum $\varphi_p(p^{1/3}) = -3p^{4/3}$) oraz $S_0 := \{(x,y) : \inf_z \varphi_{xy}(z) \leqslant 1 - x^4 - y^4\} = \{(x,y) : x^4 + y^4 - 3(xy)^{4/3} \leqslant 1\}$; widać że $S_0$ jest spójny (gwiaździsyość wzgl. (0,0)); z własności $\varphi_p$ wynika istnienie funkcji $z_+, z_- : S_0 \to \mathbf{R}$ takich, że $\varphi_{xy} \circ z_\pm(x,y) = 1 - x^4 - y^4$ oraz $z_-(x,y) \leqslant (xy)^{1/3} \leqslant z_+(x,y)$; funkcje te są ciągłe na $S_0$: na $\mathrm{Int} S_0$ wynika to z lokalnej rozwikływalnośći wzgl. $z$ równania $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 1$ ($\frac{d}{dz} \ldots = 4(z^3 - xy) \neq 0$), zaś na brzegu $S_0$ mamy $z_-(x,y) = z_+(x,y) = (xy)^{1/3} = \lim_{p \to (x,y)} z_\pm(p)$. Stąd $S$ jest sumą wykresów dwu ciągłych i jednakowych na brzegu (spójnej) dziedziny funkcji, a więc jest spójny. *Inny (lepszy) sposób na* **Zwartość i Spójność**: Pokażemy że każda półprosta $\mathbf{R}_+ \mathrm{p} \subset \mathbf{R}^3$, $\mathrm{p} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, przecina $S$ w dokładnie jednym punkcie $t(\mathrm{p})\mathrm{p}$ i zależność $\mathrm{p} \mapsto t(\mathrm{p}) \in \mathbf{R}_+$ jest gładka; daje to homeomorfizm sfery $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ na $S$, $\mathrm{p} \mapsto t(\mathrm{p})\mathrm{p}$, więc $S$ tak jak $S^2$ jest zwarta i spójna. Niech $\mathrm{p} = (x,y,z)$; wtedy $t\mathrm{p} \in S \iff \varphi_{\mathrm{p}}(t) := (x^4 + y^4 + z^4) t^4 - 4xyz\, t^3 = 1$.

15. Dla $p \in \mathbf{R}$ oznaczmy $S_p := \{(x,y,z) : x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = p\}$. Dowieść, że: (a) $S_p = \emptyset$ dla $p < -1$; (b) $S_{-1}$ jest 4-elementowym zbiorem $\{(x,y,z) : |x| = |y| = |z| = 1, xyz = 1\}$; (c) dla $p > 0$ $S_p$ jest gładką, spójną i zwartą rozmaitością.

16. Wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x) := \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1}$ na zbiorze $Z := [1,4] \times [2,5] \times [3,6] \subset \mathbf{R}^3$.

16. $f'(x) = [\frac{x_1^2 - x_2 x_3}{x_1^2 x_2}, \frac{x_2^2 - x_3 x_1}{x_2^2 x_3}, \frac{x_3^2 - x_1 x_2}{x_3^2 x_1}]$, więc p.kryt. $f$ w $\mathrm{Int} Z$ są postaci $x = (a,a,a)$, gdzie $3 \leqslant a \leqslant 4$; przy tym $f(a,a,a) = 3$. Punkty kryt. na ścianach: na $\{x_1 = a\}$ mamy $\frac{x_2^2}{x_3} = a = \frac{x_3^2}{x_2}$, co daje $x_2 = x_3 = a = x_1$; na pozostałych ścianach jest tak samo, więc są tylko 2 punkty kryt. na ścianach: $(3,3,3)$ i $(4,4,4)$, w obu $f(x) = 3$. Punkty krytyczne na krawędziach: przy zadanych $x_i, x_j$ (końce przedziałow dopuszcz. wartości) $f'_k = 0$ daje $x_k = \sqrt{x_i x_j}$. Stąd mamy 7 punktów krytycznych na krawędziach: $f(\sqrt{6}, 2, 3) = \frac{2}{3} + \sqrt{6} \approx 3.116$, $f(\sqrt{12}, 2, 6) = \frac{1}{3} + 2\sqrt{3} \approx 3.797$, $f(\sqrt{15}, 5, 3) = \frac{5}{3} + \frac{2}{5}\sqrt{15} \approx 3.216$, $f(1, \sqrt{6}, 6) = 6 + \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 6.816$, $f(4, \sqrt{12}, 3) = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 3.059$, $f(4, \sqrt{24}, 6) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 3.133$, $f(4, 5, \sqrt{20}) = \frac{4}{5} + \sqrt{5} \approx 3.036$. Wartości w wierzchołkach: $f(1,2,3) = \frac{25}{6} \approx 4.167$, $f(1,2,6) = \frac{41}{6} \approx 6{,}833$, $f(1,5,3) = \frac{73}{15} \approx 4.867$, $f(1,5,6) = \frac{211}{30} \approx 7.033$, $f(4,2,3) = \frac{41}{12} \approx 3.417$, $f(4,2,6) = \frac{23}{6} \approx 3.833$, $f(4,5,3) = \frac{193}{60} \approx 3.217$, $f(4,5,6) = \frac{47}{15} \approx 3.133$. *Odpowiedź.* $f(Z) = [3, \frac{211}{30}]$, przy czym $f(a,a,a) = 3, a \in [3,4]$, $f(1,5,6) = \frac{211}{30} \approx 7.033$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

## Seria 7.

1. Obliczyć sumę i promień zbieżności szeregu: $f_1(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $\hat{f}_1(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$; $f_2(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$; $f_3(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$; $f_4(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$; $\hat{f}_4(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$; $f_5(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{4n+3}$; $\hat{f}_5(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3}$.

2. Obliczyć: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+1)}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$; (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+3}$; (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9n^2+1}{3^n}$; (i) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$; (j) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$.

3. Wyznaczyć promień zbieżności i sumę szeregu potęgowego $S(x) := 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{7} + \frac{x^4}{9} + \frac{x^5}{11} - \frac{x^6}{13} - \frac{x^7}{15} + \ldots$.

4. Ciąg liczbowy $(c_n)$ jest okresowy, tzn. $\exists N \in \mathbf{N} : \forall n : c_{n+N} = c_n$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$ jest zbieżny $\iff$ $c_1 + ... + c_N = 0$, przy czym wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = \int_0^1 \frac{c_1+c_2x+...+c_Nx^{N-1}}{1-x^N}dx$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6k+1} - \frac{3}{6k+3} + \frac{2}{6k+5}\right)$.

5. Rozwinąc $f(x)$ w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wyznaczyć jego promień zbieżności: (a) $f(x) = \log(1+x+x^2)$; (b) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$; (c) $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$; (d) $f(x) = \frac{(1+3x)(1+4x)}{(1-x)^3}$; (e) $f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$; (f) $f(x) = (\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

6. Sprawdzić, że: (a) funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := \sqrt{|xy|}$ ma w punkcie $(0,0)$ obie pochodne cząstkowe, lecz nie jest w nim różniczkowalna; (b) funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ ma w każdym punkcie $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ obie pochodne cząstkowe, lecz jest nieciągła w punkcie $(0,0)$ oraz nie istnieje pochodna $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

7. Dowieść, że jeśli $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest 3-krotnie różniczkowalna, a $\mu(x,y,z) := xyz$, to $\exists\, F : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : \frac{\partial^3(f\circ\mu)}{\partial x \partial y \partial z} = F \circ \mu$.

8. Sprawdzić, że funkcja $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ spełnia *równanie Laplace'a* $0 = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$: (a) $f(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) := \sqrt{x + \sqrt{x^2+y^2}}$; (c) $f(x,y) := \sin x \operatorname{ch} y$; (d) $f(x,y) := \frac{\sin x}{\cos x + \operatorname{ch} y}$; (e) $f(x,y) := \log(x^2+y^2)$.

9. Sprawdzić, że jeśli funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ spełnia równanie Laplace'a $\Delta f = 0$, a $u, v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ są klasy $C^2$ i spełniają równania $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, to funkcja złożona $\hat{f} := f \circ (u,v)$ też spełnia równanie Laplace'a.

10. Przy ustalonym $n \in \mathbf{N}$ określmy $\rho : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $\rho(x) := |x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}}$. Sprawdzić, że: (a) $\Delta(\varphi \circ \rho) = \varphi'' \circ \rho + \frac{n-1}{\rho}\varphi \circ \rho$ dla dowolnej $\varphi \in C^2(\mathbf{R})$, gdzie $\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$; (b) dla $n \geqslant 3$ funkcja $f := \rho^{2-n} : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ spełnia równanie Laplace'a $\Delta f = 0$; (c) $f_1 : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) := x_1 \cdot \rho(x)^{-n}$, też spełnia równanie Laplace'a.

11. Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) := \frac{1}{3}(x+y)^3 - (x + \sqrt{1+x^2})y$. Sprawdzić, że $f$ ma tylko jeden punkt krytyczny i ma w nim lokalne (lecz nie globalne) minimum. Czy taka rzecz jest możliwa dla różniczkowalnej funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$?

12. Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x,y) := e^{-2x}(2x+y)(x^2-y)$. (a) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne $f$; (b) wyznaczyć zbiór wartości $f$. (c) Wykazać, że $g(x,y) := 4x^2 + y^2 + (xy+3x+5)^2 \geqslant 3$ dla każdego $(x,y) \in \mathbf{R}$.

13. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbf{R}$ na obszarze $X$: (a) $X := \mathbf{R}^2$, $f(x,y) := 2x^3 - 6xy + 3y^2$; (b) $X := \mathbf{R}^2$, $f(x,y) := \frac{(x+a)y}{1+x^2+y^2}$, $a > 0$ dane; (c) $X := \mathbf{R}^3_+$; $f(x,y,z) := (1+\frac{1}{x})(1+\frac{x}{y})(1+\frac{y}{z})(1+z)$; (d) $X := \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, $f(x,y,z) := 7xy + 2yz + 2zx - \log(x^2+y^2+z^2)$; (e) $X := \mathbf{R}^3_+$; $f(x,y,z) := x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.

14. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbf{R}$: (a) $X := \mathbf{R}^n_+$, $f(x) := x_1 \cdot \ldots \cdot x_n + \frac{a_1}{x_1} + \ldots + \frac{a_n}{x_n}$; (b) $X := \mathbf{R}^n$, $f(x) := \frac{\sum_{k=1}^n a_k x_k}{1+\sum_{k=1}^n x_k^2}$; (c) $X := \mathbf{R}^n_+$, $f(x) := \frac{1-n+\sum_{k=1}^n a_k x_k}{x_1 \ldots x_n}$ (punkt $(a_1,...,a_n) \in X \setminus \{0\}$ jest dany).

15. Funkcja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dana jest wzorem $f(x) := (1+|x|)^{-1}\sum_{k=1}^n a_k x_k$, gdzie $0 \neq a = (a_1,...,a_n) \in \mathbf{R}^n$ jest ustalony, a $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{\frac{1}{2}} =$ (norma $x$). (a) Zbadać istnienie pochodnej $f'(0)$; (b) wyznaczyć zbiór wartości $f$.

16. Niech $\mathbf{N} \ni n \geqslant 2$ oraz $a, b \in \mathbf{R}_+ := ]0,\infty[$ będą ustalone; określmy funkcję $f : X \to \mathbf{R}$, $X := \mathbf{R}^n_+$, wzorem $f(x) := \frac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$. Wykazać, że: (a) Istnieje $\hat{x} \in X$ taki, że $f(\hat{x}) = \sup_{x\in X} f(x)$ (wyznaczyć $\hat{x}$ i $f(\hat{x})$); (b) Funkcja $\tilde{f} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, dana wzorami: $\tilde{f}(x) := f(x)$ dla $x \in X$, $\tilde{f}(x) := 0$ dla $x \in \mathbf{R}^n \setminus X$, jest ciągła.

## Wskazówki.

**1.** $f_1'(x) = \frac{1}{1-x^2}$; $\hat{f}_1'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f_2'(x) = \frac{1}{1-x^3}$; $f_3'(x) = \frac{x}{1-x^3}$; $f_4'(x) = \frac{1}{1-x^4}$; $\hat{f}_4'(x) = \frac{1}{1+x^4}$; $f_5'(x) = \frac{x^2}{1-x^4}$; $\hat{f}_5'(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$. **2.** (a),(b) tw. Abela dla $f_2(-1+), f_3(-1+)$; (c) skorz. z (b); (d) $\frac{1}{(2n+1)(3n+1)} = \frac{3}{3n+1} - \frac{2}{2n+1}$; (e) $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{6n}}{(2n+1)(3n+1)} = \frac{3}{x^2} f_2(x^2) - \frac{2}{x^3} f_3(x^3)$; skorz. z tw. Abela; (f),(g) tw. Abela dla $\hat{f}_4(1-)$, $\hat{f}_5(1-)$; (i) $\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$. **3.** Dla $0 < x < 1$: $f(x) := xS(x^2) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots$, wtedy $f'(x) = (1 + x^2)(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, więc... Dla $-1 < x < 0$: $f(x) := xS(-x^2) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$, wtedy $f'(x) = (1 - x^2)(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots) = \frac{1-x^2}{1+x^4}$, więc... **4.** [$\Leftarrow$] z kr. Dirichleta. [$\Rightarrow$]: niech $\overline{c}_n := c_n - c$, gdzie $c := \frac{1}{N}(c_1 + \ldots + c_N)$; wtedy $\overline{c}_1 + \ldots + \overline{c}_N = 0$, więc zbieżny jest $\sum_1^{\infty} \frac{\overline{c}_n}{n}$ i $\sum_1^{\infty} \frac{c_n - \overline{c}_n}{n}$, a $c_n - \overline{c}_n = c = \text{const}$. Wzór całkowy: $f(x) := \sum_1^{\infty} \frac{c_n x^n}{n}$, wtedy $f'(x) = \sum_1^{\infty} c_n x^{n-1} = (c_1 + c_2 x + \ldots + c_N x^{N-1}) \sum_{k=0}^{\infty} x^{Nk}$; zast. tw. Abela. **5.** (a) $(1-x)(1+x+x^2) = \ldots$; (b) $\frac{f(x)}{1-x} = \ldots$; (c) $\frac{f(x)}{1+x} = \frac{d}{dx}\ldots$; (e) iloczyn Cauchy'ego szeregów dla $\frac{1}{1+x}$ i $\log(1+x)$; (f) mnożąc szereg $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ przez siebie dostajemy $a_{2k} = \sum_{m+n=k-1} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)} = (-1)^{k-1} \sum_{m+n=k-1} \frac{1}{2k}(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2n+1})$. **7.** $F(t) = f'(t) + 3t(f''(t) + t^2 f'''(t)$. **10.**(b),(c) Skorzystać z (a). **12.** (b)Obliczyć $\hat{f}(x) := \sup_y f(x, y)$. **13.**(d) Warunek $f'(\mathbf{x}) = 0$ zapisać w formie $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, gdzie $\lambda := 2/|\mathbf{x}|^2 = 2/(x^2 + y^2 + z^2) > 0$, a $A$ jest pewną $3 \times 3$-macierzą. **14.**(b) $\frac{\partial f}{\partial x_k} = (1 + |x|^2)^{-2} \left(a_k(1 + |x|^2) - 2x_k \langle a|x\rangle\right)$, gdzie $\langle a|x\rangle := \sum_k a_k x_k$, $|x|^2 := \langle x|x\rangle$; zatem $f'(x) = 0 \Rightarrow \langle a|x\rangle \neq 0$ i $\exists \lambda \in \mathbf{R} : \forall k : x_k = \lambda a_k$, tzn. $x = \lambda a$. (c) Ozn. $M := x_1 \ldots x_n$, $S := \sum_k a_k x_k$; wtedy $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{M x_k}(n - 1 - S + a_k x_k)$, więc $f'(x) = 0$ daje $x_k = \frac{S-n+1}{a_k} = \frac{\text{const}}{a_k}$.

## Odpowiedzi i rozwiązania.

**1.** Pr. zb. $R = 1$ we wszystkich przykładach; $f_1(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$; $\hat{f}_1(x) = \operatorname{arc\,tg} x$; $f_2(x) = \frac{1}{6} \log \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}\,x}{2+x}$; $f_3(x) = \frac{1}{6} \log \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}\,x}{2+x}$; $f_4(x) = \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$; $\hat{f}_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+\sqrt{2}\,x+x^2}{1-\sqrt{2}\,x+x^2}$; $f_5(x) = \frac{1}{4} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$; $\hat{f}_5(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+\sqrt{2}\,x+x^2}{1-\sqrt{2}\,x+x^2}$. **2.** (a) $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2)$; (b) $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2)$; (c) $\frac{1}{3}(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2) - \frac{3}{10}$; (d) $\log 2 + (\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2})\pi$; (e) $\frac{3}{2} \log 3 - 2 \log 2 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; (f) $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi + 2\log(1 + \sqrt{2}))$; (g) $\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi - 2\log(1 + \sqrt{2}))$; (h) $\frac{(1+2x)(1+5x)}{(1-x)^3}|_{x=\frac{1}{3}} = 15$; (i) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; (j) $\lim_{x\to 1-}(\arcsin x - x) = \frac{\pi}{2} - 1$. **3.** $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \arcsin \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ dla $0 < x < 1$, $S(x) = \frac{1}{2\sqrt{-2x}} \log \frac{1+\sqrt{-2x}-x}{1-\sqrt{-2x}-x} = \frac{1}{\sqrt{-2x}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{-2x}{1+x^2}}$ dla $-1 < x < 0$. **4.** $S = \int_0^1 \frac{1-3x^2+2x^4}{1-x^6} dx = \int_0^1 \frac{1-2x^2}{1+x^2+x^4} dx = [\frac{3}{4} \log \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}]_0^1 = \frac{3}{4} \log 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$. **5.** $R = 1$ we wszystkich przykładach; (a) $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ dla $3 \not| n$, $a_n = -\frac{2}{n}$ dla $3|n$; (b) $a_n = 1$ dla $4|n$, $a_n = -1$ dla $4|(n-1)$, $a_n = 0$ w pozost. przyp.; (c) $a_n = E(\frac{n+1}{2})$; (d) $a_n = 10n^2 - n + 1$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})x^n$; (f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k-1})x^{2k}$. **12.** $f(0,0) = 0$, $f(-2,4) = 0$, $f(\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}) = e^{-\sqrt{8}}(3 + \sqrt{8}) \approx 0.344$, $f(-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) = e^{\sqrt{8}}(3 - \sqrt{8}) \approx 2.903$; wartości $(f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy})$ w tych punktach są następujące: $(0,-2,-2)$, $2e^4(-8,-3,-1)$, $2e^{-\sqrt{8}}(\sqrt{2}-5, \sqrt{2}-1, -1)$, $-2e^{\sqrt{8}}(\sqrt{2}+5, \sqrt{2}+1, 1)$, a więc pierwsze dwa punkty są siodłowe, a w pozostałych dwóch są (lok.) maksima; ponadto $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$. (c) Poza (zwartym) zbiorem $K := \{|x| \leqslant 2, |y| \leqslant 4\} \subset \mathbf{R}^2$ wartości $g$ są $\geqslant 16$, zaś $g(-1,0) = 8 < 16$, więc kres $\inf g(\mathbf{R}^2) = \inf g(K)$ jest osiągany oraz $\inf g(\mathbf{R}^2) = g(\mathbf{p})$, gdzie $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$ jest p. kryt. $g$. Otóż $g$ ma trzy punkty krytyczne: $g(-1,1) = 6$, $g(1,-4) = 36$, $g(2^{2/3} - 2^{-2/3}, 2^{2/3} - 2^{4/3} - 3) = 3 \cdot 2^{2/3} + 24 \cdot 2^{1/3} + 1 > 36$, skąd teza. **13.**(a) $f(0,0) = 0$ — siodło, $f(1,1) = -1$ — min. (lokalne, bo $f(X) = \mathbf{R}$); (b) $f(-a,0) = 0$ — siodło, $f(\frac{1}{a}, \pm\sqrt{1+a^{-2}}) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}$ — globalne maks. i min.; (c) $f(1,1,1) = 16$ — min. globalne (!); (d) $f(\pm\mathbf{x}) = 1 + \log 4$ — dwa p. siodłowe, $\mathbf{x} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$; (e) $f(\frac{1}{2}, 1, 1) = 4$ — minimum (globalne, bo $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ daje: $x + \frac{y^2}{4x} \geqslant y$, $y + \frac{z^2}{y} \geqslant 2z$, $2z + \frac{2}{z} \geqslant 4$). **14.**(a) Jeden p. krytyczny $\hat{x} = \frac{1}{c} \cdot a$, gdzie $c := \sqrt[n+1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$; $f(\hat{x}) = (n+1)c$; skoro $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\hat{x}) = 2c^3 a_k^{-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\hat{x}) = c^3(a_j a_k)^{-1}$ dla $j \neq k$, to $f''(\hat{x})(h,h) = c^3 \left[(\sum_k \frac{h_k}{a_k})^2 + \sum_k (\frac{h_k}{a_k})^2\right] > 0$, czyli jest to (lok.) min. (b) Dwa punkty krytyczne $\hat{x} = \frac{a}{|a|}$, $\check{x} = -\frac{a}{|a|}$; $f(\hat{x}) = \frac{1}{2}|a|$, $f(\check{x}) = -\frac{1}{2}|a|$; $f''(\hat{x})(h,h) = -\frac{1}{2}|a| \langle h|h\rangle < 0$, $f''(\check{x})(h,h) = \frac{1}{2}|a| \langle h|h\rangle > 0$, więc $\hat{x}$ jest punktem (lok.) maks., a $\check{x}$ — (lok.) min. (c) Jeden punkt krytyczny $\hat{x} = (\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})$; $f(\hat{x}) = a_1 \ldots a_n =: c$; skoro $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\hat{x}) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\hat{x}) = -c a_j a_k$ dla $j \neq k$, to forma kwadratowa $f''(\hat{x})(h,h) = -c \sum_{j \neq k} (a_j h_j)(a_k h_k) = c \sum_k (a_k h_k)^2 - c\left(\sum_k a_k h_k\right)^2$ jest nieokreślona, tzn. $\hat{x}$ jest p. siodłowym. **15.** (a) $f'(0)$ istnieje i $f'(0)h = \langle a|h\rangle := \sum_{k=1}^n a_k h_k$; istotnie, $\frac{1}{|h|}(f(0+h) - \langle a|h\rangle) = -\frac{\langle a|h\rangle}{1+|h|} \to 0$ przy $|h| \to 0$. *Inny sposób*: Sprawdzić, że $f_k'(x)$ istnieją i są ciągłe, w szczeg. $f_k'(0) = a_k$. (b) $f$ nie ma p. kryt.(warunek $f'(x) = 0$ daje $x = t \cdot a$ dla pewnego $t \in \mathbf{R}$, lecz $f_k'(ta) = \frac{a_k}{(1+|t \cdot a|)^2}$, sprzeczność). Nierówność Schwarza $|\langle a|x\rangle| \leqslant |a| \cdot |x|$ daje $|f(x)| < |a|$ dla $x \in \mathbf{R}^n$, a z drugiej strony $f(t\frac{a}{|a|}) = \frac{t}{1+|t|}|a|$; stąd $f(\mathbf{R}^n) = ]-|a|, |a|[$. **16.**(a) Zauważmy, że $\forall k \in \overline{1,n} : \forall x \in X$: $f(x) \leqslant \frac{x_k}{(a+x_1)(x_n+b)} \leqslant \frac{x_k}{ab}$, $f(x) \leqslant \frac{x_k}{(x_{k-1}+x_k)(x_k+x_{k+1})} \leqslant \frac{1}{x_k}$. Jeśli więc dla $\mu > 0$ oznaczymy $K_\mu := \{x \in X : \forall k \in \overline{1,n} : \mu ab \leqslant x_k \leqslant \frac{1}{\mu}\}$, to dla $x \in X \setminus K_\mu$ będzie $f(x) < \mu$ (gdyż $\exists k : \frac{x_k}{ab} < \mu$ lub $\frac{1}{x_k} < \mu$); biorąc w szczególności $\mu := f(p)$, gdzie $p \in X$ — dowolny ustalony, mamy $p \in K_\mu$, więc $\sup f(K_\mu) \geqslant f(p) = \mu \geqslant f(X \setminus K_\mu)$, tzn. $\sup f(X) = \sup f(K_\mu)$, zaś ten ostatni kres jest osiągany (zwartość $K_\mu$). Przy tym $\sup f(X) = f(\hat{x})$, gdzie $\hat{x} \in X$ jest p. krytycznym $f$; skoro $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{(x_{k-1}x_{k+1} - x_k^2) f(x)}{(x_{k-1}+x_k)x_k(x_k+x_{k+1})}$ (gdzie $x_0 := a$, $x_{n+1} := b$), to w p. krytycznym $\hat{x}$ liczby $a = x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = b$ tworzą ciąg geometryczny, skąd $\hat{x}_k = \sqrt[n+1]{a^{n+1-k} b^k}$, $f(\hat{x}) = (\sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+1]{b})^{-n-1}$. (b) $\tilde{f}$ pokrywa się z $f$ na $X$, jest więc na $X$ ciągła; natomiast dla $p \in \mathbf{R}^n \setminus X$ mamy $\tilde{f}(p) = 0$, więc $\mathbf{R}^n \setminus K_\mu$ dla $\mu > 0$ jest otwartym otoczeniem $p$, na którym $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(p)| < \mu$ (patrz (a)), co oznacza ciągłość w $p$.

# Zadania z Analizy Matematycznej

# dla grupy 12. i 13.

**Seria 8.** **Kwiecień 1993**

1. Sprawdzić, że odwzorowanie $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\Phi(s,t) := (s + t\sin s, \log|\cos s| + t\cos s)$, jest odwracalne na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$. Wykazać, że współrzędne $S, T$ odwzorowania odwrotnego $\Phi^{-1}(x,y) = (S(x,y), T(x,y))$ spełniają równania: $|\nabla T|^2 := (T'_x)^2 + (T'_y)^2 = 1$, $\langle\nabla S|\nabla T\rangle := S'_x T'_x + S'_y T'_y = 0$, $|\nabla S| = (T + \frac{1}{\cos S})^{-1}$.

1. Oznaczając $\delta := t + \frac{1}{\cos s}$ mamy: $\Phi'(s,t) = \begin{bmatrix} \delta\cos s & \sin s \\ -\delta\sin s & \cos s \end{bmatrix}$, więc $\det\Phi'(s,t) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \delta$, co w $(s,t) = (0,0)$ jest równe 1, skąd odwracalność; z kolei $(\Phi^{-1})'(x,y) = (\Phi'(s,t))^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \delta\sin s & \delta\cos s \end{bmatrix}$, skąd teza.

2. Jaką powierzchnię w $\mathbf{R}^3$ opisuje parametryzacja $x = \frac{u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$, $y = \frac{2uv}{1+u^2+v^2}$, $z = \frac{1}{1+u^2+v^2}$ ? Sprawdzić jej regularność.

2. *Odpowiedź.* Część stożka $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, opisana nierównościami $0 < z < 1$. Istotnie, $|x+iy| = \frac{|(u+iv)^2|}{1+u^2+v^2} = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 1 - z$.

3. Dowieść, że dla $p > 3$ zbiór $C_p := \{(x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3 : xy + yz + zx = p, xyz = 1\}$ jest gładką, zwartą i spójną krzywą w $\mathbf{R}^3$. Dla $p = 5$ wyznaczyć ekstremalne wartości $x$, $y$ i $z$ na $C_p$.

3. Skoro $\nabla f_1 \times \nabla f_2 = [x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)]$, to dla $\mathbf{x} = (x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3$ rząd $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$ jest mniejszy od 2 $\iff$ $x = y = z$, a ten warunek dla $\mathbf{x} \in C_p$ nie jest spełniony; to dowodzi, że $C_p$ jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.

4. Określmy $\phi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\mathrm{U} := \{u \in \mathbf{C} : |u| = 1\}$, wzorem $\phi(u,t) := (tu, \mathrm{Im}(u^2)) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$. Sprawdzić, że: $1^0$ $S := \phi(\mathrm{U} \times \mathbf{R}) = \{(x,y,z) : (x^2+y^2 > 0,\ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x = y = 0, |z| \leqslant 1)\}$; $2^0$ $\phi$ jest lokalnym dyfeomorfizmem na $\mathrm{U} \times \mathbf{R}$ pomniejszonym o 4 punkty nieregularne $(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}, 0)$, których obrazami są 2 punkty $(0,0,\pm 1) \in S$; $3^0$ $\phi(-u,-t) = \phi(u,t)$, więc $\phi$ określa odwzorowanie $\phi_0$ *wstęgi Möbiusa* $M := (\mathrm{U} \times \mathbf{R})/_\pm$ w $S$ (symetrycznie położone punkty "równika" wstęgi są sklejane przez odwzorowanie $\phi_0$).

4. $2^0$ Niech $\tilde\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\tilde\phi(s,t) := \phi(e^{is},t) = (t\cos s, t\sin s, \sin 2s)$ (złożenie $\phi$ z lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathrm{U} \times \mathbf{R}$, $(s,t) \mapsto (e^{is},t)$); macierz $\tilde\phi'(s,t)$ ma następujące minory stopnia 2.: $t$, $2\cos s\cos 2s$, $2\sin s\cos 2s$; są one $= 0$ (tzn. $\tilde\phi'$ ma $< 2$ rząd) $\iff$ $(t = 0, \cos 2s = 0)$ $\iff$ $(t = 0, e^{is} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}})$.

5. Utożsamijmy $\mathbf{R}^4$ z $\mathbf{C}^2$, zapisując punkt $(u_1,u_2,v_1,v_2) \in \mathbf{R}^4$ w postaci $(u,v)$, gdzie $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$. Oznaczmy $S := \{(u,v) : v \neq 0,\ u = \frac{v^2}{|v|^2}\}$. Dowieść, że: $1^0$ $S$ jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^4$, homeomorficzną z powierzchnią walca; $2^0$ $\overline{S}$ (domknięcie $S$ w $\mathbf{R}^4$) jest gładką powierzchnią, homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa.

5. Ad $1^0$. $S$ jest wykresem gądkiego odworowania $\mathbf{C}^* \ni v \mapsto \frac{v^2}{|v|^2} \in \mathbf{C}$, więc jest gładka. Odwzorowanie $\phi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to S$, $\mathrm{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, dane wzorem $\phi(z,t) := (z^2, e^t z)$, jest oczywiście ciągłą bijekcją (parametryzacja $S$); odwzorowanie odwrotne $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{v}{|v|}, \log|v|)$ także jest ciągłe, więc $\phi$ jest homeomorfizmem walca $\mathrm{U} \times \mathbf{R}$ na $S$. Ad $2^0$ $\overline{S} = S \cup \{(u,v) : |u| = 1, v = 0\}$ (łatwe sprawdzenie), więc $\overline{S} = \{(u,v) : |u| = 1,\ v \in \mathbf{R}\sqrt{u}\}$. Warunek $v \in \mathbf{R}\sqrt{u}$ jest równoważny $\mathrm{Im}(\sqrt{u}\,\overline{v}) = 0$; łatwo tez sprawdzić, że dla $u \in \mathrm{U}$ mamy: $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2+2u_1}}[(1+u_1)+iu_2]$ dla $u \neq -1$, $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2-2u_1}}[u_2 + i(1-u_1)]$ dla $u \neq 1$. Rozłóżmy $\overline{S}$ na sumę dwóch otwartych w $\overline{S}$ podzbiorów: $\overline{S} = S_1 \cup S_2$, określonych warunkami $u \neq -1$ (dla $S_1$) i $u \neq 1$ (dla $S_2$); mamy wtedy: $S_1 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_1 = 0\}$, $S_2 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_2 = 0\}$, gdzie $g_0 := |u|^2 - 1 = u_1^2 + u_2^2 - 1$, a $g_1 := u_2 v_1 - (1+u_1)v_2$ i $g_2 := (1-u_1)v_1 - u_2 v_2$ (części urojone liczb $[(1+u_1)+iu_2]\overline{v}$ i $[u_2 + i(1-u_1)]\overline{v}$ odpowiednio). Zauważmy teraz, że na $S_1$ jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_1,v_2)} = -2u_1(1+u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_2,v_2)} = -2u_2(1+u_1)$, a na $S_2$ jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_1,v_1)} = 2u_1(1-u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_2,v_1)} = 2u_2(1-u_1)$; zatem $\nabla g_0, \nabla g_1$ są lin. niezal. na $S_1$, a $\nabla g_0, \nabla g_2$ są lin. niezal. na $S_2$, a więc obie częsci $S_1, S_2$ powierzchni $\overline{S}$ są gładkie. Weźmy odworowanie $\psi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to \overline{S}$, $\psi(z,t) := (z^2, tz)$; jasne, że $\psi$ jest ciągłą surjekcją, przy czym $\psi(z,t) = \psi(z',t') \iff (z',t') = \pm(z,t)$, a więc mamy ciągłą bijekcję $\tilde\psi : M := (\mathrm{U} \times \mathbf{R})/_\pm \to \overline{S}$; odwzorowanie odwrotne $\tilde\psi^{-1}(u,v) = \sqrt{u}(1, \frac{v}{u})$ też jest ciągłe, więc $\psi$ jest homeomorfizmem wstęgi Möbiusa $M$ na $\overline{S}$.

6. Niech $H := \{(x,y,z) : x\sin z - y\cos z = 0\}$ (tzw. *helikoida*). Dowieść, że: $1^0$ $H$ jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^3$; $2^0$ $H$ jest homeomorficzna z $\mathbf{R}^2$. $3^0$ Wyznaczyć przecięcie $H$ z płaszczyzną $\Sigma(\mathrm{p}_0)$ styczną do $H$ w punkcie $\mathrm{p}_0 = (x_0,y_0,z_0) \in H$; $4^0$ dowieść, że $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ zawiera dwie krzywe, przecinające się prostopadle w punkcie $\mathrm{p}_0$.

6. $1^0$ $H = h^{-1}(0)$, gdzie $h(x,y,z) := x\sin z - y\cos z$; skoro $\nabla h = [\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z] \neq 0$, to $H$ jest powierzchnią gładką. $2^0$ Niech $\phi(t,u) := (t\cos u, t\sin u, u)$; wtedy $\phi(\mathbf{R}^2) = H$: $h \circ \phi(t,u) = 0$ oraz $x\sin z - y\cos z = 0 \Rightarrow \phi(x\cos z + y\sin z, z) = (x,y,z)$; $\phi$ jest injektywne: $\phi(t,u) = (x,y,z) \Rightarrow u = z$ & $t = x\cos z + y\sin z$; zarówno $\phi$, jak i $\phi^{-1} : H \to \mathbf{R}^2$, są ciągłe: $\phi^{-1}(x,y,z) = (x\cos z + y\sin z, z)$; stąd teza. $3^0$ Oznaczmy dla wygody $c := \cos z_0$, $s := \sin z_0$, $d := cx_0 + sy_0$; wtedy $|d|$ jest odległością $\mathrm{p}_0$ od osi $0z$: $x_0^2 + y_0^2 = (cx_0 + sy_0)^2 + (sx_0 - cy_0)^2 = d^2$. $T_{\mathrm{p}_0}(H) = \ker\nabla h(\mathrm{p}_0) = \ker[s, -c, d]$ jest rozpięta przez

$[c,s,0]^T$ i $[-sd,cd,1]^T$, więc $\Sigma(\mathrm{p}_0) = \{(x_0+ct-sdu, y_0+st+cdu, z_0+u) : (t,u) \in \mathbf{R}^2\}$; stąd $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisana jest równaniem $0 = x\sin z - y\cos z = (x_0+ct-sdu)(s\cos u + c\sin u) - (y_0+st+cdu)(c\cos u - s\sin u) = (t+d)\sin u - du\cos u$. $4^0$ *Przypadek* $d \neq 0$: $(t+d)\sin u - du\cos u = 0$ przy $\sin u \neq 0$ oznacza $t = d(u\cot u - 1)$, a przy $\sin u = 0$ oznacza $u = 0$; wobec tego przez $\mathrm{p}_0$ przechodzą dwie krzywe z $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$: $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + d[c(u\cot u - 1) - su, s(u\cot u - 1) + cu, \frac{1}{d}u]$ oraz $p_2(t) = \mathrm{p}_0 + t[c,s,0]$ (prosta pozioma), przy czym $p_1'(0) = [-sd, cd, 1]$ jest prostopadły do $p_2'(0) = [c,s,0]$. *Przypadek* $d = 0$: Teraz $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisane jest warunkiem $t\sin u = 0$; $t = 0$ daje prostą pionową $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + u[0,0,1]$, zaś $u = n\pi$ daje proste poziome $p_{2,n}(t) = \mathrm{p}_0 + [ct, st, n\pi]$, przecinające prostopadle $p_1(u)$.

7. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbf{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem: (a) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2$; (b) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + 1$; (c) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z + 1$.

7. Dla (a),(b),(c) mamy: $F = 0 \Rightarrow z \neq 0$, więc $[0 = F_x' = (xz+y)z^2, 0 = F_y' = (yz+x)z^2] \iff [(z-1)(x-y) = 0, (z+1)(x+y) = 0]$ $\iff [z = 1, y = -x] \vee [z = -1, y = x] \vee [x = y = 0]$. (a) Jeden p. kryt. $z(0,0) = 2$, $z'' = -\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (lok. maksimum). (b) Nie ma p. kryt. (c) Niesk. wiele p. kryt.: $z(x,x) = -1$, $z'' = \frac{1}{x^2+1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0$ — osobliwa. Pokażę, że w $(x,x)$ funkcja $z$ ma lok. minima (przykład $z := x^2 + y^3$ pokazuje, że $z'(p) = 0, z''(p) \geqslant 0$ tego nie gwarantują). Mamy tożsamość $2F(x,y,u-1) = (x^2+y^2)u^3 - (3x^2 - 2xy + 3y^2)u^2 + (3x^2 - 4xy + 3y^2 + 2)u - (x-y)^2$; wszystkie współczynnki (.) są tu $> 0$, a więc $2F(x,y,u-1) > 0$ dla $u < 0$, tzn. $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow z \geqslant -1$, QED.

8. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbf{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem $0 = F(x,y,z) := 2(x^3+y^3)z^3 + 3(x^2-y^2)z^2 + az + b$, gdzie $a > 0$ oraz $b \in \mathbf{R} \setminus \{-1,0,1\}$ są danymi parametrami.

8. $0 = F_x' = 6xz^2(xz+1), 0 = F_y' = 6yz^2(yz-1)$ daje 4 przypadki: (1) $x = y = 0$, wtedy $z = -\frac{b}{a}$; (2) $xz = -1, y = 0$, wtedy $z = -\frac{1+b}{a}$; (3) $x = 0, yz = 1$, wtedy $z = \frac{1-b}{a}$; (4) $xz = -1, yz = 1$, wtedy $0 = F = az + b$, czyli $z = -\frac{b}{a}$. We wszystkich p. kryt.: $\boxed{z(0,0) = -\frac{b}{a},\ z(\frac{a}{1+b},0) = -\frac{1+b}{a},\ z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a},\ z(\frac{a}{b},-\frac{a}{b}) = -\frac{b}{a}}$ jest $F_z' = a$, a $F_{xx}'' = 6z^2(2xz+1)$, $F_{yy}'' = 6z^2(2yz-1)$, $F_{xy}'' = 0$, więc $z''(p) = -\frac{6z^2}{a}M$, gdzie $M := \begin{bmatrix} 2xz+1 & 0 \\ 0 & 2yz-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w kolejnych p. kryt. Zatem $z(\frac{a}{1+b},0) = -\frac{1+b}{a}$ jest lok. minimum, $z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a}$ — lok. maksimum, a pozostałe p. kryt. są punktami siodłowymi.

9. Funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna oraz $\forall x \in \mathbf{R} : f(x,0) = 0$, $f_y'(x,0) = 0$, $f_{yy}''(x,0) > 0$ (wynika z tego, że $f''(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_{yy}'' \end{bmatrix} \geqslant 0$). Dowieść, że każdy punkt $(x,0)$ jest punktem lokalnego minimum funkcji $f$.

9. Wprost z założeń wynika, że $\forall x : \exists \epsilon(x) > 0 : \forall y \in ]-\epsilon(x), \epsilon(x)[ : f(x,y) > 0$; jednakże taki warunek nie gwarantuje tezy zadania (zbiór $\{(x,y) : |y| < \epsilon(x)\}$ dla dodatniej, lecz nieciągłej funkcji $\epsilon(.)$ może mieć puste wnętrze!). Postąpimy inaczej: wystarczy dowieść, że $f$ ma postać $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest *ciągła* i $h(x,0) > 0$. Otóż $f(x,0) = 0$ daje $f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,ty)dt = y\int_0^1 f_y'(x,ty)dt$; tak samo z $f'(x,0) = 0$ wynika $f'(x,ty) = ty\int_0^1 f_{yy}''(x,sty)ds$, mamy więc $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie funkcja $h(x,y) := \int_0^1\int_0^1 t f_{yy}''(x,sty)ds\,dt$ jest ciągła oraz $h(x,0) = f_{yy}''(x,0)\int_0^1\int_0^1 t\,ds\,dt = \frac{1}{2}f_{yy}''(x,0) > 0$, QED.

10. Dowieść, że dla dowolnych funkcji $a,b,c \in C^k(\mathbf{R})$, $k \geqslant 1$, zbiór $S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, gdzie $F(x,y,z) := a(z)x^2 + 2b(z)xy + c(z)y^2 - 1$, jest (regularną) powierzchnią klasy $C^k$ w $\mathbf{R}^3$.

10. Tożsamość $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y,z) = 2F(x,y,z) + 2$ sprawia, że $(F_x', F_y') \neq 0$ w każdym punkcie $S$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

## Seria 8.

### Odpowiedzi i rozwiązania

1. Oznaczając $\delta := t + \frac{1}{\cos s}$ mamy: $\Phi'(s,t) = \begin{bmatrix} \delta\cos s & \sin s \\ -\delta\sin s & \cos s \end{bmatrix}$, więc $\det\Phi'(s,t) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \delta$, co w $(s,t) = (0,0)$ jest równe 1, skąd odwracalność; z kolei $(\Phi^{-1})'(x,y) = (\Phi'(s,t))^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \delta\sin s & \delta\cos s \end{bmatrix}$, skąd teza.

2. Wprost z założeń wynika, że $\forall x : \exists\varepsilon(x) > 0 : \forall y \in ]-\varepsilon(x), \varepsilon(x)[ \,:\, f(x,y) > 0$; jednakże taki warunek nie gwarantuje tezy zadania (zbiór $\{(x,y) : |y| < \varepsilon(x)\}$ dla dodatniej, lecz nieciągłej funkcji $\varepsilon(\,\cdot\,)$ może mieć puste wnętrze!). Postąpimy inaczej: wystarczy dowieść, że $f$ ma postać $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest *ciągła* i $h(x,0) > 0$. Otóż $f(x,0) = 0$ daje $f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,ty)dt = y\int_0^1 f'_y(x,ty)dt$; tak samo z $f'(x,0) = 0$ wynika $f'(x,ty) = ty\int_0^1 f''_{yy}(x,sty)ds$, mamy więc $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie funkcja $h(x,y) := \int_0^1\int_0^1 tf''_{yy}(x,sty)ds\,dt$ jest ciągła oraz $h(x,0) = f''_{yy}(x,0)\int_0^1\int_0^1 tds\,dt = \frac{1}{2}f''_{yy}(x,0) > 0$, QED.

3. Zróżniczkować po $x_1, x_2, x_3$ zależność $z(x_1,x_2,x_3) = x_3 v(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, x_3)$, otrzymując $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ wyrażone przez $\frac{\partial v}{\partial u_i}$; wstawiając to do równania dostajemy $u_3\frac{\partial v}{\partial u_3} = u_1 u_2$, tzn. $\frac{\partial}{\partial u_3}(v - u_1 u_2 \log u_3) = 0$. *Odpowiedź.* $z = \frac{x_1 x_2}{x_3}\log x_3 + \varphi(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$.

4. *Odpowiedź.* $z = \frac{f(\frac{y}{x})}{1 - xf(\frac{y}{x})}$.

5. Dla (a),(b),(c) mamy: $F = 0 \Rightarrow z \neq 0$, więc $[0 = F'_x = (xz+y)z^2, 0 = F'_y = (yz+x)z^2] \iff [(z-1)(x-y) = 0, (z+1)(x+y) = 0] \iff [z = 1, y = -x] \vee [z = -1, y = x] \vee [x = y = 0]$. (a) Jeden p. kryt. $z(0,0) = 2$, $z'' = -\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (lok. maksimum). (b) Nie ma p. kryt. (c) Niesk. wiele p. kryt.: $z(x,x) = -1$, $z'' = \frac{1}{x^2+1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0$ — osobliwa. Pokażemy, że w $(x,x)$ funkcja $z$ ma lok. minima (przykład $z := x^2 + y^3$ pokazuje, że $z'(p) = 0, z''(p) \geqslant 0$ tego nie gwarantują). Mamy tożsamość $2F(x,y,u-1) = (x^2+y^2)u^3 - (3x^2-2xy+3y^2)u^2 + (3x^2-4xy+3y^2+2)u - (x-y)^2$; wszystkie wspólczynnki $(\,\cdot\,)$ są tu $> 0$, a więc $2F(x,y,u-1) > 0$ dla $u < 0$, tzn. $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow z \geqslant -1$, QED.

6. $0 = F'_x = 6xz^2(xz+1), 0 = F'_y = 6yz^2(yz-1)$ daje 4 przypadki: (1) $x = y = 0$, wtedy $z = -\frac{b}{a}$; (2) $xz = -1, y = 0$, wtedy $z = -\frac{1+b}{a}$; (3) $x = 0, yz = 1$, wtedy $z = \frac{1-b}{a}$; (4) $xz = -1, yz = 1$, wtedy $0 = F = az + b$, czyli $z = -\frac{b}{a}$. We wszystkich p. kryt.: $\boxed{z(0,0) = -\frac{b}{a},\ z(\frac{a}{1+b},0) = -\frac{1+b}{a},\ z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a},\ z(\frac{a}{b},-\frac{a}{b}) = -\frac{b}{a}}$ jest $F'_z = a$, a $F''_{xx} = 6z^2(2xz+1)$, $F''_{yy} = 6z^2(2yz-1)$, $F''_{xy} = 0$, więc $z''(p) = -\frac{6z^2}{a}M$, gdzie $M := \begin{bmatrix} 2xz+1 & 0 \\ 0 & 2yz-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w kolejnych p. kryt. Zatem $z\left(\frac{a}{1+b}, 0\right) = -\frac{1+b}{a}$ jest lok. minimum, $z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a}$ — lok. maksimum, a pozostałe p. kryt. są punktami siodłowymi.

7. *Odpowiedź.* Część stożka $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, opisana nierównościami $0 < z < 1$. Istotnie, $|x+iy| = \frac{|(u+iv)^2|}{1+u^2+v^2} = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 1 - z$.

8. Skoro $\nabla f_1 \times \nabla f_2 = [x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)]$, to dla $\mathbf{x} = (x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3$ rząd $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$ jest mniejszy od 2 $\iff$ $x = y = z$, a ten warunek dla $\mathbf{x} \in C_p$ nie jest spełniony; to dowodzi, że $C_p$ jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.

9. $2^0$ Niech $\tilde\phi : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\tilde\phi(s,t) := \phi(e^{is},t) = (t\cos s, t\sin s, \sin 2s)$ (złożenie $\phi$ z lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathrm{U}\times\mathbf{R}$, $(s,t) \mapsto (e^{is},t)$); macierz $\tilde\phi'(s,t)$ ma następujące minory stopnia 2.: $t$, $2\cos s\cos 2s$, $2\sin s\cos 2s$; są one $= 0$ (tzn. $\tilde\phi'$ ma $< 2$ rząd) $\iff$ $(t = 0, \cos 2s = 0)$ $\iff$ $(t = 0, e^{is} = \frac{\pm1\pm i}{\sqrt2})$.

10. Ad $1^0$. $S$ jest wykresem gądkiego odworowania $\mathbf{C}^* \ni v \mapsto \frac{v^2}{|v|^2} \in \mathbf{C}$, więc jest gładka. Odwzorowanie $\phi : \mathrm{U}\times\mathbf{R} \to S$, $\mathrm{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, dane wzorem $\phi(z,t) := (z^2, e^t z)$, jest oczywiście ciągłą bijekcją (parametryzacja $S$); odwzorowanie odwrotne $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{v}{|v|}, \log|v|)$ także jest ciągłe, więc $\phi$ jest homeomorfizmem walca $\mathrm{U}\times\mathbf{R}$ na $S$. Ad $2^0$ $\overline{S} = S \cup \{(u,v) : |u| = 1, v = 0\}$ (łatwe sprawdzenie), więc $\overline{S} = \{(u,v) : |u| = 1,\ v \in \mathbf{R}\sqrt{u}\}$. Warunek $v \in \mathbf{R}\sqrt{u}$ jest równoważny $\mathrm{Im}(\sqrt{u}\,\overline{v}) = 0$; łatwo tez sprawdzić, że dla $u \in \mathrm{U}$ mamy: $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2+2u_1}}[(1+u_1) + iu_2]$ dla $u \neq -1$, $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2-2u_1}}[u_2 + i(1-u_1)]$ dla $u \neq 1$. Rozłóżmy $\overline{S}$ na sumę dwóch otwartych w $\overline{S}$ podzbiorów: $\overline{S} = S_1 \cup S_2$, określonych warunkami $u \neq -1$ (dla $S_1$) i $u \neq 1$ (dla $S_2$); mamy wtedy: $S_1 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_1 = 0\}$, $S_2 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_2 = 0\}$, gdzie $g_0 := |u|^2 - 1 = u_1^2 + u_2^2 - 1$, a $g_1 := u_2 v_1 - (1+u_1)v_2$ i $g_2 := (1-u_1)v_1 - u_2 v_2$ (części urojone liczb $[(1+u_1)+iu_2]\overline{v}$ i $[u_2 + i(1-u_1)]\overline{v}$ odpowiednio). Zauważmy teraz, że na $S_1$ jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_1,v_2)} = -2u_1(1+u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_2,v_2)} = -2u_2(1+u_1)$, a na $S_2$ jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_1,v_1)} = 2u_1(1-u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_2,v_1)} = 2u_2(1-u_1)$; zatem $\nabla g_0, \nabla g_1$ są lin. niezal. na $S_1$, a $\nabla g_0, \nabla g_2$ są lin. niezal. na $S_2$, a więc obie częsci $S_1, S_2$ powierzchni $\overline{S}$ są gładkie. Weźmy odworowanie $\psi : \mathrm{U}\times\mathbf{R} \to \overline{S}$, $\psi(z,t) := (z^2, tz)$; jasne, że $\psi$ jest ciągłą surjekcją, przy czym $\psi(z,t) = \psi(z',t') \iff (z',t') = \pm(z,t)$, a więc mamy ciągłą bijekcję $\tilde\psi : M := (\mathrm{U}\times\mathbf{R})/_{\pm} \to \overline{S}$; odwzorowanie odwrotne $\tilde\psi^{-1}(u,v) = \sqrt{u}(1, \frac{v}{u})$ też jest ciągłe, więc $\psi$ jest homeomorfizmem wstęgi Möbiusa $M$ na $\overline{S}$.

11. $1^0$ $H = h^{-1}(0)$, gdzie $h(x,y,z) := x\sin z - y\cos z$; skoro $\nabla h = [\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z] \neq 0$, to $H$ jest powierzchnią gładką. $2^0$ Niech $\phi(t,u) := (t\cos u, t\sin u, u)$; wtedy $\phi(\mathbf{R}^2) = H$: $h\circ\phi(t,u) = 0$ oraz $x\sin z - y\cos z = 0 \Rightarrow \phi(x\cos z + y\sin z, z) = (x,y,z)$; $\phi$ jest injektywne: $\phi(t,u) = (x,y,z) \Rightarrow u = z \;\&\; t = x\cos z + y\sin z$; zarówno $\phi$, jak i $\phi^{-1} : H \to \mathbf{R}^2$, są ciągłe:

$\phi^{-1}(x,y,z) = (x\cos z + y\sin z, z)$; stąd teza. $3^0$ Oznaczmy dla wygody $c := \cos z_0$, $s := \sin z_0$, $d := cx_0 + sy_0$; wtedy $|d|$ jest odległością $\mathrm{p}_0$ od osi $0z$: $x_0^2 + y_0^2 = (cx_0 + sy_0)^2 + (sx_0 - cy_0)^2 = d^2$. $\mathrm{T}_{\mathrm{p}_0}(H) = \ker\nabla h(\mathrm{p}_0) = \ker[s, -c, d]$ jest rozpięta przez $[c, s, 0]^T$ i $[-sd, cd, 1]^T$, więc $\Sigma(\mathrm{p}_0) = \{(x_0 + ct - sdu, y_0 + st + cdu, z_0 + u) : (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$; stąd $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisana jest równaniem $0 = x\sin z - y\cos z = (x_0 + ct - sdu)(s\cos u + c\sin u) - (y_0 + st + cdu)(c\cos u - s\sin u) = (t + d)\sin u - du\cos u$. $4^0$ *Przypadek* $d \neq 0$: $(t + d)\sin u - du\cos u = 0$ przy $\sin u \neq 0$ oznacza $t = d(u\operatorname{ctg} u - 1)$, a przy $\sin u = 0$ oznacza $u = 0$; wobec tego przez $\mathrm{p}_0$ przechodzą dwie krzywe z $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$: $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + d[c(u\operatorname{ctg} u - 1) - su, s(u\operatorname{ctg} u - 1) + cu, \frac{1}{d}u]$ oraz $p_2(t) = \mathrm{p}_0 + t[c, s, 0]$ (prosta pozioma), przy czym $p_1'(0) = [-sd, cd, 1]$ jest prostopadły do $p_2'(0) = [c, s, 0]$. *Przypadek* $d = 0$: Teraz $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisane jest warunkiem $t\sin u = 0$; $t = 0$ daje prostą pionową $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + u[0, 0, 1]$, zaś $u = n\pi$ daje proste poziome $p_{2,n}(t) = \mathrm{p}_0 + [ct, st, n\pi]$, przecinające prostopadle $p_1(u)$.

12. Tożsamość $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y,z) = 2F(x,y,z) + 2$ sprawia, że $(F_x', F_y') \neq 0$ w każdym punkcie $S$.

13. Sprawdzimy, że $f'(\mathrm{p}) = 4[x^3 - yz, y^3 - zx, z^3 - xy]$ jest $\neq 0$ dla $\mathrm{p} \in S$: Jeśli $f'(\mathrm{p}) = 0$ i $z \neq 0$, to $z^3 = yz$ daje $x \neq 0, y \neq 0$, więc $0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \log|x| \\ \log|y| \\ \log|z| \end{bmatrix}$, skąd $|x| = |y| = |z| = 1$, $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 3 \pm 4 \neq 1$, tzn. $\mathrm{p} \notin S$; jeśli zaś $f'(\mathrm{p}) = 0$ i $z = 0$, to $x^3 = yz = 0, y^3 = xz = 0$, więc także $\mathrm{p} \notin S$. **Zwartość**: $x^4 + y^4 - 4xyz = 2(z - xy)^2 - 2z^2 + (x^2 - y^2)^2 \geqslant -2z^2$, zatem dla $\mathrm{p} = (x,y,z) \in S$ mamy $1 = f(\mathrm{p}) \geqslant z^4 - 2z^2$, więc $|z^2 - 1| \leqslant \sqrt{2}$, tzn. $|z| \leqslant \sqrt{1 + \sqrt{2}}$; w konsekwencji $S$ jest ograniczony. [*Inny sposób*: Wyznaczamy minimum $h(x,y) := x^4 + y^4 - 4xyz$ najpierw po $x$: $h(x,y) \geqslant h((yz)^{1/3}, y) = y^4 - 3(yz)^{4/3}$, a następnie po $y$: $h((yz)^{1/3}, y) =: g(y) \geqslant g(\pm|z|^{1/2}) = -2z^2$.] *Uwaga.* Krytyczne wartości $z$ na $S$: płaszczyzna styczna $\mathrm{T}_{\mathrm{p}}(S) = \ker f'(\mathrm{p})$ musi być «pozioma», tzn. $f_x'(\mathrm{p}) = f_y'(\mathrm{p}) = 0$; daje to $x^3 = yz, xz = y^3$, skąd $x^4 z = y^4 z$, przy czym $z \neq 0$, więc $y = \epsilon x$ i $z = \epsilon z^2$, gdzie $\epsilon = \pm 1$; dostajemy stąd cztery p.kty krytycznej wartości $z$: $(\epsilon_1\sqrt[4]{c}, \epsilon_2\sqrt[4]{c}, \epsilon_1\epsilon_2\sqrt{c})$, gdzie $c := 1 + \sqrt{2}$, $\epsilon_{1,2} = \pm 1$. **Spójność**: $S = \{(x,y,z) : \varphi_{xy}(z) = 1 - x^4 - y^4, (x,y) \in S_0\}$, gdzie $\varphi_p(z) := z^4 - 4pz$ (ma globalne minimum $\varphi_p(p^{1/3}) = -3p^{4/3}$) oraz $S_0 := \{(x,y) : \inf_z \varphi_{xy}(z) \leqslant 1 - x^4 - y^4\} = \{(x,y) : x^4 + y^4 - 3(xy)^{4/3} \leqslant 1\}$; widać że $S_0$ jest spójny (gwiaździstość wzgl. (0,0)); z własności $\varphi_p$ wynika istnienie funkcji $z_+, z_- : S_0 \to \mathbf{R}$ takich, że $\varphi_{xy} \circ z_\pm(x,y) = 1 - x^4 - y^4$ oraz $z_-(x,y) \leqslant (xy)^{1/3} \leqslant z_+(x,y)$; funkcje te są ciągłe na $S_0$: na $\mathrm{Int}S_0$ wynika to z lokalnej rozwikływalności wzgl. $z$ równania $x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz = 1$ ($\frac{d}{dz}\ldots = 4(z^3 - xy) \neq 0$), zaś na brzegu $S_0$ mamy $z_-(x,y) = z_+(x,y) = (xy)^{1/3} = \lim\limits_{p \to (x,y)} z_\pm(p)$. Stąd $S$ jest sumą wykresów dwu ciągłych i jednakowych na brzegu (spójnej) dziedziny funkcji, a więc jest spójny. *Inny (lepszy) sposób na* **Zwartość i Spójność**: Pokażemy że każda półprosta $\mathbf{R}_+\mathrm{p} \subset \mathbf{R}^3$, $\mathrm{p} \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, przecina $S$ w dokładnie jednym punkcie $t(\mathrm{p})\mathrm{p}$ i zależność $\mathrm{p} \mapsto t(\mathrm{p}) \in \mathbf{R}_+$ jest gładka; daje to homeomorfizm sfery $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ na $S$, $\mathrm{p} \mapsto t(\mathrm{p})\mathrm{p}$, więc $S$, tak jak $S^2$, jest zwarta i spójna. Niech $\mathrm{p} = (x,y,z)$; wtedy $t\mathrm{p} \in S \iff \varphi_{\mathrm{p}}(t) = 1$, gdzie $\varphi_{\mathrm{p}}(t) := (x^4 + y^4 + z^4)t^4 - 4xyz\,t^3 = at^4 - 4bt^3$, $a > 0$. Musimy pokazać, że $\exists!\, t > 0 : \ \varphi_{\mathrm{p}}(t) = 1$. Otóż dla $b \leqslant 0$ jest tak, gdyż $\varphi_{\mathrm{p}}$ rośnie od 0 do $\infty$ na $\mathbf{R}_+$; z kolei dla $b > 0$ $\varphi_{\mathrm{p}}$ rośnie od 0 do $\infty$ na $\{t : \ \varphi_{\mathrm{p}}(t) \geqslant 0$, tzn. $at \geqslant 4b\}$, gdyż tu $\varphi_{\mathrm{p}}'(t) = 4t^2(at - 3b) \geqslant 4t^2(4b - 3b) = 4bt^2 \geqslant 0$. Sprawdzimy wreszcie, że odwzorowanie $\mathrm{p} \mapsto t(\mathrm{p})$ jest gładkie. Wystarczy w tym celu pokazać, że gładka jest funkcja $(a,b) \mapsto t = t(a,b) > 0$, określona dla $a > 0$ niejawnie równaniem $0 \overset{!}{=} F(a,b,t) := at^4 - 4bt^3 - 1$; jest tak, gdyż jeśli $F_t' = 4t^2(at - 3b) = 0$, to $t = \frac{3b}{a}$ i $b > 0$, więc $F(a,b,t) = -27a^{-3}b^4 - 1 < 0$, a więc $F = 0 \Rightarrow F_t' \neq 0$.

15. $f'(x) = \left[\frac{x_1^2 - x_2x_3}{x_1^2x_2}, \frac{x_2^2 - x_3x_1}{x_2^2x_3}, \frac{x_3^2 - x_1x_2}{x_3^2x_1}\right]$, więc p.kryt. $f$ w $\mathrm{Int}Z$ są postaci $x = (a,a,a)$, gdzie $3 \leqslant a \leqslant 4$; przy tym $f(a,a,a) = 3$. Punkty kryt. na ścianach: na $\{x_1 = a\}$ mamy $\frac{x_2^2}{x_3} = a = \frac{x_3^2}{x_2}$, co daje $x_2 = x_3 = a = x_1$; na pozostałych ścianach jest tak samo, więc są tylko 2 punkty kryt. na ścianach: $(3,3,3)$ i $(4,4,4)$, w obu $f(x) = 3$. Punkty krytyczne na krawędziach: przy zadanych $x_i, x_j$ (końce przedziałow dopuszcz. wartości) $f_k' = 0$ daje $x_k = \sqrt{x_ix_j}$. Stąd mamy 7 punktów krytycznych na krawędziach: $f(\sqrt{6}, 2, 3) = \frac{2}{3} + \sqrt{6} \approx 3.116$, $f(\sqrt{12}, 2, 6) = \frac{1}{3} + 2\sqrt{3} \approx 3.797$, $f(\sqrt{15}, 5, 3) = \frac{5}{3} + \frac{2}{5}\sqrt{15} \approx 3.216$, $f(1, \sqrt{6}, 6) = 6 + \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 6.816$, $f(4, \sqrt{12}, 3) = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 3.059$, $f(4, \sqrt{24}, 6) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 3.133$, $f(4, 5, \sqrt{20}) = \frac{4}{5} + \sqrt{5} \approx 3.036$. Wartości w wierzchołkach: $f(1,2,3) = \frac{25}{6} \approx 4.167$, $f(1,2,6) = \frac{41}{6} \approx 6{,}833$, $f(1,5,3) = \frac{73}{15} \approx 4.867$, $f(1,5,6) = \frac{211}{30} \approx 7.033$, $f(4,2,3) = \frac{41}{12} \approx 3.417$, $f(4,2,6) = \frac{23}{6} \approx 3.833$, $f(4,5,3) = \frac{193}{60} \approx 3.217$, $f(4,5,6) = \frac{47}{15} \approx 3.133$. *Odpowiedź.* $f(Z) = [3, \frac{211}{30}]$, przy czym $f(a,a,a) = 3, a \in [3,4]$, $f(1,5,6) = \frac{211}{30} \approx 7.033$.

16. *Odpowiedź.* $\inf f(S) = 0$ osiągane w 6 punktach $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$; $\sup f(S) = f(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}) = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$ (w 4 punktach).

17. *Odpowiedź.* $\sup f(M) = C := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ jest osiągane w punkcie $x_k = \dfrac{{a_k}^{p-1}}{C^{p/q}}$; jest to jedyny punkt krytyczny $f$ na $M$.

18. **Na brzegu** $\partial K$ **zbioru** $K$: $[5y + 9z, 5x, 9x] = 2\lambda[2x, 5y, 3z] \iff M(\lambda)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$, gdzie $M(\lambda) := \begin{bmatrix} -4\lambda & 5 & 9 \\ 5 & -10\lambda & 0 \\ 9 & 0 & -6\lambda \end{bmatrix}$; skoro $\det M(\lambda) = 240\lambda(4 - \lambda^2)$ oraz $M(0) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M(2) = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 9 \\ 5 & -20 & 0 \\ 9 & 0 & -12 \end{bmatrix}$, $M(-2) = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 5 & 20 & 0 \\ 9 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, to $f$ na $\partial K$ ma 6 p.krytycznych: $f(\pm{}_0) = 0$, $f(\pm{}_2) = 128$, $f(\pm{}_{-2}) = -128$, gdzie ${}_0 = \sqrt{\frac{2}{15}}(0, 9, -5)$, ${}_2 = (4, 1, 3)$, ${}_{-2} = (-4, 1, 3)$.

**Na zbiorze** $\mathrm{Int}K$: $0 = g'() = [5y + 9z, 5x, 9x]$ oznacza $x = 0, 5y + 9z = 0$, więc p. krytyczne $f$ w $\mathrm{Int}K$ wypełniają odcinek $]-{}_0, {}_0[$ i w tych punktach $f() = 0$. Uwzględniając zwartość $K$ i ciągłość $f$ otrzymujemy stąd([1])

*Odpowiedź.* $\min_K f = f(-4, 1, 3) = -128$, $\max_K f = f(4, 1, 3) = 128$.

[1] Przy ewentualnym badaniu drugiej pochodnej $f\big|_{\partial K}$ w punktach krytycznych warto zauważyć, że $f''(\mathrm{p}) - \lambda g''(\mathrm{p}) = M(\lambda)$ wyraża się powyższymi macierzami $M(0), M(2), M(-2)$, natomiast przestrzeń styczna $\mathrm{T}(\partial K) = \ker g'() = \ker[2x,\ 5y,\ 3z]$ ma w odpowiednich punktach krytycznych postać $\ker[0,\ 3,\ -1]$, $\ker[8,\ 5,\ 9]$, $\ker[-8,\ 5,\ 9]$.

19. (1),(3) są jednorodne (ewentualnie po przesunięciu); (4),(6) — równania Bernoulliego; (2),(5) — liniowe na $y = y(x)$ lub $x = x(y)$; (9) $y = x^{-1}u$, wtedy $2xu' + (u-1)^2 = 0$, skąd dostajemy $y = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{2}{\log|Cx|}\right)$; (10) $y = x^{-\frac{1}{2}}u$, wtedy $u' = \frac{u^2\sqrt{1-u^2}}{2x}$, skąd $\log(Cx) = \int \frac{2du}{u^2\sqrt{1-u^2}} = -\frac{2}{u}\sqrt{1-u^2}$, więc otrzymujemy $y\sqrt{x} = u = \frac{-2\epsilon}{\sqrt{4+\log^2(Cx)}}$, gdzie $C > 0$, $\epsilon = \operatorname{sgn}\log(Cx)$.

20. (a) $x(t) = (t\log|t| + t^2)e^t +$ RORJ; (b) $-t - \frac{2}{t} + C_1\frac{1}{t}e^t + C_2\frac{1}{t}e^{-t}$; (c) $t^2 + C_1t + C_2t\log|t|$; (d) $\frac{1}{4}te^t(\sin t - \cos t) + \frac{3}{4}t(t+2) +$ RORJ; (e) $te^t + C_1t + C_2t^2 + c_3t^3$.

22. Stosując powyższą metodą dostajemy $\frac{d}{dx}\log\left|\frac{y-\frac{p}{x^2}}{y+\frac{p}{x^2}}\right| = -\frac{2p}{x^2}$. *Odpowiedź.* $y = \frac{p}{x^2}\cdot\frac{1+Ce^{\frac{2p}{x}}}{1-Ce^{\frac{2p}{x}}}$, gdzie $C \in \mathbf{R}\cup\{\infty\}$.

23. Wybierzmy współrz. $x, y$ tak, by wierzchołek był w $(0,0)$, a oś $0y$ skierowana w dół. Energia: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy$, przy czym $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{y}^2\left[1 + ({dy}/{dx})^2\right]$, $\dot{y} = c =$ const i dla $t = t_0$ mamy $v = v_0$, ${dx}/{dy} = 1$ (kąt 45°). Zatem $c^2 = \frac{1}{2}v_0^2$, więc $\frac{1}{2}mv_0^2\left[1 + ({dy}/{dx})^2\right] = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy$; po uproszczeniu $\boxed{\frac{dx}{dy} = \sqrt{1+ky}}$, gdzie $k = \frac{4g}{v_0^2}$. Stąd, uwzględniając że $x(0) = 0$, dostajemy $x = \frac{2}{3k}\left[(1+ky)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$, czyli *Odpowiedź.* $\boxed{y = \frac{1}{k}\left[(1+\frac{3}{2}kx)^{\frac{2}{3}} - 1\right]}$.

24. (a) Podst. $y' = u = u(y)$ daje $2yuu' = 1 + u^2$, $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{2u\,du}{1+u^2}$, czyli $1 + u^2 = |Cy|$; stąd $y' = \pm\sqrt{|Cy|-1}$, $2\sqrt{|Cy|-1} = |C(x-x_0)|$, tzn. $|Cy| = \frac{1}{4}C^2(x-x_0)^2 + 1$, $\boxed{y = \frac{C}{4}(x-x_0)^2 + \frac{1}{C}}$. (b) Podst. $y' = u = u(y)$ daje $uu'y = u(u^2-1)$, więc oprócz $u = 0$ i $u = \pm1$ mamy $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{du}{u^2-1}$, co daje $\frac{u-1}{u+1} = \pm C^2y^2$; stosownie do znaku: $1^0$ $y' = u = \frac{1+C^2y^2}{1-C^2y^2}$, $\int dx = \int\left(\frac{2}{1+C^2y^2} - 1\right)dy$, czyli $\boxed{\frac{2}{C}\operatorname{arctg}(Cy) - y = x - x_0}$, lub $2^0$ $y' = u = \frac{1-C^2y^2}{1+c^2y^2}$, $\int dx = \int\left(\frac{2}{1-C^2y^2} - 1\right)dy$, czyli $\boxed{\frac{1}{C}\log\left|\frac{1+Cy}{1-Cy}\right| - y = x - x_0}$; ponadto $y = x_0$ lub $y = \pm(x - x_0)$ — r. osobliwe. (c) Podst. $y' = u = u(y)$ daje $yuu' = 2(u-1)(u-2)$; oprócz $u = 1$ i $u = 2$ mamy więc $\int\frac{2dy}{y} = \int\frac{u\,du}{(u-1)(u-2)} = \int\left(\frac{2}{u-2} - \frac{1}{u-1}\right)du$, czyli $\frac{(u-2)^2}{u-1} = Cy^2$. Wyliczając stąd $\frac{1}{u}$ otrzymujemy $\frac{2}{u} = 1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2+4/C}}$, więc $2(x-x_0) = \int\left(1 \pm \frac{y}{\sqrt{y^2+4/C}}\right) = y \pm \sqrt{y^2+4/C}$, skąd $y = x - x_0 - \frac{1}{C(x-x_0)}$. Są też rozwiązania osobliwe $y = x - x_0$ i $y = 2(x - x_0)$.

26. $\ddot{x} = \sin x$; podstawienie $\begin{cases}\dot{x} = v = v(x)\\ \ddot{x} = vv'\end{cases}$ daje, po uwzględnieniu $v(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$, zależność $v = \dot{x} = 2\sin\frac{x}{2}$; stąd $t + \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \log\operatorname{tg}\frac{x}{4}$. *Odpowiedź.* $t = -\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \log(1+\sqrt{2})$.

