1. Rozwiązać równanie (w szczególności podać liczbę rozwiązań), traktując $a \in \mathbf{R}$ jako dany parametr:
$$1 + \tfrac{x}{2} - \sqrt{1+x} = \tfrac{a}{2}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

2. Dowieść, że każde koło $K(\boldsymbol{a};1) \subset \mathbf{R}^2$ zawiera co najwyżej cztery punkty zbioru $L := \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (tzn. punkty, których obie współrzędne są całkowite).

Niech $K := K(;1)$ oraz $_0 = (x_0, y_0) \subset K \cap L$. Zauważmy, że średnica K wynosi 2, gdyż jeśli $, ' \in K$, to $d(,') \leqslant d(,)+d(,') < 1+1$. Zatem jeśli $= (m,n) \in L$ oraz $_0 + \in K$, to $|||| < 2$, czyli $m^2+n^2 < 4$. Zatem $m,n \in \{-1,0,1\}$, czyli $K \cap L \subset \big\{_0 + (m,n) :\ m,n \in \{-1,0,1\}\big\}$. Przy tym jeśli np. $_0 + (1,1) \in K$, to do $K \cap L$ mogą należeć tylko takie punkty, że $m,n \in \{-1,0\}$, jest ich 4. Podobnie jeśli...

3. Niech symbol $\mathrm{E}(x)$ oznacza *część całkowitą* liczby $x \in \mathbf{R}$, tzn. największą z liczb całkowitych niewiększych od x. Dowieść, że dla $n \in \mathbf{N}$ zachodzi równoważność: $\mathrm{E}(\sqrt{n-1}\,) < \mathrm{E}(\sqrt{n}\,) \iff \sqrt{n} \in \mathbf{N}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Jeśli $k = \sqrt{n} \in \mathbf{N}$, to $\sqrt{n-1} < \sqrt{n} = k$, więc także $\mathrm{E}(\sqrt{n-1}\,) < k = \mathrm{E}(\sqrt{n}\,)$. $\boxed{\Rightarrow}$ *Ad absurdum*: Niech $k := \mathrm{E}(\sqrt{n}\,)$, wtedy $k \leqslant \sqrt{n}$, więc $k^2 \leqslant n$; zarazem $k^2 \neq n$, gdyż $\sqrt{n} \notin \mathbf{N}$, a zatem $k^2 < n$, czyli $k^2 \leqslant n-1$, tzn. $k \leqslant \sqrt{n-1}$. Stąd $k \leqslant \mathrm{E}(\sqrt{n-1}\,) \leqslant \mathrm{E}(\sqrt{n}\,) = k$, a więc $k = \mathrm{E}(\sqrt{n-1}\,) = \mathrm{E}(\sqrt{n}\,)$, co kończy dowód.

4. Wykazać, że dla każdego $\alpha \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $\sqrt{2+2\sin\alpha} = 2\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

5. Niech $l := |A \setminus B| - |A| + |B|$, gdzie A i B są zbiorami skończonymi, a $|X|$ oznacza *liczbę elementów zbioru* X. Zbadać, kiedy liczba l jest dodatnia, kiedy ujemna, a kiedy jest zerem.

6. Ile jest podzbiorów $P \subset \overline{1,12}$, spełniających następujący warunek: $\quad \forall k,l \in P :\ \big(|k-l| > 1 \text{ lub } k = l\big)$?

7. Sprawdzić, że jeśli $x,y,z \in \mathbf{R}$, to: (a) $\left|\frac{x-y}{2}\right| + \left|\frac{x+y}{2}\right| = \max\big(|x|,|y|\big)$; (b) $\max\big(|x-y|,|x+y|\big) = |x|+|y|$; (c) $|x-y|+|y-z|+|z-x| = 2(M-m)$, gdzie $m = \min(x,y,z)$, $M = \max(x,y,z)$.

8. Znaleźć liczbę $n \leqslant 10^6$, mającą maksymalną wartość $\mathrm{LD}(n)$ (liczby dzielników).

Jeśli $n = 2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}\ldots p_r^{k_r}$, to $\mathrm{LD}(n) = (k_1+1)\ldots(k_r+1)$ i szukając maksimum możemy się ograniczyć do $k_1 \geqslant k_2 \ldots \geqslant k_r$. Istotnie, jeśli $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_r$, zaś ciąg $k'_1,\ldots,k'_r$ różni się od $k_1,\ldots,k_r$ tylko kolejnością wyrazów, to oczywiście $\mathrm{LD}(n') = \mathrm{LD}(n)$; natomiast $n := 2^{k_1}\ldots p_r^{k_r} \leqslant n' := 2^{k'_1}\ldots p_r^{k'_r}$, gdyż biorąc $q_1 = 2$, $q_2 = \frac{3}{2}$, $q_3 = \frac{5}{3}$, $\ldots$, $q_r = \frac{p_r}{p_{r-1}}$ mamy $p_j = q_1\ldots q_j$, więc $n = q_1^{k_1+\ldots+k_r}q_2^{k_2+\ldots+k_r}\ldots q_r^{k_r}$, analogicznie $n' = q_1^{k'_1+\ldots+k'_r}q_2^{k'_2+\ldots+k'_r}\ldots q_r^{k'_r}$, a przy tym $q_j > 1$ oraz $k_j+\ldots+k_r \leqslant k'_j+\ldots+k'_r$ (i choć jedna z tych nierówności jest ostra). Stosując następujący algorytm:

```
macro MAX to <Alt1> trans {push_undo; int A,B,C,D,E,F,G,L;
real NA,NB,NC,ND,NE,NF,NG,Z=1000000.;
 G=0; NG=1.; while(NG<=Z)     // NG=(2*3*5*7*11*13*17)^G
{F=G; NF=NG; while(NF<=Z)     // NF=(2*3*5*7*11*13)^F*17^G
{E=F; NE=NF; while(NE<=Z)     // NE=(2*3*7*11)^E*13^F*17^G
{D=E; ND=NE; while(ND<=Z)     // ND=(2*3*5*7)^D*11^E*13^F*17^G
{C=D; NC=ND; while(NC<=Z)     // NC=(2*3*5)^C*7^D*11^E*13^F*17^G
{B=C; NB=NC; while(NB<=Z)     // NB=(2*3)^B*5^C*7^D*11^E*13^F*17^G
{A=B; NA=NB; while(2.*NA<=Z)  // NA=2^A*3^B*5^C*7^D*11^E*13^F*17^G
{NA=2.*NA;A++;}
{L=(A+1)*(B+1)*(C+1)*(D+1)*(E+1)*(F+1)*(G+1); cr;
text('A='+str(A)+', B='+str(B)+', C='+str(C)+', D='+str(D)+', E='+str(E)+
', F='+str(F)+', G='+str(G)+';   L='+str(L)+',  N='+rstr(NA,8,0)) ;}
B++; NB=6.*NB;}         // 2*3
C++; NC=30.*NC;}        // 2*3*5
D++; ND=210.*ND;}       // 2*3*5*7
E++; NE=2310.*NE;}      // 2*3*5*7*11
F++; NF=30030.*NF;}     // 2*3*5*7*11*13
G++; NG=510510.*NG;}    // 2*3*5*7*11*13*17
pop_undo;}
```

uzyskałem następującą odpowiedź: maksymalną wartością $\mathrm{LD}(n)$ dla $n \leqslant 10^6$ jest liczba **240**, osiągana dla trzech argumentów: $n_1 = 2^4 3^2 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 720\,720$, $n_2 = 2^4 3^3 5^2\cdot 7\cdot 11 = 831\,600$ i $n_3 = 2^5 3^4 5\cdot 7\cdot 11 = 997\,920$.

9. Ciekawa bijekcja (kwadratu na trójkąt): Określmy $F : \square \to \triangle$, gdzie $\square = [0,1]^2 = \{(x,y) :\ x,y \in [0,1]\}$, $\triangle = \{(t,u) : 0 \leqslant t, 0 \leqslant u, t+u \leqslant 1\}$, wzorem $F(x,y) = (x-xy, xy)$; 'tabelka wartości':

$\boldsymbol{p}$	$[0,i]$	1	h
$F(\boldsymbol{p})$	0	1	i

gdzie $i = (0,1)$, $h = (1,1) = 1+i$. $F'(x,y) = \begin{bmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{bmatrix}$, $\det F'(x,y) = x$. Odwzorowanie F jest bijekcją $\square^* = \square \setminus [0,i]$ (kwadrat bez boku $x=0$) na $\triangle^* = \triangle \setminus \{(0,0)\}$; tym bardziej $F : \mathrm{Int}\square \xrightarrow{\equiv} \mathrm{Int}\triangle$. Odwrotność $G = F^{-1} : \triangle^* \xrightarrow{\equiv} \square^*$ ma postać $G(t,s) = \left(s, \frac{u}{s}\right)$, gdzie $s := t+u$; $G'(t,u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{u}{s^2} & \frac{t}{s^2} \end{bmatrix}$, $\det G'(t,u) = \frac{1}{s} > 0$.

10. Funkcja $f : I \to \mathbf{R}$, określona na podzbiorze $I \subset \mathbf{R}$, jest taka, że dla każdej trójki $x_1,x_2,x_3 \in I$ punkty $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$ i $(x_3,f(x_3))$ są współliniowe. Dowieść, że $\exists a,b \in \mathbf{R} :\ \forall x :\ f(x) = ax+b$.

1. Jeśli relacja $\leqslant$ jest *częściowym porządkiem* w zbiorze Y (tzn. jest zwrotna, przechodnia i antysymetryczna: $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_1 \Rightarrow y_1 = y_2$), zaś $f : X \to Y$, to relacja w X, zwana *f-cofnięciem relacji* $\leqslant$, dana wzorem $x \prec x' \overset{\text{def}}{\iff} f(x) \leqslant f(x')$, jest zwrotna i przechodnia, ale niekoniecznie antysymetryczna. Poniższe zadanie pokazuje, że każdą relację zwrotną i przechodnią można otrzymać w taki sposób: Niech $\prec$ będzie relacją zwrotną i przechodnią([1]) w zbiorze X. Określmy $\mathcal{R} := \{(x, x') : x \prec x' \prec x\}$. Sprawdzić, że:

(a) $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności; (b) na zbiorze klas $Y = X/\mathcal{R}$ da się określić (i to tylko na jeden sposób) taką relację $\leqslant$, że $\forall x, x' \in X : x \prec x' \iff [x]_\mathcal{R} \leqslant [x']_\mathcal{R}$; (c) relacja $\leqslant$ jest częściowym uporządkowaniem zbioru Y.

2. Przykłady relacji quasiporządkujących:

(1) $X = \mathbf{R}$; relacja $x \preceq y \overset{\text{def}}{\iff} \min(0, x) \leqslant y$ jest quasiporządkiem, gdyż jest zwrotna (co jasne) i przechodnia: jeśli $x \preceq y \preceq z$, to **Sposób 1.** $\min(0, x) = \min(0, \min(0, x)) \leqslant \min(0, y) \leqslant z$, czyli $x \preceq z$ **Sposób 2.** Są dwie możliwości: $\min(0, y) = 0$, wtedy $\min(0, x) \leqslant 0 = \min(0, y) \leqslant z$, bądź $\min(0, y) = 0$, wtedy $\min(0, x) \leqslant y = \min(0, y) \leqslant z$, i już.

(2) $X = \mathbf{Z}$; relacja $m \preceq n \overset{\text{def}}{\iff} m \mid n$ (tzn. $\exists k \in \mathbf{Z} : n = km$) jest zwrotna i przechodnia, lecz nie antysymetryczna (quasiporządek).

(3) $X = \mathbf{R}$; dla ustalonego $P, Q \subset \mathbf{R}$, takich że $P \cap Q = \emptyset$, relacja $S := \Delta \cup (P \times Q) = \{(x, y) : x = y \text{ lub } (x \in P,\ y \in Q)\}$ jest, jak łatwo sprawdzić, częściowym porządkiem.

(4) $X = 2^Z$, Z — zbiór (nieskończony); relacja $A \preceq B \overset{\text{def}}{\iff} \big(B \setminus A \text{ jest skończony}\big)$ jest *quasiporządkiem*, tzn. jest zwrotna (jasne), przechodnia — wskutek zawierania $C \setminus A \subset (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$, ale nie jest antysymetryczna. Jasne, że $A\mathcal{R}B \iff \#(A \div B) < \infty$.

(5) $X = 2^Z$, Z — zbiór (nieskończony); $A \preceq B \overset{\text{def}}{\iff} (A \subset B$ oraz $B \setminus A$ skończony) jest częściowym porządkiem.

3. Niech dana będzie pewna rodzina $\{\mathcal{R}_t\}_{t \in T}$ (niekoniecznie skończona) relacji w zbiorze X: $\mathcal{R}_t \subset X \times X$ dla $t \in T$; niech $\mathcal{R} := \bigcap_{t \in T} \mathcal{R}_t$ będzie przecięciem tych relacji, a więc $x\mathcal{R}y \iff \forall t \in T : x\mathcal{R}_t y$. Sprawdzić, że

(a) Jeśli W$\in$ {zwrotność, symetria, przechodniość} oraz wszystkie relacje $\mathcal{R}_t$ mają własność W, to i $\mathcal{R}$ ma własność W; zatem jeśli wszystkie $\mathcal{R}_t$ są relacjami równoważności, to jest nią także $\mathcal{R}$. (b) jeśli któraś z relacji $\mathcal{R}_t$ jest antysymetryczna (tzn. $x\mathcal{R}_t y \mathcal{R}_t x \Rightarrow x = y$), to $\mathcal{R}$ też jest antysymetryczna; zatem jeśli każda $\mathcal{R}_t$ jest zwrotna i przechodnia (*relacja quasiporządku*), a któraś $\mathcal{R}_t$ jest antysymetryczna, to $\mathcal{R}$ jest relacją (częściowego) porządku.

Stąd i z tego że relacja pełna $X \times X$ jest największą relacją równoważności i największą relacją quasiporządkującą w zbiorze X, wynika że dla dowolnej relacji $S \subset X \times X$ istnieją: (a) Najmniejsza relacja równoważności zawierająca S. (b) Najmniejsza relacja quasiporządkująca $\mathcal{R}$ zawierająca S; z oczywistej implikacji $\big(S \subset \mathcal{R} \subset X \times X,\ \mathcal{R}$ — antysymetryczna$\big) \Rightarrow (S$ antysymetryczna) wynika, że gdy S nie jest antysymetryczna, wtedy $\mathcal{R}$ nie jest częściowym porządkiem.

4. Niech $S \subset X \times X$ będzie dowolną relacją w zbiorze X. Określmy nową relację $\mathcal{R} \subset X \times X$ wzorem

$$x\mathcal{R}y \overset{\text{def}}{\iff} x = y \text{ lub } \exists n \geqslant 1 : \exists x_0, \dots, x_n \in X : \big[x_0 = x,\ x_n = y \text{ oraz } \forall k \in \overline{1, k} : (x_{k-1} S x_k \text{ lub } x_k S x_{k-1})\big].$$

Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, zawierającą $\mathcal{R}$ (czyli $xSy \Rightarrow x\mathcal{R}y$); co więcej, $\mathcal{R}$ jest najmniejszą spośród takich relacji (z tego powodu $\mathcal{R}$ nazywa się zwykle *relacją równoważności, generowaną przez relację* S).

5. Sprawdzić, że przy dowolnie ustalonym $p \in$
RC relacja $\sim_p$, określona wzorem $x \sim_p y \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \min(p, x) \leqslant y, \\ \min(p, y) \leqslant x, \end{cases}$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbf{R}$.

Zauważmy, że $x \sim_p y \iff \min(p, x) = \min(p, y)$: $\boxed{\Leftarrow}$ jest oczywiste, zaś $\boxed{\Rightarrow}$, bo zawsze $\min(p, x) \leqslant p$, co wraz z $\min(p, x) \leqslant y$ daje $\min(p, x) \leqslant \min(p, y)$. Stąd wynika teza i to, że klasy są poziomicami $\Phi_p(x) := \min(p, x)$, czyli są postaci $\{x\}$, $x < p$, oraz $[p, \infty[$.

6. Określmy $\mathcal{R} \subset \mathbf{R}^2$ jako sumę $P \cup D$, gdzie P jest obwodem prostokąta o wierzchołkach $(0, 2), (2, 0), (-1, 1), (1, -1)$, zaś $D := \{(x, y) : y = x\}$. Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbf{R}$ oraz znaleźć funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, której poziomicami są klasy relacji $\mathcal{R}$.

Określmy $f(x) := \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2 - x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ wtedy poziomice f mają postać $f^{-1}\{y\} = \begin{cases} \{2 - y\}, & y < 0, \\ \{y, -y, 2 - y\}, & y \in [0, 1], \\ \{-y\}, & y > 1, \end{cases}$ a zatem

(1) Jeśli $x \in]-\infty, -1[$, to $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = -x \in]1, \infty[\Leftrightarrow y = x$

(2) Jeśli $x \in [-1, 0]$, to $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = -x \in [0, 1] \Leftrightarrow y \in \{x, -x, x + 2\}$

(3) Jeśli $x \in [0, 1]$, to $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = x \in [0, 1] \Leftrightarrow y \in \{x, -x, 2 - x\}$

(4) Jeśli $x \in [1, 2]$, to $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = 2 - x \in [0, 1] \Leftrightarrow y \in \{x, 2 - x.x - 2\}$

(5) Jeśli $x \in]2, \infty[$, to $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = 2 - x \in]-, 0[\Leftrightarrow y = x$

Oznacza, to zawsze $f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$, a więc $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, której klasy są poziomicami funkcji f.

7. Niech $X := [-1, 1]$ oraz $\mathcal{R} := \{(x, y) \in X \times X : x - y \in \mathbf{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}\}$. Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze X, znaleźć $\mathcal{R}$-klasy $\left[\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{4}\right]$, oraz narysować zbiór $\mathcal{R}$.