27. Wyprowadzić najpierw wzór $\frac{d}{dx}\int_0^x F(x,t)dt = F(x,x) + \int_0^x F'_x(x,t)dt$. (a) Skoro obie strony są równe dla $x = 0$, to różniczkowanie obustronne daje równoważne równanie: $-y(x) + \int_0^x y(t)dt = 2$; to z kolei jest równoważne $\begin{cases}y(0) = 2,\\ -y' + y = 0,\end{cases}$ skąd $y(x) = -2e^x$. (b) *Odpowiedź.* $x^2y' + (3x-1)y = 0$, czyli $y = Ce^{-\frac{1}{x}}x^{-3}$.

28. (b) RORJ $= x_1C_1 + x_2C_2$, $\begin{Bmatrix}x_1 = e^{-t}\cos t\\ e^{-t}\sin t\end{Bmatrix}$; uzmienniamy stałe: $\begin{cases}\dot{C}_1 = -1,\\ \dot{C}_2 = \operatorname{ctg} t.\end{cases}$ *Odp.* RORN $=$ RORJ $+ e^{-t}\left[-t\cos t + \sin t\log|\sin t|\right]$.

29. $t = e^s$, wtedy $x' = t\dot{x}$, $x'' = t^2\ddot{x} + t\dot{x}$, gdzie $(\cdot)' = \frac{d\cdot}{ds}$; dostajemy więc $2x'' + x' - x = e^{-\frac{1}{2}s}$, skąd $x = C_1e^{-1} + C_2e^{\frac{1}{2}s} - e^{-\frac{1}{2}s}$. *Odpowiedź.* $x =$ RORJ $- \frac{1}{\sqrt{t}}$, gdzie RORJ $= C_1\frac{1}{t} + C_2\sqrt{t}$.

32. *Odpowiedź.* $(t+2)x - t(t+2)\dot{x} + t^2\ddot{x} = 0$.

33. Znaleźć rozwiązanie ogólne następujących układów równań; które z nich opisują potok jakiegoś pola wektorowego?

$$(1)\ \begin{cases}\dot{x} = \sin x\cos y\\ \dot{y} = \cos x\sin y\end{cases}\quad (2)\ \begin{cases}\dot{x} = xy^{-1}\\ \dot{y} = yx^{-1}\end{cases}\quad (3)\ \begin{cases}\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t + 1\\ \dot{y} = \operatorname{tg} t - x\end{cases}\quad (4)\ \begin{cases}\dot{x} = -4x - 2y + 2(e^t-1)^{-1}\\ \dot{y} = 6x + 3y - 3(e^t-1)^{-1}\end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases}\dot{x} = -4x - y + 18e^{-3t} + 8\sin t + 6\cos t + 4\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t\\ \dot{y} = x - 2y - \operatorname{sh} t\end{cases}\qquad (6)\ \begin{cases}\dot{x} = x - y + z\\ \dot{y} = x + y - z\\ \dot{z} = \ \ -y + 2z\end{cases}$$

Potok pola. wekt. opisują (1), (2) i (6). (1) $\begin{Bmatrix}\dot{x} + \dot{y} = \sin(x+y)\\ \dot{x} - \dot{y} = \sin(x-y)\end{Bmatrix}$; ponieważ $\dot{u} = \sin u \Rightarrow u = 2\operatorname{arctg}\left(e^t\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_0\right) + 2n\pi$ dla $u_0 \in\, ](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$ oraz $u = u_0 =$ const dla $u_0 = (2n\pm1)\pi$, to dostajemy potok $\begin{Bmatrix}x + y = 2\operatorname{arctg}\left(e^t\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_0+y_0)\right) + 2m\pi\\ x - y = 2\operatorname{arctg}\left(e^t\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x_0-y_0)\right) + 2n\pi\end{Bmatrix}$ dla $(x_0, y_0)$ z kwadratu $\begin{Bmatrix}|x+y-2m\pi| < \pi\\ |x-y-2n\pi| < \pi\end{Bmatrix}$. Boki tych kwadratów też są trajektoriami: ruch odbywa się do najbliższego wierzchołka, środki boków i wierzchołki są punktami stałymi. (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y/x}{x/y} = \frac{y^2}{x^2}$, więc $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}$. Stąd $\dot{x} = x\frac{1}{y} = x(\frac{1}{x} + C) = 1 + Cx$, więc $x = C_1e^{Ct} - \frac{1}{C}$, $C_1 = x_0 + \frac{1}{C} = \frac{x_0^2}{x_0-y_0}$. **Sposób 2.** Rugujemy $y$; w tym celu $y = \frac{x}{\dot{x}}$ wstawiamy do $\dot{y} = \frac{y}{x}$, co daje $\frac{d}{dt}\frac{x}{\dot{x}} = \frac{1}{\dot{x}}$, czyli $\dot{x}^2 = x\ddot{x} + \dot{x}$. Podst. $\dot{x} = v = v(x)$ daje $x\frac{dv}{dx} = v - 1$, $v = Cx + 1$, $\dot{x} = Cx + 1$, $x = C_1e^{Ct} - \frac{1}{C}$.
*Odpowiedź.* $x = \frac{x_0}{x_0-y_0}\left[\exp t\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}\right) - y_0\right]$, $y = \frac{y_0}{y_0-x_0}\left[\exp t\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0}\right) - x_0\right]$; dla $x_0 = y_0$ mamy $x = y = x_0 + t$.

(3) RORJ: $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \exp t\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}$. Uzm. stałe: $\begin{bmatrix}\dot{C}_1\\ \dot{C}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\operatorname{tg}^2 t + 1\\ \operatorname{tg} t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos t\\ (1+\cos^2 t)\sin t\end{bmatrix}$, więc $\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sin t + C_{10}\\ -\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C_{20}\end{bmatrix}$, więc RORN jest $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\cos^3 t\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix} +$ RORJ.

34. Skoro $\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$, to $\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} {}^n & 0 \\ 0 & {}^n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & {}^n \\ {}^{n+1} & 0 \end{bmatrix}$, co daje wzór na $\exp(\cdot)$. Ponieważ $\frac{d^2}{dt^2}(t) = (t) \iff \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \\ \dot{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \dot{} \end{bmatrix}$, więc $\begin{bmatrix} (t) \\ \dot{}(t) \end{bmatrix} = \exp(t\begin{bmatrix} 0 & I \\ & 0 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} (0) \\ \dot{}(0) \end{bmatrix}$, czyli $\boxed{(t) = \frac{d}{dt} f_t() x(0) + f_t()\dot{}(0)}$.

35. (a) Sp $= \{1\}$ i jest niediagonalizowalna, więc $f_t() = f_t'(1)( - ) + f_t(1)$, zaś $f_t'(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}(t \operatorname{ch} t\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sh} t\sqrt{\lambda})$ dla $\lambda > 0$; stąd $f_t() = \begin{bmatrix} t \operatorname{ch} t & 2(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t) & 2 \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t \end{bmatrix}$, więc $(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t & 2t \operatorname{sh} t \\ -\frac{t}{2} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} t \end{bmatrix}(0) + \begin{bmatrix} t \operatorname{ch} t & 2(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t) & 2 \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t \end{bmatrix}\dot{}(0)$.

(b) Sp $= \{-1, 4\}$, więc $f_t() = \frac{1}{5} f_t(-1)(4I - ) + \frac{1}{5} f_t(4)( + ) = \frac{\sin t}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{10}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, a zatem

$$(t) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}((0)\cos t + \dot{}(0)\sin t) + \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}((0) \operatorname{ch} 2t + \tfrac{1}{2}\dot{}(0) \operatorname{sh} 2t).$$

# Zadania z Analizy Matematycznej

# dla grupy 12. i 13.

**Seria 9.** **Maj 1993**

1. Przestawić kolejność całkowania w całce: (a) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\,dy$; (b) $\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f\,dy$; (c) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f\,dy$; (d) $\int_0^\pi dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f\,dy$; (e) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\,dx$ (rysunek nie może być użyty w rozwiązaniu, lecz może je ułatwić).

1. (a) $\int_0^1 dy \left( \int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f\,dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f\,dx \right) + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f\,dx = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f\,dx - \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\,dx$; (b) $\int_{-4}^4 dy \int_{2-\sqrt{16-y^2}}^{2+\sqrt{16-y^2}} f\,dx$; (c) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f\,dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f\,dx$; (d) $\int_{-1}^1 dy \int_{\arcsin|y|}^{\pi-\arcsin|y|} f\,dx$; (e) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f\,dy$.

2. Zapisać całkę $I = \int_\triangle f(x,y,z)dxdydz$, gdzie $\triangle \imath \mathbf{R}^3$ jest czworościanem o wierzchołkach $(0,1,2)$, $(1,0,-1)$, $(1,3,5)$, $(1,0,2)$, w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek): (a) $\int dx \int dy \int f\,dz$; (b) $\int dz \int dx \int f\,dy$.

2. (a) $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+2x} dy \int_{2y-x}^{1+x+y} f(x,y,z)dz$; (b) $I = \int_{-1}^2 dz \int_{\frac{2-z}{3}}^{1} dx \int_{1-x}^{\frac{x+z}{2}} f(x,y,z)dy + \int_2^5 dz \int_{\frac{z-2}{3}}^{1} dx \int_{z-x-1}^{\frac{x+z}{2}} f(x,y,z)dy$.

3. Udowodnić tożsamość: $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dz \left( \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_z^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)dx \right)$.

4. Przedstawić $I := \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{\frac{x+y}{2}}^{2y-x} f\,dz$ w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek) o zadanej kolejności całkowania: (a) $I = \int dz \int dy \int f\,dx$; (b) $I = \int dx \int dz \int f\,dy$; (c) $I = \int dy \int dz \int f\,dx$; (d) $I = \int dz \int dx \int f\,dy$.

4. $\left( \int_0^{\frac12} dz \int_z^{2z} dy + \int_{\frac12}^1 dz \int_z^1 dy \right) \int_0^{2z-y} f\,dx + \left( \int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{z} dy + \int_1^2 dz \int_{\frac{z}{2}}^{1} dy \right) \int_0^{2y-z} f\,dx = \int_0^1 dx \left( \int_x^{\frac{1+x}{2}} dz \int_{\frac{x+z}{2}}^{2z-x} f\,dy + \int_{\frac{1+x}{2}}^{2-x} dz \int_{\frac{x+z}{2}}^{1} f\,dy \right) =$
$= \int_0^1 dy \left( \int_{\frac{y}{2}}^{y} dz \int_0^{2z-y} f\,dx + \int_y^{2y} dz \int_0^{2y-z} f\,dx \right) = \left( \int_0^{\frac12} dz \int_0^z dx + \int_{\frac12}^1 dz \int_{2z-1}^{z} dx \right) \int_{\frac{x+z}{2}}^{2z-x} f\,dy + \left( \int_{\frac12}^1 dz \int_0^{2z-1} dx + \int_1^2 dz \int_0^{2-z} \right) \int_{\frac{x+z}{2}}^{1} f\,dy.$

5. Odwracając kolejność całkowania wykazać, że $\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \dots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1 = \int_a^b f(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx$.

6. Niech $I$ oznacza całkę podwójną $I = \int_K f(x,y)dxdy$; sprawdzić, że: **a**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant x\}$, $f = x^{-1}|y| \Rightarrow I = \frac12$; **b**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, $f = x^2\sqrt{a^2-y^2} \Rightarrow I = \frac{32a^5}{45}$; **c**. $K = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant 2a^2(x^2-y^2, x \geqslant 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = a^2$; **d**. $K = \{x, y \geqslant 0, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1\}$, $f = xy \Rightarrow I = \frac{a^2b^2}{280}$; **e**. $K = \{y \geqslant 0, 9x \leqslant y^2, x^2+y \leqslant 4\}$, $f = xy \Rightarrow I = -\frac{15}{4}$; **f**. $K = \{xy \geqslant 1, y^2 \geqslant x, y \leqslant 2\}$, $f = x^2y \Rightarrow I = \frac{251}{24}$; **g**. $K = \{x^2 = y^2 \leqslant 2x\}$, $f = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow I = \frac89(3\pi-4)$; **h**. $K = \{x^2+2y^3 \leqslant 4xy, y \geqslant 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{64}{15}$; **i**. $K = \{(x^2-ax+y^2)^2 \leqslant a^2(x^2+y^2)\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac32\pi a^2$; **j**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, $f = e^{x^2+y^2} \Rightarrow I = (e^{a^2}-1)\pi$; **k**. $K = \{y \leqslant 1, x^2(2-y) \leqslant y(1-y)^2\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{4-\pi}{2}$; **l**. $K = \{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, $f = x^2y\cos(xy^2) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{16}$; **m**. $K = \{|x-y| \leqslant 1, y \geqslant 0\}$, $f = xe^{-y^2} \Rightarrow I = 1$.

7. Dowieść, że odwzorowanie $\Phi(u,v) := (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v)$ jest dyfeomorfizmem obszaru $\Omega := \{(u,v) : 0 < v < \pi\}$ na obszar $\Phi(\Omega) = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ lub } -1 < x < 1\}$. Wykorzystać parametryzację $\Phi$ do obliczenia pola obszaru $K := \{(x,y) : \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1} \geqslant 1 \geqslant \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_2} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_2},\ \frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} \leqslant 1 \leqslant \frac{x^2}{\cos^2 v_2} - \frac{y^2}{\sin^2 v_2},\ x > 0, y > 0\}$ (przy zadanych $0 < u_1 < u_2$, $0 < v_1 < v_2 < \frac{\pi}{2}$), którego brzeg stanowią odcinki łuków współogniskowych elips i hiperbol.

7. $\operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v = \frac{e^w+e^{-w}}{2}$ dla $w = u + iv$; sprawdzić, że $f(w) := \operatorname{ch} w = \frac{e^w+e^{-w}}{2}$ jest surjekcją $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, taką że $f(w) = f(\tilde{w}) \iff \exists n \in \mathbf{Z} : (\tilde{w} = w + 2\pi i n)$ lub $(\tilde{w} = -w + 2\pi i n)$; sprawdzić też, że $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac12(\operatorname{ch} 2u - \cos 2v) > 0$ na $\Omega$. *Odpowiedź*: $|K| = \frac{v_2-v_1}{4}(\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - \frac{u_2-u_1}{4}(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)$.

8. Niech $I$ oznacza całkę potrójną $I = \int_K f(x,y,z)dxdydz$; sprawdzić, że:
**a**. $K = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3} \Rightarrow I = \frac12(\log 2 - \frac58)$;
**b**. $K = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2, x^2+y^2 \leqslant z\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-8)$;
**c**. $K = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}abc$;
**d**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 2(x^2+y^2), x^2 \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{35}$;
**e**. $K = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant x\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{10}$.

9. Obliczyć średnią wartość $M(f,K) = \int_K f(x)dx \,/\, \int_K dx$ funkcji $f$ na zbiorze $K$:
**a**. $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, $f(x) = x_1^2 x_2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac16$
**b**. $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : (x_1-a)^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = a^2 + r^2/2$
**c**. $K = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant x_1+x_2+x_3\}$, $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac65$
**d**. $K = \{x \in \mathbf{R}^3 : 1 \leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 4,\ x_3 \geqslant 0\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$. *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac{62}{35}$

10. Oznaczmy $\Omega := \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1\}$ oraz $\boxed{I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi \, d\varphi \text{ dla } p > -1}$. Licząc całkę $\int_K \frac{y^p \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ dwoma sposobami: jako całkę iterowaną i przez parametryzację $x = \sin\theta \cos\varphi$, $y = \sin\theta \sin\varphi$, wykazać tożsamość $\boxed{I_p I_{p+1} = \frac{\pi}{2(p+1)}}$. Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie: $\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}}$.

11. Wyliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego $K := \{(x,y) : x > 0, xy \geqslant 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 2\}$ (przy $a, b > 0$, $ab > 1$ danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

11. *Odpowiedź.* $\mathbf{x}_0 = C(\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}})$, gdzie $C = \frac{2}{3}(ab-1)^{\frac{3}{2}}[\sqrt{ab(ab-1)} - \log(\sqrt{ab} + \sqrt{ab-1})]^{-1}$.

12. Dwa walce o jednakowym promieniu $a > 0$ (i nieskończonej długości) przenikają się wzajemnie tak, że ich osie symetrii obrotowej przecinają się pod kątem $\varphi \in ]0, \pi[$. Wyliczyć objętość wspólnej części obu walców.

12. Jeśli osią symetrii walca $W$ jest prosta $\mathbf{R}\mathbf{n}$, to $W = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x|^2 - (\mathbf{n}|x)^2 \leqslant a^2\}$; można przyjąc $\mathbf{n} = (1,0,0)$ i $\mathbf{n}' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, wtedy $W = \{x : x_2^2 + x_3^2 \leqslant a^2\}$, $W' = \{x : (x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi)^2 + x_3^2 \leqslant a^2\}$. *Odpowiedź.* $|W \cap W'| = \frac{16a^3}{3\sin\varphi}$.

13. Dla danych $a, b > 0$ oznaczmy $W := \{(x,y,z) : x^2 + (z-a)^2 \leqslant b^2\}$, $W' := \{(x,y,z) : y^2 + (z-b)^2 \leqslant a^2\}$. Pokazać, że powierzchnie boczne obu tych walców są styczne w co najmniej jednym punkcie; obliczyć objętość $W \cap W'$.

13. *Wsk.* Czym są przekroje $W \cap W'$ płaszczyznami $z =$const ? *Odp.* $|W \cap W'| = \frac{4}{3}\sqrt{ab}(3a^2 - 2ab + 3b^2) + 4(a+b)(a-b)^2 \log \frac{\sqrt{|a-b|}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

14. Odcinek długości $d$ obraca się wokól osi, zakreślając powierzchnię boczną pewnej bryły obrotowej $B$ (jest to część *hiperboloidy jednopowłokowej*, jeśli odcinek i oś obrotu nie leżą w jednej płaszczyźnie); niech $h$ oznacza wysokość bryły $B$, a $r_1, r_2$ — promienie ograniczających ją kół. Wykazać, że objętość $B$ jest równa $\frac{\pi}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2 - d^2)h$.

14. Gdy osią obrotu jest $\mathbf{R}e_3$, a końcami odcinka punkty $\mathbf{p}_1 = (r_1, 0, 0)$ i $\mathbf{p}_2 = (a, b, h)$, wtedy $a^2 + b^2 = r_2^2$ oraz $d^2 = (a - r_1)^2 + b^2 + h^2$, więc $2ar_1 = r_1^2 + r_2^2 + h^2 - d^2$; stąd dla punktu $(1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$ odcinka kwadrat odległości od osi wynosi $\rho^2(t) = (1-t)^2 r_1^2 + t^2 r_2^2 + t(1-t)(r_1^2 + r_2^2 + h^2 - d^2)$, zaś przekrój $B$ płaszczyzną $x_3 = th$, $t \in [0,1]$ ma pole $\pi\rho^2(t)$, skąd $|B| = h \int_0^1 \pi\rho^2(t) dt = \ldots$

15. Wykorzystując poprzednie zadanie obliczyć objętość bryły obrotowej utworzonej przez: (a) sześcian o krawędzi $a$ obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi; (b) sześcian o krawędzi $a$ obracający się wokół osi łączącej jego dwa przeciwległe wierzchołki; (c) czworościan foremny o krawędzi $a$, obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi. *Odpowiedź.* (a) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{12}a^3$; (b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}a^3$; (c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$.

16. Obliczyć objętość brył: $B_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4z, x^2 + y^2 \leqslant 3z\}$; $B_2 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$; $B_3 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, x^2 + y^2 \leqslant 3z\}$; $B_4 := K_1 \cup K_2$ i $B_5 := K_1 \cap K_2$, gdzie $K_1 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z\}$, $K_2 := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2\}$. *Odpowiedź.* $|B_1| = \frac{21}{2}\pi$, $|B_2| = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$, $|B_3| = \frac{19}{6}\pi$, $|B_4| = \frac{\pi}{3}(7 + 4\sqrt{2})$, $|B_5| = (\frac{4}{3}\sqrt{2} - 1)\pi$.

17. Znaleźć: (a) środek ciężkości jednorodnej półkuki $\Omega := \{x + 2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 1, z \leqslant 1\}$; (b) środek ciężkości jednorodnej bryły $\Omega := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}\}$; (c) moment bezwładności względem osi $0z$ stożka $C := \{x^2 + y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ o gęstości $\rho(x,y,z) = z^2$; (d) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, z \leqslant 0\}$ o gęstści $\rho = 1$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,1)$; (e) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{1 \leqslant z \leqslant 2, x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$ o masie $M$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$; (f) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B = \{x^2 + y^2 \leqslant 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ o masie $M$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

17. (a) $(0, 0, \frac{5}{8})$; (b) $(0, 0, \frac{3}{16}(2 + \sqrt{2}))$; (c) $\frac{\pi}{14}$; (d) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} - 1)mG$; (e) $\frac{3}{7}((2 - \sqrt{2})MmG$; (f) $2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})MmG$, $G :=$ stała grawitacji.

18. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: (a) $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 2e^t + \frac{1}{t}e^t$; (b) $t\ddot{x} + 2\dot{x} - tx = t^2$, znając RSRJ $x_1(t) = \frac{1}{t}e^t$; (c) $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + x = t^2$, $x_1(t) = t$; (d) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + 2\dot{x} = e^t \cos t + 3t$; (e) $\dddot{x} - \frac{3}{t}\ddot{x} + \frac{6}{t^2}\dot{x} - \frac{6}{t^3}x = e^t$, znając RSRJ $x_1(t) = t$.

18. (a) $x(t) = (t \log|t| + t^2)e^t +$RORJ; (b) $-t - \frac{2}{t} + C_1 \frac{1}{t}e^t + C_2 \frac{1}{t}e^{-t}$; (d) $\frac{1}{4}te^t(\sin t - \cos t) + \frac{3}{4}t(t+2) +$RORJ; (e) $te^t + C_1 t + C_2 t^2 + c_3 t^3$.

19. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania: (a) $2yy'' = 1 + y'^2$; (b) $yy'' = y'(y'^2 - 1)$; (c) $yy'' = 2(y'-1)(y'-2)$.

19. (a) $y = \frac{C}{4}(x - x_0)^2 + \frac{1}{C}$. (b) $\frac{2}{C} \operatorname{arc\,tg}(Cy) - y = x - x_0$ lub $\frac{1}{C} \log\left|\frac{1+Cy}{1-Cy}\right| - y = x - x_0$; ponadto są rozwiązania osobliwe $y = x_0$ oraz $y = \pm(x - x_0)$. (c) $y = x - x_0 - \frac{1}{C(x-x_0)}$; ponadto są rozwiązania osobliwe $y = x - x_0$ i $y = 2(x - x_0)$.

20. Wprowadźmy w obszarze $\{(x_1, x_2, x_3, z) : x_3 > 0\}\imath\mathbf{R}^4$ nowe współrzędne $u_1 = \frac{x_1}{x_3}, u_2 = \frac{x_2}{x_3}, u_3 = x_3, v = \frac{z}{x_3}$; wyrazić w tych współrzędnych równanie $x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} = z + \frac{x_1 x_2}{x_3}$, traktując $v$ jako nową zmienną zależną $v = v(u_1, u_2, u_3)$. Rozwiązaując otrzymane równanie znaleźć rozwiązanie ogólne wyjściowego równania.

20. Zróżniczkować po $x_1, x_2, x_3$ zależność $z(x_1, x_2, x_3) = x_3 v(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, x_3)$, otrzymując $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ wyrażone przez $\frac{\partial v}{\partial u_i}$; wstawiając to do równania dostajemy $u_3\frac{\partial v}{\partial u_3} = u_1 u_2$, tzn. $\frac{\partial}{\partial u_3}(v - u_1 u_2 \log u_3) = 0$. *Odpowiedź.* $z = \frac{x_1 x_2}{x_3} \log x_3 + \varphi(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$.

21. Rozwiązać równanie $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xz^2$, wyrażając je w nowych współrzędnych $u = x, v = \frac{y}{x}, w = \frac{z}{1+xz}$ obszaru $\Omega = \{(x,y,z) : x, y > 0\}$ oraz traktując $w$ jako zmienną zależną $w = w(u,v)$. *Odpowiedź.* $z = \frac{f(\frac{y}{x})}{1 - xf(\frac{y}{x})}$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

**Seria 9.**

1. Przestawić kolejność całkowania w całce: (a) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f\,dy$; (b) $\int_{-2}^6 dx \int_{-\sqrt{12+4x-x^2}}^{\sqrt{12+4x-x^2}} f\,dy$; (c) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f\,dy$; (d) $\int_0^\pi dx \int_{-\sin x}^{\sin x} f\,dy$; (e) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f\,dx$ (rysunek nie może być użyty w rozwiązaniu, lecz może je ułatwić).

2. Zapisać całkę $I = \int_\triangle f(x,y,z)dxdydz$, gdzie $\triangle \subset \mathbf{R}^3$ jest czworościanem o wierzchołkach $(0,1,2)$, $(1,0,-1)$, $(1,3,5)$, $(1,0,2)$, w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek): (a) $\int dx \int dy \int f\,dz$; (b) $\int dz \int dx \int f\,dy$.

3. Udowodnić tożsamość: $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)dz = \int_0^1 dz \left( \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx + \int_z^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)dx \right)$.

4. Przedstawić $I := \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{\frac{x+y}{2}}^{2y-x} f\,dz$ w postaci całki iterowanej (lub sumy takich całek) o zadanej kolejności całkowania: (a) $I = \int dz \int dy \int f\,dx$; (b) $I = \int dx \int dz \int f\,dy$; (c) $I = \int dy \int dz \int f\,dx$; (d) $I = \int dz \int dx \int f\,dy$.

5. Odwracając kolejność całkowania wykazać, że $\int_a^b dx_n \int_a^{x_n} dx_{n-1} \ldots \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_1)dx_1 = \int_a^b f(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}dx$.

6. Niech $I$ oznacza całkę podwójną $I = \int_K f(x,y)dxdy$; sprawdzić, że: **a**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant x\}$, $f = x^{-1}|y| \Rightarrow I = \frac{1}{2}$; **b**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, $f = x^2\sqrt{a^2-y^2} \Rightarrow I = \frac{32a^5}{45}$; **c**. $K = \{(x^2+y^2)^2 \leqslant 2a^2(x^2-y^2, x \geqslant 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = a^2$; **d**. $K = \{x,y \geqslant 0, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leqslant 1\}$, $f = xy \Rightarrow I = \frac{a^2b^2}{280}$; **e**. $K = \{y \geqslant 0, 9x \leqslant y^2, x^2+y \leqslant 4\}$, $f = xy \Rightarrow I = -\frac{15}{4}$; **f**. $K = \{xy \geqslant 1, y^2 \geqslant x, y \leqslant 2\}$, $f = x^2y \Rightarrow I = \frac{251}{24}$; **g**. $K = \{x^2 = y^2 \leqslant 2x\}$, $f = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow I = \frac{8}{9}(3\pi-4)$; **h**. $K = \{x^2+2y^3 \leqslant 4xy, y \geqslant 0\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{64}{15}$; **i**. $K = \{(x^2-ax+y^2)^2 \leqslant a^2(x^2+y^2)\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{2}\pi a^2$; **j**. $K = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, $f = e^{x^2+y^2} \Rightarrow I = (e^{a^2}-1)\pi$; **k**. $K = \{y \leqslant 1, x^2(2-y) \leqslant y(1-y)^2\}$, $f = 1 \Rightarrow I = \frac{4-\pi}{2}$; **l**. $K = \{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$, $f = x^2y\cos(xy^2) \Rightarrow I = -\frac{\pi}{16}$; **m**. $K = \{|x-y| \leqslant 1, y \geqslant 0\}$, $f = xe^{-y^2} \Rightarrow I = 1$.

7. Dowieść, że odwzorowanie $\Phi(u,v) := (\operatorname{ch} u\ \cos v, \operatorname{sh} u\ \sin v)$ jest dyfeomorfizmem obszaru $\Omega := \{(u,v) : 0 < v < \pi\}$ na obszar $\Phi(\Omega) = \{(x,y) : y \neq 0 \text{ lub } -1 < x < 1\}$. Wykorzystać parametryzację $\Phi$ do obliczenia pola obszaru $K := \{(x,y) : \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_1} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_1} \geqslant 1 \geqslant \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_2} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_2},\ \frac{x^2}{\cos^2 v_1} - \frac{y^2}{\sin^2 v_1} \leqslant 1 \leqslant \frac{x^2}{\cos^2 v_2} - \frac{y^2}{\sin^2 v_2},\ x > 0, y > 0\}$ (przy zadanych $0 < u_1 < u_2, 0 < v_1 < v_2 < \frac{\pi}{2}$), którego brzeg stanowią odcinki łuków współogniskowych elips i hiperbol.

8. Niech $I$ oznacza całkę potrójną $I = \int_K f(x,y,z)dxdydz$; sprawdzić, że:
   (a) $K = \{x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = (1+x+y+z)^{-3} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\log 2 - \frac{5}{8})$;
   (b) $K = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2, x^2+y^2 \leqslant z\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \Rightarrow I = \frac{\pi}{60}(96\sqrt{2}-8)$;
   (c) $K = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}abc$;
   (d) $K = \{x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 2(x^2+y^2), x^2 \leqslant y \leqslant x\}$, $f(x,y,z) = 1 \Rightarrow I = \frac{3}{35}$;
   (e) $K = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant x\}$, $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{10}$.

9. Obliczyć średnią wartość $M(f,K) = \int_K f(x)dx \,/\, \int_K dx$ funkcji $f$ na zbiorze $K$:
   (a) $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$, $f(x) = x_1^2 x_2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac{1}{6}$
   (b) $K = \{x \in \mathbf{R}^2 : (x_1-a)^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = a^2 + r^2/2$
   (c) $K = \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant x_1+x_2+x_3\}$, $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2$; *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac{6}{5}$
   (d) $K = \{x \in \mathbf{R}^3 : 1 \leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 4,\ x_3 \geqslant 0\}$, $f(x) = x_1^2+x_2^2$. *Odpowiedź.* $M(f,K) = \frac{62}{35}$

10. Oznaczmy $\Omega := \{(x,y) : x > 0, y > 0, x^2+y^2 < 1\}$ oraz $\boxed{I_p := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p \varphi\, d\varphi \text{ dla } p > -1}$. Licząc całkę $\int_K \frac{y^p\,dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ dwoma sposobami: jako całkę iterowaną i przez parametryzację $x = \sin\theta\,\cos\varphi$, $y = \sin\theta\,\sin\varphi$, wykazać tożsamość $\boxed{I_p I_{p+1} = \frac{\pi}{2(p+1)}}$. Korzystając z tej tożsamości wyprowadzić następujące oszacowanie: $\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2(p+1)}} < I_p < \sqrt{\frac{\pi}{2p}}}$.

11. Obliczyć środek ciężkości jednorodnego obszaru płaskiego $K := \{(x,y) : x > 0, xy \geqslant 1, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 2\}$ (przy $a,b > 0$, $ab > 1$ danych); sprawdzić, że leży on na prostej o równaniu $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

12. Dwa walce o jednakowym promieniu $a > 0$ (i nieskończonej długości) przenikają się wzajemnie tak, że ich osie symetrii obrotowej przecinają się pod kątem $\varphi \in ]0,\pi[$. Obliczyć objętość wspólnej części obu walców.

13. Dla danych $a,b > 0$ oznaczmy $W := \{(x,y,z) : x^2+(z-a)^2 \leqslant b^2\}$, $W' := \{(x,y,z) : y^2+(z-b)^2 \leqslant a^2\}$. Pokazać, że powierzchnie boczne obu tych walców są styczne w co najmniej jednym punkcie; obliczyć objętość $W \cap W'$.

14. Odcinek długości $d$ obraca się wokól osi, zakreślając powierzchnię boczną pewnej bryły obrotowej $B$ (jest to część *hiperboloidy jednopowłokowej*, jeśli odcinek i oś obrotu nie leżą w jednej płaszczyźnie); niech $h$ oznacza wysokość bryły $B$, a $r_1, r_2$ — promienie ograniczających ją kół. Wykazać, że objętość $B$ jest równa $\frac{\pi}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2-d^2)h$.

15. Wykorzystując zadanie ?? obliczyć objętość bryły obrotowej utworzonej przez: (a) sześcian o krawędzi $a$ obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi; (b) sześcian o krawędzi $a$ obracający się wokół osi łączącej jego dwa przeciwległe wierzchołki; (c) czworościan foremny o krawędzi $a$, obracający się wokół osi łączącej środki jego dwóch przeciwległych krawędzi.

16. Obliczyć objętość brył: $B_1 := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 4z, x^2+y^2 \leqslant 3z\}$; $B_2 := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$; $B_3 := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, x^2+y^2 \leqslant 3z\}$; $B_4 := K_1 \cup K_2$ i $B_5 := K_1 \cap K_2$, gdzie $K_1 := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z\}$, $K_2 := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$.

17. Znaleźć: (a) środek ciężkości jednorodnej półkuli $\Omega := \{x+2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 1, z \leqslant 1\}$; (b) środek ciężkości jednorodnej bryły $\Omega := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$; (c) moment bezwładności względem osi $0z$ stożka $C := \{x^2+y^2 \leqslant z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ o gęstości $\rho(x,y,z) = z^2$; (d) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \leqslant 0\}$ o gęstści $\rho = 1$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,1)$; (e) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B := \{1 \leqslant z \leqslant 2, x^2+y^2 \leqslant z^2\}$ o masie $M$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$; (f) siłę przyciągania grawitacyjnego między jednorodną bryłą $B = \{x^2+y^2 \leqslant 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ o masie $M$, a masą punktową $m$ umieszczoną w punkcie $(0,0,0)$.

## Odpowiedzi i rozwiązania

1. (a) $\int_0^1 dy \left(\int_{\frac{y^2}{2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f\,dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f\,dx\right) + \int_1^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f\,dx = \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{2} f\,dx - \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f\,dx$; (b) $\int_{-4}^{4} dy \int_{2-\sqrt{16-y^2}}^{2+\sqrt{16-y^2}} f\,dx$;
(c) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f\,dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f\,dx$; (d) $\int_{-1}^{1} dy \int_{\arcsin|y|}^{\pi-\arcsin|y|} f\,dx$; (e) $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f\,dy$.

2. (a) $I = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+2x} dy \int_{2y-x}^{1+x+y} f(x,y,z)dz$; (b) $I = \int_{-1}^{2} dz \int_{\frac{2-z}{3}}^{1} dx \int_{1-x}^{\frac{x+z}{2}} f(x,y,z)dy + \int_2^5 dz \int_{\frac{z-2}{3}}^{1} dx \int_{z-x-1}^{\frac{x+z}{2}} f(x,y,z)dy$.

4. $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_z^{2z} dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dz \int_z^{1} dy\right) \int_0^{2z-y} f\,dx + \left(\int_0^1 dz \int_{\frac{z}{2}}^{z} dy + \int_1^2 dz \int_{\frac{z}{2}}^{1} dy\right) \int_0^{2y-z} f\,dx = \int_0^1 dx \left(\int_x^{\frac{1+x}{2}} dz \int_{\frac{x+z}{2}}^{2z-x} f\,dy + \int_{\frac{1+x}{2}}^{2-x} dz \int_{\frac{x+z}{2}}^{1} f\,dy\right) =$
$= \int_0^1 dy \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} dz \int_0^{2z-y} f\,dx + \int_y^{2y} dz \int_0^{2y-z} f\,dx\right) = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dz \int_0^{z} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dz \int_{2z-1}^{z} dx\right) \int_{\frac{x+z}{2}}^{2z-x} f\,dy + \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} dz \int_0^{2z-1} dx + \int_1^2 dz \int_0^{2-z}\right) \int_{\frac{x+z}{2}}^{1} f\,dy.$

7. $\operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v = \frac{e^w+e^{-w}}{2}$ dla $w = u+iv$; sprawdzić, że $f(w) := \operatorname{ch} w = \frac{e^w+e^{-w}}{2}$ jest surjekcją $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, taką że $f(w) = f(\tilde{w}) \iff \exists n \in \mathbf{Z} : (\tilde{w} = w + 2\pi i n)$ lub $(\tilde{w} = -w + 2\pi i n)$; sprawdzić też, że $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2u - \cos 2v) > 0$ na $\Omega$. *Odpowiedź.* $|K| = \frac{v_2-v_1}{4}(\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - \frac{u_2-u_1}{4}(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)$.