Sprawdzimy przechodniość: Jeśli $x\mathcal{R}y\mathcal{R}z$, to są cztery możliwości: (1) $x - y \in \mathbf{Z}$, $y - z \in \mathbf{Z}$, wtedy $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbf{Z}$; (2) $x - y \in \mathbf{Z}\, y + z + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$, wtedy $x + z + \frac{1}{2} = (y + z + \frac{1}{2}) + (x - y) \in \mathbf{Z}$; (3) $x + y + \frac{1}{2}$, $y - z \in \mathbf{Z}$, wtedy $x + z + \frac{1}{2} = (x + y + \frac{1}{2}) - (y - z) \in \mathbf{Z}$; (4) $x + y + \frac{1}{2}$, $y + z + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$, wtedy $x - z = (x + y + \frac{1}{2}) - (y + z + \frac{1}{2}) \in \mathbf{Z}$. Zatem w każdym przypadku $x\mathcal{R}z$, QED.

[1] Niekiedy taką relację nazywa się *quasiporządkiem* w zbiorze X, zob. np. K.Kuratowski, *Wstęp do t. mnogości i topologii*, str. 78.

$$\left[\tfrac{1}{2}\right] = (\tfrac{1}{2}\mathbf{Z}) \cap X = \{0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1\}, \qquad \left[\tfrac{1}{3}\right] = \left((\tfrac{1}{3}+\mathbf{Z}) \cup (\tfrac{1}{6}+\mathbf{Z})\right) \cap X = \{-\tfrac{5}{6}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{3}\}, \qquad \left[\tfrac{1}{4}\right] = (\tfrac{1}{4}+\mathbf{Z}) \cap X = \{-\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\}.$$

8. Sprawdzić, że dana relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbf{R}$; narysować odpowiadający $\sim$ podzbiór $\mathcal{R} = \{(x,y) : x \sim y\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; opisać klasy relacji $\sim$ i znaleźć funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, której poziomicami są te klasy.
   (a) $x \sim y \iff (x-y)(1-xy) = 0$; (b) $x \sim y \iff \big(x = y \text{ lub } x = -y \in [-1,1] \text{ lub } |x|+|y| = 1\big)$;
   (c) $x \sim y \iff (x = y \text{ lub } \exists n \in \mathbf{Z} : x,y \in [2n-1, 2n])$; (d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbf{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbf{Z})$.

(a) $[x] = \{x, \frac{1}{x}\}$, gdy $x \neq 0$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } |x| \leqslant 1 \\ 1/x, & \text{gdy } |x| > 1 \end{cases}$; (b) $[x] = \begin{cases} \{x\}, & \text{gdy } |x| > 1, \\ \{\pm|x|, \pm(1-|x|)\}, & \text{gdy } |x| \leqslant 1, \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} |2|x|-1|, & \text{gdy } |x| \leqslant 1 \\ x, & \text{gdy } |x| > 1; \end{cases}$
(c) $[x] = \begin{cases} [2n-1, 2n], & \text{gdy } \exists n \in \mathbf{Z} : x \in [2n-1, 2n], \\ \{x\}, & \text{gdy } x \notin \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [2n-1, 2n]; \end{cases}$ (d) $[x] = (x + \mathbf{Z}) \cup (\frac{1}{2} - x + \mathbf{Z})$, $f(x) := \sin 2\pi x$.

9. Niech $I \subset \mathbf{R}$ będzie przedziałem symetrycznym względem 0, a $X := \mathbf{R} \times I$. Sprawdzić, że relacja $(x,y) \sim (x',y')$ $\overset{\text{def}}{\iff} [x' - x \in \mathbf{Z},\ y' = (-1)^{x'-x} y]$ jest równoważnością w X. Zbiór $X/_\sim$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* — dlaczego?

10. Niech $\mathcal{R}$ będzie relacją równoważności w X oraz $A \subset X$. Wykazać, że
$$\big(A \text{ jest sumą pewnych klas relacji } \mathcal{R}\big) \iff \big(\forall x,y \in X : [x \in A,\ (x,y) \in \mathcal{R}] \Rightarrow y \in A\big).$$

11. Znaleźć najmniejszą relację równoważności $\mathcal{R}$ w zbiorze $\mathbf{R}$, taką że $\mathcal{R} \supset B := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Znaleźć klasy $[1]_\mathcal{R}$ i $[5]_\mathcal{R}$ (wyznaczone przez elementy 1 i 5) względem relacji $\mathcal{R}$.

Jeśli $\mathcal{R} \supset B$ jest relacją równoważności, to $x,y \in [0,2] \Rightarrow \big((x,0) \in \mathcal{R},\ (y,0) \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow x\mathcal{R}0\mathcal{R}y \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$, a także $x,y \in [-1,1] \Rightarrow \big((1,x) \in \mathcal{R},\ (1,y) \in \mathcal{R}\big) \Rightarrow x\mathcal{R}1\mathcal{R}y \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{R}$. Wynika stąd oczywiście, że $\forall x,y \in [-1,2] : (x,y) \in \mathcal{R}$, gdyż np. dla $-1 \leqslant x \leqslant 0 \leqslant y \leqslant 2$ mamy $x\mathcal{R}0\mathcal{R}y$. Zatem $\mathcal{R}' := [-1,2] \times [-1,2] \cup \Delta \subset \mathcal{R}$, gdzie $\Delta := \{(x,y) : x = y \in \mathbf{R}\}$. Zarazem $\mathcal{R}' \supset B$ oraz $\mathcal{R}'$ jest relacją równoważności, gdyż $(x,y) \in \mathcal{R}' \iff f(x) = f(y)$, gdzie $f(x) := \begin{cases} x+1, & x \leqslant -1, \\ 0, & x \in [-1,2], \\ x-2, & x \geqslant 2. \end{cases}$ Stąd szukaną relacją $\mathcal{R}$ jest $\mathcal{R} = \mathcal{R}' = [-1,2]^2 \cup \Delta$, zaś $[1] = [-1,2]$ oraz $[5] = \{5\}$.

12. Znaleźć relację równoważności w zbiorze $X = \mathbf{R}$, wygenerowaną z relacji $C := \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$, tzn. najmniejszą relację równoważności $\mathcal{R} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, zawierającą C. Opisać klasy równoważności $\mathcal{R}$ oraz znaleźć odwzorowanie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takie, którego poziomicami są klasy $\mathcal{R}$.

Jeśli $x \in [-1,1]$, to $(x, \sqrt{1-x^2}), (\sqrt{1-x^2}, -x) \in C \subset \mathcal{R}$, więc wskutek zwrotności $\mathcal{R}$ także $(x,-x) \in \mathcal{R}$; dowodzi to, że $\mathcal{R}$ zawiera $B := \{(x,y) : y = -x, x \in [-1,1]\}$ (odcinek o końcach $(-1,1)$, $(1,-1)$). Z kolei zwrotność sprawia, że $\mathcal{R}$ zawiera prostą $D := \{(x,y) : y = x \in \mathbf{R}\}$; zatem $S := B \cup C \cup D \subset \mathcal{R}$. Jeśli wykażemy, że S jest relacają równoważności, to będzie to oznaczać, że szukaną relacją jest $\mathcal{R} = S$. Oczywiście S jest zwrotna (bo $D \subset S$) oraz symetryczna (bo symetryczne są B, C i D). Warunek $\big[(x,y) \in S, (y,z) \in S\big] \Rightarrow (x,z) \in S$ (przechodniośc) jest oczywisty, gdy $x = y$ lub $y = z$, wystarczy więc rozważyć 4 przypadki:

1° $(x,y) \in B$, $(y,z) \in B$; wtedy $x = -y$ i $y = -z$, więc $x = z$, czyli $(x,z) \in D \subset S$;
2° $(x,y) \in B$, $(y,z) \in C$; wtedy $x = -y$ i $y^2 + z^2 = 1$, więc $x^2 = y^2$ i $x^2 + z^2 = 1$, tzn. $(x,z) \in C \subset S$;
3° $(x,y) \in C$, $(y,z) \in B$; wtedy $x^2 + y^2 = 1$ i $y = -z$, więc $y^2 = z^2$ i $x^2 + z^2 = 1$, tzn. $(x,z) \in C \subset S$;
4° $(x,y) \in C$, $(y,z) \in C$; wtedy $x^2 + y^2 = 1 = y^2 + z^2$, więc $x^2 = 1 - y^2 = z^2$, skąd $x = \pm z$ oraz $x \in [-1,1]$, czyli $(x,z) \subset B \cup D \subset \mathcal{R}$.

Funkcją $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o stosownych własnościach jest np. $f(x) := \begin{cases} x^2(1-x^2), & x \in [-1,1], \\ \alpha x, & |x| > 1, \end{cases}$ gdzie $\alpha \geqslant \frac{1}{4}$.

13. Niech $X := [-1,1]$ oraz $V := \{-1\} \times [0,1] = \{(x,y) : x = -1, y \in [0,1]\}$. Znaleźć najmniejszą relację równoważności $\mathcal{R} \subset X \times X$, taką że $V \subset \mathcal{R}$. Narysować zbiór $\mathcal{R}$, sprawdzić że jest relacją równoważności oraz opisać podział (rozbicie) zbioru X na klasy abstrakcji relacji $\mathcal{R}$.

Jeśli $\mathcal{R}$ jest równoważnością i $V \subset \mathcal{R}$, to $(-1,x) \in \mathcal{R}$ dla $x \in [0,1]$. Stąd z symetrii $(x,-1) \in \mathcal{R}$, czyli $V' := [0,1] \times \{-1\} \subset \mathcal{R}$, zaś z tranzytywności $x,y \in [0,1] \Rightarrow x \sim -1 \sim y \Rightarrow x \sim y$, czyli $\Box := [0,1] \times [0,1] \subset \mathcal{R}$; ponadto $D := \{(x,x) : x \in [-1,1]\} \subset \mathcal{R}$ ze zwrotności. Zatem $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{L} := V \cup V' \cup \Box \cup D \subset \mathcal{R}$; jeśli więc sprawdzimy, że $\mathcal{L}$ jest relacją równoważności w X, to wskutek minimalności $\mathcal{R}$ będzie $\mathcal{R} = \mathcal{L}$. Otóż X ma rozbicie $X = \bigcup_{-1<t\leqslant 0} X_t$, gdzie $X_t := \{(t,t)\}$ (1-elementowy) dla $-1 < t < 0$ oraz $X_0 := \{-1\} \cup [0,1]$, przy czym $X_0 \times X_0 = V \cup V' \cup \Box \cup \{(-1,-1)\}$, a zatem $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{-1<t\leqslant 0} X_t \times X_t$ jest relacją równoważności odpowiadającą podziałowi X na klasy X_t, $t \in \,]-1,0]$.

14. Niech $X \neq \emptyset$ będzie zbiorem skończonym oraz $f : X \to X$ — odwzorowaniem. Wykazać, że:
   (a) $\mathcal{R} := \{(x,y) \in X \times X : \exists k,l \in \mathbf{N} : f^k(x) = f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X;
   (b) zbiór $X_0 := \bigcap_{k \in \mathbf{N}} f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0) = X_0$ oraz $f|_{X_0} : X_0 \to X_0$ jest bijekcją, tj. permutacją X_0;
   (c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji $\mathcal{R}$, a każda z klas relacji $\mathcal{R}$ zawiera dokładnie jedną orbitę.

   Zatem $|X/\mathcal{R}|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_0}$.

(a) Dla sprawdzenia przechodniości zauważmy, że jeśli $f^k(x) = f^l(y)$, to $\forall n : f^{k+n}(x) = f^n\big(f^k(x)\big) = f^n\big(f^l(y)\big) = f^{l+n}(y)$, a więc jeśli $\begin{Bmatrix} f^r(y) = f^s(z) \\ f^k(x) = f^l(y) \end{Bmatrix}$, to $f^{k+r}(x) = f^{l+r}(y) = f^{s+l}(z)$. (b) Zauważmy, że zbiory $f^k(X)$ tworzą ciąg zstępujący, a więc od pewnego miejsca stały (bo ciąg liczbowy $\#f^k(X)$ jest o wyrazach z $\mathbf{N}$ jest nierosnący); jasne, że $f|_{X_0} : X_0 \to X_0$ jest surjekcją, zaś każda surjekcja $X_0 \to X_0$ jest bijekcją dzieki skończoności X i X_0. (c) Jeśli y należy do $f|_{X_0}$-orbity elementu $x \in X_0$, to $\exists p \geqslant 1 : y = f^p(x)$, a więc $(x, y) \in \mathcal{R}$, co dowodzi że orbity zawierają się w klasach. Ustalmy dowolne $x \in X$; skoro zbiór $\{f^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ jest skończony, to $\exists k, r \in \mathbf{N} : f^k(x) = f^{k+r}(x)$, a więc $f^k(x) = f^{k+r}(x) = f^{k+2r}(x) = \ldots$, czyli $y = f^k(x)$ należy do X_0 i do $[x]_{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}$-klasa $x)$; zatem $[x]_{\mathcal{R}} \supset (f|_{X_0}$-orbita $y)$. Jeśli oprócz tego $[x]_{\mathcal{R}} \supset (f|_{X_0}$-orbita $z)$, to mamy $y\mathcal{R}x\mathcal{R}z$, co daje $y\mathcal{R}z$, czyli $f^k(y) = f^l(z)$; zatem y i z tworzą tę samą $f|_{X_0}$-orbitę.

1. Niech (x_n) będzie ciągiem określonym następującymi warunkami: $x_1 = 0, x_{n+1} = \dfrac{5}{4-x_n}$ dla $n \in \mathbf{N}$. Wykazać, że

$$\forall n \in \mathbf{N} : x_{2n} = \frac{5 - x_n^2}{4 - 2x_n}.$$

Indukcja: Należy sprawdzić, że $x_{2n} = g(x_n) \Rightarrow x_{2n+2} = g(x_{n+1})$; jeśli oznaczymy $f(x) := \frac{5}{4-x}$, $g(x) := \frac{5-x^2}{4-2x}$, to ostatnia równość oznacza $f \circ f(x_{2n}) = g \circ f(x_n)$, wystarczy więc sprawdzić równość $f \circ f \circ g(x) = g \circ f(x)$. Łatwy rachunek pokazuje, że oba te wyrażenia są równe $\frac{5x^2-40x+55}{4x^2-22x+24}$, gdyż $f(x) = \frac{20-5x}{11-4x}$. *Uwaga.* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$, $x_3 = \frac{20}{11}$, $x_4 = \frac{55}{24}$, $x_5 = \frac{120}{41}$, $x_6 = \frac{205}{44}$; ciąg (x_n) jest rozbieżny!

2. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}$ dla $n \in \mathbf{N}$, to

$$x_{m+n} = \frac{2 + x_m x_n}{x_m + x_n} \quad \text{dla każdej pary } m, n \in \mathbf{N}.$$

Ustalmy $m \in \mathbf{N}$ i zastosujmy indukcję względem $n \in \mathbf{N}$: Dla $n = 1$ wzór $\boxed{x_{m+n} = \dfrac{2+x_m x_n}{x_m+x_n}}(W_n)$ ma postać $x_{m+1} = \dfrac{2+x_m}{1+x_m}$, więc jest prawdziwy zgodnie ze wzorem rekurencyjnym. Wykażemy implikację $W_n \Rightarrow W_{n+1}$: $x_{m+n+1} = \dfrac{2+x_{m+n}}{1+x_{m+n}} = \dfrac{2+\frac{2+x_m x_n}{x_m+x_n}}{1+\frac{2+x_m x_n}{x_m+x_n}} = \dfrac{2x_m+2x_n+2+x_m x_n}{x_m+x_n+2+x_m x_n}$ wskutek (W_n), więc $\dfrac{2+x_m x_{n+1}}{x_m+x_{n+1}} = \dfrac{2+x_m\frac{2+x_n}{1+x_n}}{x_m+\frac{2+x_n}{1+x_n}} = \dfrac{2(1+x_n)+x_m(2+x_n)}{x_m(1+x_n)+(2+x_n)} = x_{m+n+1}$, QED.

3. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{1+x_n}$ dla $n \in \mathbf{N}$, to

$$x_{2n} = \frac{2+{x_n}^2}{2x_n} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbf{N}. \qquad \text{[część ANAL1, 20(h)]}$$

Indukcja: Dla $n = 1$ wzór $x_2 = \dfrac{2+x_1^2}{2x_1}$ jest prawdziwy, bo $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$; jeśli zaś jest prawdziwy dla pewnego $n \in \mathbf{N}$, to $x_{2(n+1)} = x_{2n+2} = \dfrac{2+x_{2n+1}}{1+x_{2n+1}} = \dfrac{2+\frac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}}{1+\frac{2+x_{2n}}{1+x_{2n}}} = \dfrac{4+3x_{2n}}{3+2x_{2n}} = \dfrac{4+\frac{3(2+x_n^2)}{2x_n}}{3+\frac{2(2+x_n^2)}{2x_n}} = \dfrac{3x_n^2+8x_n+6}{2x_n^2+6x_n+4}$, z drugiej zaś strony $\dfrac{2+x_{n+1}^2}{2x_{n+1}} = \dfrac{2+\left(\frac{2+x_n}{1+x_n}\right)^2}{2\left(\frac{2+x_n}{1+x_n}\right)} = \dfrac{2(1+x_n)^2+(2+x_n)^2}{2(1+x_n)(2+x_n)} = \dfrac{3x_n^2+8x_n+6}{2x_n^2+6x_n+4}$, czyli $x_{2(n+1)} = \dfrac{2+x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}$, QED.

4. Dowieść, że jeśli $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem, określonym rekurencyjnie: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2+x_n}$ dla $n \in \mathbf{N}$, to

$$2x_{2n} = \frac{1+{x_n}^2}{1+x_n} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbf{N}. \qquad [x_{m+n}\text{: ANAL1, 20(g)}]$$

Sprawdzenie kroku indukcyjnego: Jeśli $2x_{2n} = \dfrac{1+x_n^2}{1+x_n}$, to $2x_{2n+2} = \dfrac{2}{2+x_{2n+1}} = \dfrac{2}{2+\frac{1}{2+x_{2n}}} = \dfrac{4+2x_{2n}}{5+2x_{2n}} = \dfrac{4(1+x_n)+1+x_n^2}{5(1+x_n)+1+x_n^2}$, z drugiej zaś strony $\dfrac{1+x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}} = \dfrac{1+\frac{1}{(2+x_n)^2}}{1+\frac{1}{2+x_n}} = \dfrac{(2+x_n)^2+1}{(2+x_n)(3+x_n)}$, skąd widać, że $2x_{2(n+1)} = \dfrac{1+x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}}$, QED.

Uwaga. Można dowieść (np. indukcyjnie), że $x_n = \dfrac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a^n-b^n}$, gdzie $a := 1+\sqrt{2}$, $b := 1-\sqrt{2}$; wykorzystanie tego wzoru do dowodu tezy zadania jest możliwe, ale dość uciążliwe.

5. Dowieść, że *liczby Fibonacciego*, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, mogą być otrzymane ze wzorów $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$; zwróćmy uwagę, że zgodnie z definicją $\binom{m}{k} := \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ dla $k \in \mathbf{Z}_+$, $m \in \mathbf{C}$, składniki $\binom{n-k}{k}$ znikają dla $\dfrac{n}{2} < k \leqslant n$

Widać, że dla $n = 0$ i $n = 1$ wzory są prawdziwe. Jeśli $n \geqslant 1$ oraz $F_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$ i $F_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}$, to przemianowując k na $k-1$ mamy $F_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}$, więc z elementarnej własności $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$ dla $m = n-k$ dostajemy $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = \binom{n-0}{0} + \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n+1-k}{k} =: R$. Ponieważ $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ oraz $\binom{n+1-k}{k} = 0$ dla $k = n+1$, więc możemy R zapisać jako $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k}$.

1. Dowieść, że jeśli $|x| < 1$ i $|y| < 1$, to $\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| < 1$.

$(1-x)(1+y) > 0$, czyli $x - y < 1 - xy$; analogicznie $y - x < 1 - xy$, więc $|x - y| < 1 - xy$, skąd teza.

2. Dla jakich $n \in \mathbf{N}$ zachodzą nierówności: $2n+1 < 2^n$; $3n^3+1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \leqslant 2^{n-2}n!$?

3. Wykazać, że: (a) $\forall n: \ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \sqrt{n}$; (b) $\forall n: \ \frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
(c) $\forall n: \ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$; (d) $\forall n: \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$.

4. Wykazać metodą indukcji, że jeśli $n \in \mathbf{N}$, $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ oraz $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, to
$$(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n) \leqslant n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n).$$

Oznaczmy $L_n := (a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)$, $P_n := n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)$; mamy dowieść, że $\forall n: \ Z_n$, gdzie Z_n jest zdaniem "*Jeśli* $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, *to* $L_n \leqslant P_n$". Oczywiście mamy Z_1, gdyż $L_1 = a_1b_1 = P_1$. Dla dowodu implikacji $Z_n \Rightarrow Z_{n+1}$ zauważmy, że $L_{n+1} - L_n = a_{n+1}(b_1+\ldots+b_n) + (a_1+\ldots+a_n)b_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1}$, $P_{n+1} - P_n = (a_1b_1+\ldots+a_nb_n) + (n+1)a_{n+1}b_{n+1}$, skąd dostajemy, że $P_{n+1} - P_n - L_{n+1} + L_n = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n + na_{n+1}b_{n+1} - a_{n+1}(b_1+\ldots+b_n) - (a_1+\ldots+a_n)b_{n+1} = (a_{n+1}-a_1)(b_{n+1}-b_1) + \ldots + (a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n) \geqslant 0$. Zatem $Z_n \Rightarrow P_{n+1} - L_{n+1} \geqslant P_n - L_n \underset{Z_n}{\geqslant} 0 \Rightarrow Z_{n+1}$, QED.

Uwaga 1. Łatwo dodatkowo dowieść, że nierówność przechodzi w równość $\iff a_1 = \ldots = a_n$ lub $b_1 = \ldots = b_n$.

Uwaga 2. Łatwo sprawdzić, że po zamianie a_i na $a_i + x$ oraz b_j na $b_j + x$ przyrost L_n i P_n jest taki sam i wynosi $nx\sum b_j + ny\sum a_i + n^2xy$; zatem szukając innego dowodu można ograniczyć się do przypadku $a_i \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$.

Uwaga 3. Prosta konsekwencja wykazanej nierówności: jeśli $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ oraz $0 \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_n$, to
$$(a_1+\ldots+a_n)(b_1+\ldots+b_n)(c_1+\ldots+c_n) \leqslant n^2(a_1b_1c_1+\ldots+a_nb_nc_n).$$

5. Niech $a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$; dowieść, że $(1-a_1)\ldots(1-a_n) \geqslant 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ oraz zbadać, w jakim przypadku nierówność staje się równością.

Indukcja względem n: Jeśli L_n, P_n oznacza lewą i prawą stronę dowodzonej nierówności, to z założenia indukc. $L_{n-1} \geqslant P_{n-1}$ wynika, że $L_n - P_n = L_{n-1}(1-a_n) - P_n \geqslant (1-a_1-\ldots-a_{n-1})(1-a_n) - P_n = (a_1+\ldots+a_{n-1})a_n \geqslant 0$. Pokażemy teraz, że *nierówność staje się równością* $\iff$ *co najwyżej jedna z liczb* a_i *jest* $\neq 0$. $\boxed{\Rightarrow}$: Jeśli $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, to $L_n = 1 - a_n = P_n$. $\boxed{\Leftarrow}$: Niech $L_n = P_n$; wtedy powyższe oszacowanie daje $(a_1+\ldots+a_{n-1})a_n = 0$, więc jeśli $a_n \neq 0$, to $a_1 + \ldots a_{n-1} = 0$, a więc $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$.

Uwaga. Nieco ogólniej: $\boxed{(1+x_1)\ldots(1+x_n) \geqslant 1 + \sum\limits_i x_i}$, jeśli $\forall i: 1 + x_i \geqslant 0$ oraz (koniecznie!) $x_1,\ldots,x_n$ *są jednakowego znaku.*

6. Niech $a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$; dowieść, że $\boxed{(1-a_1)\ldots(1-a_n) \leqslant 1 - \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j}$.

Indukcja względem n: Jeśli $L_n = (1-a_1)\ldots(1-a_n)$, $P_n = 1 - A_n + B_n$, gdzie $A_n := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$, $B_n := \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j$, to $L_n = L_{n-1}(1-a_n)$, $A_n = A_{n-1} + a_n$, $B_n = B_{n-1} + A_{n-1}a_n$, więc $P_n - L_n = 1 - A_{n-1} - a_n + B_{n-1} + A_{n-1}a_n - L_{n-1}(1-a_n) = (1 - A_{n-1} + B_{n-1} - L_{n-1})(1-a_n) + B_{n-1}a_n = (P_{n-1} - L_{n-1})(1-a_n) + B_{n-1}a_n \geqslant 0$ z założenia indukcyjnego $P_{n-1} - L_{n-1} \geqslant 0$.

Uwaga. Przy alternatywnym założeniu $\forall i: a_i \leqslant 0$ nierówność jest przeciwna: $b_i \geqslant 0 \Rightarrow (1+b_1)\ldots(1+b_n) \geqslant 1 + \sum\limits_i b_i + \sum\limits_{i<j} b_ib_j$.

Uogólnienie:

7. Ciąg (skończony) liczb $t_0, t_1, \ldots, t_n$ nazwijmy *dwudodatnim* (w skrócie DD), jeśli $\forall k \geqslant 0: \ s_k \geqslant 0$, gdzie $s_k := \sum\limits_{j\geqslant 0}(-1)^j t_{k+j} = t_k - t_{k+1} + \ldots$; przyjmujemy tu umowę, że $t_k = 0$ dla $k > n$, a więc ciągi skończone traktujemy jako ciągi nieskończone $t_0, t_1, t_2, \ldots$, których *prawie wszystkie wyrazy się zerują*. Zatem np. ciąg 2, 3, 1, jak też 3, 2, 1, jest DD, a ciąg 1, 2, 3 nie jest; łatwo zauważyć, że każdy ciąg malejący (do zera) jest DD. Ciąg DD nazwijmy *zupełnym*, jeśli $s_0 = 0$; własność 'ZDD' jest niezmiennicza względem odwrócenia kolejności, gdyż $s_0 = 0$ implikuje $\sum\limits_{j\geqslant 0}(-1)^j t_{k-j} = s_{k+1}$. Ponieważ $t_k = s_k + s_{k+1}$, więc mamy też inne równoważne kryterium: *ciąg jest DD, jeśli ma postać* $s_0 + s_1, \ s_1 + s_2, \ \ldots, \ s_{n-1} + s_n, \ s_n$ *dla pewnych nieujemnych* $s_0, \ldots, s_n$.

Zauważmy, że:

ciąg DD po odrzuceniu jednego lub kilku początkowych wyrazów pozostaje ciągiem DD;
ciąg DD po dopisaniu na początku składnika $\geqslant s_0$ pozostaje ciągiem DD;
ciąg DD można uzupełnić do ciągu ZDD, dopisując na początku sładnik równy s_0.

8. **Fakt**. Jeśli $a_1,\ldots,a_n \in [0,1]$, to ciąg $t_0,\ldots,t_n$ określony wzorami $t_0 := 1$, $t_1 := \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$, $t_2 := \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ia_j$, ..., $t_n := a_1\ldots a_n$, tzn. $(x+a_1)\ldots(x+a_n) = x^n + t_1x^{n-1} + \ldots + t_{n-1}x + t_n$ (równoważne określenie) jest ciągiem DD.

Indukcja względem n: Niech $\tilde{t}_0 = 1,\ \tilde{t}_1 = a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1},\ \ldots,\ \tilde{t}_{n+1} = a_1 \ldots a_n a_{n+1}$ odpowiadają zestawowi $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$; mamy wtedy zależności $\boxed{\tilde{t}_k = t_k + a t_{k-1}}$ (gdzie $a = a_{n+1}$) przy umowie, że $t_k = 0$ dla $k \notin \overline{0,n}$ oraz $\tilde{t}_k = 0$ dla $k \notin \overline{0,n+1}$. Stąd $\tilde{s}_k = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \tilde{t}_{k+j} = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j (t_{k+j} + a t_{k-1+j}) = \begin{cases} s_k + a s_{k-1} \geqslant 0, & \text{gdy } k \geqslant 1, \\ s_0 - a s_0 = s_0(1-a) \geqslant 0, & \text{gdy } k = 0. \end{cases}$ To kończy dowód indukcyjny, gdyż dla $n = 0$ ciąg $t_0 = 1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 0,\ \ldots$ jest oczywiście DD.

Uwaga. Widać bezpośrednio, że $\geqslant 0$ są liczby:

$s_0 = (1-a_0)\cdot\ldots\cdot(1-a_n),\ s_1 = 1 - s_0,\ s_{n-1} = t_{n-1} - t_n = a_1 \ldots a_{n-1}(1-a_n) + \widehat{t}_{n-1} a_n$ i $s_n = t_n$. Z kolei wobec tożsamości $s_0 = t_0 - t_1 + s_2 = t_0 - t_1 + t_2 - s_3 = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + s_4$ nierówności $s_2 \geqslant 0$, $s_3 \geqslant 0$, $s_4 \geqslant 0$ można zapisać w postaci

$$I() \geqslant 1 - t_1, \qquad I() \leqslant 1 - t_1 + t_2, \qquad I() \geqslant 1 - t_1 + t_2 - t_3, \qquad \text{gdzie } I() := s_0 = (1-a_1)\ldots(1-a_n).$$

9. **Fakt**. Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są podzbiorami zbioru skończonego X, zaś $t_0 := |X|$, $t_k := \sum_{i_1<\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$, to liczby $t_0, \ldots, t_n$ tworzą ciąg DD; zatem liczba $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = t_1 - t_2 + \ldots = s_1$ ma oszacowania $s_1 \leqslant t_1$, $s_1 \leqslant t_1 - t_2 + t_3, \ldots,$ oraz $s_1 \geqslant t_1 - t_2$, $s_1 \geqslant t_1 - t_2 + t_3 - t_4$, itd.

Niech $\chi_i : X \to \mathbf{R}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru A_i, wtedy iloczyn $\chi_1 \ldots \chi_k$ jest funkcją charakterystyczną przecięcia $A_1 \cap \ldots \cap A_k$, więc $t_k = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{x\in X} \chi_{i_1}(x)\ldots\chi_{i_k}(x) = \sum_{x\in X} \sum_{i_1<\ldots<i_k} \chi_{i_1}(x)\ldots\chi_{i_k}(x)$. Przy ustalonym x wielkość $\chi_{i_1}(x)\ldots\chi_{i_k}(x)$ jest jedynką bądź zerem, zależnie od tego czy $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_k$; zatem jeśli x należy do $r(x)$ zbiorów A_i, a nie należy do $n - r(x)$ pozostałych, to suma $\sum_{i_1<\ldots<i_k} \chi_{i_1}(x)\ldots\chi_{i_k}(x)$ jest równa liczbie kombinacji $\binom{r(x)}{k}$; zatem $t_k = \sum_{x\in X}\binom{r(x)}{k}$. Otóż $\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\binom{r}{k+j} = \binom{r-1}{k-1}$ (dla dowodu wystarczy przedstawić $\binom{r}{k+j}$ jako $\binom{r-1}{k+j-1} + \binom{r-1}{k+j}$ i poskracać powtarzające się składniki); wzór ten pozostaje słuszny także dla $k = 0$, przy umowie że $\binom{m}{-1} = 0$. Zatem $s_k = \sum_{x\in X}\binom{r(x)-1}{k-1} \geqslant 0$, co kończy dowód.

10. Dla $k \leqslant n$ niech P_n^k oznacza prawdopodobieństwo tego, że nie wszystkie wylosowane elementy są różne, jeśli losujemy k razy (niezależnie) element ze zbioru n-elementowego (wszystkie elementy są jednakowo prawdopodobne). Oszacować P_n^k z góry, jeśli $1 << k << n$; dla $k = 10^4$ znaleźć możliwie małe n takie, że $P_n^k \leqslant 10^{-4}$.

$1 - P_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$. Stosując nierówność Bernoulliego dostajemy $1 - P_n^k \geqslant \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{k-1} \geqslant 1 - \frac{(k-1)^2}{n}$, więc $P_n^k \leqslant \frac{(k-1)^2}{n} \leqslant \frac{k^2}{n}$. Zatem $P_n^k \leqslant 10^{-4}$ mamy dla $n \geqslant 10^4(k-1)^2 = 10^4 * 9999^2 = 9.9980001 \cdot 10^{11}$. Nieco lepsze oszacowanie daje nierówność ??, mianowicie $1 - P_n^k \geqslant 1 - \frac{1+2+\ldots(k-1)}{n}$, czyli $P_n^k \leqslant \frac{k(k-1)}{2n}$; stąd $P_n^k \leqslant 10^{-4}$ dla $n \geqslant \frac{1}{2}k(k-1)10^4 = 4.9995 \cdot 10^{11}$.

11. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbf{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geqslant n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$.

(a) Teza oznacza, że $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{m+1} \geqslant \frac{1}{n+1}$, a to wynika wprost z nierówności Bernoulliego. (b) Teza oznacza, że $\left(\frac{n+1}{n}\right)^m > n$.

12. Stosując nierówność Bernoulliego wykazać, że: (a) $\frac{2n}{2n-1} \leqslant \sqrt[n]{2} \leqslant \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbf{N}$; (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geqslant 450$.

(a) Teza zapisana w postaci oszacowań $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n \geqslant \frac{1}{2}$ i $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geqslant 2$ wynika wprost z n. Bernoulliego. (b) Połóżmy $n = 50k + r$, gdzie $k \geqslant 9$, $r \in \overline{0,49}$ (iloraz i reszta z dzielenia n przez 50). Z nierówności (a) dostajemy $\sqrt[50]{2} \geqslant 1 + \frac{1}{99}$, zaś przez indukcję łatwo dowieść, że $2^k > 50k$ dla $k \geqslant 9$. Z tych dwóch oszacowań wynika, że $2^{\frac{n}{50}} = 2^k\left(\sqrt[5]{2}\right)^r \geqslant 50k\left(1 + \frac{1}{99}\right)^r \geqslant 50k\left(1 + \frac{r}{99}\right) \geqslant 50k + r = n$, QED.

13. Wykazać, że $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ dla $n \in \mathbf{N}$.

Łatwa indukcja, sprowadzająca się do nierówności $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2$, wynikającej z n. Bernoulliego. **Prostszy sposób**: z n. Cauchy'ego.

14. Korzystając z nierówności Bernoulliego rozstrzygnąć, która z dwóch liczb jest większa, $\sqrt[n]{n+1}$ czy $\sqrt[n-1]{n}$, jeśli $n := 10^6$.

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}$, gdyż $L = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^n > 1 + n\frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n+1} = P$.

Inny sposób: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} > \frac{1}{n}$, gdyż $L = \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n-1} > 1 + (n-1)\frac{-1}{n+1} = \frac{2}{n+1} \geqslant \frac{1}{n} = P$. *Odpowiedź.* $x_n < x_{n-1}$.