11. *Odpowiedź.* $_0 = C(\sqrt{\frac{a}{b}}, \sqrt{\frac{b}{a}})$, gdzie $C = \frac{2}{3}(ab-1)^{\frac{3}{2}}[\sqrt{ab(ab-1)} - \log(\sqrt{ab} + \sqrt{ab-1})]^{-1}$.

12. Jeśli osią symetrii walca $W$ jest prosta $\mathbf{R}$, to $W = \{ \in \mathbf{R}^3 : ||^2 - (|)^2 \leqslant a^2\}$; można przyjąć $= (1,0,0)$ i $' = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, wtedy $W = \{ : x_2^2 + x_3^2 \leqslant a^2\}$, $W' = \{ : (x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi)^2 + x_3^2 \leqslant a^2\}$. *Odpowiedź.* $|W \cap W'| = \frac{16a^3}{3\sin\varphi}$.

13. *Wsk.* Czym są przekroje $W \cap W'$ płaszczyznami $z = \text{const}$ ? *Odp.* $|W \cap W'| = \frac{4}{3}\sqrt{ab}(3a^2 - 2ab + 3b^2) + 4(a+b)(a-b)^2 \log \frac{\sqrt{|a-b|}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

14. Gdy osią obrotu jest $\mathbf{R}e_3$, a końcami odcinka punkty $_1 = (r_1, 0, 0)$ i $_2 = (a, b, h)$, wtedy $a^2 + b^2 = r_2^2$ oraz $d^2 = (a - r_1)^2 + b^2 + h^2$, więc $2ar_1 = r_1^2 + r_2^2 + h^2 - d^2$; stąd dla punktu $(1-t)_1 + t_2$ odcinka kwadrat odległości od osi wynosi $\rho^2(t) = (1-t)^2 r_1^2 + t^2 r_2^2 +$ $+ t(1-t)(r_1^2 + r_2^2 + h^2 - d^2)$, zaś przekrój $B$ płaszczyzną $x_3 = th$, $t \in [0,1]$ ma pole $\pi\rho^2(t)$, skąd $|B| = h\int_0^1 \pi\rho^2(t)dt = \ldots$

15. *Odpowiedź.* (a) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{12}a^3$; (b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}a^3$; (c) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}a^3$.

16. *Odpowiedź.* $|B_1| = \frac{21}{2}\pi$, $|B_2| = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$, $|B_3| = \frac{19}{6}\pi$, $|B_4| = \frac{\pi}{3}(7+4\sqrt{2})$, $|B_5| = (\frac{4}{3}\sqrt{2} - 1)\pi$.

17. (a) $(0, 0, \frac{5}{8})$; (b) $(0, 0, \frac{3}{16}(2+\sqrt{2}))$; (c) $\frac{\pi}{14}$; (d) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{2}-1)mG$; (e) $\frac{3}{7}((2-\sqrt{2})MmG$; (f) $2(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})MmG$, $G :=$ stała grawitacji.

# Wiele szczęścia w życiu wróżę temu kto ma ♡ duże

1. Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x) := |1+z| - 1 - \operatorname{Re} z$ na kole $\overline{K}(0;r)$.

   $f(x,y) = \sqrt{(1+x)^2+y^2} - 1 - x$, $\left\{\begin{array}{l} f'_x = \frac{1+x}{\sqrt{\cdot}} - 1 \\ f'_y = \frac{y}{\sqrt{\cdot}} \end{array}\right\}$, więc $(x,y)$ jest p.kryt. $\Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{c} x+1>0 \\ y=0 \end{array}\right\}$, wtedy $f(x,y)=0$. W tych punktach krytycznych $f$ ma minimum, gdyż $\sqrt{(x+1)^2+y^2} \geqslant \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \geqslant x+1$, a więc zawsze $f(x,y) \geqslant 0$. Badanie na brzegu, tj. na $C(0;r) = \{(x,y) : x^2+y^2 = r^2\}$ metodą mn. Lagrange'a: $\left\{\begin{array}{c} [1+x-\sqrt{\ }, y] = \lambda[x,y] \\ x^2+y^2=r^2 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} \lambda = 1 \\ \sqrt{\ } = 1 \end{array}\right\} \iff$ $(x,y) \in C(0;r) \cap C(-1;1)$ lub $y=0$ ...WORKING

2. Zbadać $f : [0,+\infty[$ daną wzorem $f(x) := \sqrt{e^x - 1} - x$; wykazać m.in. że $\forall x > 0 : f(x) > 0$.

   Niech $yt = e^{-x} \in ]0,1]$, wtedy $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} - 1 \geqslant 1 - 1 = 0$, gdyż $t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$. Zatem $f$ rośnie, skąd $f(x) > f(0) = 0$. Ponadto $f'(x)$ maleje (tzn. $f$ jest wklęsła) na $]0,\log 2[$, a rośnie (tzn. $f$ jest wypukła) na $]\log 2, +\infty[$. Dla $x = \log 2$ mamy punkt przegięcia, w którym $f(x_0) = 1 - \log 2$, $f'(x_0) = 0$. Mamy też $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) = 1$, więc $f'(0^+) = +\infty$; ponadto $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$.

3. Znaleźć (w zależności od parametru $x$) sumę częściową $A_n := a_0 + \ldots + a_n$, a następnie sumę $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ całego szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$: (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ dla $x \in K(0;1)$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ dla $x \in K(0;1)$; (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\varphi$ dla $x \in ]-1,1[$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\varphi$ dla $x \in ]-1,1[$; (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{x^2}{1-x^4} + \dfrac{x^4}{1-x^8} + \ldots$ dla $x \in \mathbf{C}$, $|x| \neq 1$; (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)2^n}$.

   (a) $A_n = 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1-x^n}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x}$; (b) $A_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$, więc $(1-x)A_n = 1 + 2x + \ldots + (n+1)x^n - x - 2x^2 - \ldots - nx^n - (n+1)x^{n+1} = 1 + x + \ldots + x^n - (n+1)x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - (n+1)x^{n+1}$, skąd $A = \frac{1}{(1-x)^2}$.

   (c)(d) $C + iS = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(xe^{i\varphi}\right)^n = \frac{1}{1-xe^{i\varphi}} = \frac{1-xe^{-i\varphi}}{1-2x\cos\varphi+x^2}$, więc $C = \frac{1-x\cos\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}$, $S = \frac{x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}$.

   (e) $a_n = \dfrac{x^{2^n}}{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})} = \dfrac{(1+x^{2^n})-1}{(\ \ldots\ )(\ \ldots\ )} = \dfrac{1}{1-x^{2^n}} - \dfrac{1}{1-x^{2^{n+1}}} =: c_n - c_{n+1}$, więc $A_n = c_0 - c_{n+1}$ oraz $A = \lim A_n = \left\{\begin{array}{ll} c_0, & \text{gdy } |x|>1 \\ c_0 - 1, & \text{gdy } |x|<1 \end{array}\right.$; stąd, skoro $c_0 = \dfrac{1}{1-x}$, dostajemy $A = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1-x}, \text{ gdy } |x|>1 \\ \frac{x}{1-x}, \text{ gdy } |x|<1 \end{array}\right.$.

   (f) $a_n = \dfrac{2(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)2^n} = \dfrac{2}{(n+1)2^n} - \dfrac{1}{(n+2)2^n} = c_n - c_{n+1}$, gdzie $c_n = \dfrac{2}{(n+1)2^n}$; zatem $A_n = c_0 - c_{n+1}$ oraz $A = c_0 = 2$.

4. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach (a) $\dfrac{\sqrt[n]{n^n+n}}{2n}$; (b) $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

5. Niech $A_n := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (y-x)^2 \leqslant nx\}$ dla $n \in \{0,1,2...\}$.
   (a) Naszkicować zbiory $A_n$; (b) wyznaczyć $A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ oraz $A_* = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

6. Pokazać, że $\forall n \in \mathbf{N} : \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2N+1}}$.

7. Sprawdzić, że relacja $\sim$ w zbiorze $\mathbf{R}$, zadana wzorem $x \sim y \iff (x^2 - y^2 = x - y)$, jest relacją równoważności. Wyznaczyć klasy równoważności [1] i [2].

8. Zbadać zbieżność szeregów: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^{n^2}$.

9. Wykazać, że wielomian $W_n(x) := \exp(x)\frac{d^n}{dx}(x^n \exp(-x))$ ma $n$ rzeczywistych dodatnich pierwiastków.

10. Dla jakich $a, b \in \mathbf{R}$ funkcja $]-1,1[ \ni x \mapsto f(x) := \left\{\begin{array}{ll} ax+b, & x \leqslant 0 \\ \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \end{array}\right.$ jest różniczkowalna?

11. Obliczyć granice: (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(\sin(x-1)) - \cos(x-1)}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log|\sin(ax)|}{\log|\sin(bx)|}$.

12. Przedstawić całkę podwójną $\int_K f(3x+4y+1)\,dx\,dy$, gdzie $K = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$, jako całkę pojedynczą.

13. Obliczyć pole obszaru $K$, jeśli: (a) $K = \{(x,y) : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$; (b) $K = \{(x^2+y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)\}$.

14. Obliczyć objętość bryły ograniczonej czterema powierzchniami: $z = x^2+y^2$, $x^2+y^2 = x$, $x^2+y^2 = 2x$, $z = 0$.

15. Obliczyć całkę $\int_K f$, jeżeli: (a) $K = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, $f(x, y) = xy$;

(b) $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\}$, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(c) $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant 1, -1 \leqslant z \leqslant 1\}$, $f(x, y, z) = \left[x^2 + y^2 + (z - 2)^2\right]^{-1/2}$.

16. Obliczyć średnią wartość $\frac{\int_K f}{\int_K 1}$ funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ w obszarze $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z\}$.

17. Obliczyć wartość średnią kwadratu odległości punktów koła o promieniu $R$.

18. Wyznaczyć środek ciężkości bryły jednorodnej zajmującej obszar $K = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 \leqslant a^2, y^2 + z^2 \leqslant a^2, z \leqslant 0\}$.

19. Wg książki J.Czyża: twierdzenie Höldera(?), którego uproszczony dowód znalazł Hausdorff: Jeśli $F \in \operatorname{End} V$, $V$ — zespolona p.Hilberta, to podzbiór $S(F) := \{\langle v \| Fv \rangle : v \in V, \|v\| = 1\} \subset \mathbf{C}$ ('spektrum wartości') jest wypukły. Ogólniej: dla refleksywnej p.Banacha $S(F)$ to zbiór $\{\langle f, Fv \rangle : (f, v) \in \Pi\}$, gdzie $\Pi := \{(f, v) \in V^* \times V : \|f\| = \|v\| = \langle f, v \rangle = 1\}$, przy czym norma w $V^*$ musi być zgodna z normą w $V$, tzn. $\|f\| = \sup\{|f(v)| : \|v\| \leqslant 1\}$.

# Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’

**Seria 10.**

1. Obliczyć, korzystając z twierdzeń o całkach z parametrem: (a) $F(a) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-x^2 - a^2x^{-2}\right)dx$ dla $a \in \mathbf{R}$;

(b) $\Phi(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-a^2x^2 - b^2x^{-2}\right)dx$ dla $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$; (c) $F(a) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}e^{-x}dx$ dla $a \in \mathbf{R}$;

(d) $F(a) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 - \sin^2 x)dx$ dla $a > 1$; (e) $F(a) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 - a^2\sin^2 x)dx$ dla $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

(f) $F(a) := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 + \sin^2 x)dx$. *Wskazówka*: Zbadać $\lim\limits_{a\to\infty} F(a)$. (g) $F(a) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}(ax)}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ dla $a \in \mathbf{R}$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial a} = -2ax^{-2}\exp\left(-x^2 - a^2x^{-2}\right)$, przy czym można założyć, że $a > 0$ (parzystość). Otóż $\sup_{a>0}|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = |\frac{\partial f}{\partial a}(\frac{x}{\sqrt{2}},x)| = \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}e^{-x^2}$ (bo pochodna wzgl. $a$ ma postać $(1 - \frac{2a^2}{x^2})\exp(...)$), przy czym, niestety, funkcja $\mathbf{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}e^{-x^2}$ nie jest całkowalna. Jednak ustalając (chwilowo) $c > 0$ mamy: $g(x) := \sup_{a>c}|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}\exp(-x^2), & x \in \left[c\sqrt{2}, \infty\right[, \\ 2cx^{-2}\exp(-x^2 - c^2x^{-2}), & x \in \left]0, c\sqrt{2}\right], \end{cases}$ przy czym $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$, gdyż $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, co daje ciągłość, a tym bardziej całkowalność na zwartym przedziale $\left]0, c\sqrt{2}\right]$. Tak więc dla $a > c$ (a więc, dzięki dowolności $c > 0$, dla wszystkich $a > 0$) funkcja $F$ jest różniczkowalna oraz $F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)dx$. Podstawiając $\frac{a}{x} = t$ w tej całce dostajemy $F'(a) = -2\int_0^\infty \exp\left(-x^2 - a^2t^{-2}\right)dx$, a zatem $\boxed{F'(a) + 2F(a) = 0 \text{ dla } a > 0}$. Stąd oraz z $F(-a) = F(a)$ wynika, że $\exists C \in \mathbf{R} : \forall a \neq 0 : F(a) = C\,e^{-2|a|}$. Aby wyznaczyć stałą $C$ skorzystamy z tego, że $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ oraz z ciągłości $F(0) = F(0^+)$; ciągłość ta wynika z istnienia całkowalnej majoranty: $\forall a : |f(a,x)| \leqslant e^{-x^2} =: h(x)$, $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$.

*Odpowiedź.* $F(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2|a|}$ dla $a \in \mathbf{R}$.

(b) Podstawiając $x = \frac{t}{|a|}$ otrzymujemy $\Phi(a,b) = |a|^{-1}F(|a|b)$ (patrz (a)), więc $\Phi(a,b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}e^{-2|ab|}$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = e^{-x}\sin ax$, więc $|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| \leqslant g(x) := e^{-x}$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$, zatem można różniczkować pod całką:
$F'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\sin ax\,dx = -\frac{1}{1+a^2}\left[e^{-x}(a\cos ax + \sin ax)\right]_0^\infty = \frac{a}{1+a^2}$. Stąd, skoro $F(0) = 0$, $F(a) = \frac{1}{2}\log(1+a^2)$.

(d) $|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = \frac{2a}{a^2-\sin^2 x}$ jest malejąca względem $a$, więc $\sup_{a>1}|...| = \frac{2}{1-\sin^2 x}$, co nie jest całkowalne na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Jednakże dla ustalonego $c > 1$ mamy $\sup_{a>c}|...| = \frac{2c}{c^2-\sin^2 x} =: g(x)$, co jest funkcją ciągłą, a więc całkowalną na zwartym przedziale. Zatem $F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,dx}{a^2-\sin^2 x} = ... = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, więc $\exists C : \forall a > 1 : F(a) = C + \pi\log\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.

Wyznaczenie stałej $C$: Sposób 1. Odejmując od $F(a)$ stałą $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(a^2)dx = \pi\log a$ dostajemy $I(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}\right)dx = C + \pi\log\frac{1+\sqrt{1-a^{-2}}}{2}$; przy tym $\lim\limits_{a\to\infty} I(a) = 0$, gdyż $\frac{\pi}{2}\log(1 - \frac{1}{a^2}) \leqslant I(a) \leqslant 0$, więc przy $a \longrightarrow \infty$ dostajemy $C = 0$.

Sposób 2. Wykażemy, że $F(1) = F(1^+)$, tzn. że $F$ jest ciągła prawostronnie w $a = 1$. Wystarczy w tym celu pokazać, że $f(a,x)$ mają całkowalną majorantę: $1 \leqslant a \leqslant 2 \Rightarrow \log\cos^2 x \leqslant f(a,x) \leqslant \log(4 - \sin^2 x) \Rightarrow |f(a,x)| \leqslant |\log\cos^2 x| + \log(4 - \sin^2 x) \in \mathcal{L}^1$. Obliczenie $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx$: Całkując po $[0,\pi]$ obie strony tożsamości $\log\sin x = \log 2 + \log\sin\frac{x}{2} + \log\cos\frac{x}{2}$ dostajemy $I = \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos t\,dt = \pi\log 2 + 2I$, czyli $F(1) = -\pi\log 2$, tzn. $C = 0$.

(e) $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{-2a\sin^2 x}{1-a^2\sin^2 x}$ więc $|a| < c < 1 \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) \leqslant \frac{2c}{1-c^2} \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$, więc można różniczkować pod całką: $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a\sin^2 x\,dx}{1-a^2\sin^2 x} = \left\| \begin{smallmatrix} x = \operatorname{arc\,tg} t \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{smallmatrix} \right\| = \int_0^\infty \frac{-2at^2\,dt}{(1+t^2)[1+(1-a^2)t^2]} = \frac{2}{a}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(1-a^2)t^2}\right)dt = \frac{2}{a}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\right)$. Zatem $F(a) = C + \pi\log(1 + \sqrt{1-a^2}) + C$; skoro $F(0) = 0$, to $C = -\pi\log 2$, więc *Odpowiedź.* $F(a) = \pi\log\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$ dla $|a| \leqslant 1$.

Uwaga. $F$ jest ciągła na końcach $[-1,1]$, gdyż $\log(1 - \sin^2 x) \leqslant \log(1 - a^2\sin^2 x) \leqslant 0$ daje $|f(a,x)| \leqslant |\log\cos^2 x| \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

(f)Dla $a \geqslant a_0 > 0$ mamy $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = \left|\frac{2a}{a^2 = \sin^2 x}\right| \leqslant \frac{2a}{a^2} \leqslant \frac{2}{a_0} \in \mathcal{L}^1$, więc $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,dx}{a^2+\sin^2 x} = \left\| \begin{smallmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{smallmatrix} \right\| = \int_0^\infty \frac{2a\,dt}{(a^2+1)t^2+a^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}$, zatem $F(a) = \pi\operatorname{arsh} a + C = \pi\log(a + \sqrt{1+a^2}) + C$. Wyznaczenie $C$. $F(a) - \pi\log a = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(1 + \frac{1}{a^2}\sin^2 x)dx \to 0$ przy $a \to \infty$, więc $\log(1 + \sqrt{a^{-2}+1}) + C \longrightarrow 0$, skąd $C = -\pi\log 2$. *Odp.* $\boxed{F(a) = \pi\log\frac{|a|+\sqrt{1+a^2}}{2} \text{ dla } a \neq 0}$. *Uwaga.* $F$ jest ciągła w $a = 0^+$, gdyż $\log(\sin^2 x) \leqslant f(x) \leqslant \log(1 + \sin^2 x)$ dla $0 \leqslant a \leqslant 1$ sprawia, że $|f(x) \leqslant |\log(\sin^2 x)| + \log(1 + \sin^2 x) \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

(g) $F'(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \left\|^{x=\sin t}\right\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2\sin^2 t} = \operatorname{arc\,tg}(t\sqrt{1+a^2})\Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$, więc $F(a) = \frac{\pi}{2}\log(a + \sqrt{1+a^2})$.

**Zadania z Analizy Matematycznej (C)** **Semestr 3.** **Seria 1.** **Listopad 1993**

1. Niech formy $\theta_1, \theta_2 \in V^*$ będą liniowo niezależne oraz niech $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, $k \geqslant 1$. Dowieść, że
$$\big(\omega \text{ ma postać } \omega = \theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_2 \wedge \omega_2 \text{ dla pewnych } \omega_1, \omega_2 \in \textstyle\bigwedge^{k-1}(V^*)\big) \iff \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \omega = 0.$$

2. Niech formy $\theta_1, \theta_2 \in V^*$ będą liniowo niezależne oraz niech $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^l(V^*)$, $l \geqslant 1$. Dowieść, że
$$\theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_2 \wedge \omega_2 = 0 \iff \big(\exists\, \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \textstyle\bigwedge^{l-1}(V^*), \text{ takie że } \omega_1 = \theta_1 \wedge \sigma_1 + \theta_2 \wedge \sigma,\ \omega_2 = \theta_2 \wedge \sigma_2 + \theta_1 \wedge \sigma\big).$$

3. Znaleźć nową bazę $e^1, \ldots, e^n$, w której dana 2-forma ma postać kanoniczną: (a) $\omega := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) f^i \wedge f^j$; (b) $\omega := f^1 \wedge f^2 + 2f^2 \wedge f^3 + 3f^3 \wedge f^4 + 2f^4 \wedge f^5 + f^5 \wedge f^1$; (c) $\omega := \sum_{i=1}^5 i f^i \wedge f^{i+1}$; (d) $\omega_n := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} f^i \wedge f^j$.

3. (a) $e^1 \wedge e^2$, gdzie $e^1 = \sum_{i=1}^n f^i$, $e^2 = \sum_{j=1}^n j \cdot f^j$; (b) $\omega = (f^1 - 2f^3) \wedge (f^2 - f^5) + (f^3 - f^4) \wedge (3f^3 - 2f^5)$; (d) $\omega_n = \omega_{n-2} + (f^{n-1} + \theta_{n-2}) \wedge (f^n - \theta_{n-2})$, gdzie $\theta_{n-2} := \sum_{i=1}^{n-2} f^i$; stąd, przez indukcję, $\omega_{2k}$ i $\omega_{2k+1}$ sprowadzają się do postaci $\sum_{i=1}^k e^{2i-1} \wedge e^{2i}$.

4. Niech $(e^1, \ldots, e^n)$ i $(f^1, \ldots, f^n)$ — dwie bazy przestrzeni $V^*$. Udowodnić następujący odpowiednik "twierdzenia o inercji dla form kwadratowych": jeśli $\omega = e^1 \wedge e^2 + \ldots + e^{2k-1} \wedge e^{2k} = f^1 \wedge f^2 + \ldots + f^{2l-1} \wedge f^{2l}$, to $k = l$.

5. Niech $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$. Dowieść, że $\big(\omega$ jest formą *prostą*, tzn. rozkładalną na iloczyn 1-form$\big) \iff \omega \wedge \omega = 0$.

6. Niech $\omega', \omega'' \in \bigwedge^2(V^*)$ będą formami prostymi. Dowieść, że (forma $\omega = \omega' + \omega''$ jest prosta) $\iff \omega' \wedge \omega'' = 0$.

7. Niech $\dim V = 5$ i niech $e^1, \ldots, e^5$ będzie bazą $V^*$; oznaczmy dla wygody $e^{ijk} := e^i \wedge e^j \wedge e^k$ dla $i, j, k \in \overline{1,5}$. Wykazać, że poniższe 3-formy są proste, znajdując rozkład każdej z nich na iloczyn zewnętrzny 1-form:
$\omega = 3e^{134} - 3e^{135} + e^{145} - 6e^{234} + 6e^{235} - 2e^{245}$; $\omega' = 7e^{123} - 6e^{124} + e^{125} - 9e^{134} - 2e^{135} + 3e^{145} - 7e^{235} + 6e^{245} + 9e^{345}$.

7. Zastos. "kryterium podzieln. przez 1-formę"; $\omega = (e^1 - 2e^2) \wedge (3e^3 - e^4) \wedge (e^4 - e^5)$; $\omega' = (e^1 + 2e^2 + 3e^3) \wedge (e^1 - e^5) \wedge (e^2 - 2e^3 + 3e^4)$.

8. Niech $\dim V = 5$ i niech $e^1, \ldots, e^5$ będzie bazą $V^*$. Wykazać, że 3-forma $\omega := \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 5} e^i \wedge e^j \wedge e^k$ jest rozkładalna (tzn. $\exists\, \theta \in \bigwedge^1(V^*)$, $\sigma \in \bigwedge^2(V^*) : \omega = \theta \wedge \sigma$), lecz nie jest prosta. Znaleźć rozkład $\theta \wedge \sigma$ formy $\omega$.

8. Znaleźć $\theta \neq 0$ z warunku $\theta \wedge \omega = 0$, następnie wyrazić $\omega$ w bazie $\theta^1 = \theta, \theta^2 = e^2, \ldots, \theta^5 = e^5$. *Odp.* $\theta = \sum_i e^i$, $\sigma = \sum_{2 \leqslant j < k \leqslant 5} e^j \wedge e^k$.

9. Wyrazić we współrzędnych cylindrycznych $(\varrho, \varphi, z)$ i sferycznych $(r, \vartheta, \varphi)$ następujące formy różniczkowe na $\mathbf{R}^3$:
$\sigma_1 := x\,dy - y\,dx$; $\sigma_2 := \frac{xz\,dx + yz\,dy - \varrho^2\,dz}{\varrho}$; $\omega_1 := \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{r^3}$; $\omega_2 := \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy}{z}$.

9. $\sigma_1 = \varrho^2 d\varphi = r^2 \sin^2 \vartheta\, d\varphi$; $\sigma_2 = z\,d\varrho - \varrho\,dz = r^2 d\vartheta$; $\omega_1 = \frac{\varrho(z\,d\varrho - \varrho\,dz) \wedge d\varphi}{(\varrho^2 + z^2)^{3/2}} = \sin \vartheta\, d\vartheta \wedge d\varphi$; $\omega_2 = \frac{\varrho\,d\varphi \wedge d(\varrho z)}{\varrho} = \operatorname{tg} \vartheta\, d\varphi \wedge d(r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta)$.

10. Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\phi : \mathbf{R}^4_+ \to \mathbf{R}^3_+$, $\phi(p, q, r, s) := (pq, qr, rs)$ oraz $\omega := x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbf{R}^3_+)$.

10. $\omega = xyz\, d\left(\log \frac{x}{y}\right) \wedge d\left(\log \frac{y}{z}\right)$, skąd wynika $\phi^*\omega = pq^2r^2s(\frac{dp}{p} - \frac{dr}{r}) \wedge (\frac{dq}{q} - \frac{ds}{s}) = qr(rs\,dp \wedge dq + sp\,dq \wedge dr + pq\,dr \wedge ds + qr\,ds \wedge dp)$.

11. Niech $\mathcal{O} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 0 \text{ lub } z > 0\} \subset \mathbf{R}^3$ — dopełnienie półprostej $\{x = y = 0, z \leqslant 0\}$. (a) Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\omega := \frac{1}{r^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oraz $\phi(u, v, w) := (uw, vw, \frac{-u^2 - v^2 + w^2}{2})$. (b) Sprawdzić, że $\phi$ jest dyfeomorfizmem $\tilde{\mathcal{O}} := \{(u, v, w) : w > 0\}$ na $\mathcal{O}$; (c) Znaleźć formę $\tilde{\sigma} \in \Omega^1(\tilde{\mathcal{O}})$, taką że $d\tilde{\sigma} = \phi^*\omega$, a następnie $\sigma \in \Omega^1(\mathcal{O})$, taką że $\phi^*\sigma = \tilde{\sigma}$; sprawdzić, że $d\sigma = \omega$, a więc forma $\omega$ jest zupełna na $\mathcal{O}$.

11. (a) $\phi^*r = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$, $\phi^*(x\,dy - y\,dx) = w^2(u\,dv - v\,du)$, co łatwo daje $\phi^*\omega = \frac{4w}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}(u\,dv \wedge dw + v\,dw \wedge du + w\,du \wedge dv)$. (b) Skoro $r + z > 0$ na $\mathcal{O}$, to rozwiązując względem $u, v, w > 0$ równania $\phi(u, v, w) = (x, y, z)$ dostajemy $\phi^{-1}(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{r+z}}, \frac{y}{\sqrt{r+z}}, \sqrt{r + z})$; (c) Można wziąc np. $\tilde{\sigma} := \frac{2}{u^2 + v^2 + w^2}(u\,dv - v\,du)$; ponieważ $\phi^*(r + z) = w^2$, to $\tilde{\sigma} = \frac{1}{w^2}\phi^*\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{r}\right) = \phi^*\sigma$, gdzie $\sigma := \frac{x\,dy - y\,dx}{r(r+z)}$.

12. Jaką postać musi mieć funkcja $f \in \Omega^0(\mathbf{R}^4)$, aby forma $f(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dt + dt \wedge dx)$ była zamknięta?

12. $\omega = f\,d(x - z) \wedge d(y - t)$; wprowadzając nowe współrzędne $x - z, y - t, x + z, y + t$ dostajemy stąd *Odp.* $f = F(x - z, y - t)$, $F \in \Omega^0(\mathbf{R}^2)$.

13. Niech $n \geqslant 5$, $\omega := h \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \in \Omega^3(\mathbf{R}^n)$, gdzie $h \in \Omega^0(\mathbf{R}^n)$. (a) Znaleźć warunek na funkcję $h$, równoważny warunkowi $d\omega = 0$. (b) Mając daną $h$, taką że $d\omega = 0$, znaleźć formę $\theta \in \Omega^2(\mathbf{R}^n)$, taką że $d\theta = \omega$.

13. (a) $\frac{\partial h}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial h}{\partial x_n}$, tzn. $\exists\, f \in \Omega^0(\mathbf{R}) : h = f(x_1 + \ldots + x_n)$; (b) $\theta = F(x_1 + \ldots x_n) \sum_{j<k} dx_j \wedge dx_k$, gdzie $F(t) := \int_0^t f(t)dt$.

14. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ będzie otwartym *podzbiorem stożkowym*, tzn. spełniającym warunek $(x \in \mathcal{O}, t > 0) \Rightarrow t \cdot x \in \mathcal{O}$. Sprawdzić, że jeśli $\omega := x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ i $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$, to $\omega \wedge d\big(f(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)\big) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest dodatnio jednorodna stopnia -2. Jaki warunek na $f$ daje $d\big(f(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)\big) = 0$?

15. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. (a) Dowieść, że jeśli $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\,dx^i \in \Omega^1(\mathcal{O})$, $d\omega = 0$ oraz $\omega_n = 0$, to współczynniki $\omega_i$ nie zależą od współrzędnej $x^n$. (b) Dowieść, że jeśli $\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \omega_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$, $d\omega = 0$ oraz $\omega_{in} = 0$ dla $1 \leqslant i < n$, to każdy ze współczynników $\omega_{ij}$ nie zależy od współrzędnej $x^n$. (c) Sformułować i udowodnić uogólnienie tych rezultatów na przypadek formy dowolnego stopnia.

16. Dowieść, że dla każdej $k$-formy $\omega \in \Omega^k(\mathbf{R}^n)$, $k \geqslant 1$, istnieje $(k-1)$-forma $\theta \in \Omega^{k-1}(\mathbf{R}^n)$, taka że $e_n \lrcorner (\omega - d\theta) = 0$, tzn. taka, że $\omega - d\theta$ nie ma składników zawierających czynnik $dx^n$.

16. Jeśli dodatkowo zażądamy, by $e_n \lrcorner \theta = 0$, to dostaniemy równania $(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x^n}\theta_{i_1\ldots i_{k-1}} = \omega_{i_1\ldots i_{k-1}}$ dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n-1$.

17. Sprawdzić, że dana 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathcal{O})$ jest zamknięta oraz znaleźć funkcję $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = df$: (a) $\mathcal{O} = \{(x,y) : y > 0\}$, $\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{2x^2 - xy + y^2}$; (b) $\mathcal{O} = \{(x,y) : x > 0\}$, $\omega$ jak w (a); (c) $\mathcal{O} = \mathbf{R}^2$, $\omega = \frac{dx + \cos^2 x\,dy}{1 + y\sin 2x + y^2\cos^2 x}$; (d) $\mathcal{O} = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$, $\omega = \frac{yz\,dx - x\log x(z\,dy + 2y\,dz)}{xy^2z^3}$; (e) $\mathcal{O} = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\omega = \frac{(x^2+y^2)dz - z(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

17. (a) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-y}{\sqrt{7}\,y}$; (b) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-2y}{\sqrt{7}\,x}$; (c) $f = k\pi + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x + y)$ na $\left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[ \times \mathbf{R}$; (d) $f = \frac{\log x}{yz^2}$; (e) $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

18. Sprawdzić, że dana forma $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$ jest zamknięta oraz znaleźć formę $\theta \in \Omega^{k-1}(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = d\theta$: (a) $\omega = \frac{\partial a}{\partial z}dy \wedge dz + \frac{\partial b}{\partial z}dz \wedge dx - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) dx \wedge dy$; (b) $\omega = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$, gdy $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\}$; (c) $\omega = \frac{1}{xy^2z}(zt\,dx \wedge dy + tx\,dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dt + yz\,dt \wedge dx)$, $\mathcal{O} := \mathbf{R}^4_+$; (d) $\omega = \frac{1}{r}[(yf'_z - zf'_y)dy \wedge dz + (zf'_x - xf'_z)dz \wedge dx + (xf'_y - yf'_x)dx \wedge dy]$, gdy $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $\mathcal{O} = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$; (e) $\omega = \frac{f(xz,yz)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy)$, jeśli $\mathcal{O} = \{(x,y,z) : x^2+y^2 > 0, z > 0\}$ i $f \in \Omega^0(\mathbf{R}^2)$ — dana.

18. (a) $\theta = b\,dx - a\,dy$; (b) $\theta = \frac{z(y\,dx - x\,dy)}{r(x^2+y^2)}$; (c) $\theta = \frac{t}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}\right)$; (d) $\theta = r\,df$ lub $\theta = -f\,dr$; (e) $\theta = \frac{F(xz,yz)}{x^2+y^2}(y\,dx - x\,dy)$, gdzie $F \in \Omega^0(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$ spełnia warunek $xF'_x + yF'_y = \sqrt{x^2+y^2}\,f$; sprawdzić, że można wziąć $F(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\int_0^1 f(tx,ty)dt$.

19. (a) Dowieść, że na zbiorze $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ każda 2-forma jest zupełna, tzn. $\forall \omega \in \Omega^2(\mathcal{O}) : \exists \theta \in \Omega^1(\mathcal{O}) : d\theta = \omega$. (b) Dowieść, że na zbiorze $\mathcal{O} := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ każda $n$-forma jest zupełna: $\forall \omega \in \Omega^n(\mathcal{O}) : \exists \theta \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O}) : d\theta = \omega$.

19. (a) $\omega = f(\varrho,\varphi)d\varrho \wedge \frac{x\,dy - y\,dx}{\varrho^2}$, gdzie $f \in \Omega^0(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ (okresowa względem $\varphi$); można wziąć $\theta := F(\varrho,\varphi)\frac{x\,dy - y\,dx}{\varrho^2}$, gdzie $F(\varrho,\varphi) := \ldots$. (b) Niech $\sigma := |x|^{-n}\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \lrcorner dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, gdzie $|x| := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, wtedy $d\sigma = 0$. Jeśli $\omega = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ (dana), a $\theta = F(x)\,\sigma$ (szukana), to $\omega = d\theta \iff f(x) = |x|^{-n}\sum_k x_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$. Taki warunek spełnia np. funkcja $F$ określona wzorem $F(x) := \int_1^{|x|} t^{n-1} f(\frac{t}{|x|}x)\,dt$, bowiem $\left(\sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)|x| = |x|$ oraz $\left(\sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(\frac{t}{|x|}x) = 0$ (dodatnia jednorodność stopnia 1 i 0).

20. (a) Niech $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 > 0\}$ oraz $\omega := z\,dz \wedge \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$; dowieść, że nie istnieje forma $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$, taka że $\omega = dz \wedge \theta$ oraz $d\theta = 0$. (b) Dowieść, że dla każdej formy $\omega \in \Omega^2(\mathbf{R}^3)$, spełniającej warunki $d\omega = 0$, $dz \wedge \omega = 0$, istnieje forma $\theta \in \Omega^1(\mathbf{R}^3)$, taka że $\omega = dz \wedge \theta$ oraz $d\theta = 0$.