15. Dowieść, że dla każdego $x \geqslant 0$ ciąg o wyrazach $\xi_n := n(1 + x^n)$ jest ściśle rosnący.

Dla $x \geqslant 1$ teza jest oczywista: (ξ_n) jest iloczynem dwóch ciągów rosnących > 0; jednakże w dowodzie nie warto wyodrębniać tego przypadku. Mamy dowieść, że $\xi_{n+1} - \xi_n = (n+1)x^{n+1} - nx^n + 1 > 0$. Dla $x > 0$ mamy nierówność Bernoulliego $\frac{1}{x^{n+1}} = \left(1 + (\frac{1}{x} - 1)\right)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)(\frac{1}{x} - 1)$, czyli $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \geqslant 0$; dodając do tego nierówność $x^{n+1} + x^n > 0$ dostajemy tezę.

Uwaga. Jeśli $p \in \mathbf{R}$, to $\left[\forall x \geqslant 0 \text{ ciąg } \xi_n := n(p + x^n) \text{ jest rosnący}\right] \Leftrightarrow p \geqslant e^{-2}$. Dla dowodu zauważmy, że $\xi_{n+1} - \xi_n = p - f_n(x)$, gdzie $f_n(x) := nx^n - (n+1)x^{n+1}$; skoro $f_n'(x) = x^{n-1}\left[n^2 - (n+1)^2 x\right]$, to $\sup f_n = f_n\left((\frac{n}{n+1})^2\right) = (\frac{n}{n+1})^{2n+1} \nearrow e^{-2}$, skąd teza.

16. W n kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1, \ldots, x_n$, tzn. w k-tym roku ceny rosły $(1 + x_k)$-krotnie, $x_k > 0$. Wykazać, że liczba x, taka że $(1+x)^n = (1+x_1)\ldots(1+x_n)$, tzn. średni roczny wskaźnik inflacji za rozważany okres, zawiera się pomiędzy średnią geometryczną, a średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

Niech $a := \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$, $g := \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$. Z nierówności Cauchy'ego $1+x = \sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)} \leqslant \frac{1}{n}\sum_k(1+x_k) = 1+a$, więc $x \leqslant a$. Zajmiemy się teraz dowodem nierówności $x \geqslant g$. Niech $=(x_1,\ldots,x_n)$, $=(g,\ldots,g)$. Wskutek rozdzielności mnożenia względem dodawania iloczyn $I() := (1+x_1)\ldots(1+x_n)$ jest równy sumie wszystkich 2^n iloczynów $a_1a_2\ldots a_n$, gdzie $a_1 \in \{1,x_1\},\ldots,a_n \in \{1,x_n\}$. Oznacza to, że $I() = T_0()+T_1()+\ldots+T_n()$, gdzie $T_r() := \sum\limits_{I\in N_r}\prod\limits_{i\in I}x_i$, gdzie N_r jest zbiorem (mającym $\binom{n}{r}$ elementów) wszystkich r-elementowych podzbiorów zbioru $\overline{1,n}$; w szczególności $T_0() = 1$, $T_1() = x_1+\ldots+x_n$, $T_n() = x_1\ldots x_n$. Zauważmy, że iloczyn wszystkich $\binom{n}{r}$ składników sumy $T_r()$ jest równy $(x_1\ldots x_n)^{\binom{n-1}{r-1}}$ (bo każdy $i \in \overline{1,n}$ należy do $\binom{n-1}{r-1}$ zbiorów N_r), więc skoro $n\binom{n-1}{r-1}\binom{n}{r}^{-1} = r$, to ich średnia geometryczna wynosi g^r; stąd z nierówności Cauchy'ego $T_r() \geqslant \binom{n}{n}g^r = T_r()$. W takim razie $I() = \sum\limits_r T_r() \geqslant \sum\limits_r T_r() = I()$, co oznacza, że $(1+x)^n \geqslant (1+g)^n$, tzn. $x \geqslant g$.

Indukcyjny dowód nierówności $x \geqslant g$: Niech Z_n będzie zdaniem $\boxed{\forall x_1,\ldots,x_n>0\colon\ (1+x_1)\ldots(1+x_n) \geqslant (1+\sqrt[n]{x_1\ldots x_n})^n}$. Posłużymy się następ. niekonwencjonalną zasadą indukcji: *jeśli* $Z \subset \mathbf{N}$, $1 \in Z$ *oraz* $\left\{\begin{array}{c}\forall n\in\mathbf{N}\colon n\in Z \Rightarrow 2n\in Z\\ \forall n\in\mathbf{N}: n\in Z \Rightarrow \overline{1,n}\subset Z\end{array}\right\}$, *to* $Z = \mathbf{N}$. *Ad* $\boxed{Z_n \Rightarrow Z_{2n}}$: Jeśli $g' := \sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$, $g'' := \sqrt[n]{x_{n+1}\ldots x_{2n}}$, to $(1+x_1)\ldots(1+x_n)(1+x_{n+1})\ldots(1+x_{2n}) \underset{Z_n}{\geqslant} (1+g')^n(1+g'')^n \geqslant (1+\sqrt{g'g''})^{2n} = (1+\sqrt[2n]{x_1\ldots x_{2n}})^{2n}$. *Ad* $\boxed{Z_n \Rightarrow Z_m \text{ dla } m<n}$: Mając $x_1,\ldots,x_m$ określmy $x_{n+1} = \ldots x_n := g := \sqrt[m]{x_1\ldots x_m}$, wtedy $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n} = \sqrt[n]{g^mg^{n-m}} = g$, więc Z_n daje $(1+x_1)\ldots(1+x_m)(1+g)^{n-m} \geqslant (1+g)^n$, skąd $(1+x_1)\ldots(1+x_m) \geqslant (1+g)^m$.

17. Dowieść, że dla $x,y\in\mathbf{R}$ mamy: $E(x)+y \geqslant 0 \iff x+E(y)\geqslant 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geqslant$ nierównościami $>$ lub $\leqslant$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geqslant E(x) \iff E(y) > x-1$.

Jeśli $n \in \mathbf{Z}$ oraz $\theta \in [0,1[$, to $n+\theta \geqslant 0 \iff n \geqslant 0$ (gdyż $\theta \geqslant 0$ daje '$\Leftarrow$', natomiast $n<0 \Rightarrow n \leqslant -1 \Rightarrow n+\theta < n+1 \leqslant 0$, co dowodzi '$\Rightarrow$'). Stosując to do $\theta := y-E(y)$ oraz $n = E(x)+E(y)$ dostajemy $E(x)+y\geqslant 0 \iff E(x)+E(y)\geqslant 0$; zamieniając x,y rolami dostajemy $E(y)+x\geqslant 0 \iff E(y)+E(x)\geqslant 0$, skąd teza.

18. Dowieść, że $L := \min(x_1,x_2)+\min(y_1,y_2) \leqslant R := \min(x_1+y_1,x_2+y_2)$ oraz $L = R \iff (x_1-x_2)(y_1-y_2)\geqslant 0$.

$x := \min(x_1,x_2)$, $y = \min(y_1,y_2)$, wtedy $L = x+y$, więc $R-L = \min(\tilde{x}_1+\tilde{y}_1, \tilde{x}_2+\tilde{y}_2)$, gdzie $\tilde{x}_k = x_k - x$, $\tilde{y}_k = y_k - y$. Skoro $\tilde{x}_k,\tilde{y}_k \geqslant 0$, to $R-L\geqslant 0$. Ponadto $R-L = 0 \iff \big(\tilde{x}_1=\tilde{y}_1=0\big)$ lub $\big(\tilde{x}_2=\tilde{y}_2=0\big)$, zaś $\left\{\begin{smallmatrix}\tilde{x}_1=0 \iff x_1\leqslant x_2\\ \tilde{y}_1=0 \iff y_1\leqslant y_2\end{smallmatrix}\right\}$ oraz $\left\{\begin{smallmatrix}\tilde{x}_2=0 \iff x_1\geqslant x_2\\ \tilde{y}_2=0 \iff y_1\geqslant y_2\end{smallmatrix}\right\}$.

19. Wykazać, że $R = \mathbf{Q}_+$ jest jedynym podzbiorem R zbioru $\mathbf{Q}^* := \mathbf{Q}\setminus\{0\}$, spelniającym następujące warunki:

$$1.\ R\cup(-R) = \mathbf{Q}^*; \qquad 2.\ R\cap(-R) = \emptyset; \qquad 3.\ R\cdot R \subset R; \qquad 4.\ R+R\subset R.$$

Skoro $1 \in R$ lub $-1 \in R$ (war. 1.), to $1 = (\pm1)^2 \in R$ (war. 3.). Stąd z 4. przez indukcję wynika $\forall n\in\mathbf{N} : n \in R$, tzn. $\mathbf{N}\subset R$. Pokażemy, że $\forall l,m\in\mathbf{N} : q := \frac{l}{m} \in R$: W przeciwnym razie war. 1. dawałby $-q \in R$, więc z $m \in \mathbf{N}\subset R$ i war. 3. byłoby $-l = (-q)\cdot m \in R$, co jest sprzeczne z $l \in \mathbf{N} \subset R$ i war. 2. Tak więc $\mathbf{Q}_+ \subset R$, przy czym R nie może być większy od $\mathbf{Q}_+$ (war. 2.), co kończy dowód.

Uwaga. Każdy $R\subset\mathbf{Q}^*$ spełniający warunki 1...3. jest postaci $R = \ker f$, gdzie $f : \mathbf{Q}^* \to \{\pm1\}$ jest nieparzystym $\big[f(-x) = -f(x)\big]$ homomorfizmem, mianowicie $f(x) = \left\{\begin{array}{l}1,\ x\in R\\ -1, x\notin R\end{array}\right.$. Każde takie f jest postaci $f(\pm p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots) := \pm\epsilon_1^{k_1}\epsilon_2^{k_2}\ldots$, gdzie $p_1,p_2,\ldots$ to kolejne liczby pierwsze, a $\epsilon_1,\epsilon_2,\ldots$ — elementy $\{1,-1\}$. Na przykład $R = \mathbf{Q}_+$ odpowiada $\forall k : \epsilon_k = 1$; inne wyróżnione R daje $\forall k : \epsilon_k = -1$.

20. Dowieść, że z nierówności $x_1+x_2+x_3\geqslant 1$, $-x_1+x_2+x_3\leqslant 1$, $x_1-x_2+x_3\leqslant 1$, $x_1+x_2-x_3\leqslant 1$ wynika, że:

$$1^0\ \ x_1,x_2,x_3\in[0,1]; \qquad\qquad 2^0\ \ 1+x_1^2 \geqslant x_2^2+x_3^2,\ 1+x_2^2\geqslant x_3^2+x_1^2,\ 1+x_3^2\geqslant x_1^2+x_2^2.$$

Z założenia wynika: $x_1-x_2\leqslant 1-x_3, x_2-x_1\leqslant 1-x_3$, a więc $\boxed{|x_1-x_2|\leqslant 1-x_3}$; mamy też $x_1+x_2-1\leqslant x_3, -x_1-x_2+1\leqslant x_3$, co daje $\boxed{|x_1+x_2-1|\leqslant x_3}$. Z tych dwu nierówności wynika $0\leqslant x_3\leqslant 1$, co dzięki równouprawnieniu x_1,x_2,x_3 dowodzi 1^0. Stąd mamy $|x_1+x_2| = x_1+x_2 \leqslant 1+x_3$; mnożąc to obustronnie przez $|x_1-x_2|\leqslant 1-x_3$ dostajemy $|x_1^2-x_2^2|\leqslant 1-x_3^2$, a stąd wynika 2^0.

21. Niech $a_1,a_2\ldots,a_{100}\in\mathbf{R}$ — dane liczby, $s := a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1,b_2,\ldots,b_{100}$ liczb $a_1,\ldots,a_{100}$, taka że $|b_1|\geqslant\frac{|s|}{100}$, $|b_1+b_2|\geqslant\frac{2|s|}{100}$, $|b_1+b_2+b_3|\geqslant\frac{3|s|}{100}$,..., $|b_1+b_2+\ldots+b_{99}|\geqslant\frac{99|s|}{100}$.

Zastosujemy indukcję do dowodu uogólnienia dla n liczb $a_1,\ldots,a_n$. Oznaczając $s := \sum\limits_{k=1}^n$, $c_k := s-a_k$ mamy $\sum\limits_{k=1}^n c_k = ns - \sum\limits_{k=1}^n a_k = (n-1)s$, więc $\sum\limits_{k=1}^n |c_k| \geqslant (n-1)s$, zatem $\exists k\in\overline{1,n} : |c_k|\geqslant\frac{n-1}{n}s$. Weźmy $b_n := a_k$; z założenia indukcyjnego zastosowanego do $n-1$ liczb $a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_n$ wynika istnienie permutacji $b_1,\ldots,b_{n-1}$ liczb tego ciągu, takiej że $\forall j<n :\ |b_1+\ldots+b_j|\geqslant\frac{j|s'|}{n-1}$, gdzie $s' := a_1+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}+\ldots+a_n = s-a_k = c_k \geqslant \frac{n|s|}{n-1}$; stąd teza.

22. Niech $a,b\in\mathbf{R}$, $a\leqslant b$. Wyrazić poprzez funkcję $x\mapsto E(x)$ liczbę $L(a,b)$ elementów zbioru $\mathbf{Z}\cap\,]a,b]$.

Weźmy $k\in\mathbf{Z}$ tak małe, by $k\leqslant a\leqslant b$; wtedy $]a,b] = [k,b]\setminus[k,a]$, więc $\mathbf{Z}\cap\,]a,b] = S_b - S_a$, gdzie $S_x = \mathbf{Z}\cap[k,x]$. Otóż $\#S_x = \#\left(\overline{k,E(x)}\right) = E(x)-k+1$ oraz $S_a\subset S_b$, więc $L(a,b) = \#S_b - \#S_a = E(b)-E(a)$. **Bardziej 'naturalny' sposób:** Niech $Q(x)\in[0,1[$ oznacza «resztę z dzielenia x przez 1», tzn. $x = E(x)+Q(x)$. Jeśli $n\in\mathbf{Z}$, to $n\in\,]a,b] \Leftrightarrow E(a)+Q(a) < n \leqslant E(b)+Q(b) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}Q(a) < n-E(a),\ \text{tzn. } n-E(a)\geqslant 1\\ Q(b)\geqslant n-E(b),\ \text{tzn. } n-E(b)\leqslant 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow 1+E(a)\leqslant n\leqslant E(b)$. Stąd $\boxed{L(a,b) = E(b)-E(a)}$.

23. Dowieść, że dla $a, b, c \in \mathbf{R}$ następujące warunki są równoważne:

$\boxed{1} \begin{cases} \min(a,c) \leqslant b, \\ \min(b,c) \leqslant a; \end{cases}$ $\quad \boxed{2}\ \min(a,c) = \min(b,c);$ $\quad \boxed{3}\ a = b$ lub $c \leqslant \min(a,b)$.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ $\big(a \leqslant b$ lub $c \leqslant b\big)$ i $\big(b \leqslant a$ lub $c \leqslant a\big)$ jest alternatywą $a \leqslant b \leqslant a$ lub $c \leqslant a \leqslant b$ lub $c \leqslant b \leqslant a$ lub $c \leqslant a, b$. Natomiast implikacje $\boxed{3 \Rightarrow 2}$ i $\boxed{2 \Rightarrow 1}$ są oczywiste.

Dłuższy sposób:
$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $\min(a,c) \leqslant b$ wraz z $\min(a,c) \leqslant c$ (zawsze) dają $\min(a,c) \leqslant \min(b,c)$. $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $m := \min(a,c) = \min(b,c)$; jeśli $m < c$, to $a = m$, $b = m$, więc $a = c$; jeśli zaś $m = c$, to $c \leqslant a$ i $c \leqslant b$. $\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Jeśli $a = c$, to $\min(a,c) = \min(b,c) \leqslant b$ i $\min(b,c) \leqslant a$; jeśli zaś a, b są $\geqslant c$, to $\min(a,c) = c \leqslant a$ i $\min(b,c) = c \leqslant b$.

24. Niech $X \subset \mathbf{R}$ będzie niepustym podzbiorem. Dowieść, że jeśli funkcja $f : X \to \mathbf{R}$ nie jest ani (słabo) rosnąca, ani (słabo) malejąca, to

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in X:\ x_1 < x_2 < x_3, \text{ lecz } f(x_2) \notin [f(x_1), f(x_3)].$$

Przyjmujemy tu konwencję $[a,b] := \{x : \min(a,b) \leqslant x \leqslant \max(a,b)\}$, więc $[a,b] = [b,a] \neq \emptyset$ dla każdych $a, b \in \mathbf{R}$.

$\boxed{\text{I}}$ Zauważmy, że istnieje podzbiór $\tilde{X} \subset X$, mający $\leqslant 4$ elementy, na którym f nie jest ani rosnąca, ani malejąca. Istotnie, jako $\tilde{X}$ można wziąć sumę $X' \cup X''$, gdzie $X', X'' \subset X$ są podzbiorami 2-elementowymi, takimi że $f|_{X'}$ ściśle maleje, zaś $f|_{X''}$ — rośnie.

$\boxed{\text{II}}$ Niech więc $\tilde{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, gdzie $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4$; oznaczmy $y_k = f(x_k)$. Przypuśćmy, że spełnione są naraz 4 warunki

$$y_2 \in [y_1, y_3], \qquad y_2 \in [y_1, y_4], \qquad y_3 \in [y_1, y_4], \qquad y_3 \in [y_2, y_4]. \tag{*}$$

Jeśli wtedy $y_1 \leqslant y_4$, to $\forall k : y_1 \leqslant \min(y_1, y_4) \leqslant y_k \leqslant \max(y_1, y_4) = y_4$, więc $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \max(y_1, y_3) = y_3 \leqslant y_4$, tzn. $f|_{\tilde{X}}$ jest (słabo) rosnąca, sprzeczność. Jeśli natomiast $y_1 \geqslant y_4$, to tak samo dostajemy $y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant y_4$, co też jest sprzeczne z doborem $\tilde{X}$. Zatem któryś z warunków (*) nie jest spełniony, czyli któraś z trójek (x_2, x_3, x_4), (x_1, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_4), (x_1, x_2, x_3) ma żądane własności.

25. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, x', y, y') := xy + xy' + x'y - x'y' - x - y$ na zbiorze: (a) $Z = [0,1]^4$; (b) $Z = [-1,1]^4$. Znaleźć obie poziomice f, odpowiadające jej ekstremalnym wartościom.([1])

(a) Pokażemy, że $\min_Z f = -1 = f(x, 0, 1, 0)$ oraz $\max_Z f = 0 = f(0,0,0,0)$.

$f = (x - x')(y' - y) + 2xy - x - y$; przy ustalonej parze (x, y) wielkość $w = (x - x')(y' - y)$ jest nieujemna $\iff$ $x' \in [0, x]$, $y' \in [y, 1]$ lub $x' \in [x, 1]$, $y' \in [0, y]$; w pierwszym przypadku $w \leqslant x(y' - y) \leqslant x(1 - y)$, a w drugim $w = (x' - x)(y - y') \leqslant (1 - x)(y - y') \leqslant (1 - x)y$. Analogicznie widzimy, że $w \geqslant -xy$ lub $w \geqslant -(1 - x)(1 - y)$. Zatem $f \leqslant \max(xy - y, xy - x) = \max\big(-(1 - x)y, -x(1 - y)\big) \leqslant 0$ oraz $f \geqslant \min(xy - x - y, xy - 1) \geqslant \min\big(1 - x)(1 - y) - 1, -1\big) \geqslant -1$, co kończy dowód.

W jakich punktach kostki $[0,1]^4$ mamy $f = 0$?

Skoro $f \leqslant \max(xy - y, xy - x)$, więc $f = 0$ implikuje $\max(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \geqslant 0$, czyli $x \in \{0,1\}$ lub $y \in \{0,1\}$, co daje cztery możliwości:

$x = 0$; wtedy $0 = f(0, x', y, y') = -(1 - x')y - x'y'$ (kombinacja wypukła y i y'), czyli $(0,0,0,y')$ lub $(0,1,y,0)$ lub $(0,x',0,0)$;

$x = 1$; wtedy $0 = f(1, x', y, y') = x'y + (1 - x')y' - 1$ (kombinacja wypukła y i y'), czyli $(1,x',1,1)$ lub $(1,0,y,1)$ lub $(1,1,1,y')$;

$y = 0$; wtedy analogicznie jak $x = 0$ daje to punkty $(0,x',0,0)$, $(x,0,0,1)$, $(0,0,0,y')$;

$y = 1$; wtedy analogicznie jak $x = 1$ daje to punkty $(1,1,1,y')$, $(x,1,1,0)$, $(1,x',1,1)$.

Zatem $f = 0$ na ośmiu krawędziach kostki: $(x,0,0,1)$, $(x,1,1,0)$, $(0,x',0,0)$, $(1,x',1,1)$, $(0,1,y,0)$, $(1,0,y,1)$, $(0,0,0,y')$, $(1,1,1,y')$.

W jakich punktach kostki $[0,1]^4$ mamy $f = -1$?

Skoro $f \geqslant \min\big((1 - x)(1 - y) - 1, xy - 1\big)$, więc $f = -1$ implikuje $\min(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant -1$, czyli $x \in \{0,1\}$ lub $y \in \{0,1\}$, co daje cztery możliwości:

$x = 0$; wtedy $-1 = f(0, x', y, y') = -(1 - x')y - x'y'$ (kombinacja wypukła y i y'), czyli $(0,x',1,1)$ lub $(0,0,1,y')$ lub $(0,1,y,1)$;

$x = 1$; wtedy $-1 = f(1, x', y, y') = x'y + (1 - x')y' - 1$ (kombinacja wypukła y i y'), czyli $(1,0,y,0)$ lub $(1,1,0,y')$ lub $(1,x',0,0)$;

$y = 0$; wtedy analogicznie jak $x = 0$ daje to punkty $(1,1,0,y')$, $(1,x',0,0)$, $(x,1,0,1)$;

$y = 1$; wtedy analogicznie jak $x = 1$ daje to punkty $(x,0,1,0)$, $(0,x',1,1)$, $(0,0,1,y')$.

Zatem $f = -1$ na ośmiu krawędziach kostki: $(x,0,1,0)$, $(x,1,0,1)$, $(0,x',1,1)$, $(1,x',0,0)$, $(0,1,y,1)$, $(1,0,y,0)$, $(1,1,0,y')$, $(0,0,1,y')$.

(b) Pokażemy, że $\min_Z f = f(1,-1,1,-1) = -4$, $\max_Z f = f(-1,-1,-1,-1) = 4$, przy czym zbiory $f^{-1}\{\pm 4\}$ są jednoelementowe.

$f = (x - x')(y' - y) + 2xy - x - y$; przy ustalonej parze (x, y) wielkość $w = (x - x')(y' - y)$ jest nieujemna $\iff$ $x' \in [-1, x]$, $y' \in [y, 1]$ lub $x' \in [x, 1]$, $y' \in [-1, y]$; w pierwszym przypadku $w \leqslant (x + 1)(y' - y) \leqslant (x + 1)(1 - y)$, a w drugim $w =\leqslant (1 - x)(y - y') \leqslant (1 - x)(y + 1)$. Analogicznie widzimy, że $w \geqslant (x + 1)(-1 - y)$ lub $w \geqslant (x - 1)(1 - y)$. Zatem $f \leqslant \max(xy - 2y + 1, xy - 2x + 1)$ oraz $f \geqslant \min(xy - 2x - 2y - 1, xy - 1)$; przy tym $xy - 2y + 1 = 1 + (2 - x)(-y) \leqslant 1 + (2 + 1) \cdot 1 = 4$, $xy - 2x + 1 \leqslant 4$, $xy - 1 \geqslant -1 - 1 = -2$ oraz $xy - 2x - 2y - 1 = (2 - x)(2 - y) - 5 \geqslant 1 \cdot 1 - 5 = -4$; zatem ekstremalnymi wartościami f są ± 4.

Jeśli $f = 4$, to $\max(xy - 2y + 1, xy - 2x + 1) \geqslant 4$, czyli $(2 - x)(-y) \geqslant 3$ lub $(-x)(2 - y) \geqslant 3$, co oznacza $x = y = -1$; przy tym $4 = f = 3 - x' - y' - x'y' = 4 - (1 + x')(1 + y')$, co daje $x' = y' = -1$. Jeśli $f = -4$, to $\min\big((2 - x)(2 - y) - 5, xy - 1\big) \leqslant -4$, czyli $(2 - x)(2 - y) \leqslant 1$ (co daje $x = y = 1$) lub $xy = -2$ (co jest niemożliwe); przy tym $-4 = f = -(1 - x')(1 - y')$, skąd $x' = y' = -1$.

[1] Zadanie (a) rekomendował K.Wódkiewicz w referacie z grudnia '97 nt. paradoksu Bosego-Eiensteina i nierówności Bella.

1. Dwa ciągi liczbowe (x_n) i (y_n) spełniają warunek $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, przy czym jeden z nich jest (słabo) rosnący, a drugi — (słabo) malejący. Dowieść, że oba ciągi są zbieżne i ich granice są równe.

Niech $z_n := y_n - x_n$; ciąg (z_n), będąc sumą ciągów malejących (y_n) i $(-x_n)$, jest malejący; zarazem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, więc $\forall n : z_n \geqslant 0$, czyli $x_n \leqslant y_n$. Stąd $\forall n : x_1 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_1$, co dowodzi, że ciągi (x_n) i (y_n) są ograniczone. Wraz z monotonicznością daje to ich zbieżność, przy czym $\lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n) = 0$, QED.

2. Załóżmy, że $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ jest pewnym ciągiem liczb naturalnych, a ciąg liczbowy (x_n) ma własności: (a) $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = \lambda$; (b) $\forall n \in \overline{m_k, m_{k+1}} : x_n \in \left[x_{m_k}, x_{m_{k+1}}\right]$ (konwencja: $[a,b] = [b,a]$). Dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$.

Dla $\varepsilon > 0$ dobierzmy $K \in \mathbf{N}$ tak, by $\forall k \geqslant k : |x_{m_k} - \lambda| \leqslant \varepsilon$; sprawdzimy, że $\forall n \geqslant m_K : |x_n - \lambda| \leqslant \varepsilon$. Otóż niech $k \in \mathbf{N}$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $m_{k+1} > n$; wtedy $k+1 > K$ oraz $n \in \overline{m_k, m_{k+1}}$, a zatem $x_n - \lambda \in \left[x_{m_k} - \lambda, x_{m_{k+1}} - \lambda\right]$; stąd $|x_n - \lambda| \leqslant \max\{|x_{m_k} - \lambda|, |x_{m_{k+1}} - \lambda|\} \leqslant \varepsilon$, QED.

3. Zbadać, czy istnieje taki ściśle rosnący ciąg (x_n), że ciąg $y_n = x_n + \frac{1}{2^n}$ jest *istotnie niemonotoniczny*, co oznacza, że ciąg przyrostów $y_n - y_{n-1}$ ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.

Tak: Jeśli przedstawimy x_n w postaci $x_n = a_1 + \ldots + a_n$, to $y_n - y_{n-1} = a_n - \frac{1}{2^n}$, wobec tego x_n będzie mieć żądane własności, jeśli $a_n \in \begin{cases}]0, 2^{-n}[, & n = 1,3,5,\ldots, \\ ]2^{-n}, \infty[, & n = 2,4,6,\ldots. \end{cases}$ Biorąc np. $a_n = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)$ dostaniemy $x_{2m} = \frac{5}{6}\left(1 - \frac{1}{4^m}\right)$, $x_{2n-1} = \frac{5}{6} - \frac{7}{3\cdot 4^m}$.

4. Niech (b_n) będzie zadanym ciągiem (słabo) rosnącym. Zbadać, czy istnieje taki ciąg (x_n), który jest rosnący oraz spełnia układ równań $\forall n \geqslant 1 : x_n + x_{n+1} = b_n$. Jak jest, w szczególności, gdy $b_n := 1 - 2^{-n}$?

$b_n = d_1 + \ldots + d_n$, gdzie $d_1 = b_1$ oraz $\forall n \geqslant 2 : d_n = b_n - b_{n-1} \geqslant 0$. Łatwa indukcja prowadzi do następujących wzorów na rozwiązanie ogólne układu: $\left\{\begin{array}{c} x_{2m} = d_1 + d_3 + \ldots + d_{2m-1} - x_1 \\ x_{2m+1} = d_2 + d_4 + \ldots + d_{2m} + x_1 \end{array}\right\}$, $m \geqslant 1$; przy tym $x_1 \in \mathbf{R}$ jest tu dowolnym parametrem. Stąd $\left\{\begin{array}{c} x_{2m+1} - x_{2m} = 2x_1 - (d_1 - d_2 + \ldots - d_{2m}) \\ x_{2m+2} - x_{2m+1} = (d_1 - d_2 + d_3 - \ldots + d_{2m+1}) - 2x_1 \end{array}\right\}$. Wszystkie te przyrosty będą $\geqslant 0 \iff A \leqslant 2x_1 \leqslant B$, gdzie $A := \sup_m\{d_1 - d_2 + d_3 - \ldots + d_{2m-1} - d_{2m}\}$ oraz $B := \inf_m\{d_1 - d_2 + d_3 - \ldots + d_{2m+1}\}$. Zatem warunkiem istnienia rosnącego rozwiązania jest $A \leqslant B$, a jednoznaczności rozwiązania — równość $A = B$. Dla $b_n = 1 - 2^{-n}$ można przewidzieć postać $x_n = p + q2^{-n}$, wtedy $x_n + x_{n+1} = 2p - \frac{3}{2}B\ 2^{-n}$, więc rozwiązaniem szczególnym jest $x_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\ 2^{-n}$, a ogólnym $x_n = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\ 2^{-n} + c(-1)^n$; ten ciąg jest rosnący $\Leftrightarrow\ c = 0$. Łatwo także obliczyć, że $d_n = 2^{-n}$, $d_1 - d_2 + \ldots + (-1)^{n-1}d_n = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right]$, $A = B = \frac{1}{3}$.

Uwaga. Dla dowolnego ciągu (c_n), spełniającego nierówności $\forall n \geqslant 1 : (-1)^{n-1}(c_n - c_{n-1}) \geqslant 0$, $c_0 := 0$ (więc $c_1 \geqslant 0$) istnieje jedyny ciąg $(d_n \geqslant 0)$, mianowicie $d_n := (-1)^{n-1}(c_{n-1} - c_n)$, taki że $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}d_k$. Ciągów (c_n) jest 'dużo': Można np. wziąć dowolne $c_1, c_3, c_5, \ldots$, takie że $c_1 \geqslant 0$, a wtedy na $c_2, c_4, c_6, \ldots$ jedynymi ograniczeniami będą $c_{2m} \leqslant \min(c_{2m-1}, c_{2m+1})$; albo wziąć dowolne $c_0, c_2, c_4, \ldots$, takie że $c_0 = 0$, a wtedy na $c_1, c_3, c_5, \ldots$ jedynymi ograniczeniami będą $c_{2m-1} \geqslant \max(c_{2m-2}, c_{2m})$. W szczególności możliwa jest każda para wartości $A = \sup_m\{d_1 - d_2 + \ldots - d_{2m}\}$, $B = \inf_m\{d_1 - \ldots + d_{2m+1}\}$.

5. Znaleźć jawny wzór na wyrazy ciągu $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, określonego rekurencją $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{n(n+2)}(x_1 + \ldots + x_n)$.

Licząc kolejne wyrazy znajdujemy, że $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{6}$, $x_4 = \frac{1}{10}$, $x_5 = \frac{1}{15}$. To sugeruje, że może być prawdziwy wzór ogólny $x_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$. Sprawdzimy to przypuszczenie: byłoby wtedy $x_1 + \ldots + x_n = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$, więc $\frac{1}{n(n+2)}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = x_{n+1}$; zatem postulowana zależność rekurencyjna zachodzi. *Odpowiedź.* $x_n = \frac{2}{n(n+1)}$.

6. Narysować przebieg funkcji $f : D \to \mathbf{R}, f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (x^2/2)^n}$, gdzie $D := \{x \in \mathbf{R} : \lim\limits_{n\to\infty} \ldots \text{ istnieje}\}$.

$D = \mathbf{R} \setminus [-2, -1]$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ dla $|x| > 2$, $f(x) = 1$ na $]-1, 1[$, $f(x) = x$ na $[1, 2]$; w szczególności f jest ciągła na D.

7. Znaleźć (lub pokazać że nie istnieją) liczby $a \in \mathbf{R}$ i $n_0 \in \mathbf{N}$ takie, że $\forall n \geqslant n_0 : \left|\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} - a\right| \leqslant 10^{-4}$.

$a_n = \frac{2n}{\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}}$, więc $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Jeśli $\sqrt{1 + 1/n} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ oraz $\sqrt{1 - 1/n} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, to $\frac{2}{a_n} = \sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n} \in \left[1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, 1 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]$, a więc $a_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Zatem to ostatnie oszacowanie gwarantuje koniunkcja $\frac{1}{n} \leqslant \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 - 1 = \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}$ i $\frac{1}{n} \leqslant 1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2 = \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}$, czyli $n \geqslant \frac{(1+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}$, co dla $\varepsilon = 10^{-4}$ daje $n \geqslant \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} 10\,001^2 = 2500.500025$, czyli wystarczy $n_0 = 2501$.

Uwaga. Można sprawdzić, że $a_n \searrow 1$ oraz że pierwszym wyrazem $< 1 + 10^{-4}$ jest $a_{36} \approx 9.647 \cdot 10^{-5}$; zatem n_0 — dowolne $\geqslant 36$.

8. Wykazać, że zbiór $\{n \in \mathbf{N} : 2^n < (n^7 + 7)^7\}$ jest skończony.

Zauważmy, że $a_n := \frac{(n^7 + 7)^7}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, gdyż $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)^7 + 7}{n^7 + 7}\right)^7 \longrightarrow \frac{1}{2} < 0$. Zatem $\forall^* n : a_n \leqslant 1$, skąd teza.

9. Zbadać zbieżność ciągu o wyrazach $a_n := n\left[3\sqrt{n^2 + 3n + 1} - 7\sqrt{n^2 - n} + 4\sqrt{n^2 - 4n + 5}\right]$.

Sposób 1. $a_n = 3n\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2-n}\right)+4n\left(\sqrt{n^2-4n+5}-\sqrt{n^2-n}\right) = \frac{3n(4n+1)}{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}}+\frac{4n(-3n+5)}{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}} = x_n+y_n$, gdzie $y_n = \frac{12n^2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-n}}-\frac{12n^2}{\sqrt{n^2-4n+5}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{12n^2(\sqrt{n^2-4n+5}-\sqrt{n^2+3n+1})}{(\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot})(\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot})} = \frac{12n^2(-7n+4)}{(\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot})(\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot})(\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot})}$, a więc $\lim y_n = -\frac{12\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 2} = -\frac{21}{2}$, natomiast $x_n = \frac{3n}{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}}+\frac{20n}{\sqrt{\cdot}+\sqrt{\cdot}} \longrightarrow \frac{3}{2}+\frac{20}{2} = \frac{23}{2}$. Zatem $\lim a_n = \frac{23}{2}-\frac{21}{2} = 1$.