20. (a) Gdyby $\omega = dz \wedge \theta$, wtedy $0 = dz \wedge \left(\theta - z\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}\right)$, a zatem $\exists\, f \in \Omega^0(\Omega) : \theta - z\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = f\,dz$; różniczkując tę równość z warunku $d\theta = 0$ dostajemy $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \wedge dz = df \wedge dz$, a zatem $df = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + g\,dz$ dla pewnej $g \in \Omega^0(\mathcal{O})$. Całkując obie strony po dowolnym okręgu $C \imath \mathcal{O}$ leżącym w płaszczyźnie $z = \mathrm{const}$ otrzymujemy stąd $0 = \int_C df = \int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$, sprzeczność. (b) $\exists\, \sigma = \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz \in \Omega^1(\mathbf{R}^3) : d\sigma = \omega$ (ściągalność przestrzeni $\mathbf{R}^3$); warunek $0 = dz \wedge d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz$ daje $\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}$, więc $\exists\, f \in \Omega^0(\mathbf{R}^3) : \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sigma_2$ (np. $f(x,y,z) := \int_0^1 (\sigma_1(tx,ty,z)x + \sigma_2(tx,ty,z)y)dt$ ma tę własnośc). Mamy więc $\omega = d\sigma = dz \wedge \left[\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial y}\right) dy\right] = dz \wedge \left[\frac{\partial(\dot f - \sigma_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\dot f - \sigma_0)}{\partial y}dy\right] = dz \wedge d(\dot f - \sigma_0)$ (gdzie $\dot f := \frac{\partial f}{\partial z}$), Q.E.D.

21. Niech $\mathcal{O} \imath \mathbf{R}^n, \mathcal{O}' \imath \mathbf{R}^{n'}$ będą zbiorami otwartymi, a $\phi : [0,1] \times \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ — odwzorowaniem gładkim; oznaczmy $\phi_t := \phi(t,\cdot) : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ dla $t \in [0,1]$. Określmy operator liniowy $H : \Omega(\mathcal{O}) \to \Omega(\mathcal{O}')$ wzorem $H\omega := \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^*\omega\right) dt$. Wykazać, że dla $\omega \in \Omega(\mathcal{O})$ zachodzi tożsamość $\boxed{H(d\omega) + d(H\omega) = \phi_1^*\omega - \phi_0^*\omega}$.

21. $\phi^*\omega = \phi_t^*\omega + dt \wedge \sigma$, gdzie $\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi_t^*\omega$. Stąd, jeśli $d_t$ oznacza “różniczkę zewnętrzną przy ustalonym $t$”, to $d(\phi^*\omega) = d_t(\phi_t^*\omega) + dt \wedge \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) - dt \wedge d_t\sigma$, zatem $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner d(\phi^*\omega) = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) - d_t\sigma$. Zastosujmy operację $\int_0^1 \ldots dt$ do obu stron tej tożsamości zauważając, że $\int_0^1 (d_t\sigma)dt = d\int_0^1 \sigma\,dt = d\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner \phi^*\omega\right) dt = d(H\omega)$; dostajemy wtedy $H(d\omega) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)dt - d(H\omega)$, skąd wynika teza.

22. Sprawdzić, że forma $\omega := e^{x^2+y^2}(\operatorname{sh}(2xy)dx + \operatorname{ch}(2xy)dy) \in \Omega^1(\mathbf{R}^2)$ jest zamknięta; całkując ją po brzegu obszaru $\{(x,y) : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant p^2\}$ wyprowadzić dla $p \geqslant 0$ tożsamość $pe^{p^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-p^2\sin 2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^p e^{t^2}dt$.

22. Całkując po łuku okręgu zauważyć, że $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(p^2\sin 2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(p^2\sin 2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$ (zastosować podstawienie $\varphi \to \frac{1}{2}\pi - \varphi$).

23. Niech $\theta := \frac{e^x}{x^2+y^2}\big((x\sin y - y\cos y)dx + (x\cos y + y\sin y)dy\big) \in \Omega^1(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$. Całkując $\theta$ po okręgu $x^2 + y^2 = \varrho^2 = \mathrm{const}$ wyprowadzić następujące tożsamości: $\int_0^\pi e^{\varrho\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi)\,d\varphi = \pi$, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{ch}(\varrho\cos\varphi)\cos(\varrho\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

24. Niech $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,2k\pi) : k \in \mathbf{Z}\}$ oraz $\omega := \frac{1}{\operatorname{ch} x - \cos y}(\operatorname{sh} x\,dy - \sin y\,dx) \in \Omega^1(\mathcal{O})$. Sprawdzić, że $d\omega = 0$; dowieść, że jeśli $\gamma$ jest dowolną krzywą w $\mathcal{O}$, obiegającą jednokrotnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara punkt (0,0) oraz nie obiegającą żadnego innego punktu postaci $(0,2k\pi)$, to $\int_\gamma \omega = 2\pi$.

24. Wartość $\int_\gamma \omega$ zależy jedynie od klasy homotopii $\gamma$; biorąc $\gamma(t) := (\varrho\cos t, \varrho\sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, sprawdzić, że $\lim_{\varrho\to 0+}\gamma^*\omega = 2\cos t(\cos t + \sin t)dt$, a więc $\lim_{\varrho\to 0+}\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} 2\cos t(\cos t + \sin t)dt = 2\pi$. *Uwaga.* Sprawdzić, że $\omega = d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{sh} x\sin y}{\operatorname{ch} x\cos y - 1}\right)$ w obszarze $\tilde{\mathcal{O}} := \{(x,y) : \operatorname{ch} x\cos y \neq 1\} \imath \mathcal{O}$; nie wydaje się jednak, by łatwe było zastosowanie tego wyniku do wykazania tezy zadania.

**Zadania z Analizy Matematycznej 'C' Semestr 3. Seria 11. Listopad 1996**

1. Niech formy $\theta_1, \theta_2 \in V^*$ będą liniowo niezależne oraz niech $\omega \in \bigwedge^k(V^*)$, gdzie $k \geqslant 1$. Dowieść, że
$$\big(\omega \text{ ma postać } \omega = \theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_2 \wedge \omega_2 \text{ dla pewnych } \omega_1, \omega_2 \in \textstyle\bigwedge^{k-1}(V^*)\big) \iff \theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \omega = 0.$$

2. Niech formy $\theta_1, \theta_2 \in V^*$ będą liniowo niezależne oraz niech $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^l(V^*)$, $l \geqslant 1$. Dowieść, że
$$\theta_1 \wedge \omega_1 + \theta_2 \wedge \omega_2 = 0 \iff \big(\exists\, \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in \textstyle\bigwedge^{l-1}(V^*), \text{ takie że } \omega_1 = \theta_1 \wedge \sigma_1 + \theta_2 \wedge \sigma,\ \omega_2 = \theta_2 \wedge \sigma_2 + \theta_1 \wedge \sigma\big).$$

3. Znaleźć nową bazę $e^1, \ldots, e^n$, w której dana 2-forma ma postać kanoniczną: (a) $\omega := \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (j-i) f^i \wedge f^j$; (b) $\omega := f^1 \wedge f^2 + 2f^2 \wedge f^3 + 3f^3 \wedge f^4 + 2f^4 \wedge f^5 + f^5 \wedge f^1$; (c) $\omega := \sum_{i=1}^5 i f^i \wedge f^{i+1}$; (d) $\omega_n := \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} f^i \wedge f^j$.

4. Niech $(e^1, \ldots, e^n)$ i $(f^1, \ldots, f^n)$ — dwie bazy przestrzeni $V^*$. Udowodnić następujący odpowiednik "twierdzenia o inercji dla form kwadratowych": jeśli $\omega = e^1 \wedge e^2 + \ldots + e^{2k-1} \wedge e^{2k} = f^1 \wedge f^2 + \ldots + f^{2l-1} \wedge f^{2l}$, to $k = l$.

5. Niech $\omega \in \bigwedge^2(V^*)$. Dowieść, że $\big(\omega$ jest formą *prostą*, tzn. rozkładalną na iloczyn 1-form$\big) \iff \omega \wedge \omega = 0$.

6. Niech $\omega', \omega'' \in \bigwedge^2(V^*)$ będą formami prostymi. Dowieść, że $\big($forma $\omega = \omega' + \omega''$ jest prosta$\big) \iff \omega' \wedge \omega'' = 0$.

7. Niech $\dim V = 5$ i niech $e^1, \ldots, e^5$ będzie bazą $V^*$; oznaczmy dla wygody $e^{ijk} := e^i \wedge e^j \wedge e^k$ dla $i, j, k \in \overline{1,5}$. Wykazać, że poniższe 3-formy są proste, znajdując rozkład każdej z nich na iloczyn zewnętrzny 1-form:
$\omega = 3e^{134} - 3e^{135} + e^{145} - 6e^{234} + 6e^{235} - 2e^{245}$; $\omega' = 7e^{123} - 6e^{124} + e^{125} - 9e^{134} - 2e^{135} + 3e^{145} - 7e^{235} + 6e^{245} + 9e^{345}$.

8. Niech $\dim V = 5$ i niech $e^1, \ldots, e^5$ będzie bazą $V^*$. Wykazać, że 3-forma $\omega := \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 5} e^i \wedge e^j \wedge e^k$ jest rozkładalna (tzn. $\exists\, \theta \in \bigwedge^1(V^*),\ \sigma \in \bigwedge^2(V^*) : \omega = \theta \wedge \sigma$), lecz nie jest prosta. Znaleźć rozkład $\theta \wedge \sigma$ formy $\omega$.

9. Wyrazić we współrzędnych cylindrycznych $(\varrho, \varphi, z)$ i sferycznych $(r, \vartheta, \varphi)$ następujące formy różniczkowe na $\mathbf{R}^3$:
$\sigma_1 := x\,dy - y\,dx$; $\sigma_2 := \frac{xz\,dx + yz\,dy - \varrho^2\,dz}{\varrho}$; $\omega_1 := \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{r^3}$; $\omega_2 := \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy}{z}$.

10. Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\phi : \mathbf{R}^4_+ \to \mathbf{R}^3_+$, $\phi(p,q,r,s) := (pq, qr, rs)$ oraz $\omega := x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy \in \mathbf{\Phi}^2(\mathbf{R}^3_+)$.

11. Niech $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : x^2+y^2 > 0 \text{ lub } z > 0\} \subset \mathbf{R}^3$ — dopełnienie półprostej $\{x = y = 0, z \leqslant 0\}$. (a) Obliczyć $\phi^*\omega$, jeśli $\omega := \frac{1}{r^3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) \in \mathbf{\Phi}^2(\mathcal{O})$, $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ oraz $\phi(u,v,w) := (uw, vw, \frac{-u^2-v^2+w^2}{2})$. (b) Sprawdzić, że $\phi$ jest dyfeomorfizmem $\tilde{\mathcal{O}} := \{(u,v,w) : w > 0\}$ na $\mathcal{O}$; (c) Znaleźć formę $\tilde{\sigma} \in \mathbf{\Phi}^1(\tilde{\mathcal{O}})$, taką że $d\tilde{\sigma} = \phi^*\omega$, a następnie $\sigma \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O})$, taką że $\phi^*\sigma = \tilde{\sigma}$; sprawdzić, że $d\sigma = \omega$, a więc forma $\omega$ jest zupełna na $\mathcal{O}$.

12. Jaką postać musi mieć funkcja $f \in \mathbf{\Phi}^0(\mathbf{R}^4)$, aby forma $f(dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dt + dt \wedge dx)$ była zamknięta?

13. Niech $n \geqslant 5$, $\omega := h \displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k \in \mathbf{\Phi}^3(\mathbf{R}^n)$, gdzie $h \in \mathbf{\Phi}^0(\mathbf{R}^n)$. (a) Znaleźć warunek na funkcję $h$, równoważny warunkowi $d\omega = 0$. (b) Mając daną $h$, taką że $d\omega = 0$, znaleźć formę $\theta \in \mathbf{\Phi}^2(\mathbf{R}^n)$, taką że $d\theta = \omega$.

14. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ będzie otwartym *podzbiorem stożkowym*, tzn. spełniającym warunek $(x \in \mathcal{O}, t > 0) \Rightarrow t \cdot x \in \mathcal{O}$. Sprawdzić, że jeśli $\omega := x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ oraz $f \in \mathbf{\Phi}^0(\mathcal{O})$, to $\omega \parallel d\big(f(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)\big)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f$ jest dodatnio jednorodna stopnia -2. Jaki warunek na $f$ daje $d\big(f(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)\big) = 0$?

15. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i wypukłym. (a) Dowieść, że jeśli $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\,dx^i \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O})$, $d\omega = 0$ oraz $\omega_n = 0$, to współczynniki $\omega_i$ nie zależą od współrzędnej $x^n$. (b) Dowieść, że jeśli $\omega = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \omega_{ij}\,dx^i \wedge dx^j$, $d\omega = 0$ oraz $\omega_{in} = 0$ dla $1 \leqslant i < n$, to każdy ze współczynników $\omega_{ij}$ nie zależy od współrzędnej $x^n$. (c) Sformułować i udowodnić uogólnienie tych rezultatów na przypadek formy dowolnego stopnia.

16. Dowieść, że dla każdej $k$-formy $\omega \in \mathbf{\Phi}^k(\mathbf{R}^n)$, $k \geqslant 1$, istnieje $(k-1)$-forma $\theta \in \mathbf{\Phi}^{k-1}(\mathbf{R}^n)$, taka że $e_n \lrcorner (\omega - d\theta) = 0$, tzn. taka, że $\omega - d\theta$ nie ma składników zawierających czynnik $dx^n$.

17. Sprawdzić, że dana 1-forma $\omega \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O})$ jest zamknięta oraz znaleźć funkcję $f \in \mathbf{\Phi}^0(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = df$:
(a) $\mathcal{O} = \{(x,y) : y > 0\}$, $\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{2x^2 - xy + y^2}$; (b) $\mathcal{O} = \{(x,y) : x > 0\}$, $\omega$ jak w (a); (c) $\mathcal{O} = \mathbf{R}^2$, $\omega = \frac{dx + \cos^2 x\,dy}{1 + y \sin 2x + y^2 \cos^2 x}$; (d) $\mathcal{O} = \{(x,y,z) : x,y,z > 0\}$, $\omega = \frac{yz\,dx - x \log x(z\,dy + 2y\,dz)}{xy^2z^3}$; (e) $\mathcal{O} = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\omega = \frac{(x^2+y^2)dz - z(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

18. Sprawdzić, że dana forma $\omega \in \mathbf{\Phi}^k(\mathcal{O})$ jest zamknięta oraz znaleźć formę $\theta \in \mathbf{\Phi}^{k-1}(\mathcal{O})$ taką, że $\omega = d\theta$:
(a) $\omega = \frac{\partial a}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial b}{\partial z} dz \wedge dx - \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y}\right) dx \wedge dy$; (b) $\omega = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy)$, gdy $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : x^2+y^2 > 0\}$; (c) $\omega = \frac{1}{xy^2z}(zt\,dx \wedge dy + tx\,dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dt + yz\,dt \wedge dx)$, $\mathcal{O} := \mathbf{R}^4_+$; (d) $\omega = \frac{1}{r}[(yf'_z - zf'_y)dy \wedge dz + (zf'_x - xf'_z)dz \wedge dx + (xf'_y - yf'_x)dx \wedge dy]$, gdy $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $\mathcal{O} = \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$; (e) $\omega = \frac{f(xz,yz)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx - z\,dx \wedge dy)$, jeśli $\mathcal{O} = \{(x,y,z) : x^2+y^2 > 0, z > 0\}$ i $f \in \mathbf{\Phi}^0(\mathbf{R}^2)$ — dana.

19. (a) Dowieść, że na zbiorze $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ każda 2-forma jest zupełna, tzn. $\forall \omega \in \mathbf{\Phi}^2(\mathcal{O}) : \exists \theta \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O}) : d\theta = \omega$.
(b) Dowieść, że na zbiorze $\mathcal{O} := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ każda $n$-forma jest zupełna: $\forall \omega \in \mathbf{\Phi}^n(\mathcal{O}) : \exists \theta \in \mathbf{\Phi}^{n-1}(\mathcal{O}) : d\theta = \omega$.

20. (a) Niech $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : x^2+y^2>0\}$ oraz $\omega := z\,dz \wedge \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$; dowieść, że nie istnieje forma $\theta \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O})$, taka że $\omega = dz\wedge\theta$ oraz $d\theta = 0$. (b) Dowieść, że dla każdej formy $\omega \in \mathbf{\Phi}^2(\mathbf{R}^3)$, spełniającej warunki $d\omega = 0,\ dz\wedge\omega = 0$, istnieje forma $\theta \in \mathbf{\Phi}^1(\mathbf{R}^3)$, taka że $\omega = dz\wedge\theta$ oraz $d\theta = 0$.

21. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^n, \mathcal{O}' \subset \mathbf{R}^{n'}$ będą zbiorami otwartymi, a $\phi : [0,1]\times\mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ — odwzorowaniem gładkim; oznaczmy $\phi_t := \phi(t,\cdot) : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ dla $t\in[0,1]$. Określmy operator liniowy $H : \mathbf{\Phi}(\mathcal{O}) \to \mathbf{\Phi}(\mathcal{O}')$ wzorem $H\omega := \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \phi^*\omega\right) dt$. Wykazać, że dla $\omega \in \mathbf{\Phi}(\mathcal{O})$ zachodzi tożsamość $\boxed{H(d\omega) + d(H\omega) = \phi_1^*\omega - \phi_0^*\omega}$.

22. Sprawdzić, że forma $\omega := e^{x^2+y^2}\big(\mathrm{sh}(2xy)dx + \mathrm{ch}(2xy)dy\big) \in \mathbf{\Phi}^1(\mathbf{R}^2)$ jest zamknięta; całkując ją po brzegu obszaru $\{(x,y) : x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant p^2\}$ wyprowadzić dla $p\geqslant 0$ tożsamość $\quad pe^{p^2}\int_0^{\frac12\pi} e^{-p^2\sin 2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^p e^{t^2}dt$.

23. Niech $\theta := \frac{e^x}{x^2+y^2}\big((x\sin y - y\cos y)dx + (x\cos y + y\sin y)dy\big) \in \mathbf{\Phi}^1(\mathbf{R}^2\backslash 0)$. Całkując $\theta$ po okręgu $x^2+y^2 = \varrho^2 = \mathrm{const}$ wyprowadzić następujące tożsamości: $\quad \int_0^\pi e^{\varrho\cos\varphi}\cos(\varrho\sin\varphi)\,d\varphi = \pi, \qquad \int_0^{\frac12\pi}\mathrm{ch}(\varrho\cos\varphi)\cos(\varrho\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2}$.

24. Niech $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2\backslash\{(0,2k\pi) : k\in\mathbf{Z}\}$ oraz $\omega := \frac{1}{\mathrm{ch}\,x - \cos y}(\mathrm{sh}\,x\,dy - \sin y\,dx) \in \mathbf{\Phi}^1(\mathcal{O})$. Sprawdzić, że $d\omega = 0$; dowieść, że jeśli $\gamma$ jest dowolną krzywą w $\mathcal{O}$, obiegającą jednokrotnie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara punkt (0,0) oraz nie obiegającą żadnego innego punktu postaci $(0,2k\pi)$, to $\int_\gamma \omega = 2\pi$.

---

3. (a) $e^1\wedge e^2$, gdzie $e^1 = \sum_{i=1}^n f^i$, $e^2 = \sum_{j=1}^n j\cdot f^j$; (b) $\omega = (f^1-2f^3)\wedge(f^2-f^5) + (f^3-f^4)\wedge(3f^3-2f^5)$; (d) $\omega_n = \omega_{n-2} + (f^{n-1}+\theta_{n-2})\wedge(f^n-\theta_{n-2})$, gdzie $\theta_{n-2} := \sum_{i=1}^{n-2} f^i$; stąd, przez indukcję, $\omega_{2k}$ i $\omega_{2k+1}$ sprowadzają się do postaci $\sum_{i=1}^k e^{2i-1}\wedge e^{2i}$.

7. Zastos. “kryterium podzieln. przez 1-formę”; $\omega = (e^1-2e^2)\wedge(3e^3-e^4)\wedge(e^4-e^5)$; $\omega' = (e^1+2e^2+3e^3)\wedge(e^1-e^5)\wedge(e^2-2e^3+3e^4)$.

8. Znaleźć $\theta\neq 0$ z warunku $\theta\wedge\omega = 0$, następnie wyrazić $\omega$ w bazie $\theta^1 = \theta, \theta^2 = e^2, \ldots, \theta^5 = e^5$. *Odp.* $\theta = \sum_i e^i$, $\sigma = \sum_{2\leqslant j<k\leqslant 5} e^j\wedge e^k$.

9. $\sigma_1 = \varrho^2 d\varphi = r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi$; $\sigma_2 = z\,d\varrho - \varrho\,dz = r^2 d\vartheta$; $\omega_1 = \frac{\varrho(z\,d\varrho - \varrho\,dz)\wedge d\varphi}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} = \sin\vartheta\,d\vartheta\wedge d\varphi$; $\omega_2 = \frac{\varrho\,d\varphi\wedge d(\varrho z)}{\varrho} = \mathrm{tg}\,\vartheta\,d\varphi\wedge d(r^2\sin\vartheta\cos\vartheta)$.

10. $\omega = xyz\,d\left(\log\frac{x}{y}\right)\wedge d\left(\log\frac{y}{z}\right)$, skąd wynika $\phi^*\omega = pq^2r^2s(\frac{dp}{p}-\frac{dr}{r})\wedge(\frac{dq}{q}-\frac{ds}{s}) = qr(rs\,dp\wedge dq + sp\,dq\wedge dr + pq\,dr\wedge ds + qr\,ds\wedge dp)$.

11. (a) $\phi^*r = \frac{u^2+v^2+w^2}{2}$, $\phi^*(x\,dy - y\,dx) = w^2(u\,dv - v\,du)$, co łatwo daje $\phi^*\omega = \frac{4w}{(u^2+v^2+w^2)^2}(u\,dv\wedge dw + v\,dw\wedge du + w\,du\wedge dv)$. (b) Skoro $r+z>0$ na $\mathcal{O}$, to rozwiązując względem $u,v,w>0$ równania $\phi(u,v,w) = (x,y,z)$ dostajemy $\phi^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{\sqrt{r+z}}, \frac{y}{\sqrt{r+z}}, \sqrt{r+z})$; (c) Można wziąc np. $\tilde\sigma := \frac{2}{u^2+v^2+w^2}(u\,dv - v\,du)$; ponieważ $\phi^*(r+z) = w^2$, to $\tilde\sigma = \frac{1}{w^2}\phi^*\left(\frac{x\,dy-y\,dx}{r}\right) = \phi^*\sigma$, gdzie $\sigma := \frac{x\,dy-y\,dx}{r(r+z)}$.

12. $\omega = f\,d(x-z)\wedge d(y-t)$; wprowadzając nowe współrzędne $x-z, y-t, x+z, y+t$ dostajemy stąd *Odp.* $f = F(x-z,y-t)$, $F\in\Omega^0(\mathbf{R}^2)$.

13. (a) $\frac{\partial h}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial h}{\partial x_n}$, tzn. $\exists f\in\Omega^0(\mathbf{R}) : h = f(x_1+\ldots+x_n)$; (b) $\theta = F(x_1+\ldots x_n)\sum_{j<k} dx_j\wedge dx_k$, gdzie $F(t) := \int_0^t f(t)dt$.

16. Jeśli dodatkowo zażądamy, by $e_n\lrcorner\,\theta = 0$, to dostaniemy równania $(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial x^n}\theta_{i_1\ldots i_{k-1}} = \omega_{i_1\ldots i_{k-1}}$ dla $1\leqslant i_1<\ldots<i_{k-1}\leqslant n-1$.

17. (a) $\frac{2}{\sqrt7}\,\mathrm{arctg}\,\frac{4x-y}{\sqrt7\,y}$; (b) $\frac{2}{\sqrt7}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2y}{\sqrt7\,x}$; (c) $f = k\pi + \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x + y)$ na $\left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[\times\mathbf{R}$; (d) $f = \frac{\log x}{yz^2}$; (e) $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

18. (a) $\theta = b\,dx - a\,dy$; (b) $\theta = \frac{z(y\,dx - x\,dy)}{r(x^2+y^2)}$; (c) $\theta = \frac{t}{y}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}\right)$; (d) $\theta = r\,df$ lub $\theta = -f\,dr$; (e) $\theta = \frac{F(xz,yz)}{x^2+y^2}(y\,dx - x\,dy)$, gdzie $F\in\Omega^0(\mathbf{R}^2\setminus 0)$ spełnia warunek $xF'_x + yF'_y = \sqrt{x^2+y^2}f$; sprawdzić, że można wziąć $F(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\int_0^1 f(tx,ty)dt$.

19. (a) $\omega = f(\varrho,\varphi)d\varrho\wedge\frac{x\,dy-y\,dx}{\varrho^2}$, gdzie $f\in\Omega^0(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ (okresowa względem $\varphi$); można wziąć $\theta := F(\varrho,\varphi)\frac{x\,dy-y\,dx}{\varrho^2}$, gdzie $F(\varrho,\varphi) := \ldots.$ (b) Niech $\sigma := |x|^{-n}\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\lrcorner\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, gdzie $|x| := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac12}$, wtedy $d\sigma = 0$. Jeśli $\omega = f(x)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ (dana), a $\theta = F(x)\,\sigma$ (szukana), to $\omega = d\theta \iff f(x) = |x|^{-n}\sum_k x_k\frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$. Taki warunek spełnia np. funkcja $F$ określona wzorem $F(x) := \int_1^{|x|} t^{n-1}f(\frac{t}{|x|}x)\,dt$, bowiem $\left(\sum_k x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)|x| = |x|$ oraz $\left(\sum_k x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)f(\frac{t}{|x|}x) = 0$ (dodatnia jednorodność stopnia 1 i 0).

20. (a) Gdyby $\omega = dz\wedge\theta$, wtedy $0 = dz\wedge\left(\theta - z\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\right)$, a zatem $\exists f\in\Omega^0(\Omega) : \theta - z\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = f\,dz$; różniczkując tę równość z warunku $d\theta = 0$ dostajemy $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}\wedge dz = df\wedge dz$, a zatem $df = \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} + g\,dz$ dla pewnej $g\in\Omega^0(\mathcal{O})$. Całkując obie strony po dowolnym okręgu $C\subset\mathcal{O}$ leżącym w płaszczyźnie $z = \mathrm{const}$ otrzymujemy stąd $0 = \int_C df = \int_C\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi$, sprzeczność. (b) $\exists\,\sigma = \sigma_1 dx + \sigma_2 dy + \sigma_3 dz \in \Omega^1(\mathbf{R}^3) : d\sigma = \omega$ (ściągalność przestrzeni $\mathbf{R}^3$); warunek $0 = dz\wedge d\sigma = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)dx\wedge dy\wedge dz$ daje $\frac{\partial\sigma_1}{\partial y} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}$, więc $\exists f\in\Omega^0(\mathbf{R}^3) : \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sigma_2$ (np. $f(x,y,z) := \int_0^1(\sigma_1(tx,ty,z)x + \sigma_2(tx,ty,z)y)dt$ ma tę własnośc). Mamy więc $\omega = d\sigma = dz\wedge\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial z} - \frac{\partial\sigma_0}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial z} - \frac{\partial\sigma_0}{\partial y}\right)dy\right] = dz\wedge\left[\frac{\partial(\dot f - \sigma_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\dot f - \sigma_0)}{\partial y}dy\right] = dz\wedge d(\dot f - \sigma_0)$ (gdzie $\dot f := \frac{\partial f}{\partial z}$), Q.E.D.

21. $\phi^*\omega = \phi_t^*\omega + dt\wedge\sigma$, gdzie $\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,\phi_t^*\omega$. Stąd, jeśli $d_t$ oznacza “różniczkę zewnętrzną przy ustalonym $t$”, to $d(\phi^*\omega) = d_t(\phi_t^*\omega) + dt\wedge\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) - dt\wedge d_t\sigma$, zatem $\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,d(\phi^*\omega) = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega) - d_t\sigma$. Zastosujmy operację $\int_0^1 \ldots dt$ do obu stron tej tożsamości zauważając, że $\int_0^1(d_t\sigma)dt = d\int_0^1\sigma\,dt = d\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,\phi^*\omega\right)dt = d(H\omega)$; dostajemy wtedy $H(d\omega) = \int_0^1\frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)dt - d(H\omega)$, skąd wynika teza.

22. Całkując po łuku okręgu zauważyć, że $\int_0^{\pi/2}\mathrm{sh}(p^2\sin 2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\mathrm{sh}(p^2\sin 2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$ (zastosować podstawienie $\varphi\to\frac{\pi}{2}-\varphi$).

24. Wartość $\int_\gamma \omega$ zależy jedynie od klasy homotopii $\gamma$; biorąc $\gamma(t) := (\varrho\cos t, \varrho\sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, sprawdzić, że $\lim_{\varrho\to 0+} \gamma^*\omega = 2\cos t(\cos t + \sin t)dt$, a więc $\lim_{\varrho\to 0+} \int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} 2\cos t(\cos t + \sin t)dt = 2\pi$. *Uwaga.* Łatwo sprawdzić, że $\omega = d\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sh} x \sin y}{\operatorname{ch} x \cos y - 1}\right)$ w obszarze $\tilde{\mathcal{O}} := \{(x,y) : \operatorname{ch} x \cos y \neq 1\} \subset \mathcal{O}$; nie wydaje się jednak, by ten wzór mógł znacząco uprościć dowód tezy zadania.

**Zadania z Analizy Matematycznej (C)** **Semestr 3.** **Seria 2.** **Listopad 1993**

1. Obliczyć pole obszaru $K\subset\mathbf{R}^2$: (a) ograniczonego cykloidą $(x,y)=(t-\sin t, 1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$, i prostą $y=0$; (b) ograniczonego krzywą $(x,y)=(\sin 2\varphi, \sin 3\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$; (c) $K=\{(x,y):(x^2+y^2)^2\leqslant a(x^3-3xy^2)\}$; (d) $K=\{(x,y): ax^2-bxy+cy^4\leqslant 0;\ x,y\geqslant 0\}$; (e) $K=\{(x,y): ax^3-bx^2y+cy^4\leqslant 0;\ x,y\geqslant 0\}$ $\quad(a,b,c>0)$.

2. Obliczyć całki: (a) $\int_L e^x\big((1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy\big)$, gdzie $L$ jest brzegiem obszaru $\{0\leqslant y\leqslant\sin x,\ 0\leqslant x\leqslant\pi\}$; (b) $\int_L(\vec{A}\,d\vec{l})$, jeśli $\vec{A}=xz[6z-3xy,2x,3x]$, a $L$ jest brzegiem powierzchni $S=\{z=xy,\ x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 1\}$ zorientowanym "do góry"; (c) $\int_S(\vec{A}\,d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A}=\frac{[x,\,y,\,z]}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $S=\{\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x^2+y^2+z^2\geqslant b^2,\ z\geqslant 0\}$ oraz $0<a<b<c$ są zadane; (d) $\int_S(\vec{A}\,d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A}=[xz,x^2y,y^2z]$, a $S=\partial\{0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\leqslant 1; x,y\geqslant 0\}$; (e) $\int_S(\vec{A}\,d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A}=z\big[e^x\sin y, e^x\cos y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big]$, a $S=S_1\cup S_2$ składa się z dwoch półsfer, zawartych w brzegu bryły $\{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0\}$. W punktach (a), (c), (d) i (e) przyjmujemy orientację zewnętrzną brzegu.

3. Niech $S\subset\mathbf{R}^3$ będzie powierzchnią zawartą w sferze $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$, a $\omega:=\frac{x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Dowieść, że przy stosownej orientacji $S$ wartość $\frac{1}{3}\int_S\omega$ jest objętością bryły $[0,1]S:=\{r\vec{p}: r\in[0,1], \vec{p}\in S\}\subset\mathbf{R}^3$.

4. (a) Niech $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$; wykazć, że jeśli $\theta\in\Omega^1(\mathcal{O})$, $d\theta=0$ oraz $\int_{x_1^2+x_2^2=1}\theta=0$, to $\theta$ jest formą zupełną. (b) Niech $\mathcal{O}_0:=\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{R}e_3$; wykazać, że jeśli $\theta\in\Omega^1(\mathcal{O}_0)$, $d\theta=0$ i $\int_{x_1^2+x_2^2=1,x_3=0}\theta=0$, to $\theta$ jest formą zupełną.

5. Niech $S:=\{x\in\mathbf{R}^3:\|x\|=1\}\subset\mathcal{O}:=\mathbf{R}^3\setminus 0$. Dowieść, że jeśli $\omega\in\Omega^2(\mathcal{O})$, $d\omega=0$ i $\int_S\omega=0$, to $\omega$ jest zupełna. *Wskazówka.* Wykorzystać ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_+=\mathbf{R}^3\setminus(\mathbf{R}_-)e_3$, $\mathcal{O}_-=\mathbf{R}^3\setminus(\mathbf{R}_+)e_3$ oraz wynik zadania 4(b).

6. Dowieść, że: (a) obszar $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{R}e_3$ nie jest ściągalny; (b) istnieje odwzorowanie gładkie $\phi:[0,1]\times\mathcal{O}\to\mathcal{O}$, takie że $\phi_1=\mathrm{id}_{\mathcal{O}}$ oraz $\phi_0(\mathcal{O})$ jest krzywą; (c) dla $k\in\{2,3\}$ każda zamknięta $k$-forma $\omega\in\Omega^k(\mathcal{O})$ jest zupełna.

7. Korzystając z poprzednich zadań wykazać, że przestrzenie kohomologii $H^1(\mathbf{R}^2\setminus 0)$, $H^1(\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{R}e_3)$ i $H^2(\mathbf{R}^3\setminus 0)$ są 1-wymiarowe, natomiast $H^2(\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{R}e_3)$ i $H^3(\mathbf{R}^3\setminus\mathbf{R}e_3)$ — zerowe.

8. Niech $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^n\setminus 0$ oraz $\omega:=\sum_{r=1}^n(-1)^{r-1}x_r\,dx_1\wedge\ldots\widehat{dx_r}\ldots\wedge dx_n\in\Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. (a) Wyprowadzić tożsamość $\omega=x_1^n d\big(\frac{x_2}{x_1}\big)\wedge\ldots\wedge d\big(\frac{x_n}{x_1}\big)$. (b) Dowieść, że $d(f\cdot\omega)=0 \iff \big(f$ jest dodatnio jednorodna stopnia $-n\big)$. (c) Znaleźć formę pierwotną dla $f\cdot\omega$ na $\mathcal{O}^+:=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1>0\}$, jeśli $f(x)=x_1^{-n}g\big(\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\big)$ dla $x\in\mathcal{O}^+$.

9. Obliczyć $\theta:=\int_0^1\big(\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,\phi^*\omega\big)\,dt$, sprawdzić że $d\theta=\omega$, jeżeli $\omega:=z^{-3}(x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy)\in\Omega^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}:=\{(x,y,z): z>0\}$ oraz $\phi:[0,1]\times\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ dane jest wzorem: (a) $\phi(t,x,y,z):=(tx,ty,1-t+tz)$; (b) $\phi(t,x,y,z):=(tx,ty,z^t)$. (patrz zadanie 21. z poprzedniej serii)

10. (a) Niech $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^2\setminus\{(-1,0),(1,0)\}$; podać przykład formy $\theta\in\Omega^1(\mathcal{O})$ zamkniętej, niezupełnej i symetrycznej (tzn. $S^*\theta=\theta$) względem odbicia $S(x,z):=(-x,z)$. (b) Niech $\hat{\mathcal{O}}:=\mathbf{R}^3\setminus C$, gdzie $C:=\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$; podać przykład zamkniętej, lecz niezupełnej formy $\hat{\theta}\in\Omega^1(\hat{\mathcal{O}})$.