Sposób 2. Pomocniczy problem: Dla danych a, b dobierzmy stałe α, β tak, by ciąg $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+an+b}-n-\alpha\right) = \beta$. Jasne, że $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+b}-n\right) = \lim\frac{an+b}{\sqrt{\cdot}+n} = \frac{a}{2}$; stąd $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+an+b}-(n+\frac{a}{2})\right) = \lim\frac{n\left(n^2+an+b-(n+\frac{a}{2})^2\right)}{\sqrt{\cdot}+n+\frac{a}{2}} = \frac{4b-a^2}{8}$. Zatem $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+an+b}-n-\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{8}(a^2-4b) = -\frac{1}{8}\Delta}$. Mając ten wynik dostajemy:

$$a_n = 3n\left(\sqrt{n^2+3n+1}-n-\tfrac{3}{2}\right)-7n\left(\sqrt{n^2-n}-n+\tfrac{1}{2}\right)+4n\left(\sqrt{n^2-4n+5}-n+2\right) \longrightarrow -\tfrac{1}{8}[3\cdot 5-7\cdot 1+4\cdot(-4)] = 1.$$

10. Nie korzystając z twierdzenia Stolza dowieść, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = 0$.

Jeśli $n > m$, to $x_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{m} 1+\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{m}\right) = \frac{m}{n}+\frac{n-m}{nm} \leqslant \frac{m}{n}+\frac{n}{nm}$, co dla $n \geqslant m^2$ jest $\leqslant \frac{1}{m}+\frac{1}{m} = \frac{2}{m}$. Zatem biorąc dla zadanego $\varepsilon > 0$ takie $m \in \mathbf{N}$, że $m \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ dostajemy dla każdego $n \geqslant m^2$ oszacowanie $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{m} \leqslant \varepsilon$.

11. Nie korzystając z tw. Stolza obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, gdzie $x_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} k!$.

Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Weźmy w tym celu $z_n := x_n - 1$; tożsamość $(n+1)!x_{n+1} = n!x_n+(n+1)!$ sprawia, że $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}x_n+1$, czyli $z_{n+1}+1 = \frac{1}{n+1}(z_n+1)+1$, skąd $\boxed{z_{n+1} = \frac{z_n+1}{n+1}}$. Z tej własności przez indukcję dostajemy, że $\forall n \geqslant 2 : 0 < z_n \leqslant \frac{2}{n}$; istotnie, $T_n \Rightarrow z_n \leqslant \frac{\frac{2}{n}+1}{n+1} = \frac{2+n}{n(n+1)} \leqslant \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow T_{n+1}$, QED.

Uwaga. Z tożsamości $x_{n+1}-1 = \frac{1}{n+1}x_n$ wynika, że $x-1 = 0\cdot x$, tj. $x = 0$, o ile [umiemy dowieść, że] $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ istnieje.

12. Zbadać, jakie nierówności zachodzić muszą pomiędzy czterema liczbami $\liminf x_n$, $\limsup x_n$, $\inf x_n$ i $\sup x_n$, jeśli (x_n) jest ciągiem liczbowym.

$\inf x_n \leqslant \liminf x_n \leqslant \limsup x_n \leqslant \sup x_n$; wynika to natychmiast stąd, że $\forall n: \ \alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$, gdzie $\alpha := \inf x_n$, $\beta := \sup x_n$.

13. Dla danego ciągu (x_n) obliczyć $\inf\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, $\sup\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, $\underline{l} := \liminf x_n$ oraz $\overline{l} := \limsup x_n$:

(a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$; $\inf = x_1 = -9$, $\sup = x_{20} = \frac{1}{40}$, $\underline{l} = \overline{l} = 0$.
(b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$; $\inf = x_2 = -\frac{1}{4}$, $\sup = x_6 = \frac{1}{4}$, $\underline{l} = \overline{l} = \frac{1}{5}$.
(c) $x_n = \frac{n-[\sqrt{n}]^2+1}{[\sqrt{n}]}$; $\inf = 0$, $\sup = x_3 = 3$, $\underline{l} = 0$, $\overline{l} = 2$.
(d) $x_n = n-10[\frac{n}{10}]+\frac{2}{n}$; $\inf = 0$, $\sup = x_9 = \frac{83}{9}$, $\underline{l} = 0$, $\overline{l} = 9$.
(e) $x_n = n-\frac{5}{n}-5[\frac{n}{5}]$; $\inf = x_1 = -4$, $\sup = 4$, $\underline{l} = 0$, $\overline{l} = 4$.
(f) $x_n = \frac{24}{n}+\frac{n}{10}-[\frac{n}{10}]$; $\inf = 0$, $\sup = x_1 = \frac{241}{10}$, $\underline{l} = 0$, $\overline{l} = \lim x_{10k-1} = \frac{9}{10}$.

14. Stosując wzór $\sqrt{A}-\sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ obliczyć granice: (a) $x_n := \sqrt{2n+\sqrt{n}+1}-\sqrt{2n-\sqrt{n}+1}$; (b) $x_n := \sqrt{n^3+\sqrt{n^5+n^4}}-\sqrt{n^3+\sqrt{n^5-n^4}}$; (c) $x_n := \sqrt{n+\sqrt{n}+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1}$.

(a) $x_n = \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}} \Rightarrow \lim x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (b) $x_n = \frac{\sqrt{n^5+n^4}-\sqrt{n^5-n^4}}{\sqrt{n^3+\ldots}+\sqrt{n^3+\ldots}} = \frac{2n^4}{(\sqrt{n^5+n^4}+\sqrt{n^5-n^4})(\sqrt{n^3+\ldots}+\sqrt{n^3+\ldots})} = \frac{2n^4}{n^{5/2}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+1/n}\right)n^{3/2}(\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}})} \longrightarrow \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$; (c) $x_n = \frac{n+\sqrt{n}+1-\sqrt{n^2+n+1}}{M_n}$, gdzie $M_n = \sqrt{n+\sqrt{n}+1}+\sqrt[4]{n^2+n+1}$; zatem $\frac{M_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 2$ oraz $x_n = x'_n+x''_n$, gdzie $x'_n = \frac{\sqrt{n}+1}{M_n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, zaś $x''_n = \frac{n-\sqrt{n^2+n+1}}{M_n} = -\frac{n+1}{M_n(n+\sqrt{n^2+n+1})} \longrightarrow 0$; stąd $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

15. Stosując twierdzenie o 3 ciągach obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$: (a) $x_n := \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}+n}$; (b) $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{n}-2^{1-n}}$; (c) $x_n := \sqrt[n]{n^5+(n+1)^5+\ldots+(n+n)^5}$; (d) $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n+(n+1)^n+\ldots+(n+n)^n}$; (e) $x_n := \sqrt[n]{3^n-n^3}$; (f) $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n}}$; (g) $x_n := \sqrt[n]{5^{n+1}-n^5}$.

(a) $\frac{2^n}{n} \leqslant {x_n}^n \leqslant 2^n+2^n$, więc $\frac{2}{\sqrt[n]{n}} \leqslant x_n \leqslant 2\sqrt[n]{2}$, a zatem $\lim x_n = 2$; (b) $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{n}-2^{1-n} \geqslant \frac{1}{2n}$, gdyż $2^{n-1} \geqslant 2n$ dla $n \geqslant 4$; stąd $x_n \longrightarrow 1$ z tw. o 3 ciągach i tego, że $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, $\sqrt[n]{2n} \longrightarrow 1$. (c) $\sqrt[n]{n^5} \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{(n+1)(2n)^5} \leqslant \sqrt[n]{64}\sqrt[n]{n^6}$, więc z tw. o 3 ciągach i tego, że $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$, $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$; (d) $\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+n)^n} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+n)^n}$, czyli $2 \leqslant x_n \leqslant 2\sqrt[n]{n+1} \leqslant 2\sqrt[n]{2n}$, więc tw. o 3 ciągach daje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. (e) Skoro $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{3^n} = 0$, to $\forall^* n: \ \frac{n^3}{3^n} \leqslant \frac{1}{2}$, a zatem $\forall^* n: \ 3\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leqslant x_n \leqslant 3$; stąd, z tw. o trzech ciągach, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. **Uwaga**. $\forall n \geqslant 6 : 2n^3 \leqslant 3^n$ (ale $n = 5 \Rightarrow L = 250$, $P = 243$); krok indukcyjny: $2(n+1)^3 = 2n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \leqslant 3^n\left(1+\frac{1}{6}\right)^3 \leqslant 3^{n+1}$. (f) $\frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{n^2}-\frac{1}{2^n} \geqslant \frac{1}{2n^2}$ (nierówność $2^{n-1} \geqslant n^2$ zachodzi m.in.

$\forall n \geqslant 7$, indukcja); stąd tw. o trzech ciągach daje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. (g) Sprawdzimy, że $\forall n \geqslant 1 : n^5 \leqslant 2\cdot 5^n$. Dla $n = 1, 2, 3$ jest to widoczne, a dalej 'idzie indukcja': $n \geqslant 3 \Rightarrow (n+1)^5 = n^5\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \leqslant 2\cdot 5^n\left(1+\frac{1}{3}\right)^5 \leqslant 2\cdot 5^{n+1}$ gdyż $\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1024}{243} < 5$. Dzięki temu $\sqrt[n]{(5-2)\cdot 5^n} \leqslant x_n \leqslant \sqrt[n]{5\cdot 5^n}$, czyli $5\sqrt[n]{3} \leqslant x_n \leqslant 5\sqrt[n]{5}$, skąd (z równości $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ i tw. o 3 ciągach) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 5$.
Inny sposób. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = 0$, gdyż $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \longrightarrow \frac{1}{5} < 0$; stąd $\forall^* n : \frac{n^5}{5^n} < 1$, więc $4\cdot 5^n \leqslant 5^{n+1} - n^5 \leqslant 5\cdot 5^n$ i dalej j.w.

16. Szacując wyrazy lub badając podciągi zbadać zbieżność ciągu: (a) $x_n := \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$;
(b) $x_n := \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$; (c) $x_n := \frac{n\cdot 3^n + n^2\cdot 2^n}{n! - 5\cdot 7^n}$; (d) $x_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Skoro $|\sin\alpha - \sin\beta| = \left|2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \leqslant |\alpha-\beta|$, to $|x_n| \leqslant \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, więc $x_n \longrightarrow 0$. (b) Skoro $\sin\varphi = (-1)^n\sin(\varphi - n\pi)$, to $x_n = (-1)^n \sin\pi\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right) = (-1)^n \sin\frac{(n+1)\pi}{n+\sqrt{n^2+n+1}}$; zatem $x_{2k} \longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $x_{2k-1} \longrightarrow -\sin\frac{\pi}{2} = -1$, a więc ciąg jest rozbieżny. (c) $\forall^* n : \frac{5\cdot 7^n}{n!} \leqslant \frac{1}{2}$, czyli $n! - 5\cdot 7^n \geqslant \frac{1}{2}n!$, gdyż $\frac{5\cdot 7^n}{n!} \longrightarrow 0$ (bo $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{7}{n+1} \longrightarrow 0$); z kolei $\frac{3^n}{n!} \longrightarrow 0$ oraz $\frac{n^2\cdot 2^n}{n!} \longrightarrow 0$, gdyż $\frac{x_{n+1}}{x_n} \longrightarrow 0$ dla każdego z tych ciągów; zatem $\lim\limits_{n\to} x_n = 0 + 0 = 0$. (d) Oznaczmy $\alpha_n = \sqrt{n^2+n+1} - n = \frac{n+1}{n+\sqrt{n^2+n+1}}$, wtedy $x_n = \cos(n\pi + \alpha_n\pi) = (-1)^n\cos(\alpha_n\pi)$; przy tym $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$, więc wskutek ciągłości kosinusa $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\alpha_n\pi) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

17. Stosując tw. Stolza obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$: (a) $x_n := \frac{1}{n}\sqrt[6]{n^5 + (n+1)^5 + \ldots + (n+n)^5}$;
(b) $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$; (c) $x_n := \frac{1^6+2^6+\ldots+n^6}{n^6} - \frac{n}{7}$; (d) $x_n = \frac{1}{n}\sqrt[10]{1^9 + 2^9 + \ldots + n^9}$.

(a) $x_n^{\,6} = \frac{n^5+(n+1)^5+\ldots+(n+n)^5}{n^6} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{\,6} \overset{\text{St.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^5+(2n+2)^5-n^5}{(n+1)^6-n^6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(32+32-1)n^5+\ldots}{n^6+6n^5+\ldots-n^6} = \frac{63}{6} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[6]{\frac{21}{2}}$.
(b) Z tw. Stolza $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}} - \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2$.
(c) Tw. Stolza daje $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^6 - \frac{1}{7}[(n+1)^7 - n^7]}{(n+1)^6 - n^6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^6+6n^5+\ldots-\frac{1}{7}[7n^6+21n^5+\ldots]}{6n^5+\ldots} = \frac{1}{2}$. (d) $x_n = \sqrt[10]{y_n}$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^9+2^9\ldots+n^9}{n^{10}} \overset{\text{St}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^9}{(n+1)^{10}-n^{10}} = \frac{1}{10}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\sqrt[10]{10}}$ dzięki ciągłości $\sqrt[10]{\ }$.

18. Licząc granicę $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ zbadać zbieżność ciągu: (a) $x_n := \frac{(n+5)!}{n^n}$; (b) $x_n := \frac{n^{2n}}{2^n(2n)!}$; (c) $x_n := \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{2n+1}\right)$;
(d) $x_n = \frac{(2n)(2n+1)\ldots(3n-1)}{(2n-1)^{n+1}}$; (e) $x_n := \frac{(3n-2)!}{(2n)!(2n-1)^n}$; (f) $x_n = \frac{n^{3n}}{5^n\, n!\,(2n)!}$.

(a) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+5}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$, więc $\exists m : \forall n \geqslant m : \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{1}{2}$; stąd $x_n \leqslant \frac{x_m}{2^{n-m}} \longrightarrow 0$. (b) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{4(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \longrightarrow \frac{e^2}{8} < 1$, więc $\lim x_n = 0$. (c) $x_n = \frac{(2n)!}{n!(2n+1)^n}$, skąd $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n+1} \to \frac{2}{e} < 1$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (d) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{2n(2n+1)^2}\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow \frac{27}{8}e^{-1} = \frac{3.375}{e} > 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. (e) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(3n-1)(3n)(3n+1)}{(2n+2)(2n+1)^2}\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{27}{8}e^{-1} = \frac{3.375}{e} > 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. (f) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{10(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} \longrightarrow \frac{e^3}{20} = 1.004277 > 1$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Uwaga. Obliczenia numeryczne (DERIVE, dokładność 20 digits) pokazują, że $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ jest < 1 dla $n \in \overline{1, 233}$ oraz jest $1.00000\,56008$ dla $n = 234$, a więc (o ile wierzyć tym szacunkom!) $\min x_n = x_{234} = 0.0013048$. Stosując wzór Stirlinga $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12}\theta_n}$, $\theta_n \in\,]0, 1[$, dostajemy $x_n = C\xi_n I_n$, gdzie $C = \frac{1}{\pi\sqrt{8}}$, $\xi_n = \frac{\lambda^n}{n}$, $\lambda = \frac{e^3}{20} = 1.0042768$ oraz $I_n = e^{-\frac{1}{12}(\theta_n + \theta_{2n})} \nearrow 1$, $I_n \in \left]e^{-\frac{1}{6}}, 1\right[\,=\,]0.8465, 1[$. Ponieważ $\frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} = \frac{\lambda n}{n+1}$, to ξ_n maleje dla $n < \nu$, a rośnie dla $n > \nu$, gdzie $\nu = \frac{1}{\lambda - 1} \approx 233.817$; przy tym $\frac{\xi_{234}}{\xi_{233}} = \frac{233}{234}\lambda \approx 0.99998506$, więc $\min_n \xi_n = \xi_{233}$. Obliczenia numeryczne (DERIVE j.w.) dają $\begin{pmatrix} \xi_{233} = 0.01160106\,7124 \\ \xi_{234} = 0.01160089\,3859 \end{pmatrix}$.

19. **Uwaga**. Tabelka do znajdowania tego typu przykładów:

x_n	x_{n+1}/x_n	*rząd*
n	$\frac{n+1}{n}$	1
$an+b$	$\frac{an+a+b}{an+b}$	1
$n!$	$n+1$	n
$(pn)^{an+b}$	$p^a\left(\frac{n+1}{n}\right)^{an+b}(n+1)^a$	$(pen)^a$
$(an+b)!$	$(an+b+1)\ldots(an+b+a)$	$(an)^a$

20. Zbadać zbieżność ciągu:
(a) $a_n = \sqrt{(1-x)^n + (1+x)^n}$; (b) $b_n = \sqrt{(x-1)^n + (x+1)^n}$; (c) $c_n = \sqrt[n]{(1-x)^n + 2(1+x)^n}$.

(a) $a_n = \sqrt[n]{(1+|x|)^n + (1-|x|)^n} = (1+|x|)\sqrt[n]{1+u^n}$, gdzie $u = \frac{1-|x|}{1+|x|} \in\,]-1, 1]$. Zatem $\forall^* n : \frac{1}{2} < 1 + u^n \leqslant 2$, więc $(1+|x|)\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leqslant a_n \leqslant \sqrt[n]{2}$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = 1 + |x|$. (b) Jeśli $x > 0$, to $b_n = (1+x)\sqrt[n]{1+u^n}$, gdzie $u = \frac{x-1}{x+1} \in\,]-1, 1[$, więc $\forall n :\ 0 < 1 - |u| \leqslant 1 + u^n < 2$, skąd z tw. o 3 ciągach dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1 + x$. Dla $x = 0$ ciąg jest rozbieżny: $a_{2k} = \sqrt[n]{2} \longrightarrow 1$, zaś $a_{2k-1} = 0$. Natomiast dla $x < 0$ mamy $a_{2k-1} = (x-1)\sqrt[2k-1]{1+u^n}$, gdzie $u = \frac{x+1}{x-1} \in\,]-1, 1[$, więc $a_{2k-1} \longrightarrow x - 1$; z kolei $a_{2k} = |x-1|\sqrt[2k]{1+u^{2k}} \longrightarrow |x-1|$, a więc ciąg (a_n) też jest rozbieżny. (c) $\lim a_n = 1 + |x|$, gdyż $x \geqslant 0 \Rightarrow a_n = (1+x)\sqrt[n]{2+u^n}$, $u = \frac{1-x}{1+x} \in\,]-1, 1]$, zaś $x < 0 \Rightarrow a_n = (1-x)\sqrt[n]{1+2v^n}$, gdzie $v = \frac{1+x}{1-x} \in\,]-1, 1[$.