11. Niech $n\geqslant 2$, $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, $\omega:=\frac{1}{\|x\|^n}(x_1dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n+\mathrm{cycl})=\frac{1}{\|x\|^n}\sum_{k=1}^n x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\lrcorner\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n\in\Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. Dowieść, że: (a) $\big(\sigma\in\Omega^{n-1}(\mathcal{O})$ jest obrotowo niezmiennicza: $\forall F\in\mathrm{End}(\mathbf{R}^n): F^\dagger F=\mathbf{1}, \det F=1\Rightarrow F^*\sigma=\sigma\big)$ $\iff\big(\sigma$ ma postać $\sigma=f(\|x\|)\,\omega,\ f\in\Omega^0(\mathbf{R}_+)\big)$. (b) Jeśli $\sigma=f(\|x\|)\,\omega$, $f\in\Omega^0(\mathbf{R}_+)$, to $\big(\sigma$ jest niezmiennicza względem wszystkich jednokładności $J_c:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$, $J_c(x):=c\cdot x$, $c>0\big)\iff f=\mathrm{const}\iff\big(\sigma$ jest zamknięta$\big)$.

12. Niech $\vec{R}$ będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^3\setminus\{0\}$, tzn. $\vec{R}(x):=\vec{x}$. Sprawdzić, że jeśli pole wektorowe $\vec{A}$ na $\mathcal{O}$ jest dodatnio jednorodne stopnia $\alpha\in\mathbf{R}$, tzn. $\vec{A}(t\,x)=t^\alpha\vec{A}(x)$ dla $x\in\mathcal{O}$ oraz $t>0$, to zachodzą wzory:
$$(\alpha+1)\vec{A}=\mathrm{grad}(\vec{A}|\vec{R})+(\mathrm{rot}\vec{A})\times\vec{R},\qquad(\alpha+2)\vec{A}=\mathrm{rot}(\vec{A}\times\vec{R})+(\mathrm{div}\vec{A})\vec{R}.$$
W konsekwencji $\vec{A}$ ma na $\mathcal{O}$ potencjał skalarny (wektorowy), jeśli $\mathrm{rot}\vec{A}=0$ i $\alpha\neq-1$ (jeśli $\mathrm{div}\vec{A}=0$ i $\alpha\neq-2$).

13. Niech $R$ będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O}:=\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, tzn. $R(x)=x$. Dowieść, że jeśli $\omega\in\Omega^k(\mathcal{O})$ spełnia warunek $\omega(t\,x)=t^\alpha\,\omega(x)$ dla $x\in\mathcal{O}$, $t>0$, tzn. współczynniki $\omega$ są funkcjami dodatnio jednorodnymi stopnia $\alpha$, to $\boxed{(\alpha+k)\omega=d(R\lrcorner\,\omega)+R\lrcorner\,d\omega}$. Sprawdzić, że stanowi to uogólnienie wyniku poprzedniego zadania.

14. Stosując tw. Stokesa dowieść, ze jeśli $u$ i $v$ są funkcjami gładkimi na otoczeniu zwartego obszaru $K\subset\mathbf{R}^2$, to zachodzą następujące *tożsamości Greena*: $\int_K\big(u\Delta v+(\nabla v|\nabla u)\big)dx\,dy=\int_{\partial K}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}ds:=\int_{\partial K}u\big(\frac{\partial v}{\partial x}dy-\frac{\partial v}{\partial y}dx\big)$, $\int_K(u\Delta v-v\Delta u)dx\,dy=\int_{\partial K}\big(u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\big)ds$, $\quad\int_K\Delta u\,dx\,dy=\int_{\partial K}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}ds$. $\quad$ Wyjaśnić sens tradycyjnego symbolu $\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}$.

15. Wyprowadzić wzory: $\int_L(\vec{A}\,d\vec{l})=\int_L(\vec{A}|\boldsymbol{t})ds_1$, $\int_S(\vec{A}\,d\vec{\sigma})=\int_S(\vec{A}|\boldsymbol{n})ds_2$, wyrażające całki z form różniczkowych w $\mathbf{R}^3$ po krzywych ($\dim L=1$) i powierzchniach ($\dim S=2$) przez całki krzywoliniowe i powierzchniowe; $\boldsymbol{t}$ oznacza pole wersorów stycznych na $L$, a $\boldsymbol{n}$ — pole wersorów normalnych na $S$; orientacje $L$ i $S$ określone są przez $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{n}$.

16. Obliczyć całki $\displaystyle\int_S f ds_2$ i $\displaystyle\int_S \frac{1}{f} ds_2$, jeśli $S$ jest stożkiem $\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,\ z \in [0,c]\}$, a $f := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + z^2}$.

17. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3 \setminus 0$ (otwarty), $f \in \Omega^0(\mathcal{O})$; oznaczmy $f'_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $r : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $r(x) := \|x\|$. Dowieść, że: (a) Jeśli $f$ znika na brzegu zwartego obszaru $K \subset \mathcal{O}$, to $\int_K r^{-3}(x_1 f'_{,1} + x_2 f'_{,2} + x_3 f'_{,3}) d^3x = 0$; (b) Jeśli $f$ znika na brzegu zwartej powierzchni $S \subset \mathcal{O}$, a $\boldsymbol{n} : S \to \mathbf{R}^3$ jest polem jednostkowych wektorów normalnych na $S$, to $\displaystyle\int_S \frac{1}{r} \begin{vmatrix} f'_{,1} & x_1 & \boldsymbol{n}_1 \\ f'_{,2} & x_2 & \boldsymbol{n}_2 \\ f'_{,3} & x_3 & \boldsymbol{n}_3 \end{vmatrix} ds_2 = 0$.

1. (a) $|K| = 3\pi$; (b) $|K| = \frac{12}{5}$; (c) $|K| = \frac{\pi}{4}a^2$ (parametryzować kątem $\varphi$); (d) $\frac{1}{60}a^{-3}b^5c^{-2}$; (e) $|K| = \frac{1}{210}a^{-5}b^7c^{-2}$.

2. Zastosować twierdzenie Stokesa. *Odp.* (a) $I = -\frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $2\pi\left(1 - \frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\right)$; (d) $\frac{\pi}{8}$; (e) $\frac{3}{2}\pi$.

3. $r^2 dr \wedge \omega = dx \wedge dy \wedge dz$, więc sprowadzając całkę wielokrotną do całki iterowanej mamy $|[0,1]S| = \int_{[0,1]S} r^2 dr \wedge \omega = \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_S \omega$.

4. (a) Ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_\pm := \mathcal{O} \setminus (\mathbf{R}_\mp)e_2$ daje $\exists f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm) : \theta = df_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$; różnica $f := f_+ - f_-$ jest stała na obu spójnych składowych $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, tzn. na półpłaszczyznach $\{x_1 > 0\}$ i $\{x_1 < 0\}$. Dzieląc $\gamma$ na dwa łuki o końcach $p = (1,0)$ i $q = (-1,0)$ dostajemy $0 = \int_\gamma \theta = \big(f_+(q) - f_+(p)\big) + \big(f_-(p) - f_-(q)\big) = f(q) - f(p)$, więc obie stałe są równe: $f_+ = f_- + c$. Stąd $f_+$ ma przedłużenie do gładkiej funkcji na $\mathcal{O}$, której różniczką jest $\theta$. (b) Dowód identyczny; jako $\mathcal{O}_\pm$ bierzemy dopełnienia stosownych półpłaszczyzn w $\mathbf{R}^3$.

5. $\big($ściągalność $\mathcal{O}_\pm\big) \Rightarrow \exists \theta_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm) : \omega = d\theta_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$. Niech $S_\pm$ będą górną i dolną półsferą, zaś $\gamma$ — okręgiem $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, stanowiącym wspólny brzeg $S_\pm$. Z tw. Stokesa $0 = \int_S \omega = \int_{S_+} d\theta_+ + \int_{S_-} d\theta_- = \int_\gamma \theta_+ - \int_\gamma \theta_- = \int_\gamma (\theta_+ - \theta_-)$; zarazem $\theta_0 := \theta_+ - \theta_-$ na $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$ jest zamknięta (bo $d\theta_\pm = \omega$), więc $\exists f \in \Omega^0(\mathcal{O}_0) : df = \theta_+ - \theta_-$ na $\mathcal{O}_0$ (zadanie 4(b)). Przedstawmy $f$ w postaci $f = f_+ - f_-$, $f_\pm \in \Omega^0(\mathcal{O}_\pm)$, np. biorąc $f_+ = h\left(\frac{x_3}{\|x\|}\right) \cdot f$, gdzie $h \in \Omega^0(\mathbf{R})$ jest taka, że $h(t) = \begin{cases} 1, & t < -1/2 \\ 0, & t > 1/2 \end{cases}$. Wtedy $\theta_\pm - df_\pm \in \Omega^1(\mathcal{O}_\pm)$ oraz $\theta_+ - df_+ = \theta_- - f_-$ na $\mathcal{O}_+ \cap \mathcal{O}_-$, więc $\theta_\pm - df_\pm$ sklejają się do jednej gładkiej formy $\theta$ na $\mathcal{O} = \mathcal{O}_+ \cup \mathcal{O}_-$; jest jasne, że $d\theta = \omega$.

9. (a) $\phi^*\omega = (1 - t + tz)^3[t^2(x\,dy - y\,dx) \wedge (t\,dz + (z-1)dt) + (1 - t + tz)(t^2 dx \wedge dy + tx\,dt \wedge dy + ty\,dx \wedge dt)]$, więc $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \phi^*\omega = \frac{t}{(1-t+tz)^3}(x\,dy - y\,dx)$; skoro $\int_0^1 \frac{t}{(1-t+tz)^3} = \left\| \begin{smallmatrix} u=1-t+tz \\ t=(u-1)/(z-1) \end{smallmatrix} \right\| = \frac{1}{(z-1)^2} \int_1^z \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right) du = \frac{1}{2z^2}$, to $\theta = \frac{1}{2z^2}(x\,dy - y\,dx)$.
(b) $\phi^*\omega = z^{-2t} t(t\log z - 1) dt \wedge (y\,dx - x\,dy) + z^{-2t} t^2 dx \wedge dy + z^{-2z-1} t^3 (x\,dy - y\,dx) \wedge dz$, więc $\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \phi^*\omega = z^{-2t} t(t\log z - 1)(y\,dx - x\,dy)$; skoro $\int_0^1 z^{-2t} t(t\log z - 1)dt == \left\|{}^{u = t\log z}\right\| = \log^{-2} z \int_0^{\log z} u(u-1)e^{-2u} du = -\frac{1}{2}\log^{-2} z \left[u^2 e^{-2u}\right]_0^{\log z} = -\frac{1}{2}z^{-2}$, to $\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{2z^2}$.

10. (a) Np. $\theta := \frac{1}{2}(\omega + S^*\omega)$, gdzie $\omega := \frac{z\,dx - (x-1)dz}{(x-1)^2 + z^2}$; niezupełność $\theta$ wynika stąd, że $\int_\gamma \theta \neq 0$, gdy $\gamma$ jest małym okręgiem wokół (1,0).
(b) Można wziąc np. $\hat\theta := \phi^*\theta$, gdzie $\phi : \hat{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$, $\phi(x,y,z) := (\sqrt{x^2+y^2}, z)$; wtedy oczywiście $d\hat\theta = \phi^*(d\theta) = 0$, lecz $\hat\theta$ nie jest zupełna (bo $\neq 0$ jest całka z $\hat\theta$ po okręgu $\{(x-1)^2 + z^2 = r^2,\ y = 0\}$). Warunek $S^*\theta = \theta$ sprawia, że $\hat\theta$ jest gładka na $\hat{\mathcal{O}}$, nie tylko poza osią $0z$, na której $\phi$ nie jest gładkie. W istocie łatwo policzyć, że $\theta = \frac{2xz\,dx + (-x^2+z^2+1)dz}{(x^2+z^2+1)^2 - 4x^2}$, a więc $\hat\theta = \frac{2z(x\,dx + y\,dy) + (-x^2-y^2+z^2+1)dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2 - 4(x^2+y^2)} \in \Omega^1(\hat{\mathcal{O}})$.

11. Oznaczmy $\mathrm{vol} := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$; przedstawmy $\sigma \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$ w postaci $\sigma = \sigma_A := A \lrcorner\, \mathrm{vol}$, gdzie $A : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$ jest polem wektorowym na $\mathcal{O}$. Skoro $F^*\mathrm{vol} = \det F \cdot \mathrm{vol}$ (z definicji wyznacznika), to $\boxed{F^*\sigma_A = \det F \cdot \sigma_{F^*A}}$ dla $F \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$, $\det F \neq 0$, gdzie $F^*A$ jest nowym polem wektorowym ("cofnięciem pola $A$ przez $F$"), danym wzorem $F^*A = F^{-1} \circ A \circ F$. Tak więc $\sigma_A$ jest obrotowo niezmiennicza $\iff$ pole $A$ jest obrotowo niezmiennicze, tzn. $F^*A = A$, tzn. $\forall F : F \circ A = A \circ F$. Ustalmy $x \in \mathcal{O}$ i weźmy $y := Ax$; mamy wtedy $Fy = y$ dla wszystkich obrotów $F$, takich że $Fx = x$; wynika stąd, że prostopadła do $x$ składowa $y$ jest $=0$ (gdyż 0 jest jedynym obrotowo niezmienniczym wektorem w przestrzeni $\langle x \rangle^\perp$), więc $y \| x$. Zatem obrotowo niezmiennicze pole musi mieć postać $A(x) = h(x)x$ dla pewnej $h \in \Omega^0(\mathcal{O})$; wtedy $F^*A = A$ oznacza $\forall F(\text{obrót}) : h(Fx) = h(x)$, skąd $h(x)$ jest funkcją od $\|x\|$, co daje (a). Łatwo sprawdzić, że $J_c^*\omega = \omega$, $d\omega = 0$ oraz $dr \wedge \omega = r^{1-n}\mathrm{vol}$ (gdzie $r(x) := \|x\|$), skąd natychmiast wynika (b).

13. Niech $\theta := R \lrcorner\, \omega$, tzn. $\theta(x) = x \lrcorner\, \omega(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$; różniczkując tę zależność otrzymujemy $\theta'(x)v = x \lrcorner\, \big(\omega'(x)v\big) + v \lrcorner\, \omega(x)$ dla $v \in \mathbf{R}^n$; stąd $d\theta(x)(v_1, ..., v_r) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \big(\theta'(x)v_r\big)(v_1, ...\widehat{v_r}..., v_k) = \sum_{r=1}^k \Big[\big(\omega'(x)v_r\big)(x, v_1, ...\widehat{v_r}..., v_k) + \omega(x)(v_r, v_1, ...\widehat{v_r}..., v_k)\Big] =$ $= k \cdot \omega(x)(v_1, ..., v_k) + \sum_{r=1}^k \big(\omega'(x)v_r\big)(x, v_1, ...\widehat{v_r}..., v_k)$. Z kolei biorąc $v_0 := x$ mamy: $(R \lrcorner\, d\omega)(x)(v_1, ..., v_r) = d\omega(x)(v_0, ..., v_r) =$ $= \sum_{r=0}^k (-1)^r \big(\omega'(x)v_r\big)(v_0, ...\widehat{v_r}..., v_k) = \big(\omega'(x)x\big)(v_1, ..., v_r) + \sum_{r=1}^k (-1)^r \big(\omega'(x)v_r\big)(x, v_1, ...\widehat{v_r}..., v_k)$. Dodając stronami te dwie równości i korzystając z równania Eulera $\omega'(x)x = \alpha \cdot \omega(x)$ (jednorodność stopnia $\alpha$) dostajemy tezę. (Symbol $\widehat{\ }$ oznacza pominięcie.)

*Inny sposób.* Niech $(x^i)_{i=1}^n$ — standardowe współrzędne na $\mathbf{R}^n$, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ oraz $\omega_{i_1 \ldots i_k} := \omega(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_k})$ — współczynniki $\omega$. Wtedy $(d\omega)_{i_0 i_1 \ldots i_k} = \partial_{i_0}\omega_{i_1 \ldots i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \partial_{i_r}\omega_{i_0 \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k}$, co wraz z równaniem Eulera $\sum_i x^i \partial_i \omega_{\ldots} = \alpha \cdot \omega_{\ldots}$ daje $\big(R \lrcorner\, (d\omega)\big)_{i_1 \ldots i_k} =$ $= \sum_i x^i (d\omega)_{i\, i_1 \ldots i_k} = \alpha \cdot \omega_{i_1 \ldots i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \sum_i x^i \partial_{i_r} \omega_{i \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k}$. Z kolei dla $\theta := R \lrcorner\, \omega$ mamy $\theta_{\ldots} = \sum_i x^i \omega_{i \ldots}$, więc $(d\theta)_{i_1 \ldots i_k} =$ $= \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \partial_{i_r} \theta_{i_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k} = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \sum_i \partial_{i_r} (x^i \omega_{i\, i_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k}) = \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} \sum_i \Big[x^i \partial_{i_r} \omega_{i\, i_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k} + \omega_{i_r i_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots i_k}\Big]$. Dodając to do poprzedniej równości dostajemy $\big(R \lrcorner\, d\omega + d(R \lrcorner\, \omega)\big)_{i_1 \ldots i_k} = (\alpha + k)\omega_{i_1 \ldots i_k}$.

15. *Ad* $\int_L$: Jeśli $\phi$ jest parametryzacją krzywej $L$, to $\boldsymbol{t} \circ \phi = \|\phi'\|^{-1}\phi'$, $\phi^* ds_1 = \|\phi'\|$, więc $\phi^*\big((\vec A | \boldsymbol{t}) ds_1\big) = (\vec A \circ \phi(u) | \phi'(u))\,|du|$, natomiast $\phi^*(\vec A\, d\vec l) = \sum_{i=1}^3 A_i \circ \phi(u) \frac{d\phi_i}{du} du = (\vec A \circ \phi(u) | \phi'(u))\, du$, skąd teza. *Ad* $\int_S$: Jeśli $\phi$ jest parametryzacją powierzchni $S$, to $\phi^* ds_2 = \|\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\| =: \kappa$, zaś $\boldsymbol{n} \circ \phi = \frac{1}{\kappa}\big(\frac{\partial\phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\big)$, więc $\phi^*\big((\vec A | \boldsymbol{n}) ds_2\big) = (\vec A \circ \phi(u) | \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2})|du_1 \wedge du_2|$, zaś $\phi^*(\vec A\, d\vec\sigma) = \big(A_1 \circ \phi(u) \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u_1, u_2)} + \ldots\big) du_1 \wedge du_2 = (\vec A \circ \phi(u) | \frac{\partial\phi}{\partial u_1} \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2}) du_1 \wedge du_2$, skąd teza.

16. $\phi(z, \varphi) := (az\cos\varphi, bz\sin\varphi, z)$, wtedy $\phi^* ds_2 = z\sqrt{a^2b^2 + a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\,|dz \wedge d\varphi|$. *Odp.* $I_1 = \frac{\pi(a^2 + 2a^2b^2 + b^2)c^3}{3ab}$, $I_2 = 2\pi abc$.

**Zadania Świąteczne z Analizy Matematycznej** **Grudzień 1993**

1. Znaleźć funkcję holomorficzną $f$ taką, że $|f(x+iy)| = (x^2+y^2)e^x$ dla $x, y \in \mathbf{R}$.

2. Pokazać, że funkcja $f(z) := \dfrac{z}{(1-z)^2}$ odwzorowuje biholomorficznie koło $K := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ na $\mathbf{C} \setminus ]-\infty, -\frac{1}{4}]$, rozcięte koło $K \setminus ]-1, 0]$ na $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$, natomiast półkole $K \cap \mathbf{H}_+$ — na górną półpłaszczyznę $\mathbf{H}_+ := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

3. Dowieść, że jeśli $f : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \to \mathbf{C}$ jest funkcją ciągłą, holomorficzną na $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ i rzeczywistą na $\mathbf{R}$, to funkcja $\widehat{f}(z) := \begin{cases} \overline{f(\bar{z})}, & \operatorname{Im} z \leqslant 0 \\ f(z), & \operatorname{Im} z \geqslant 0 \end{cases}$, będąca przedłużeniem $f$, jest holomorficzna na całej płaszczyźnie $\mathbf{C}$.

   Pokazać, że $\int_C f(z)dz = 0$ dla dowolnej krzywej zamkniętej $C$ i skorzystać z twierdzenia Morery.

4. Niech $K := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Dowieść, że: (a) Istnieje dokładnie jedna funkcja $f \in \mathcal{H}(K)$, taka że $f(z) = z + f(z^2)$ dla $z \in K$ oraz $f(0) = 0$. (b) Dla każdego $z_0 \in K$ szereg Taylora funkcji $f$ o środku w $z_0$ ma promień zbieżności równy $1 - |z_0|$; w konsekwencji $f$ nie da się holomorficznie przedłużyć poza koło $K$.

   (a) Przedstawić $f$ w postaci $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$; (b) Pokazać, że $\lim_{r \nearrow 1} |f(rw)| = \infty$ dla $w$ z pewnego gęstego podzbioru okręgu $|w| = 1$.

5. Znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne postaci $u(x, y) = \phi(x^2 - y^2)$, gdzie $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest pewną funkcją.

6. Znaleźć wszystkie punkty osobliwe (włączając także punkt $\infty$) dla podanych niżej funkcji oraz określić ich rodzaj.
   (a) $f(z) = \frac{e^{az}-1}{z}$; (b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2}$; (c) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$; (d) $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$.

7. Znaleźć bieguny, wyznaczyć ich rzędy i obliczyć residua (włączając w to także punkt $\infty$):
   (a) $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z^2}$; (b) $f(z) = \frac{z^n e^{1/z}}{1+z}$; (c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$; (d) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$; (e) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1-z)^n}$; (f) $f(z) = \frac{1}{z^5 - z^7}$.

8. Rozwinąć funkcję w szereg Laurenta:
   (a) $f(z) = z^5 e^{1/z}$ w pierścieniu $|z - z_0| > 0$, $z_0 = 0$; (b) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ w pierścieniu $1 < |z - z_0| < \sqrt{5}$, $z_0 = 1 + i$; (c) $f(z) = \exp(z + 1/z)$ w pierścieniu $|z - z_0| > 0$, $z_0 = 0$;(d) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ dla $0 < |z - z_0| < 2\pi$, $z_0 = 2\pi i k$, $k \in \mathbf{Z}$.

9. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja holomorficzna $f$ na $\mathbf{C} \setminus \{2, i\}$, mająca w $z = i$ biegun 1. rzędu, w $z = 2$ biegun 2. rzędu i taka, że $\lim_{z \to \infty} z^2 f(z) = 1$ oraz $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi$, gdzie $\gamma : \mathbf{R} \ni t \mapsto (1+i)t \in \mathbf{C}$. Znaleźć rozwinięcie tej funkcji w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

10. Obliczyć całkę $\int_C f(z)\,dz$, jeśli: (a) $f(z) = \frac{z \exp \frac{1}{3z}}{z+3}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 4\}$;
    (b) $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$; (c) $f(z) = z \cos \frac{z}{z+1}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 2\}$.

11. Wykazać, że: (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{5}{6}\pi$; (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+a)^2 + b^2}\,dx = -\frac{\pi}{b} e^{-b} \sin a$, jeśli $a, b > 0$;
    (c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\,dx = \pi(a - b)$, $0 < a < b$; (d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{1 + x^4}\,dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$ oraz $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$, całkując funkcje $\dfrac{e^{2iz} - 1}{z^2}$ oraz $\dfrac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$ po brzegu półpierścienia $\{z : r < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

13. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \cos ax\,dx = a^{-p}\Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \sin ax\,dx = a^{-p}\Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}$ dla $a > 0$, $0 < p < 1$, całkując stosowną jednoznaczną gałąź $f(z) = z^{p-1} e^{-az}$ po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.
    *Oznaczenie.* $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ dla $p > 0$; jest to tzw. *funkcja gamma Eulera.*

14. Dowieść, że $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ dla $0 < p < 1$, całkując odpowiednią funkcję po brzegu $\{z : r < |z| < R, z \neq |z|\}$.

15. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^1 \log(\frac{1}{x} - x) \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} \log 2$, całkując stosowną jednoznaczną gałąź funkcji $\log(\dfrac{1}{z} - z)\dfrac{1}{1 + z^2}$ po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R, |z - 1| > r, |z + 1| > r, \operatorname{Im} z > 0\}$.

16. Wyprowadzić wzory: (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x}\,dx = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}}$ dla $a \in ]-\pi, \pi[$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$ dla $a \in \mathbf{R}$.

    Całkować funkcję $f$ po brzegu obszaru $\mathcal{O}$, gdzie: (a) $f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z}$, $\mathcal{O} := \{z : -R < \operatorname{Re} z < R, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$;
    (b) $f(z) := \frac{e^{iaz}}{\operatorname{sh} z}$, $\mathcal{O} := \{z : -R < \operatorname{Re} z < R, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, |z| > r, |z - 2\pi i| > r\}$.

17. Całkując "po kości" wyprowadzić następujące wzory:
    (a) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}}\,dx = \frac{31}{36}\pi$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)(1+x)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 x^{1/\pi}(1-x)^{1-1/\pi}\,dx = \frac{\pi - 1}{2\pi \sin 1}$.

18. Obliczyć następujące całki: (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4\, dx}{(a + bx^2)^4}$, $a, b > 0$;
(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2 + \pi^2)^2}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x\, dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$; (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\cos 2ax - \cos 2bx)\, dx}{x^2}$, jeśli $a, b > 0$;
(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} + e^{ax/2}}{1 + e^x} dx$, jeśli $0 < a < 1$; (h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[6]{x}\, dx}{(x+1)(x+2)}$; (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x\, dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.

## Odpowiedzi i rozwiązania

1. Kładąc $f(z) = e^{F(z)}$, $F(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, dostajemy $u(x, y) = x + \log(x^2 + y^2)$. Biorąc $z_0 = 1$, $F(z_0) = 1$, ze wzoru $F(z) + \overline{F(z_0)} = 2u\left(\frac{z+\bar z_0}{2}, \frac{z-\bar z_0}{2i}\right)$ dostajemy: $F(z) = 2\frac{z+1}{2} + 2\log\left[\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2i}\right)^2\right] - 1 = z + 2\log z$. *Odp.* $f(z) = z^2 \exp z$.

2. $f(z) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$, przy czym $z \mapsto w = h(z) := \frac{1+z}{1-z}$ jest biholomorfizmem koła $K$ na półpłaszczyznę $\{\operatorname{Re} w > 0\}$, skąd wynika teza pierwsza. Dalej, $h : K \setminus ]-1, 0] \xrightarrow{\cong} \{w : \operatorname{Re} w > 0\} \setminus ]0, 1]$ oraz $h : K \cap \mathbf{H}_+ \xrightarrow{\cong} \{w : \operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w > 0\}$, co daje pozostałe tezy.

5. $\Delta u(x, y) = 4(x^2 + y^2)\Phi''(x^2 - y^2)$, więc $\Delta u = 0 \iff \Phi'' = 0$, tzn. $\Phi(t) = at + b$, $a, b \in \mathbf{R}$.

6. (a) W $z = 0$ osobliwość pozorna, $f(0) = a$; w $z = \infty$ punkt istotnie osobliwy, gdyż $\lim_{x\to+\infty} f(\frac{x}{a}) \neq \lim_{x\to+\infty} f(-\frac{x}{a})$;
(b) Pozorne osobliwości dla $z = \pm\frac{\pi}{2}$, $f(\pm\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\pi}$; dla $z = \infty$ osobliwość istotna.
(c) $f(0) = 1$ — punkt pozornie osobliwy; dla $z = 2in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ są bieguny 1-krotne; dla $z = \infty$ — punkt istotnie osobliwy.
(d) Funkja wieloznaczna; dla $z = 0$ na gałęzi określonej warunkiem $\log 1 = 0$ jest osobliwość pozorna: $f(0) = 1$, na pozostałych gałęziach w $z = 0$ jest 1-krotny biegun; na otoczeniu $\infty$ funkcja $f$ nie ma jednoznacznej gałęzi.

7. (a) Punkt $z = 0$ jest biegunem 4-krotnym, $\operatorname{res}_0 f(z) = 0$ (parzystość); punkt $z = \infty$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname{res}_\infty f(z) = 0$ (parzystość); pozostalę punkty osobliwe są biegunami 1-krotnymi: $\operatorname{res}_{\sqrt{n\pi}} f(z) = \frac{1}{2}(-1)^n (n\pi)^{-3/2}$ oraz $\operatorname{res}_{i\sqrt{n\pi}} f(z) = \frac{i}{2}(-1)^n (n\pi)^{-3/2}$ dla $n \in \mathbf{N}$.
(b) $z = 0$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname{res}_0 f(z) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0, l\geqslant 0, l=n+k+1} \frac{(-1)^k}{l!} = \begin{cases} (-1)^{n+1}e^{-1}, & \text{gdy } n < 0 \\ (-1)^{n+1}[e^{-1} - \sum_{r=0}^n (-1)^r/r!], & \text{gdy } n \geqslant 0 \end{cases}$; $\operatorname{res}_{-1} f(z) = (-1)^n e^{-1}$ (biegun 1-krotny); $\operatorname{res}_\infty f(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n < 0 \\ (-1)^{n+1}\sum_{r=0}^n (-1)^r/r!, & \text{gdy } n \geqslant 0 \end{cases}$, przy czym $\infty$ jest $\begin{cases} \text{punktem regularnym}, & \text{gdy } n \leqslant 1 \\ \text{biegunem krotności n-1}, & \text{gdy } n > 1 \end{cases}$.
(c) $\operatorname{res}_i f(z) = -\operatorname{res}_{-i} f(z) = -i2^{-2n+1}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2i}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$; są to bieguny $n$-krotne; $z = \infty$ jest $n$-krotnym zerem.
(d) $\operatorname{res}_{2i\pi n} f(z) = \exp\frac{-1-2i\pi n}{1+4\pi^2 n^2}$ dla $n \in \mathbf{Z}$ — bieguny 1-krotne; $z = \infty$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname{res}_\infty f(z)$ nie da się efektywnie wyliczyć.
(e) $\operatorname{res}_1 f(z) = (-1)^n\binom{2n}{n-1} = (-1)^n n 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$, $\operatorname{res}_\infty f(z) = -\operatorname{res}_1 f(z)$, oba bieguny są $n$-krotne;
(f) $\operatorname{res}_0 f(z) = 1$ — biegun 5-krotny; $\operatorname{res}_1 f(z) = \operatorname{res}_{-1} f(z) = -\frac{1}{2}$ — bieguny 1-krotne; w $z = \infty$ funkcja $f$ ma 7-krotne zero.

8. (a) $f(z) = z^5 \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n\leqslant 5} \frac{1}{(5-n)!} z^n$ dla $|z| > 0$.
(b) $4f(z) = \frac{i}{z+i} - \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{i}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^2} = \frac{2+i}{5}(1 + \frac{w}{1+2i})^{-1} + \frac{3+4i}{25}(1 + \frac{w}{1+2i})^{-2} - \frac{i}{w}(1 + \frac{1}{w})^{-1} - \frac{1}{w^2}(1 + \frac{1}{w})^{-2}$ dla $w = z - z_0$, przy czym $\left|\frac{w}{1+2i}\right| < 1$ oraz $\left|\frac{1}{w}\right| < 1$ w rozważanym pierścieniu; stąd ze wzorów $(1 - \zeta)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \zeta^n$, $(1 - \zeta)^{-2} = \frac{d}{d\zeta}(1 - \zeta)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n + 1)\zeta^n$, $|\zeta| < 1$, otrzymujemy: $f(z) = \frac{1}{100}\sum_{n\geqslant 0}\left((3 + i)n + 13 + 6i\right)\left(\frac{z_0-z}{1+2i}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n\leqslant -1}(n + 1 + i)(z_0 - z)^n$.
(c) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, gdzie $a_n = a_{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}$ dla $n \in \mathbf{Z}_+$ (iloczyn Cauchy'ego szeregów).
(d) W pierścieniu $0 < |z| < 2\pi$ mamy: $f(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$, gdzie $B_n$ są tzw. *liczbami Bernoulliego* (zob. np. F.Leja, *Funkcje zespolone*, str.121); jeśli więc $z_0 = 2i\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, oraz $0 < |z - z_0| < 2\pi$, to oznaczając $w = z - z_0$ dostajemy: $f(z) = \frac{w+z_0}{e^w-1} = \left(1 + \frac{z_0}{w}\right) f(w) = \sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n!} + \frac{2i\pi k B_{n+1}}{(n+1)!}\right)(z - z_0)^n$ dla $0 < |z - z_0| < 2\pi$, przy czym dodatkowo oznaczyliśmy $B_{-1} := 0$.

9. Połóżmy $f(z) = \frac{az^2+bz+c}{(z-2)^2(z-i)} + h(z)$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{C}$ są dobrane tak, by $h(z)$ była regularna w $z = i$, $z = 2$. Warunek $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ daje $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$, zatem funkcja całkowita $h$ jest ograniczona, a więc stała (tw. Liouville'a); stąd $h(z) = 0$. Mamy więc: $a = \lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, $b = \lim_{z\to\infty} z^2 f(z) = 1$, zaś warunek całkowy daje $\operatorname{res}_i f(z) \overset{!}{=} \frac{1}{i}$, czyli $i + c = \frac{1}{i}(i - 2)^2$, tzn. $c = -4 - 4i$. *Odpowiedź.* $f(z) = \frac{z-4-4i}{(z-i)^2(z-2)} = \frac{-i}{z-i} + \frac{-2i}{(z-2)^2} + \frac{i}{z-2}$; dla $1 < |z| < 2$ mamy $f(z) = \sum_{n<0}(-1)^{n+1} i^n z^n - i\sum_{n\geqslant 0}(n + 2)2^{-n-1} z^n$.

10. (a) $\operatorname{res}_0 f(z) + \operatorname{res}_{-3} f(z) = -\operatorname{res}_\infty f(z) = \operatorname{res}_0 z^{-2} f(z^{-1}) = \operatorname{res}_0 z^{-2} e^{\frac{1}{3}z}(1 + 3z)^{-1} = \frac{d}{dz}\Big|_{z=0} \frac{e^{\frac{1}{3}z}}{1+3z} = -\frac{8}{3}$, więc $\int_C f(z)dz = -\frac{16}{3}i\pi$.
(b) $\int_C f(z)dz = 0$, gdyż $\operatorname{res}_0 \frac{\operatorname{ctg} z}{z} = 0$ wskutek parzystości funkcji.
(c) $\operatorname{res}_{-1} f(z) = -\operatorname{res}_\infty f(z) = \operatorname{res}_0\left(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})\right) = \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^3}\cos\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\Big|_{z=0} \cos\frac{1}{1+z} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+z)^4}\cos\frac{1}{1+z} + 2\frac{1}{(1+z)^3}\sin\frac{1}{1+z}\right]\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}(\cos 1 + 2\sin 1)$, więc $\int_C f(z)dz = -i\pi(\cos 1 + 2\sin 1)$.