21. Zbadać w zależności od wartości parametru $x \in \mathbf{R}$ zbieżność ciągu $a_n := \sqrt[n]{(2+3x)^n - 10(3-2x)^n}$.

Niech $u(x) := \frac{3-2x}{2+3x}$, wtedy $u(x) = 1 \iff x = \frac{1}{5}$ oraz $u(x) = -1 \iff x = -5$, więc podzielmy $\mathbf{R}$ na przedziały punktami -5 i $\frac{1}{5}$. $\boxed{x > \frac{1}{5}}$ Wtedy $(2+3x)^n - 10(3-2x)^n = (2+3x)^n\big[1 - 10u^n\big]$, gdzie $u = u(x) \in \big]-\frac{2}{3}, 1\big[$, więc a_n jest określone dla dost. dużych n oraz $a_n = (2+3x)\sqrt[n]{1-10u^n}$, więc $\lim a_n = 2+3x$ (oszacowanie $\forall^* n : \ \frac{1}{2} \leqslant 1 - 10u^n \leqslant 2$ oraz tw. o 3 ciągach). $\boxed{-5 < x \leqslant \frac{1}{5}}$ Wtedy $3 - 2x > 0$, $v(x) := \frac{2+3x}{3-2x} \in]-1, 1[$, więc $(2+3x)^n - 10(3-2x)^n = (3-2x)^n\big[v(x)^n - 10\big]$ jest ujemne, czyli a_n nie jest określone. $\boxed{x \leqslant -5}$ Wtedy $2 + 3x < 0$, $u(x) = \frac{3-2x}{2+3x} \in \big]-1, -\frac{2}{3}\big[$ oraz $(2+3x)^n - 10(3-2x)^n = (2+3x)^n\big[1 - 10u^n\big]$, przy czym $\forall^* n : \big[\ldots\big] \in \big]\frac{1}{2}, 2\big[$; zatem $a_{2k} \longrightarrow -2-3x > 0$, $a_{2k-1} \longrightarrow 2+3x < 0$, czyli ciąg jest rozbieżny (ma dwa p. skupienia).

Nudne!q 22. Zbadać w zależności od parametrów $a, b, p, q \in \mathbf{R}$ zbieżność ciągu o wyrazach $x_n := \sqrt[n]{ap^n + bq^n}$ (oczywiście o zbieżności może być mowa tylko wtedy, gdy x_n jest określone dla prawie wszystkich $n \in \mathbf{N}$).

$\boxed{\text{Przypadek } |p| > |q|}$ Ponieważ $\frac{ap^{2k}+bq^{2k}}{p^{2k}} = a + b\left(\frac{q}{b}\right)^{2k} \longrightarrow a$, to przy $a < 0$ dla niesk. wielu n wyrazy x_n są nieokreślone. Rozważmy więc przypadek $a > 0$. Z tożsamości $\sqrt{p^n} = |p|(\operatorname{sgn} p)^n$ dostajemy $x_n = |p|(\operatorname{sgn} p)^n\sqrt{a + bu^n}$, przy czym $a + bu^n \longrightarrow a$, więc $\forall^* n : \ a + bu^n \in \big]\frac{1}{2}a, 2a\big[$. $\boxed{\text{Przypadek } |p| = |q| \neq 0}$ Jeśli $p = q < 0$, to $ap^n + bq^n = |p|(a+b)(-1)^n$, więc dla $a + b = 0$ mamy $x_n = 0 \longrightarrow 0$, dla $a + b < 0 \ \Rightarrow \ \exists^* n : x_n$ jest nieokreślone, a dla $a + b > 0$ (x_n) ma dwa punkty skupienia. Jeśli $p = -q > 0$, wtedy $ap^n + bq^n = |p|^n\big(a + (-1)^n\big)$, więc mamy zbieżność $\Leftrightarrow \ a > |b|$. Jeśli wreszcie $p = q > 0$, to $ap^n + bq^n = |p|^n(a+b)$, więc (x_n) jest zbieżny $\Leftrightarrow \ a + b > 0$, co też jest równoważne warunkowi $\big(a > |b|\big)$ lub $\big(b > |a|\big)$.

Podsumowanie: Gdy $|p| \neq |q|$ oraz $a, b \neq 0$, wtedy (x_n) jest zbieżny $\Leftrightarrow$ większa co do modułu z liczb p, q ma dodatni współczynnik (w przeciwnym razie $\exists^* n : x_n$ nie jest określone) oraz ma dodatni znak (w przeciwnym razie są dwa punkty skupienia).
Gdy $|p| = |q| \neq 0$, wtedy (x_n) jest zbieżny $\Leftrightarrow \ \big(p > 0, \ a > |b|\big)$ lub $\big(q > 0, \ b > |a|\big)$ lub $\big(p = q, \ a + b = 0\big)$.

23. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, oraz $\alpha > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Biorąc $\varepsilon := \frac{1}{2}\alpha$ widzimy, że $\exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 : \frac{1}{2}\alpha \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}\alpha$, a więc $x_n := \sqrt[n]{\frac{1}{2}\alpha} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant y_n := \sqrt[n]{\frac{3}{2}\alpha}$, przy czym każdy z ciągów (x_n) i (y_n) jest, jak wiemy, zbieżny do 1. Stąd dostajemy tezę dzięki twierdzeniu o 3 ciągach.

24. Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny, to zbiór $\{x_n : \ n \in \mathbf{N}\}$ zawiera choć jeden ze swoich kresów, tzn. $\exists m \in \mathbf{N} : \ [\forall n : x_m \leqslant x_n]$ lub $[\forall n : x_n \leqslant x_m]$.

Niech $g := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$; jeżeli $\exists k : \ x_k < g$, to $\exists N : \forall n > N : x_n > x_k$, więc $x_m := \min(x_1, \ldots, x_N)$ spełnia $[\forall n : x_m \leqslant x_n]$. Podobnie jest, gdy $\exists k : \ x_k > g$. Jeśli zaś nie zachodzi żadna z tych dwu możliwości, to $\forall n : \ x_n = g$, więc dobre jest każde $m \in \mathbf{N}$.

25. Dowieść, że jeśli ciąg (a_n) spełnia warunki $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\forall n \geqslant 2 : \ a_n \leqslant \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$, to jest (słabo) malejący.

Przepisując postulowaną nierówność w postaci $\forall n \geqslant 2 : \ a_n - a_{n-1} \leqslant a_{n+1} - a_n$ widzimy, że ciąg przyrostów $\delta_n := a_{n+1} - a_n$ jest rosnący; zatem gdyby $\exists m : \delta_m > 0$, wtedy byłoby $\forall^* n : \delta_n \geqslant c := \delta_m > 0$, co jest sprzeczne z tym, że $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0 - 0 = 0$.

26. Dowieść, że jeśli dla ciągu liczbowego (x_n) istnieją granice $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ oraz $y = \lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n)$, to $y = 0$.

Nie wprost: Niech $y > 0$, wtedy istnieje $\alpha > 0$ (np. $\alpha = \frac{1}{2}y$) oraz $N \in \mathbf{N}$ takie, że $\forall n \geqslant N : n(x_{n+1} - x_n) \geqslant \alpha$. Stąd dla każdych $n > m \geqslant N$ mamy $x_n - x_m = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{m+1} - x_m) \geqslant \frac{\alpha}{n-1} + \frac{\alpha}{n-2} + \ldots + \frac{\alpha}{m} > \frac{\alpha}{n-1} + \ldots + \frac{\alpha}{n-1} = \frac{(n-m)\alpha}{n-1}$; w szczególności dla $n = 2m$ dostajemy $x_{2m} - x_m > \frac{m\alpha}{2m-1} > \frac{\alpha}{2}$, więc ciąg (x_n) nie spełnia warunku Cauchy'ego. Sprzeczność.

27. Zbadać (znajdując dowód lub kontrprzykład), które z dwu zdań jest prawdziwe:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = 0$ dla każdego zbieżnego ciągu liczbowego (x_n);
(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = 0$ dla każdego zbieżnego i monotonicznego ciągu liczbowego (x_n).

Oba zdania są fałszywe: Kontrprzykładem dla (a) jest np. ciąg $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$, dla którego $n\big|x_{n+1} - x_n\big| = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \longrightarrow 2$, a więc $n(x_{n+1} - x_n)$ nie dąży do 0. Z kolei ciąg o wyrazach $x_n := \frac{1}{E(\sqrt{n})}$ jest monotonicznie zbieżny do 0, jednakże dla n postaci $n = k^2 - 1$, gdzie $k \in \mathbf{N}$, mamy $n(a_{n+1} - x_n) = (k^2 - 1)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{k+1}{k} \longrightarrow 1$, więc zdanie (b) także jest fałszywe.

28. Niech $\forall n : a_n = \frac{\gamma_n}{n^r}$, gdzie $r \in \mathbf{R}$ jest stałą oraz granica $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$ istnieje i $\gamma \neq 0$. Dowieść, że ciąg o wyrazach $R_n := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ jest zbieżny $\iff \lim\limits_{n\to\infty} n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) = 0$, przy czym w tym przypadku $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = r$.

(a) Mamy rozkład $R_n = n\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \frac{n(\gamma_n - \gamma_{n+1})}{\gamma_{n+1}} + n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right)$, przy czym $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \frac{d}{dx}(1+x)^r\big|_{x=0} = r$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$ istnieje $\iff \lim\limits_{n\to\infty} n(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ istnieje. Wobec tego dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla zbieżnego ciągu (γ_n) ciąg $n(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ nie może być zbieżny do granicy różnej od zera. Otóż gdyby $n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \longrightarrow \beta > 0$, wtedy $\exists \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geqslant N : n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \geqslant \varepsilon$; stąd $\forall n \geqslant N : \gamma_{2n} - \gamma_n = (\gamma_{2n} - \gamma_{2n-1}) + (\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n-2}) + \ldots + (\gamma_{n+1} - \gamma_n) \geqslant \frac{\varepsilon}{2n-1} + \frac{\varepsilon}{2n-2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n} > \frac{\varepsilon}{2n-1} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2n-1} = \frac{n\varepsilon}{2n-1} > \frac{\varepsilon}{2}$; jest to sprzeczne z warunkiem Cauchy'ego dla ciągu (γ_n). Tak samo jest niemożliwe, by $n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) \longrightarrow \beta < 0$.

29. Sprawdzić, że dla $a_n = \frac{1}{E(\sqrt{n})}$ mamy $\gamma_n := a_n n^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 1$, lecz ciąg o wyrazach $R_N := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ jest rozbieżny.

Ponieważ $1 \leqslant a_n\sqrt{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$, to tw. o 3 ciągach daje $a_n\sqrt{n} \longrightarrow 1$; ponadto $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \begin{cases} k+1, & n = k^2-1, \\ 0, & n = k^2, \end{cases}$ co daje tezę.

30. Sprawdzić, że jeśli $\forall n \in \mathbf{N} : a_n = b_n c_n$ oraz istnieją skończone granice $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right)$, $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{c_{n+1}}{c_n} - 1\right)$, to granica $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ także istnieje i jest równa $\beta + \gamma$.

$\left(\frac{b_{n+1}c_{n+1}}{b_n c_n} - 1\right) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right)\frac{c_{n+1}}{c_n} + \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} - 1\right)$, przy czym z istnienia granicy γ wynika, zę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1$; stąd teza.

31. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$, jeśli (a) $a_n := n^p \log n$; (b) $a_n := \dfrac{n^p}{\log n}$, gdzie $p \in \mathbf{R}$ jest parametrem.

(a) $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = n\dfrac{(1+\frac{1}{n})^p \log(n+1) - \log n}{\log n} = n\dfrac{\left[(1+\frac{1}{n})^p - 1\right]\log(n+1) + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{\log(n+1)}{\log n} +$ $+\dfrac{\log(1+\frac{1}{n})^n}{\log n} = p \cdot 1 + 0 = p$, gdyż $\log(1+\frac{1}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \log e = 1$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^p - 1}{x} = f_p'(0) = p$, gdzie $f_p(x) = (1+x)^p$.

(b) $n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = n\dfrac{(1+\frac{1}{n})^p \log n - \log(n+1)}{\log(n+1)} = n\dfrac{\left[(1+\frac{1}{n})^p - 1\right]\log n - \log(1+\frac{1}{n})}{\log(n+1)} = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^p - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{\log n)}{\log(n+1)} - \dfrac{\log(1+\frac{1}{n})^n}{\log(n+1)} =$ $p \cdot 1 - 0 = p$, gdyż $\log(1+\frac{1}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \log e = 1$ oraz $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^p - 1}{x} = f_p'(0) = p$, gdzie $f_p(x) = (1+x)^p$.

32. Dowieść, że jeśli $\forall n : a_n > 0$, istnieje (dla uproszczenia skończona) granica $L = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ oraz $b_n = a_n{}^p$ ($p \in \mathbf{R}$ jest ustalone), to $P := \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1\right) = pL$. W szczególności dla $b_n = (\log n)^p$ dostajemy stąd $P = 0$.

Z istnienia granicy L wynika $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, więc wskutek $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x - 1} = p$ dostajemy $\dfrac{\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p - 1}{\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1} \cdot n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \longrightarrow p \cdot L$, QED.

33. W grupie S_n, $n \geqslant 2$, liczba cykli długości $k \in \overline{2,n}$ wynosi $\frac{1}{k}n(n-1)\ldots(n-k+1)$, więc prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z grupy S_n permutacja jest cyklem jest równe $P_n = \frac{1}{n!} + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k(n-k)!}$. Wyprowadzić wzór

$$\lim_{n\to\infty} nP_n = e = 2.71828\ldots .$$

Zamieniając wskaźnik sumacyjny dostajemy $P_{n+2} = \frac{1}{(n+2)!} + \sum\limits_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k(n+2-k)!} = \left\|{}^{r=n+1-k}\right\| = \frac{1}{(n+2)!} + \sum\limits_{r=-1}^{n-1} \frac{1}{(n+1-r)(r+1)!}$, więc $(n+2)P_{n+2} - \frac{1}{(n+1)!} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum\limits_{r=-1}^{n-1} \left(\frac{n+2}{n+1-r} - 1\right)\frac{1}{(r+1)!} = \sum\limits_{r=-1}^{n-1} \frac{r+1}{(n+1-r)(r+1)!} = \sum\limits_{r=0}^{n-1} \frac{1}{(n+1-r)r!} =: Q_n$. Skoro $\frac{1}{(n+1)!} \longrightarrow 0$ oraz $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \longrightarrow e$, więc do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = 0$. Dla $m < n$ mamy $Q_n = \sum\limits_{r=0}^{m} + \sum\limits_{r=m+1}^{n-1} = I + II$, przy czym $I \leqslant \sum\limits_{r=0}^{m} \frac{1}{(n+1-m)r!} \leqslant \frac{1}{n+1-m} \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} = \frac{e}{n+1-m}$ oraz $II \leqslant \sum\limits_{r=m+1}^{n-1} \frac{1}{2r!} \leqslant \frac{1}{2} \sum\limits_{r=m+1}^{\infty} \frac{1}{r!} \leqslant \frac{1}{2m!}$, gdyż $\frac{1}{r!} \leqslant \frac{r-1}{r!} = \frac{1}{(r-1)!} - \frac{1}{r!}$. Zatem dobierając dla zadanego $\varepsilon > 0$ tak duże $m \in \mathbf{N}$, by $\frac{1}{m!} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$, widzimy, że dla prawie wszystkich $n \in \mathbf{N}$, mianowicie dla n takich, że $\frac{e}{n+1-m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, tzn. $n \geqslant m - 1 + \frac{2e}{\varepsilon}$, zachodzą nierówności $I \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $II \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, a zatem $\forall^* n : 0 \leqslant Q_n \leqslant \varepsilon$, QED.

34. Dowieść, że jeśli (u_n) jest ciągiem o wyrazach dodatnich, to $\lim\limits_{n\to\infty} n\log u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n(u_n - 1)$, w tym sensie, że jeśli istnieje jedna z tych dwu granic (skończona albo nieskończona), to także druga istnieje i obie są równe.

W oznaczeniach $L_n := n\log u_n$, $P_n := n(u_n - 1)$ mamy $1 + \frac{P_n}{n} > 0$ oraz zależności $L_n = n\log\left(1 + \frac{P_n}{n}\right)$ oraz $P_n = n\left(e^{\frac{1}{n}L_n} - 1\right)$. Ponieważ $\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ dla $x > -1$, to $\boxed{\dfrac{P_n}{1 + \frac{1}{n}P_n} \leqslant L_n \leqslant P_n}$, skąd wprost wynika $L = P$ w przypadku, gdy $P = \lim P_n$ istnieje oraz $P \neq +\infty$. Z kolei nierówność $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$, $x < 1$ daje $\boxed{L_n \leqslant P_n \leqslant \dfrac{L_n}{1 - \frac{1}{n}L_n}}$, skąd wynika $L = P$ w przypadku, gdy granica $L = \lim L_n$ istnieje oraz $L \neq -\infty$.