18. (a) $I = \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^2 dz}{z^2(z-a)(az-1)} = \frac{\pi}{2}\sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z f(z)$, $\operatorname{res}_0 = 1 + a^{-2}$, $\operatorname{res}_a = 1 - a^{-2}$, $\operatorname{res}_{\frac{1}{a}} = a^{-2} - 1$, więc $I = \begin{cases} \pi, & |a| < 1 \\ \pi a^{-2}, & |a| > 1 \end{cases}$ (dla $|a| = 1$, $a \neq \pm 1$ całka jest rozbieżna).
(b) $\operatorname{res}_{1+2i}\left[\frac{z^2}{z^4+6z^2+25}\right] = \frac{2-i}{16}$, $\operatorname{res}_{-1+2i} \frac{z^2}{z^4+6z^2+25} = \frac{-2-i}{16}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = 2i\pi\sum_z \operatorname{res}_z \ldots = \frac{\pi}{4}$.
(c) $\operatorname{res}_{i\sqrt{a/b}}\left(\frac{z}{a+bz}\right)^4 = \frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}\Big|_{z=i\sqrt{a/b}}\left(\frac{z}{bz+i\sqrt{ab}}\right)^4 = -\frac{i}{32\sqrt{a^3b^5}}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = \frac{\pi}{32}a^{-3/2}b^{-5/2}$.
(d) $\operatorname{res}_{i\pi}\left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}\right] = \frac{d}{dz}\Big|_{z=i\pi} \frac{ze^{iz}}{(z+i\pi)^2} = \frac{e^{-\pi}}{4\pi}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = \pi\operatorname{res}_{i\pi} \ldots = e^{-\pi}$.
(e) $\operatorname{res}_i\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = -\frac{1}{6}e^{-1}$, $\operatorname{res}_{2i}\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = \frac{2}{3}e^{-2}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = 2\pi\sum_z \operatorname{res}_z \ldots = \frac{\pi}{3e^2}(4 - e)$.
(f) $\operatorname{res}_0\left[\frac{1}{z^2}\left(e^{2iaz} - e^{2ibz}\right)\right] = 2i(a - b)$, więc całkowanie po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ daje $I = \frac{i\pi}{2}\operatorname{res}_0 \ldots = \pi(b - a)$.
(g) $\operatorname{res}_{i\pi} \frac{e^{az}+e^{az/2}}{1+e^z} = -e^{i\pi a} - e^{i\pi a/2}$, więc całkowanie po brzegu prostokąta $\{z : |\operatorname{Re} z| < R,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ daje $I = \frac{\pi(1+2\cos(a\pi/2))}{\sin a\pi}$.
(h) $f(z) := \frac{p(z)}{(z+1)(z+2)}$, $p(re^{i\varphi}) := \sqrt[6]{r}e^{i\varphi/6}$ dla $0 < \varphi < 2\pi$; wtedy $\operatorname{res}_{-1} f(z) = e^{i\pi/6}$, $\operatorname{res}_{-2} f(z) = -\sqrt[6]{2}e^{i\pi/6}$; całkując po brzegu obszaru $K_R \setminus [0, R]$ dostajemy $I = \frac{\pi(\sqrt[6]{2}-1)}{\sin(\pi/6)}$.(i) Stosując kontur taki sam jak w (f), wobec $\operatorname{res}_{-1} f(z) = \frac{\pi}{2} + i$, dostajemy $I = -\pi$.

1. Sprawdzić, czy dany funkcjonał $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ jest dystrybucją; jeśli tak, określić nośnik $T$ oraz wskazać najmniejszą z trzech przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{S}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, do których $T$ należy. (a) $T(\varphi) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi(n)$; (b) $T(\varphi) := \int_{\infty}^{\infty} e^x \varphi(x)dx$; (c) $T(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-\frac{3}{2}}(\sin x)\,\varphi(x)dx$; (d) $T(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)\big)$.

2. Sprawdzić, że: (a) wzór $T(\varphi) := \int_0^{\infty} \varphi(x)\log x\, dx$ (całka niewłaściwa Riemanna) określa dystrybucję $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$; (b) pochodne $T'$, $T''$ dane są wzorami: $T'(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\big(\int_r^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)\cdot\log r\big) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_1^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$, $T''(\varphi) = \varphi'(0) + \lim_{r\searrow 0}\left[\frac{\varphi(0)}{r} - \varphi'(0)\log r - \int_r^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] = \varphi(0) + \varphi'(0) - \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}dx - \int_0^{\infty}\frac{\phi(x)}{x^2}dx$; uzasadnić zbieżność powyższych całek. (c) Znaleźć jakąś dystrybucję $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, której pochodną jest $S' = T$.

3. Niech $x_0 \in \mathbf{R}$ i niech $f \in C^n(\mathbf{R}\setminus\{x_0\})$ będzie funkcją mającą jednostronne granice $f^{(k)}(x_0^{\pm}) := \lim_{x\to x_0^{\pm}} f^{(k)}(x)$. Wyprowadzić wzór $\boxed{(T_f)^{(n)} = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=1}^{n}\Delta\left(f^{(n-k)};x_0\right)\cdot\delta_{x_0}^{(k-1)}}$, gdzie $\Delta\left(f^{(l)};x_0\right) := f^{(l)}(x_0^+) - f^{(l)}(x_0^-)$ oznacza wartość skoku $f^{(l)}$ w punkcie $x_0$. Uogólnić ten wzór na przypadek funkcji $f \in C^n(\mathbf{R}\setminus\{x_1,\dots,x_m\})$.

4. Niech $\theta : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ oznacza *funkcję Heaviside'a* $\theta(x) := \left\{\begin{smallmatrix}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{smallmatrix}\right.$, a $T = T_f$ — dystrybucję odpowiadającą danej funkcji $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, tzn. $T(\varphi) := \int f(x)\varphi(x)dx$ dla $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$. Obliczyć: (a) $T'' + a^2T$, jeśli $f(x) := \theta(x)\sin ax$; (b) $T^{(n)}$, jeśli $f(x) := \theta(x)x^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$; (c) $T' - aT$, jeśli $f(x) := \theta(x)e^{ax}$; (d) $T^{(4)} - T$, jeśli $f(x) := |x|\sin x$; (e) $T''$, jeśli $T = T_f$, gdzie $f(x) = \theta(x)|x|^{\frac{1}{2}}$ (wyrazić $T''(\varphi)$ tak, by pod znakiem całki nie było pochodnych $\varphi$).

5. Obliczyć wszystkie pochodne dystrybucji $T = T_f$: (a) $f(x) := |x|$; (b) $f(x) := \max(1-|x|, 0)$; (c) $f(x) := |\sin x|$.

6. Sprawdzić, że "pochodną dystrybucyjną «funkcji» $\log|x|$ jest $P(\frac{1}{x})$", tzn. że dla $f(x) := \log|x|$ pochodna $T_f{}'$ dana jest wzorem $T_f{}'(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\int_{|x|\geqslant r}\frac{1}{x}\varphi(x)dx =: U(\varphi)$. Pokazać, że *rząd* dystrybucji $U$ wynosi 1 (a nie 0, jak może sugerować brak pochodnych $\varphi$ we wzorze na $U(\varphi)$).

7. Dowieść, że każda dystrybucja $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ma *dystrybucję pierwotną*, tzn. $\exists S\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}) : S' = T$.

8. Wykazać, że dla $f\in C^{\infty}(\mathbf{R})$ oraz $n\in\mathbf{N}$ zachodzi następujący wzór: $f\cdot\delta_{x_0}^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\tbinom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot\delta_{x_0}^{(k)}$.

9. Dowieść, że jeśli $T$, $T_n\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ oraz $T_n\longrightarrow T$, tzn. w sensie *słabej zbieżności w* $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, tzn. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ : $T_n(\varphi)\longrightarrow T(\varphi)$, to $T_n'\longrightarrow T'$; oznacza to, że różniczkowanie w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ jest przemienne z operacją przechodzenia do (słabej) granicy, tzn. *operacja różniczkowania* $T\mapsto T'$ *jest* (słabo) *ciągła*.

10. Dowieść, że jeśli $f_n\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ dla $n\in\mathbf{N}$, $f_n\longrightarrow f$ p.w. w $\mathbf{R}$ oraz $\exists g\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) : \forall n\in\mathbf{N} : |f_n|\leqslant g$ p.w. w $\mathbf{R}$, to $T_{f_n}\longrightarrow T_f$ w sensie słabej zbieżności w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

11. Oznaczmy $f_n(x) := \frac{\sin nx}{x}$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \pi\varphi(0)$ dla $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, tzn. $\lim_{n\to\infty}T_{f_n} = \pi\delta_0$.

12. Niech $f\in C(\mathbf{R})$ spełnia warunek $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$; oznaczmy $F(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$; niech $f_n(x) := nf(nx)$ i $F_n(x) := F(nx)$. Wykazać, że $T_{F_n}\longrightarrow T_\theta$ oraz $T_{f_n}\longrightarrow\delta_0$ w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, tzn. "$F_n$ jest przybliżeniem $\theta(x)$, a $f_n(x)$ — przybliżeniem delty Diraca dla $n\to\infty$". Wykorzystać to do sprawdzenia, że następujące ciągi funkcyjne: (a) $f_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2+1)}$; (b) $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}n^2x^2)$; (c) $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\big(\frac{\sin nx}{x}\big)^2$ są "przybliżeniami delty Diraca".

13. Dla $n\in\mathbf{Z}$ oznaczmy $e_n(x) := e^{inx}$, a więc $e_n\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ spełnia warunek $\exists C>0, r>0 : \forall n\in\mathbf{Z}, n\neq 0 : |a_n|\leqslant C|n|^r$, to szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nT_{e_n}$ jest zbieżny w przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

14. Wykazać dla $n=1$, że jeśli $\widehat{f}$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\widehat{f}(p) := \int f(x)e^{i\langle p,x\rangle}dx$, to
$$\widehat{\widehat{f}}(-p) = (2\pi)^n f(p).$$

## Odpowiedzi i rozwiązania

1. (a) $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, gdyż jeśli $\varphi\in\mathcal{D}$ i $\operatorname{supp}\varphi\subset[a,b]$, to $|T(\varphi)|\leqslant(b-a)\sup|\varphi|$; co więcej, $T\in\mathcal{S}'(\mathbf{R})$, gdyż dla $\varphi\in\mathcal{S}$ mamy $|T(\varphi)\leqslant\sum_{\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+|n|)^2}N(\varphi) = \mathrm{const}\cdot N(\varphi)$, gdzie $N(\varphi) := \sup_x(1+|x|)^2|\varphi(x)|$ jest półnormą na $\mathcal{S}$; oczywiście $\operatorname{supp}T = \mathbf{Z}$, więc $T\notin\mathcal{E}'(\mathbf{R})$. (b) $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, gdyż (oprócz liniowości) mamy $|T(\varphi)|\leqslant C\,\sup|\varphi|$, $C = \int_a^b e^x dx$, jeśli $\varphi\in\mathcal{D}$ i $\operatorname{supp}\varphi\subset[a,b]$; oczywiście $\operatorname{supp}T = \mathbf{R}$, więc $T\notin\mathcal{E}'$; także $T\notin\mathcal{S}'$, gdyż np. dla $\varphi(x) := e^{-\sqrt{1+x^2}}$ mamy $\varphi\in\mathcal{S}$, lecz całka $T(\varphi)$ jest rozbieżna. (c) $T\in\mathcal{S}'$, gdyż $f(x) = |x|^{-\frac{3}{2}}\sin x$ jest całkowalna na $\mathbf{R}$, skąd $|T(\varphi)|\leqslant C\,N(\varphi)$, gdzie $C := \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$, $N(\varphi) := \sup|\varphi(\mathbf{R})|$. Oczywiście $\operatorname{supp}T = \mathbf{R}$, więc $T\notin\mathcal{E}'$. (d) $\exists x_n\in[0,1] : \varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0) = \frac{1}{n}\varphi'(x_n)$ (tw. Lagrange'a), więc $|T(\varphi)| = |\sum_n\frac{1}{n^2}\varphi'(x_n)|\leqslant C\,\sup|\varphi'([0,1])|$, gdzie $C = \sum\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, zatem $T\in\mathcal{D}'$ (a nawet $T\in\mathcal{S}'$), przy czym $\operatorname{supp}\varphi = \{0\}\cup\{\frac{1}{n} : n\in\mathbf{N}\}\subset[0,1]$, więc $T\in\mathcal{E}'(\mathbf{R})$.

2. (a) $T = T_f$, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & x\leqslant 0 \\ \log x, & x>0 \end{cases}$ jest lok. całkowalna: $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. (b) $T'(\varphi) = -T(\varphi')$, przy czym $\int_r^\infty \varphi'(x)\log x\,dx = = \Big\|{}^{\log x}_{\varphi'(x)}\Big|^{1/x}_{\varphi(x)}\Big\| = -\int_r^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx - \varphi(r)\log(r)$ oraz $\int_0^1 \varphi'(x)\log x\,dx = \Big\|{}^{\log x}_{\varphi'(x)}\Big|^{1/x}_{\varphi(x)-\varphi(0)}\Big\| = -\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$ (gdyż $x\log x \xrightarrow{x\searrow 0} 0$). Podobnie przekształcić należy całki w $T''(\varphi) = -T'(\varphi')$. (c) Na przykład $S(\varphi) := \int_0^\infty x(\log x - 1)\varphi(x)\,dx$.

3. ${T_f}'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\left(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}\right) f(x)\varphi'(x)dx = \Big\|{}^{f(x)}_{\varphi'(x)}\Big|^{f'(x)}_{\varphi(x)}\Big\| = -f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$, zatem ${T_f}' = T_{f'} + \Delta(f;x_0)\delta_{x_0}$, co dowodzi tezy dla $n = 1$. Krok indukcyjny: ${T_f}^{(n+1)} = \left(T_{f^{(n)}} + \sum_{k=1}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k-1)}\right)' = T_{f^{(n+1)}} + +\Delta(f^{(n)};x_0)\delta_{x_0} + \sum_{k=1}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k)} = T_{f^{(n+1)}} + \sum_{k=0}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k)}$, gdzie $s_{n-k} := \Delta(f^{n-k};x_0) = \mathrm{const}$; to kończy dowód.

4. (a) $a\cdot\delta_0$; (b) $(n-1)!\cdot\delta_0$; (c) $\delta_0$; (d) $4\delta_0 - 4\,T_g$, gdzie $g(x) := \mathrm{sgn}x\cdot\cos x$; (e) $T''(\varphi) = T(\varphi'') = \int_0^\infty x^{\frac12}\varphi''(x)dx = \Big\|{}^{x^{1/2}}_{\varphi''(x)}\Big|^{\frac12 x^{-1/2}}_{\varphi'(x)}\Big\| = = -\frac12\int_0^\infty x^{-\frac12}\varphi'(x)dx = \Big\|{}^{-\frac12 x^{-1/2}}_{\varphi'(x)}\Big|^{\frac14 x^{-3/2}}_{\varphi(x)-\varphi(0)}\Big\| = -\frac14\int_0^\infty x^{-\frac32}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx$ (należy zauważyć, że wszystkie te całki są zbieżne). Alternatywna postać: $T''(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\int_r^\infty x^{\frac12}\varphi''(x) = \ldots$ całkowanie przez części $\ldots = \lim_{r\searrow 0}\left(\frac{\varphi(r)-2r\varphi'(r)}{2\sqrt{r}} - \frac14\int_r^\infty x^{-\frac32}\varphi(x)dx\right)$.

5. (a) $T' = T_{\mathrm{sgn}}$, $T^n = 2\delta_0^{(n-1)}$ dla $n\geqslant 2$; (b) $f(x) = \frac12|x+1| + \frac12|x-1| - |x|$, więc z (a) wynika $T' = T_h$, $T^{(n)} = \frac12\delta_{-1}^{(n-1)} + \frac12\delta_1^{(n-1)} - \delta_0^{(n-1)}$ dla $n\geqslant 2$, gdzie $h(x) := \frac12\mathrm{sgn}(x+1) + \frac12\mathrm{sgn}(x-1) - \mathrm{sgn}(x) = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$; (c) $T^{(2k)} = (-1)^k\left[T_f - 2\sum_{0\leqslant l<k}(-1)^l U^{(2l)}\right] = = (-1)^k\left[T_f - 2U + 2U'' - \ldots + (-1)^k 2u^{(2k-2)}\right]$, $T^{(2k+1)} = (-1)^k\left[T_g - 2\sum_{0\leqslant l<k}(-1)^l U^{(2l)}\right] = (-1)^k\left[T_g - 2U' + 2U''' - \ldots + +(-1)^k 2U^{(2k-1)}\right]$, gdzie $U := \sum_{m=-\infty}^\infty \delta_{m\pi} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ oraz $g(x) := \mathrm{sgn}(\sin x)\cdot\cos x$ (zastosować indukcję względem $k\geqslant 0$).

6. Całkowanie przez części daje $-\int_{|x|\geqslant r}\log|x|\cdot\varphi'(x)dx = \big(\varphi(r)-\varphi(-r)\big)\log r + \int_{|x|\geqslant r}\frac1x\varphi(x)dx$, skąd wzór na ${T_f}'$. Dla $n\in\mathbf{N}$ istnieje nieparzysta funkcja $\varphi_n\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, taka że $\varphi_n(x) = \begin{cases}\mathrm{sgn}x, & \frac{1}{2n}\leqslant|x|\leqslant 1-\frac{1}{2n} \\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$ oraz $\sup|\varphi_n| = 1$. Wtedy $U(\varphi_n)\geqslant 2\int_{1/(2n)}^{1-1/(2n)}\frac{dx}{x} = = 2\log(2n-1)$, więc dla $K = [-1,1]$ nie istnieje oszacowanie $\forall\varphi\in\mathcal{D}(K) : |U(\varphi)|\leqslant C\sup|\varphi(K)|$, tzn. $U$ ma rząd $>0$. Zarazem jeśli $K\imath\mathbf{R}$ jest zwarty i $C := \int_K\big|\log|x|\big|dx$, to $|U(\varphi)| = \left|\int_K\log|x|\,\varphi'(x)dx\right|\leqslant C\sup|\varphi'(K)|$ dla $\varphi\in\mathcal{D}(K)$, więc rząd $U$ równy jest 1.

7. Tożsamość $S(\varphi') = -T(\varphi)$ sugeruje określenie $S(\varphi) := -T(\widetilde{\varphi})$, gdzie $\widetilde{\varphi}(x) := \int_{-\infty}^x\varphi(t)dt$; jednak wzór ten wymaga korekty, gdyż nie zawsze $\widetilde{\varphi}$ ma zwarty nośnik: $\lim_{x\to\infty}\widetilde{\varphi}(x) = I(\varphi) := \int_{-\infty}^\infty\varphi(t)dt$. Weźmy dowolną ustaloną $\lambda\in C^\infty(\mathbf{R})$, taką że $\lambda(x) = \begin{cases}0, & x\leqslant -1\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$; wtedy $\widetilde{\varphi} - I(\varphi)\cdot\lambda\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dla $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, więc ma sens definicja $S(\varphi) := -T\big(\widetilde{\varphi} - I(\varphi)\cdot\lambda\big)$; przy tym $S\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ i $S'(\varphi) = -S(\varphi') = = T(\varphi)$, gdyż jak widać, $\widetilde{\varphi'} = \varphi$ oraz $I(\varphi') = 0$. Oczywiście inny wybór $\lambda$ spowoduje dodanie do $S$ krotności $I = T_1$, czyli "stałej".

8. Iloczyn $f\cdot T$ dla $f\in C^\infty(\mathbf{R})$ oraz $T\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ określony jest wzorem $(f\cdot T)(\varphi) := T(f\cdot\varphi)$ (sensownym, gdyż $f\cdot\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$); wystarczy więc skorzystać z uogólnionej reguły Leibniza $(f\cdot\varphi)^{(n)} = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}f^{(n-k)}\varphi^{(k)}$ i wzoru $\delta_{x_0}^{(k)}(\varphi) = (-1)^k\delta_{x_0}(\varphi^{(k)}) = (-1)^k\varphi^{(k)}(x_0)$.

10. Jeśli $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ oraz $\mathrm{supp}\,\varphi\imath[x_1,x_2]$, to $g|\varphi|\in\mathcal{L}^1([x_1,x_2])$ jest majorantą dla ciągu $f_n\varphi\longrightarrow f\varphi$, więc z tw. Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu z granicą pod znak całki wynika, że $T_{f_n}(\varphi)\longrightarrow T(\varphi)$.

11. Funkcja $F(x) := \int_{-\infty}^x\frac{\sin t}{t}dt$ jest ciągła, $\lim_{x\to-\infty}F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty}F(x) = \pi$ oraz $F(0) = \frac12\pi$; stąd $\lim_{n\to\infty}F(nx) = \pi\theta(x)$ p.w. na $\mathbf{R}$, przy czym $|F(nx)|\leqslant g(x) := \mathrm{const}\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, gdzie $\mathrm{const} := \sup|F(\mathbf{R})| < \infty$. Korzystając z 10. dostajemy $\lim_{n\to\infty}T_{F_n} = \pi\cdot T_\theta$, a więc z 9. wynika $\lim_{n\to\infty}T_{F_n'} = \pi\cdot\delta_0$, przy czym $F_n'(x) = \frac{d}{dx}F(nx) = nF'(nx) = n\frac{\sin nx}{nx} = f_n(x)$, QED.

12. $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jest ciągła, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, więc $F$ jest ograniczona; mamy więc majorantę $C|\varphi(x)|\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ dla ciągu $F_n(x)\varphi(x)\longrightarrow\theta(x)\varphi(x)$, co daje $T_{F_n}\longrightarrow T_\theta$. Stąd i z zadania 9. wynika teza.

13. Jeśli $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, to $T_{e_n}(\varphi) = \int e^{inx}\varphi(x)dx = \widehat{\varphi}(n)$, gdzie $\widehat{\varphi}$ jest transformatą Fouriera $\varphi$; przy tym $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})\imath\mathcal{S}(\mathbf{R})$ daje $\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, więc $M := \sup_{p\in\mathbf{R}}|p|^{r+2}|\widehat{\varphi}(p)| < \infty$ oraz dla $n\neq 0$ mamy $|a_n\widehat{\varphi}(n)|\leqslant\frac{C}{n^2}|n|^{r+2}|\widehat{\varphi}(n)|\leqslant\frac{C\,M}{n^2}$, więc szereg $\sum_n T_{e_n}(\varphi)$ jest zbieżny, QED. Inny sposób. Weźmy $k\in\mathbf{N}$ tak duże (np. $k > r+1$), by zbieżny był szereg $\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{|n|^k}$; wtedy szereg funkcyjny $f(x) := \sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{(in)^k}e^{inx}$ jest bezwzgl. zbieżny i ma lok. całkowalną (stałą!) majorantę, więc $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$; stąd i z zadania 10. wynika, że $\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{(in)^k}T_{e_n} = T_f$ (słaba zbieżność w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$), więc różniczkując $k$-krotnie i korzystając z wyniku 9. dostajemy tezę.

14. Przestawiając kolejność całkowania otrzymujemy dla $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$, $g\in\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ tożsamość $\int\widehat{f}(x)g(x)e^{-ipx}dx = \int f(x+p)\widehat{g}(x)dx$. Biorąc $g(x) = g_n(x) := \exp(-\frac12 n^{-2}x^2)$ mamy $\widehat{g}(x) = n\sqrt{2\pi}\exp(-\frac12 n^2x^2)$, więc $\int\widehat{f}(x)e^{-ipx}dx = \lim_{n\to\infty}\int\widehat{f}(x)g_n(x)e^{-ipx}dx = = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\int n\exp(-\frac12 n^2x^2)f(x+p)dx = 2\pi f(p)$ dzięki tw. Lebesgue'a i 12.(b), co dowodzi tezy.

## Zadania z Analizy Matematycznej ‘C’ Semestr 3. Seria 13. Grudzień 1996

1. Znaleźć funkcję holomorficzną $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ taką, że $|f(x+iy)| = (x^2+y^2)e^x$ dla $x, y \in \mathbf{R}$.

2. Pokazać, że funkcja $f(z) := \dfrac{z}{(1-z)^2}$ odwzorowuje biholomorficznie koło $K := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ na $\mathbf{C} \setminus ]-\infty, -\frac{1}{4}]$, rozcięte koło $K \setminus ]-1, 0]$ na $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_+$, natomiast półkole $K \cap \mathbf{H}_+$ — na górną półpłaszczyznę $\mathbf{H}_+ := \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

3. Dowieść, że jeśli $f : \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \to \mathbf{C}$ jest funkcją ciągłą, holomorficzną na $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ i rzeczywistą na $\mathbf{R}$, to funkcja $\widehat{f}(z) := \begin{cases} \overline{f(\bar{z})}, \operatorname{Im} z \leqslant 0 \\ f(z), \operatorname{Im} z \geqslant 0 \end{cases}$, będąca przedłużeniem $f$, jest holomorficzna na całej płaszczyźnie $\mathbf{C}$.

   *Wskazówka.* Pokazać, że $\int_C f(z)dz = 0$ dla dowolnej krzywej zamkniętej $C$ i skorzystać z twierdzenia Morery.

4. Niech $K := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$. Dowieść, że: (a) Istnieje dokładnie jedna funkcja $f \in \mathcal{H}(K)$, taka że $f(z) = z + f(z^2)$ dla $z \in K$ oraz $f(0) = 0$. (b) Dla każdego $z_0 \in K$ szereg Taylora funkcji $f$ o środku w $z_0$ ma promień zbieżności równy $1 - |z_0|$; w konsekwencji $f$ nie da się holomorficznie przedłużyć poza koło $K$.

   (a) Przedstawić $f$ w postaci $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$; (b) Pokazać, że $\lim_{r \nearrow 1} |f(rw)| = \infty$ dla $w$ z pewnego gęstego podzbioru okręgu $|w| = 1$.

5. Znaleźć wszystkie funkcje harmoniczne postaci $u(x, y) = \phi(x^2 - y^2)$, gdzie $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest pewną funkcją.

6. Znaleźć wszystkie punkty osobliwe (włączając także punkt $\infty$) dla podanych niżej funkcji oraz określić ich rodzaj:
   (a) $f(z) = \frac{e^{az}-1}{z}$; (b) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2}$; (c) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$; (d) $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z}$.

7. Znaleźć bieguny, wyznaczyć ich rzędy i obliczyć residua (włączając w to także punkt $\infty$):
   (a) $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z^2}$; (b) $f(z) = \frac{z^n e^{1/z}}{1+z}$; (c) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$; (d) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$; (e) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1-z)^n}$; (f) $f(z) = \frac{1}{z^5 - z^7}$.

8. Rozwinąć funkcję w szereg Laurenta:
   (a) $f(z) = z^5 e^{1/z}$ w pierścieniu $|z - z_0| > 0$, $z_0 = 0$; (b) $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ w pierścieniu $1 < |z - z_0| < \sqrt{5}$, $z_0 = 1 + i$;
   (c) $f(z) = \exp(z + 1/z)$ w pierścieniu $|z - z_0| > 0$, $z_0 = 0$;(d) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ dla $0 < |z - z_0| < 2\pi$, $z_0 = 2\pi i k$, $k \in \mathbf{Z}$.

9. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna funkcja holomorficzna $f$ na $\mathbf{C} \setminus \{2, i\}$, mająca w $z = i$ biegun 1. rzędu, w $z = 2$ biegun 2. rzędu i taka, że $\lim_{z \to \infty} z^2 f(z) = 1$ oraz $\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi$, gdzie $\gamma : \mathbf{R} \ni t \mapsto (1+i)t \in \mathbf{C}$. Znaleźć rozwinięcie tej funkcji w szereg Laurenta w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

10. Obliczyć całkę $\int_C f(z)\, dz$, jeśli: (a) $f(z) = \frac{z \exp \frac{1}{3z}}{z+3}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 4\}$;
    (b) $f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$; (c) $f(z) = z \cos \frac{z}{z+1}$ oraz $C = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 2\}$.

11. Wykazać, że: (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{5}{6}\pi$; (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+a)^2 + b^2}\, dx = -\frac{\pi}{b} e^{-b} \sin a$, jeśli $a, b > 0$;
    (c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx = \pi(a - b)$, $0 < a < b$; (d) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$ oraz $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\, dx = \frac{3\pi}{8}$, całkując funkcje $\dfrac{e^{2iz} - 1}{z^2}$ oraz $\dfrac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$ po brzegu półpierścienia $\{z : r < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ .

13. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \cos ax\, dx = a^{-p}\Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1} \sin ax\, dx = a^{-p}\Gamma(p) \sin \frac{\pi p}{2}$ dla $a > 0$, $0 < p < 1$, całkując stosowną jednoznaczną gałąź $f(z) = z^{p-1} e^{-az}$ po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.
    *Oznaczenie.* $\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ dla $p > 0$; jest to tzw. *funkcja gamma Eulera*.

14. Dowieść, że $\int_0^\infty \frac{dx}{x^p(x+1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$ dla $0 < p < 1$, całkując odpowiednią funkcję po brzegu $\{z : r < |z| < R, z \neq |z|\}$.

15. Wykazać, że $\displaystyle\int_0^1 \log(\frac{1}{x} - x) \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4} \log 2$, całkując stosowną jednoznaczną gałąź funkcji $\log(\dfrac{1}{z} - z)\dfrac{1}{1 + z^2}$ po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R, |z - 1| > r, |z + 1| > r, \operatorname{Im} z > 0\}$.

16. Wyprowadzić wzory: (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx = \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}$ dla $a \in ]-\pi, \pi[$; (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \frac{\pi a}{2}$ dla $a \in \mathbf{R}$.

    Całkować funkcję $f$ po brzegu obszaru $\mathcal{O}$, gdzie: (a) $f(z) = \frac{e^{az}}{\operatorname{ch} \pi z}$, $\mathcal{O} := \{z : -R < \operatorname{Re} z < R, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$;
    (b) $f(z) := \frac{e^{iaz}}{\operatorname{sh} z}$, $\mathcal{O} := \{z : -R < \operatorname{Re} z < R, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, |z| > r, |z - 2\pi i| > r\}$.

17. Całkując “po kości” wyprowadzić następujące wzory:
    (a) $\displaystyle\int_1^2 (x + 1) \sqrt[6]{\frac{x-1}{2-x}}\, dx = \frac{31}{36}\pi$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)(1+x)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; (c) $\displaystyle\int_0^1 x^{1/\pi}(1-x)^{1-1/\pi}\, dx = \frac{\pi - 1}{2\pi \sin 1}$.

18. Obliczyć następujące całki: (a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\, dx}{1 - 2a\cos x + a^2}$; (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 25}$; (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4\, dx}{(a + bx^2)^4}$, $a, b > 0$;
(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x\, dx}{(x^2 + \pi^2)^2}$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x\, dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$; (f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\cos 2ax - \cos 2bx)\, dx}{x^2}$, jeśli $a, b > 0$;
(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} + e^{ax/2}}{1 + e^x} dx$, jeśli $0 < a < 1$; (h) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[6]{x}\, dx}{(x+1)(x+2)}$; (i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x\, dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}$.

## Odpowiedzi i rozwiązania

1. Kładąc $f(z) = e^{F(z)}$, $F(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, dostajemy $u(x,y) = x + \log(x^2+y^2)$. Biorąc $z_0 = 1$, $F(z_0) = 1$, ze wzoru $F(z) + \overline{F(z_0)} = 2u\left(\frac{z+\bar z_0}{2}, \frac{z-\bar z_0}{2i}\right)$ dostajemy: $F(z) = 2\frac{z+1}{2} + 2\log\left[\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2i}\right)^2\right] - 1 = z + 2\log z$. *Odp.* $f(z) = z^2 \exp z$.

2. $f(z) = -\frac14 + \frac14\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$, przy czym $z \mapsto w = h(z) := \frac{1+z}{1-z}$ jest biholomorfizmem koła $K$ na półpłaszczyznę $\{\mathrm{Re}\, w > 0\}$, skąd wynika teza pierwsza. Dalej, $h : K \setminus ]-1,0] \xrightarrow{\cong} \{w : \mathrm{Re}\, w > 0\} \setminus ]0,1]$ oraz $h : K \cap \mathbf{H}_+ \xrightarrow{\cong} \{w : \mathrm{Re}\, w > 0,\ \mathrm{Im}\, w > 0\}$, co daje pozostałe tezy.

5. $\Delta u(x,y) = 4(x^2+y^2)\Phi''(x^2-y^2)$, więc $\Delta u = 0 \iff \Phi'' = 0$, tzn. $\Phi(t) = at + b$, $a, b \in \mathbf{R}$.

6. (a) W $z = 0$ osobliwość pozorna, $f(0) = a$; w $z = \infty$ punkt istotnie osobliwy, gdyż $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{x}{a}) \neq \lim\limits_{x\to+\infty} f(-\frac{x}{a})$;
(b) Pozorne osobliwości dla $z = \pm\frac{\pi}{2}$, $f(\pm\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\pi}$; dla $z = \infty$ osobliwość istotna.
(c) $f(0) = 1$ — punkt pozornie osobliwy; dla $z = 2in\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ są bieguny 1-krotne; dla $z = \infty$ — punkt istotnie osobliwy.
(d) Funkja wieloznaczna; dla $z = 0$ na gałęzi określonej warunkiem $\log 1 = 0$ jest osobliwość pozorna: $f(0) = 1$, na pozostałych gałęziach w $z = 0$ jest 1-krotny biegun; na otoczeniu $\infty$ funkcja $f$ nie ma jednoznacznej gałęzi.

7. (a) Punkt $z = 0$ jest biegunem 4-krotnym, $\operatorname*{res}\limits_0 f(z) = 0$ (parzystość); punkt $z = \infty$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = 0$ (parzystość); pozostalę punkty osobliwe są biegunami 1-krotnymi: $\operatorname*{res}\limits_{\sqrt{n\pi}} f(z) = \frac12(-1)^n(n\pi)^{-3/2}$ oraz $\operatorname*{res}\limits_{i\sqrt{n\pi}} f(z) = \frac{i}{2}(-1)^n(n\pi)^{-3/2}$ dla $n \in \mathbf{N}$.
(b) $z = 0$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname*{res}\limits_0 f(z) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0, l\geqslant 0, l=n+k+1} \frac{(-1)^k}{l!} = \begin{cases} (-1)^{n+1}e^{-1}, & \text{gdy } n < 0 \\ (-1)^{n+1}[e^{-1} - \sum_{r=0}^n (-1)^r/r!], & \text{gdy } n \geqslant 0 \end{cases}$; $\operatorname*{res}\limits_{-1} f(z) = (-1)^n e^{-1}$ (biegun 1-krotny); $\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n < 0 \\ (-1)^{n+1}\sum_{r=0}^n (-1)^r/r!, & \text{gdy } n \geqslant 0 \end{cases}$, przy czym $\infty$ jest $\begin{cases} \text{punktem regularnym,} & \text{gdy } n \leqslant 1 \\ \text{biegunem krotności n-1,} & \text{gdy } n > 1 \end{cases}$.
(c) $\operatorname*{res}\limits_i f(z) = -\operatorname*{res}\limits_{-i} f(z) = -i2^{-2n+1}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{1}{2i}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$; są to bieguny $n$-krotne; $z = \infty$ jest $n$-krotnym zerem.
(d) $\operatorname*{res}\limits_{2i\pi n} f(z) = \exp\frac{-1-2i\pi n}{1+4\pi^2 n^2}$ dla $n \in \mathbf{Z}$ — bieguny 1-krotne; $z = \infty$ jest istotnie osobliwy, $\operatorname*{res}\limits_\infty f(z)$ nie da się efektywnie wyliczyć.
(e) $\operatorname*{res}\limits_1 f(z) = (-1)^n\binom{2n}{n-1} = (-1)^n n 2^{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$, $\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = -\operatorname*{res}\limits_1 f(z)$, oba bieguny są $n$-krotne;
(f) $\operatorname*{res}\limits_0 f(z) = 1$ — biegun 5-krotny; $\operatorname*{res}\limits_1 f(z) = \operatorname*{res}\limits_{-1} f(z) = -\frac12$ — bieguny 1-krotne; w $z = \infty$ funkcja $f$ ma 7-krotne zero.

8. (a) $f(z) = z^5\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\left(\frac1z\right)^n = \sum_{n\leqslant 5}\frac{1}{(5-n)!}z^n$ dla $|z| > 0$.
(b) $4f(z) = \frac{i}{z+i} - \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{i}{z-i} - \frac{1}{(z-i)^2} = \frac{2+i}{5}(1 + \frac{w}{1+2i})^{-1} + \frac{3+4i}{25}(1 + \frac{w}{1+2i})^{-2} - \frac{i}{w}(1 + \frac1w)^{-1} - \frac{1}{w^2}(1 + \frac1w)^{-2}$ dla $w = z - z_0$, przy czym $\left|\frac{w}{1+2i}\right| < 1$ oraz $\left|\frac1w\right| < 1$ w rozważanym pierścieniu; stąd ze wzorów $(1-\zeta)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}\zeta^n$, $(1-\zeta)^{-2} = \frac{d}{d\zeta}(1-\zeta)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\zeta^n$, $|\zeta| < 1$, otrzymujemy: $f(z) = \frac{1}{100}\sum_{n\geqslant 0}\left((3+i)n + 13 + 6i\right)\left(\frac{z_0-z}{1+2i}\right)^n + \frac14\sum_{n\leqslant -1}(n+1+i)(z_0-z)^n$.
(c) $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, gdzie $a_n = a_{-n} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!(n+k)!}$ dla $n \in \mathbf{Z}_+$ (iloczyn Cauchy'ego szeregów).
(d) W pierścieniu $0 < |z| < 2\pi$ mamy: $f(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!}z^n$, gdzie $B_n$ są tzw. *liczbami Bernoulliego* (zob. np. F.Leja, *Funkcje zespolone*, str.121); jeśli więc $z_0 = 2i\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, oraz $0 < |z - z_0| < 2\pi$, to oznaczając $w = z - z_0$ dostajemy: $f(z) = \frac{w+z_0}{e^w-1} = \left(1 + \frac{z_0}{w}\right)f(w) = \sum_{n=-1}^\infty\left(\frac{B_n}{n!} + \frac{2i\pi k B_{n+1}}{(n+1)!}\right)(z-z_0)^n$ dla $0 < |z - z_0| < 2\pi$, przy czym dodatkowo oznaczyliśmy $B_{-1} := 0$.

9. Połóżmy $f(z) = \frac{az^2+bz+c}{(z-2)^2(z-i)} + h(z)$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{C}$ są dobrane tak, by $h(z)$ była regularna w $z = i$, $z = 2$. Warunek $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ daje $\lim\limits_{z\to\infty} h(z) = 0$, zatem funkcja całkowita $h$ jest ograniczona, a więc stała (tw. Liouville'a); stąd $h(z) = 0$. Mamy więc: $a = \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, $b = \lim\limits_{z\to\infty} z^2 f(z) = 1$, zaś warunek całkowy daje $\mathrm{res}_i f(z) \stackrel{!}{=} \frac1i$, czyli $i + c = \frac1i(i-2)^2$, tzn. $c = -4 - 4i$. *Odpowiedź.* $f(z) = \frac{z-4-4i}{(z-i)^2(z-2)} = \frac{-i}{z-i} + \frac{-2i}{(z-2)^2} + \frac{i}{z-2}$; dla $1 < |z| < 2$ mamy $f(z) = \sum_{n<0}(-1)^{n+1}i^n z^n - i\sum_{n\geqslant 0}(n+2)2^{-n-1}z^n$.

10. (a) $\operatorname*{res}\limits_0 f(z) + \operatorname*{res}\limits_{-3} f(z) = -\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = \operatorname*{res}\limits_0 z^{-2}f(z^{-1}) = \operatorname*{res}\limits_0 z^{-2}e^{\frac13 z}(1+3z)^{-1} = \frac{d}{dz}\Big|_{z=0}\frac{e^{\frac13 z}}{1+3z} = -\frac83$, więc $\int_C f(z)dz = -\frac{16}{3}i\pi$.
(b) $\int_C f(z)dz = 0$, gdyż $\operatorname*{res}\limits_0 \frac{\operatorname{ctg} z}{z} = 0$ wskutek parzystości funkcji. (c) $\operatorname*{res}\limits_{-1} f(z) = -\operatorname*{res}\limits_\infty f(z) = \operatorname*{res}\limits_0\left(\frac{1}{z^2}f(\frac1z)\right) = \operatorname*{res}\limits_0 \frac{1}{z^3}\cos\frac{1}{1+z} = \frac12\frac{d^2}{dz^2}\Big|_{z=0}\cos\frac{1}{1+z} = -\frac12\left[\frac{1}{(1+z)^4}\cos\frac{1}{1+z} + 2\frac{1}{(1+z)^3}\sin\frac{1}{1+z}\right]\Big|_{z=0} = -\frac12(\cos 1 + 2\sin 1)$, więc $\int_C f(z)dz = -i\pi(\cos 1 + 2\sin 1)$.

18. (a) $I = \frac{1}{4i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2(z-a)(az-1)} = \frac{\pi}{2}\sum_{|z|<1}\mathrm{res}_z f(z)$, $\mathrm{res}_0 = 1 + a^{-2}$, $\mathrm{res}_a = 1 - a^{-2}$, $\mathrm{res}_{\frac1a} = a^{-2} - 1$, więc $I = \begin{cases} \pi, & |a| < 1 \\ \pi a^{-2}, & |a| > 1 \end{cases}$
(b) $\mathrm{res}_{1+2i}\left[\frac{z^2}{z^4+6z^2+25}\right] = \frac{2-i}{16}$, $\mathrm{res}_{-1+2i}\frac{z^2}{z^4+6z^2+25} = \frac{-2-i}{16}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = 2i\pi\sum_z \mathrm{res}_z \ldots = \frac{\pi}{4}$.
(c) $\mathrm{res}_{i\sqrt{a/b}}\left(\frac{z}{a+bz}\right)^4 = \frac16\frac{d^3}{dz^3}\Big|_{z=i\sqrt{a/b}}\left(\frac{z}{bz+i\sqrt{ab}}\right)^4 = -\frac{i}{32\sqrt{a^3b^5}}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = \frac{\pi}{32}a^{-3/2}b^{-5/2}$.
(d) $\mathrm{res}_{i\pi}\left[\frac{ze^{iz}}{(z^2+\pi^2)^2}\right] = \frac{d}{dz}\Big|_{z=i\pi}\frac{ze^{iz}}{(z+i\pi)^2} = \frac{e^{-\pi}}{4\pi}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = \pi\,\mathrm{res}_{i\pi}\ldots = e^{-\pi}$.
(e) $\mathrm{res}_i\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = -\frac16 e^{-1}$, $\mathrm{res}_{2i}\left[\frac{z^3e^{iz}}{z^4+5z^2+4}\right] = \frac23 e^{-2}$, więc całkowanie po brzegu półkola $K_R^+$ daje $I = 2\pi\sum_z \mathrm{res}_z\ldots = \frac{\pi}{3e^2}(4-e)$.
(f) $\mathrm{res}_0\left[\frac{1}{z^2}\left(e^{2iaz} - e^{2ibz}\right)\right] = 2i(a-b)$, więc całkowanie po brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ daje $I = \frac{i\pi}{2}\mathrm{res}_0\ldots = \pi(b-a)$.
(g) $\mathrm{res}_{i\pi}\frac{e^{az}+e^{az/2}}{1+e^z} = -e^{i\pi a} - e^{i\pi a/2}$, więc całkowanie po brzegu prostokąta $\{z : |\mathrm{Re}\, z| < R,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < 2\pi\}$ daje $I = \frac{\pi(1+2\cos(a\pi/2))}{\sin a\pi}$.
(h) $f(z) := \frac{p(z)}{(z+1)(z+2)}$, $p(re^{i\varphi}) := \sqrt[6]{r}e^{i\varphi/6}$ dla $0 < \varphi < 2\pi$; wtedy $\mathrm{res}_{-1}f(z) = e^{i\pi/6}$, $\mathrm{res}_{-2}f(z) = -\sqrt[6]{2}e^{i\pi/6}$; całkując po brzegu obszaru $K_R \setminus [0,R]$ dostajemy $I = \frac{\pi(\sqrt[6]{2}-1)}{\sin(\pi/6)}$.(i) Stosując kontur taki sam jak w (f), wobec $\mathrm{res}_{-1}f(z) = \frac{\pi}{2} + i$, dostajemy $I = -\pi$.

Obliczyć, korzystając z twierdzeń o całkach z parametrem:
(a) $F(a) := \int_0^\infty \exp\bigl(-x^2 - a^2x^{-2}\bigr)dx$ dla $a \in \mathbf{R}$; (b) $\Phi(a,b) := \int_0^\infty \exp\bigl(-a^2x^2 - b^2x^{-2}\bigr)dx$ dla $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $a \neq 0$;
(c) $F(a) := \int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos ax}{x}dx$ dla $a \in \mathbf{R}$; (d) $F(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2 - \sin^2 x)dx$ dla $a > 1$;
(e) $F(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 - a^2\sin^2 x)dx$ dla $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

## Rozwiązania

(a) $\frac{\partial f}{\partial a} = -2ax^{-2}\exp\bigl(-x^2 - a^2x^{-2}\bigr)$, przy czym można założyć, że $a > 0$ (parzystość). Otóż $\sup_{a>0} |\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = |\frac{\partial f}{\partial a}(\frac{x}{\sqrt{2}}, x)| = \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}e^{-x^2}$ (bo pochodna wzgl. $a$ ma postać $(1 - \frac{2a^2}{x^2})\exp(...)$), przy czym, niestety, funkcja $\mathbf{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}e^{-x^2}$ nie jest całkowalna. Niemniej jednak ustalając (chwilowo) dowolne $c > 0$ mamy: $g(x) := \sup_{a>c} |\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{e}}x^{-1}\exp(-x^2), & \frac{x}{\sqrt{2}} \geqslant c, \text{ tzn. } x \in \bigl[c\sqrt{2}, \infty\bigl[ \\ 2cx^{-2}\exp(-x^2 - c^2x^{-2}), & \frac{x}{\sqrt{2}} \leqslant c, \text{ tzn. } x \in \bigl]0, c\sqrt{2}\bigr] \end{cases}$, przy czym $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$, gdyż $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, co daje ciągłość, a tym bardziej całkowalność na zwartym przedziale $\bigl]0, c\sqrt{2}\bigr]$. Tak więc dla $a > c$ (a więc, dzięki dowolności $c > 0$, dla wszystkich $a > 0$) funkcja $F$ jest różniczkowalna oraz $F'(a) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(a,x)dx$. Podstawiając $\frac{a}{x} = t$ w tej całce dostajemy $F'(a) = -2\int_0^\infty \exp\bigl(-x^2 - a^2t^{-2}\bigr)dx$, a zatem $\boxed{F'(a) + 2F(a) = 0 \text{ dla } a > 0}$. Stąd oraz z $F(-a) = F(a)$ wynika, że $\exists C \in \mathbf{R} : \forall a \neq 0 : F(a) = C\,e^{-2|a|}$. Aby wyznaczyć stałą $C$ skorzystamy z tego, że $F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ oraz z ciągłości $F(0) = F(0^+)$; ciągłość ta wynika z istnienia całkowalnej majoranty: $\forall a : |f(a,x)| \leqslant e^{-x^2} =: h(x)$, $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}_+)$.

*Odpowiedź.* $F(a) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2|a|}$ dla $a \in \mathbf{R}$.

(b) Podstawiając $x = \frac{t}{|a|}$ otrzymujemy $\Phi(a,b) = |a|^{-1}F(|a|\,b)$ (patrz (a)), więc $\Phi(a,b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}e^{-2|ab|}$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = e^{-x}\sin ax$, więc $|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| \leqslant g(x) := e^{-x}$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$, zatem można różniczkować pod całką: $F'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\sin ax\,dx = -\frac{1}{1+a^2}\bigl[e^{-x}(a\cos ax + \sin ax)\bigr]_0^\infty = \frac{a}{1+a^2}$. Stąd, skoro $F(0) = 0$, dostajemy $F(a) = \frac{1}{2}\log(1 + a^2)$;

(d) $|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)| = \frac{2a}{a^2-\sin^2 x}$ jest malejąca względem $a$, więc $\sup_{a>1} |...| = \frac{2}{1-\sin^2 x}$, co nie jest całkowalne na $[0, \frac{\pi}{2}]$. Jednakże dla ustalonego $c > 1$ mamy $\sup_{a>c} |...| = \frac{2c}{c^2-\sin^2 x} =: g(x)$, co jest funkcją ciągłą, a więc całkowalną na zwartym przedziale. Zatem $F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\,dx}{a^2-\sin^2 x} = ... = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, więc $\exists C : \forall a > 1 : F(a) = C + \pi\log\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$.
Wyznaczenie stałej $C$: Sposób 1. Odejmując od $F(a)$ stałą $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(a^2)dx = \pi\log a$ dostajemy tożsamość $I(a) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 - \frac{\sin^2 x}{a^2}dx = C + \pi\log\frac{1+\sqrt{1-a^{-2}}}{2}$; przy tym $\lim_{a\to\infty} I(a) = 0$, gdyż $\frac{\pi}{2}\log(1 - \frac{1}{a^2}) \leqslant I(a) \leqslant 0$, więc przy $a \longrightarrow \infty$ dostajemy $C = 0$. Sposób 2. Wykażemy, że $F(0) = F(0^+)$, tzn. że $F$ jest ciągła prawostronnie w $a = 1$. Wystarczy w tym celu pokazać, że $f(a,x)$ mają całkowalną majorantę: Niech $c > 1$ ustalone; wtedy dla $1 \leqslant a \leqslant c$ mamy $a^2 - \sin^2 x \geqslant 1 - \sin^2 x \geqslant \frac{1-\sin^x}{c^2}$ oraz $(a^2 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 x) \leqslant a^2 \leqslant c^2$, więc $\frac{1-\sin^2 x}{c^2} \leqslant a^2 - \sin^2 x \leqslant \frac{c^2}{1-\sin^2 x}$, więc $|f(a,x)| \leqslant g(x) := \log\frac{c^2}{\cos^2 x} = 2\log c - 2\log\cos x$, przy czym $g \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}]$. Obliczenie $F(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx =: I$: Całkując po $[0,\pi]$ obie strony tożsamości $\log\sin x = \log 2 + \log\sin\frac{x}{2} + \log\cos\frac{x}{2}$ dostajemy $I = \pi\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos t\,dt = \pi\log 2 + 2I$, czyli $I = F(1) = -\pi\log 2$, tzn. $C = 0$.
Uwaga. Prościej: $1 \leqslant a \leqslant 2 \Rightarrow \log\cos^2 x \leqslant f(a,x) \leqslant \log(4-\sin^2 x) \Rightarrow |f(a,x)| \leqslant |\log\cos^2 x| + \log(4-\sin^2 x) \in \mathcal{L}^1$.
(e) $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{-2a\sin^2 x}{1-a^2\sin^2 x}$ więc $|a| < c < 1 \Rightarrow |\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) \leqslant \frac{2c}{1-c^2} \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$, więc można różniczkować pod całką: $F'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2a\sin^2 x\,dx}{1-a^2\sin^2 x} = \left\| \begin{matrix} x = \operatorname{arc\,tg} t \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int_0^\infty \frac{-2at^2dt}{(1+t^2)[1+(1-a^2)t^2]} = \frac{2}{a}\int_0^\infty \bigl(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+(1-a^2)t^2}\bigr)dt = \frac{2}{a}\frac{\pi}{2}\bigl(1 - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\bigr)$.
Zatem $F(a) = C + \pi\log(1 + \sqrt{1-a^2}) + C$; skoro $F(0) = 0$, to $C = -\pi\log 2$, więc *Odpowiedź.* $F(a) = \pi\log\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$.
Uwaga. $F(a)$ jest ciągła na końcach przedziału $[-1,1]$, gdyż $\log(1 - \sin^2 x) \leqslant \log(1 - a^2\sin^2 x) \leqslant 0$ daje $|f(a,x)| \leqslant |\log\cos^2 x| \in \mathcal{L}^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

# Zadania z Analizy Matematycznej

# dla grupy 10. i 11.

**Seria 14** **Styczeń 1997**

1. Sprawdzić, czy dany funkcjonał $T : \mathcal{D}(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ jest dystrybucją; jeśli tak, określić nośnik $T$ oraz wskazać najmniejszą z trzech przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{S}'(\mathbf{R}) \supset \mathcal{E}'(\mathbf{R})$, do których $T$ należy. (a) $T(\varphi) := \sum_{n\in\mathbf{Z}} \varphi(n)$; (b) $T(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^x \varphi(x)dx$; (c) $T(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{-\frac{3}{2}}(\sin x)\,\varphi(x)dx$; (d) $T(\varphi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big(\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)\big)$.

2. Sprawdzić, że: (a) wzór $T(\varphi) := \int_0^{\infty} \varphi(x)\log x\,dx$ (całka niewłaściwa Riemanna) określa dystrybucję $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$; (b) pochodne $T'$, $T''$ dane są wzorami: $T'(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\big(\int_r^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)\cdot\log r\big) = \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_1^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx$, $T''(\varphi) = \varphi'(0) + \lim_{r\searrow 0}\left[\frac{\varphi(0)}{r} - \varphi'(0)\log r - \int_r^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx\right] = \varphi(0) + \varphi'(0) - \int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0)}{x^2}dx - \int_0^{\infty}\frac{\phi(x)}{x^2}dx$; uzasadnić zbieżność powyższych całek. (c) Znaleźć jakąś dystrybucję $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, której pochodną jest $S' = T$.

3. Niech $x_0 \in \mathbf{R}$ i niech $f \in C^n(\mathbf{R}\setminus\{x_0\})$ będzie funkcją mającą jednostronne granice $f^{(k)}(x_0^{\pm}) := \lim_{x\to x_0^{\pm}} f^{(k)}(x)$. Wyprowadzić wzór $\boxed{(T_f)^{(n)} = T_{f^{(n)}} + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}\left(f^{(n-k)}; x_0\right)\cdot \delta_{x_0}^{(k-1)}}$, gdzie $\mathcal{D}\left(f^{(l)}; x_0\right) := f^{(l)}(x_0^+) - f^{(l)}(x_0^-)$ oznacza wartość skoku $f^{(l)}$ w punkcie $x_0$. Uogólnić ten wzór na przypadek funkcji $f \in C^n(\mathbf{R}\setminus\{x_1, ..., x_m\})$.

4. Niech $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oznacza *funkcję Heaviside'a* $\theta(x) := \left\{\begin{smallmatrix} 0, & x<0 \\ 1, & x\geqslant 0\end{smallmatrix}\right.$, a $T = T_f$ — dystrybucję odpowiadającą danej funkcji $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, tzn. $T(\varphi) := \int f(x)\varphi(x)dx$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Obliczyć: (a) $T'' + a^2T$, jeśli $f(x) := \theta(x)\sin ax$; (b) $T^{(n)}$, jeśli $f(x) := \theta(x)x^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$; (c) $T' - aT$, jeśli $f(x) := \theta(x)e^{ax}$; (d) $T^{(4)} - T$, jeśli $f(x) := |x|\sin x$; (e) $T''$, jeśli $T = T_f$, gdzie $f(x) = \theta(x)|x|^{\frac{1}{2}}$ (wyrazić $T''(\varphi)$ tak, by pod znakiem całki nie było pochodnych $\varphi$).

5. Obliczyć wszystkie pochodne dystrybucji $T = T_f$: (a) $f(x) := |x|$; (b) $f(x) := \max\big(1-|x|, 0\big)$; (c) $f(x) := |\sin x|$.

6. Sprawdzić, że "pochodną dystrybucyjną «funkcji» $\log|x|$ jest $P(\frac{1}{x})$", tzn. że dla $f(x) := \log|x|$ pochodna ${T_f}'$ dana jest wzorem ${T_f}'(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\int_{|x|\geqslant r}\frac{1}{x}\varphi(x)dx =: U(\varphi)$. Pokazać, że *rząd* dystrybucji $U$ wynosi 1 (a nie 0, jak może sugerować brak pochodnych $\varphi$ we wzorze na $U(\varphi)$).

7. Dowieść, że każda dystrybucja $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ma *dystrybucję pierwotną*, tzn. $\exists S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}) : S' = T$.

8. Wykazać, że dla $f \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ oraz $n \in \mathbf{N}$ zachodzi następujący wzór: $f\cdot\delta_{x_0}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)\cdot\delta_{x_0}^{(k)}$.

9. Dowieść, że jeśli $T, T_n \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ oraz $T_n \longrightarrow T$, tzn. w sensie *słabej zbieżności w* $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, tzn. $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ : $T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$, to $T_n' \longrightarrow T'$; oznacza to, że różniczkowanie w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ jest przemienne z operacją przechodzenia do (słabej) granicy, tzn. *operacja różniczkowania* $T \mapsto T'$ *jest* (słabo) *ciągła.*

10. Dowieść, że jeśli $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ dla $n \in \mathbf{N}$, $f_n \longrightarrow f$ p.w. w $\mathbf{R}$ oraz $\exists g \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}) : \forall n \in \mathbf{N} : |f_n| \leqslant g$ p.w. w $\mathbf{R}$, to $T_{f_n} \longrightarrow T_f$ w sensie słabej zbieżności w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

11. Oznaczmy $f_n(x) := \frac{\sin nx}{x}$. Wykazać, że $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \pi\varphi(0)$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, tzn. $\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \pi\delta_0$.

12. Niech $f \in C(\mathbf{R})$ spełnia warunek $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$; oznaczmy $F(x) := \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$; niech $f_n(x) := nf(nx)$ i $F_n(x) := F(nx)$. Wykazać, że $T_{F_n} \longrightarrow T_\theta$ oraz $T_{f_n} \longrightarrow \delta_0$ w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, tzn. "$F_n$ jest przybliżeniem $\theta(x)$, a $f_n(x)$ — przybliżeniem delty Diraca dla $n \to \infty$". Wykorzystać to do sprawdzenia, że następujące ciągi funkcyjne: (a) $f_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2x^2+1)}$; (b) $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}n^2x^2)$; (c) $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\big(\frac{\sin nx}{x}\big)^2$ są "przybliżeniami delty Diraca".

13. Dla $n \in \mathbf{Z}$ oznaczmy $e_n(x) := e^{inx}$, a więc $e_n \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ spełnia warunek $\exists C > 0, r > 0 : \forall n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 : |a_n| \leqslant C|n|^r$, to szereg $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T_{e_n}$ jest zbieżny w przestrzeni $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

14. Wykazać dla $n = 1$, że jeśli $\widehat{f}$ oznacza transformatę Fouriera funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $\widehat{f}(p) := \int f(x)e^{i\langle p,x\rangle}dx$, to $\widehat{\widehat{f}}(-p) = (2\pi)^n f(p)$.

## Odpowiedzi i rozwiązania

1. (a) $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, gdyż jeśli $\varphi \in \mathcal{D}$ i $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$, to $|T(\varphi)| \leqslant (b-a)\sup|\varphi|$; co więcej, $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$, gdyż dla $\varphi \in \mathcal{S}$ mamy $|T(\varphi) \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|n|)^2} N(\varphi) = \mathrm{const}\cdot N(\varphi)$, gdzie $N(\varphi) := \sup_x (1+|x|)^2|\varphi(x)|$ jest półnormą na $\mathcal{S}$; oczywiście $\operatorname{supp} T = \mathbf{Z}$, więc $T \notin \mathcal{E}'(\mathbf{R})$. (b) $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, gdyż (oprócz liniowości) mamy $|T(\varphi)| \leqslant C \sup|\varphi|$, $C = \int_a^b e^x dx$, jeśli $\varphi \in \mathcal{D}$ i $\operatorname{supp}\varphi \subset [a,b]$; oczywiście $\operatorname{supp} T = \mathbf{R}$, więc $T \notin \mathcal{E}'$; także $T \notin \mathcal{S}'$, gdyż np. dla $\varphi(x) := e^{-\sqrt{1+x^2}}$ mamy $\varphi \in \mathcal{S}$, lecz całka $T(\varphi)$ jest rozbieżna. (c) $T \in \mathcal{S}'$, gdyż $f(x) = |x|^{-\frac{3}{2}}\sin x$ jest całkowalna na $\mathbf{R}$, skąd $|T(\varphi)| \leqslant C\,N(\varphi)$, gdzie $C := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$, $N(\varphi) := \sup|\varphi(\mathbf{R})|$. Oczywiście $\operatorname{supp} T = \mathbf{R}$, więc $T \notin \mathcal{E}'$. (d) $\exists x_n \in [0,1] : \varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0) = \frac{1}{n}\varphi'(x_n)$ (tw. Lagrange'a), więc $|T(\varphi)| = |\sum_n \frac{1}{n^2}\varphi'(x_n)| \leqslant C \sup|\varphi'([0,1])|$, gdzie $C = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, zatem $T \in \mathcal{D}'$ (a nawet $T \in \mathcal{S}'$), przy czym $\operatorname{supp}\varphi = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\} \subset [0,1]$, więc $T \in \mathcal{E}'(\mathbf{R})$.

2. (a) $T = T_f$, gdzie $f(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \log x, & x > 0 \end{cases}$ jest lok. całkowalna: $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$. (b) $T'(\varphi) = -T(\varphi')$, przy czym $\int_r^\infty \varphi'(x)\log x\,dx = \Big\|{}^{\log x}_{\varphi'(x)}\Big|{}^{1/x}_{\varphi(x)}\Big\| = -\int_r^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx - \varphi(r)\log(r)$ oraz $\int_0^1 \varphi'(x)\log x\,dx = \Big\|{}^{\log x}_{\varphi'(x)}\Big|{}^{1/x}_{\varphi(x)-\varphi(0)}\Big\| = -\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx$ (gdyż $x\log x \xrightarrow{x\searrow 0} 0$). Podobnie przekształcić należy całki w $T''(\varphi) = -T'(\varphi')$. (c) Na przykład $S(\varphi) := \int_0^\infty x(\log x - 1)\varphi(x)\,dx$.

3. ${T_f}'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\big(\int_{-\infty}^{x_0} + \int_{x_0}^{+\infty}\big) f(x)\varphi'(x)dx = \Big\|{}^{f(x)}_{\varphi'(x)}\Big|{}^{f'(x)}_{\varphi(x)}\Big\| = -f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx$, zatem ${T_f}' = T_{f'} + \mathcal{D}(f;x_0)\delta_{x_0}$, co dowodzi tezy dla $n = 1$. Krok indukcyjny: ${T_f}^{(n+1)} = \big(T_{f^{(n)}} + \sum_{k=1}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k-1)}\big)' = T_{f^{(n+1)}} + \mathcal{D}(f^{(n)};x_0)\delta_{x_0} + \sum_{k=1}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k)} = T_{f^{(n+1)}} + \sum_{k=0}^n s_{n-k}\delta_{x_0}^{(k)}$, gdzie $s_{n-k} := \mathcal{D}(f^{n-k};x_0) = \mathrm{const}$; to kończy dowód.

4. (a) $a\cdot\delta_0$; (b) $(n-1)!\cdot\delta_0$; (c) $\delta_0$; (d) $4\delta_0 - 4\,T_g$, gdzie $g(x) := \operatorname{sgn} x\cdot\cos x$; (e) $T''(\varphi) = T(\varphi'') = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}\varphi''(x)dx = \Big\|{}^{x^{1/2}}_{\varphi''(x)}\Big|{}^{\frac{1}{2}x^{-1/2}}_{\varphi'(x)}\Big\| = -\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\varphi'(x)dx = \Big\|{}^{-\frac{1}{2}x^{-1/2}}_{\varphi'(x)}\Big|{}^{\frac{1}{4}x^{-3/2}}_{\varphi(x)-\varphi(0)}\Big\| = -\frac{1}{4}\int_0^\infty x^{-\frac{3}{2}}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)dx$ (należy zauważyć, że wszystkie te całki są zbieżne). Alternatywna postać: $T''(\varphi) = \lim_{r\searrow 0}\int_r^\infty x^{\frac{1}{2}}\varphi''(x) = \ldots$ całkowanie przez części $\ldots = \lim_{r\searrow 0}\big(\frac{\varphi(r)-2r\varphi'(r)}{2\sqrt{r}} - \frac{1}{4}\int_r^\infty x^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)dx\big)$.

5. (a) $T' = T_{\mathrm{sgn}}$, $T^n = 2\delta_0^{(n-1)}$ dla $n \geqslant 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|x-1| - |x|$, więc z (a) wynika $T' = T_h$, $T^{(n)} = \frac{1}{2}\delta_{-1}^{(n-1)} + \frac{1}{2}\delta_1^{(n-1)} - \delta_0^{(n-1)}$ dla $n \geqslant 2$, gdzie $h(x) := \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x+1) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-1) - \operatorname{sgn}(x) = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$; (c) $T^{(2k)} = (-1)^k\big[T_f - 2\sum_{0\leqslant l<k}(-1)^l U^{(2l)}\big] = (-1)^k\big[T_f - 2U + 2U'' - \ldots + (-1)^k 2u^{(2k-2)}\big]$, $T^{(2k+1)} = (-1)^k\big[T_g - 2\sum_{0\leqslant l<k}(-1)^l U^{(2l)}\big] = (-1)^k\big[T_g - 2U' + 2U''' - \ldots + (-1)^k 2U^{(2k-1)}\big]$, gdzie $U := \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta_{m\pi} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ oraz $g(x) := \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x$ (zastosować indukcję względem $k \geqslant 0$).

6. Całkowanie przez części daje $-\int_{|x|\geqslant r}\log|x|\cdot\varphi'(x)dx = \big(\varphi(r) - \varphi(-r)\big)\log r + \int_{|x|\geqslant r}\frac{1}{x}\varphi(x)dx$, skąd wzór na ${T_f}'$. Dla $n \in \mathbf{N}$ istnieje nieparzysta funkcja $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, taka że $\varphi_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \frac{1}{2n} \leqslant |x| \leqslant 1 - \frac{1}{2n} \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$ oraz $\sup|\varphi_n| = 1$. Wtedy $U(\varphi_n) \geqslant 2\int_{1/(2n)}^{1-1/(2n)}\frac{dx}{x} = 2\log(2n-1)$, więc dla $K = [-1,1]$ nie istnieje oszacowanie $\forall\varphi \in \mathcal{D}(K) : |U(\varphi)| \leqslant C \sup|\varphi(K)|$, tzn. $U$ ma rząd $> 0$. Zarazem jeśli $K \subset \mathbf{R}$ jest zwarty i $C := \int_K \big|\log|x|\big|dx$, to $|U(\varphi)| = \big|\int_K \log|x|\,\varphi'(x)dx\big| \leqslant C \sup|\varphi'(K)|$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, więc rząd $U$ równy jest 1.

7. Tożsamość $S(\varphi') = -T(\varphi)$ sugeruje określenie $S(\varphi) := -T(\widetilde{\varphi})$, gdzie $\widetilde{\varphi}(x) := \int_{-\infty}^x \varphi(t)dt$; jednak wzór ten wymaga korekty, gdyż nie zawsze $\widetilde{\varphi}$ ma zwarty nośnik: $\lim_{x\to\infty}\widetilde{\varphi}(x) = I(\varphi) := \int_{-\infty}^\infty \varphi(t)dt$. Weźmy dowolną *ustaloną* $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R})$, taką że $\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$; wtedy $\widetilde{\varphi} - I(\varphi)\cdot\lambda \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ dla $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, więc ma sens definicja $S(\varphi) := -T\big(\widetilde{\varphi} - I(\varphi)\cdot\lambda\big)$; przy tym $S \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ i $S'(\varphi) = -S(\varphi') = T(\varphi)$, gdyż jak widać, $\widetilde{\varphi'} = \varphi$ oraz $I(\varphi') = 0$. Oczywiście inny wybór $\lambda$ spowoduje dodanie do $S$ krotności $I = T_1$, czyli "stałej".

8. Iloczyn $f\cdot T$ dla $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ oraz $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ określony jest wzorem $(f\cdot T)(\varphi) := T(f\cdot\varphi)$ (sensownym, gdyż $f\cdot\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$); wystarczy więc skorzystać z uogólnionej reguły Leibniza $(f\cdot\varphi)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}\varphi^{(k)}$ i wzoru $\delta_{x_0}^{(k)}(\varphi) = (-1)^k\delta_{x_0}(\varphi^{(k)}) = (-1)^k\varphi^{(k)}(x_0)$.

10. Jeśli $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ oraz $\operatorname{supp}\varphi \subset [x_1,x_2]$, to $g|\varphi| \in \mathcal{L}^1([x_1,x_2])$ jest majorantą dla ciągu $f_n\varphi \longrightarrow f\varphi$, więc z tw. Lebesgue'a o zmajoryzowanym przechodzeniu z granicą pod znak całki wynika, że $T_{f_n}(\varphi) \longrightarrow T(\varphi)$.

11. Funkcja $F(x) := \int_{-\infty}^x \frac{\sin t}{t}dt$ jest ciągła, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = \pi$ oraz $F(0) = \frac{1}{2}\pi$; stąd $\lim_{n\to\infty} F(nx) = \pi\theta(x)$ p.w. na $\mathbf{R}$, przy czym $|F(nx)| \leqslant g(x) := \mathrm{const} \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, gdzie $\mathrm{const} := \sup|F(\mathbf{R})| < \infty$. Korzystając z 10. dostajemy $\lim_{n\to\infty} T_{F_n} = \pi\cdot T_\theta$, a więc z 9. wynika $\lim_{n\to\infty} T_{F_n'} = \pi\cdot\delta_0$, przy czym $F_n'(x) = \frac{d}{dx}F(nx) = nF'(nx) = n\frac{\sin nx}{nx} = f_n(x)$, QED.

12. $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest ciągła, $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, więc $F$ jest ograniczona; mamy więc majorantę $C\,|\varphi(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ dla ciągu $F_n(x)\varphi(x) \longrightarrow \theta(x)\varphi(x)$, co daje $T_{F_n} \longrightarrow T_\theta$. Stąd i z zadania 9. wynika teza.

13. Jeśli $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, to $T_{e_n}(\varphi) = \int e^{inx}\varphi(x)dx = \widehat{\varphi}(n)$, gdzie $\widehat{\varphi}$ jest transformatą Fouriera $\varphi$; przy tym $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ daje $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, więc $M := \sup_{p\in\mathbf{R}}|p|^{r+2}|\widehat{\varphi}(p)| < \infty$ oraz dla $n \neq 0$ mamy $|a_n\widehat{\varphi}(n)| \leqslant \frac{C}{n^2}|n|^{r+2}|\widehat{\varphi}(n)| \leqslant \frac{C\,M}{n^2}$, więc szereg $\sum_n T_{e_n}(\varphi)$ jest zbieżny, QED. Inny sposób. Weźmy $k \in \mathbf{N}$ tak duże (np. $k > r+1$), by zbieżny był szereg $\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{|n|^k}$; wtedy szereg funkcyjny $f(x) := \sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{(in)^k}e^{inx}$ jest bezwzgl. zbieżny i ma lok. całkowalną (stałą!) majorantę, więc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$; stąd i z zadania 10. wynika, że $\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{(in)^k}T_{e_n} = T_f$ (słaba zbieżność w $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$), więc różniczkując $k$-krotnie i korzystając z wyniku 9. dostajemy tezę.

14. Przestawiając kolejność całkowania otrzymujemy dla $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ tożsamość $\int \widehat{f}(x)g(x)e^{-ipx}dx = \int f(x+p)\widehat{g}(x)dx$. Biorąc $g(x) = g_n(x) := \exp(-\frac{1}{2}n^{-2}x^2)$ mamy $\widehat{g}(x) = n\sqrt{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}n^2x^2)$, więc $\int \widehat{f}(x)e^{-ipx}dx = \lim_{n\to\infty}\int \widehat{f}(x)g_n(x)e^{-ipx}dx = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\int n\exp(-\frac{1}{2}n^2x^2)f(x+p)dx = 2\pi f(p)$ dzięki tw. Lebesgue'a i 12.(b), co dowodzi tezy.