Załóżmy teraz, że $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$; rozważmy następujące nierówności: $L_n = n\log\left(1 + \frac{P_n}{n}\right) \overset{I}{\geqslant} n\log\left(1 + \frac{A}{n}\right) \overset{II}{\geqslant} \frac{A}{2}$. Otóż mając dowolnie zadane $A > 0$ dobierzmy najpierw $N_1 \in \mathbf{N}$ tak, by $\forall n \geqslant N_1 : P_n > A$ (wtedy nierówność I będzie spełniona) oraz $N_2 \in \mathbf{N}$ tak, by nierówność II zachodziła dla wszystkich $n \geqslant N_2$ (jest to możliwe, gdyż $n\log(1 + \frac{A}{n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, zaś $A > \frac{A}{2}$). Będziemy wtedy mieli $\forall n \geqslant N = N(A) := \max(N_1, N_2) : L_n \geqslant \frac{A}{2}$, co wskutek dowolności $A > 0$ dowodzi, że także $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = +\infty$.

Załóżmy z kolei, że $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = -\infty$; rozważmy następujące nierówności: $P_n = n\left(e^{\frac{1}{n}L_n} - 1\right) \overset{I}{\leqslant} n\left(e^{\frac{1}{n}A} - 1\right) \overset{II}{\leqslant} \frac{A}{2}$. Otóż mając dowolnie zadane $A < 0$ dobierzmy najpierw $N_1 \in \mathbf{N}$ tak, by $\forall n \geqslant N_1 : L_n \leqslant A$ (wtedy nierówność I będzie spełniona) oraz $N_2 \in \mathbf{N}$

tak, by nierówność II zachodziła dla wszystkich $n \geqslant N_2$ (jest to możliwe, gdyż $n\left(e^{\frac{A}{n}}-1\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} A$, zaś $A < \frac{A}{2}$). Będziemy wtedy mieli $\forall n \geqslant N = N(A) := \max(N_1, N_2) : P_n \leqslant \frac{A}{2}$, co wskutek dowolności $A > 0$ dowodzi, że także $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = -\infty$.

Uwaga. Przypadek, gdy L lub P istnieje i jest skończone można załatwić inaczej: $L_n = P_n \cdot h(u_n)$ oraz $P_n = L_n / h(u_n)$, gdzie funkcja $h(u) := \begin{cases} (u-1)^{-1}\log u, & u \neq 1, \\ 1, & u = 1 \end{cases}$ jest ciągła na $]0, +\infty[$; otóż $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, wskutek czego $\lim\limits_{n\to\infty} h(u_n) = 1$; to kończy dowód.

35. Dowieść, że jeśli $\forall n \in \mathbf{N} :\ x_n > 0$ oraz granica $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ istnieje, to $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right) = \log x$. Dopuszczamy tu możliwość, że $x = 0^+$ (wtedy $\log x := -\infty$) bądź $x = +\infty$ (wtedy $\log x = +\infty$).

Jeśli $x \notin \{0, +\infty\}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, gdyż dla p.w. n mamy wtedy $\frac{1}{2}x < x_n < 2x$, zaś $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}x} = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2x} = 1$. Otóż $n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right) = h(u_n) \cdot \log x_n$, gdzie $u_n := \sqrt[n]{x_n}$, zaś $h(u) := \begin{cases} \frac{u-1}{\log u}, & 1 \neq u > 0, \\ 1, & u = 1 \end{cases}$ jest funkcją ciągłą; stąd od razu wynika teza.

Dla $x = +\infty$ teza wynika z oszacowania $\sqrt[n]{x_n} = e^{\frac{1}{n}\log x_n} \geqslant \frac{1}{n}\log x_n + 1$.

Zajmijmy się na koniec przypadkiem $x = 0^+$: Rozważmy nierówności $n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right) \stackrel{I}{\leqslant} n\left(\sqrt[n]{\varepsilon} - 1\right) \stackrel{II}{\leqslant} \frac{1}{2}\log\varepsilon \stackrel{III}{\leqslant} A$. Otóż mając zadane $A < 0$ weźmy najpierw $\varepsilon \in]0, 1[$ tak małe, by spełnić III; następnie znajdźmy $N_1 \in \mathbf{N}$, takie że $\forall n \geqslant N_2 : x_n \in]0, \varepsilon[$, wtedy będzie zachodzić nierówność I; zauważmy wreszcie, że skoro $n\left(\sqrt[n]{\varepsilon} - 1\right) \longrightarrow \log\varepsilon$ oraz $\log\varepsilon < 0$, to $\exists N_2 \in \mathbf{N}$ tak duże, że nierówność II zachodzi dla wszystkich $n \geqslant N_2$. Wobec tego biorąc $N := \max(N_1, N_2)$ dostajemy $\forall A : \exists N : \forall n \geqslant N : n\left(\sqrt[n]{x_n} - 1\right) \leqslant A$, QED.

36. Niech $L(n) := \#\{k \in \overline{1, n} :\ k \mid n\} =$ (liczba dzielników n). Dowieść, że $\forall n \geqslant 3 : L(n) < n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L(n)}{n} = 0$.

Niech $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$ — rozkład na czynniki pierwsze, wtedy $\frac{L(n)}{n} = \frac{\alpha_1+1}{p_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\alpha_r+1}{p_r^{\alpha_r}}$; dla dowodu nierówności $L(n) < n$ wystarczy więc pokazać, że $\boxed{\alpha + 1 \leqslant p^\alpha}$ dla $p \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+$, przy czym równość jest jedynie dla $\alpha = 0$ lub $\alpha = 1, p = 2$. Zastosujemy indukcję: jeśli $\alpha + 1 \leqslant p^\alpha$, to $\alpha + 2 = (\alpha+1)p - \alpha(p-1) - (p-2) \leqslant (\alpha+1)p \leqslant p^\alpha p = p^{\alpha+1}$, QED.

Ponadto $\frac{L(n)}{\sqrt{n}} = \frac{\alpha_1+1}{q_1^{\alpha_1}} \ldots \frac{\alpha_r+1}{q_r^{\alpha_r}}$, gdzie $q_i := \sqrt{p}_i$; skoro $q_j > 2$ dla $j \geqslant 3$, to jak widzieliśmy $\forall j \geqslant 3 : \frac{\alpha_j+1}{q_j^{\alpha_j}} \leqslant 1$. Z kolei łatwo pokazać przez indukcję, że $\frac{\alpha_1+1}{\sqrt{2}^{\,\alpha_1}} \leqslant \frac{2+1}{\sqrt{2}^{\,2}}$ oraz $\frac{\alpha_2+1}{\sqrt{3}^{\,\alpha_2}} \leqslant \frac{1+1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; w konsekwencji $\forall n : \frac{L(n)}{\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{3}$, więc $0 \leqslant \frac{L(n)}{n} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, co kończy dowód.

37. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencją $x_{n+1} = \dfrac{5x_n - 6}{2x_n - 3}$, $x_0 = 2$.

Dla $f(x) := \frac{5x-6}{2x-3}$ mamy $f(x) - x = \frac{2(3-x)(x-1)}{2x-3}$, więc $f(x) = x \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$. Wykażemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$: $f(x) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2(2x-3)}$ maleje na $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$, więc odwzorowuje przedział $P := [x_2, x_1] = \left[\frac{14}{5}, 4\right]$ na $[x_2, x_3] = \left[\frac{14}{5}, \frac{40}{3}\right]$. Zatem $f(P) \subset P$, skąd $\forall n \geqslant 1 : x_n \in P$, więc $2x_n - 3 \geqslant \frac{13}{5}$; stąd ze wzoru $f(x) - 3 = \frac{3-x}{2x-3}$ mamy $|x_{n+1} - 3| \leqslant \frac{5}{13}|x_n - 3|$. Zatem $|x_n - 3| \leqslant \left(\frac{5}{13}\right)^{n-1} |x_1 - 3|$, QED.

Inny sposób. Skoro f maleje, $f(3) = 3$, $f(\frac{3}{2}^+) = +\infty$, $f(+\infty) = \frac{5}{2}$, to $f : \left]\frac{3}{2}, 3\right] \longrightarrow [3, +\infty[$ i $f : [3, +\infty[\longrightarrow \left]\frac{5}{2}, 3\right]$. Zatem $\forall k :\ x_{2k} \in \left]\frac{5}{2}, 3\right]$, $x_{2k-1} \in [3, +\infty[$, czyli wyrazy (x_n) oscylują wokół 3. Dla dowodu ich zbieżności wystarczy wykazać, że ciąg (x_{2k}) jest rosnący, a (x_{2k-1}) malejący. Otóż każdy z tych dwu ciągów spełnia rekurencję daną funkcją $g := f \circ f$, tzn. $g(x) = \frac{13x-12}{4x-3}$, więc ze wzoru $g(x) - x = \frac{4(x-1)}{4x-3}(3-x)$ mamy $\left\{\begin{array}{l} x \in \left]\frac{5}{2}, 3\right[\ \Rightarrow\ g(x) > x \\ x \in]3, +\infty[\ \Rightarrow\ g(x) < x \end{array}\right\}$, więc $x_{2k+2} = g(x_{2k}) > x_{2k}$ oraz $x_{2k+1} = g(x_{2k-1}) > x_{2k-1}$.

38. Zbadać zbieżność ciągu (x_n), jeśli $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 2}{4x_n + 5}$.

$f(x) := \dfrac{3x+2}{4x+5}$ odwzorowuje $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, przy czym $f(x) - x = \dfrac{(2x+2)(1-2x)}{4x+5}$, więc jedynym p. stałym f na R_+ jest $x^* = \frac{1}{2}$; przy tym $f(x) - x^* = \dfrac{2x-1}{2(4x+5)} = \dfrac{u}{4u+7}$, gdzie $u = x - x^*$. Zatem $|f(x) - x^*| \leqslant \frac{1}{7}|x - x^*|$, skąd $|x_n - x^*| \leqslant \frac{1}{7^n}|x_0 - x^*| \longrightarrow 0$.

39. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie wzorami $x_0 = -\dfrac{99}{100}$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 2}{4x_n + 5}$.

Niech $f(x) := \dfrac{3x+2}{4x+5}$, wtedy $f(x) - x = \dfrac{(2x+2)(1-2x)}{4x+5}$, więc p. stałymi f są -1 i $\frac{1}{2}$; ponadto jeśli $x \in P := \left]-1, \frac{1}{2}\right[$, to $f(x) + 1 = \dfrac{7(x+1)}{4x+5} > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-1}{2(4x+5)} < 0$ oraz $f(x) - x = \dfrac{(1-2x)(x+1)}{4x+5} > 0$; zatem $f(P) \subset P$, czyli $\forall n : x_n \in P$, przy czym $x_{n+1} = f(x_n) \geqslant x_n$, tzn. (x_n) jest rosnący i ograniczony. Stąd istnieje $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, jest p. stałym f i $x^* > x_0$, tzn. $x^* = \dfrac{1}{2}$.

40. Niech $f(x) := \pi x - 4\,\mathrm{arc\,tg}\, x$. Zbadać w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$ zbieżność ciągu (x_n), określonego rekurencyjnie wzorami $x_0 = a$, $\forall n \geqslant 0 : x_{n+1} = f(x_n)$.

$h(x) := f(x) - x = (\pi - 1)x - 4\,\mathrm{arc\,tg}\, x$ jest nieparzysta i wypukła dla $x \geqslant 0$, gdyż $h''(x) = \dfrac{8x}{(1+x^2)^2} \geqslant 0$; ponadto $h(1) = -1 < 0$ oraz $h \to +\infty$ dla $x \to +\infty$, więc $f(x) = x$ ma 3 pierwiastki: $x = 0$ oraz $x = \pm x^*$, gdzie $x^* \approx 2.105815$ (szybko zbieżny do x^* jest ciąg $u_{n+1} = \dfrac{4}{\pi - 1}\mathrm{arc\,tg}\, u_n$). Wystarczy rozważyć 3 przypadki: $\boxed{|a| \leqslant 1}$; wtedy $|f(x)| = 4\,\mathrm{arc\,tg}\,|x| - \pi|x| \leqslant (4 - \pi)|x|$, gdyż $4\,\mathrm{arc\,tg}\, x - \pi x$ jest wypukła i zeruje się na końcach $[0, 1]$; stąd $|x_n| \leqslant (4 - \pi)^n \to 0$. $\boxed{a \in]1, x^*[}$; skoro $f :]1, x^*[\to]0, x^*[$ oraz mamy tu $f(x) < x$ (wskutek wypukłości f), to nie może być stale $x_n > 1$ (ad absurdum: ciąg jest malejący i ograniczony, więc zbieżny do granicy $\in [1, x^*[$; sprzeczność, bo f nie ma w tym przedziale p. stałych). Stąd $x_{n_0} \in [0, 1]$ dla pewnego dost. dużego n_0, więc, jak poprzednio, $x_n \to 0$. $\boxed{a > x^*}$; $f(x_n)$ jest rosnącym (bo $f(x) > x$ na $]x^*, \infty[$) ciągiem nieograniczonym (brak tu punktów stałych f).

Odpowiedź. $\lim x_n$ jest 0, $\pm x^*$ lub $\pm\infty$, stosownie do przypadku $|a| < x^*$, $a = \pm x^*$, $|a| > x^*$.

41. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:

(a) $x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^3$; (b) $x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{\pi}{2}\sin x_n$; (c) $x_0 = 1,\ x_{n+1} = x_n - \sin x_n$.

(a) $x_n \searrow 0$. Dowód: $f : [0,1] \to [0,1]$, gdyż dla $x \in [0,1]$ mamy $f(x) = x(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2) \geqslant x(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \geqslant 0$ oraz $f(x) \leqslant x \leqslant 1$; ponadto $f(x) = x \iff \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0 \iff x = 0$, jeśli $x \in [0,1]$; stąd teza.
(b) $x_n \nearrow \frac{\pi}{2}$. Dowód: Jasne, że $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; ponadto na tym przedziale $f(x) \geqslant x$, przy czym $f(x) = x \iff \left(x = 0 \text{ lub } x = \frac{\pi}{2}\right)$, gdyż sin jest tu funkcją wypukłą w górę; stąd teza.
(c) $x_n \searrow 0$. Dowód: Skoro $\forall x \geqslant 0 : \sin x \leqslant x$, to $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) \leqslant x$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, przy czym $f(x) = x \iff \sin x = 0 \iff x = 0$ na tym przedziale; stąd teza.

42. Dla ustalonego $x_0 \in]0,1[$ zbadać zbieżność ciągu (x_n), jeśli $x_n := \sqrt{1 - \sqrt{1 - \ldots - \sqrt{1 - x_0}}}$ (n pierwiastków).

x_n określony jest rekurencją $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(x) = \sqrt{1-x}$. Iteracja $g := f \circ f : [0,1] \to [0,1]$, $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}}$, ma punkty stałe 0 i $\tilde{x} := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i 1. Pokażę, że $g(x) \geqslant x$ na $[0,\tilde{x}]$ i $g(x) \leqslant x$ na $[\tilde{x},1]$; tym samym oba g-ciągi są monotoniczne i zbieżne do $\tilde{x}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Otóż dla $x \in [0,1]$ mamy: $g(x) \geqslant x \iff \sqrt{1 - \sqrt{1-x}} \geqslant x \iff 1 - x^2 \geqslant \sqrt{1-x} \iff (1-x)(1+x)^2 \geqslant 1 \iff 0 \leqslant (1-x)(1+x)^2 - 1 = x(1 - x - x^2) \iff x \leqslant \tilde{x}$; analogicznie…

43. Zbadać zbieżność ciągu (x_n) określonego rekurencyjnie $x_1 := \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = 2\sqrt{3 - 2x}$ dla $n \in \mathbf{N}$.

Pokażemy, że $\exists n \in \mathbf{N} : x_n > 3$, a wtedy x_{n+1} jest nieokreślone; oznacza to, że dana rekurencja nie określa nieskończonego ciągu liczbowego, więc nie ma sensu pytanie o jego zbieżność. Weźmy $g(x) = f \circ f(x) = 2\sqrt{3 - 2\sqrt{3-x}}$, $g : \left[\frac{3}{4}, 3\right] \to \mathbf{R}$; wtedy $g(x) < x$ dla $\frac{3}{4} < x < 2$ (sprowadza się to do $x^4 - 24x^2 + 64x - 48 < 0$, tzn. $(x-2)^3(x+6) < 0$), więc g-ciąg (x_{2k-1}) jest malejący; gdyby był nieskończony, musiałby zbiegać do punktu stałego g, a jedynym punktem stałym jest $x_0 = 2$ (równanie $(x-2)^3(x+6) = 0$); wobec $x_1 = \frac{3}{2} < 2$ jest to niemożliwe, więc $\exists k :\ x_{2k-1} < \frac{3}{4}$, $x_{2k} > 3$. *Uwaga.* Numeryczne wyliczenia dają $x_{30} = 3.174339$, czyli $k = 15$.

1. **Twierdzenie**. (I) $e(x) = e^x$, gdzie $e := e(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828$ (*podstawa logarytmów naturalnych*). Zatem $\forall x \in \mathbf{R} : e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. (II) $\forall x : e^x \geqslant 1 + x$; (III) $\forall x < 1 : e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

(I) wynika wprost z poniższych lematów; jako $f(\cdot)$ należy wziąć $f(x) = e^x$.

Lemat 1. $\forall q \in \mathbf{Q} : e(q) = e^q$

Przez indukcję z 2° dostajemy $e(x_1 + \ldots + x_n) = e(x_1)\ldots e(x_n)$, w szczególności $\forall x : \forall n \in \mathbf{N} : e(nx) = e(x)^n$; przy tym wzór $e(-x) = e(x)^{-1}$ powoduje, że $e(-nx) = e(nx)^{-1} = (e(x)^n)^{-1} = e(x)^{-n}$; zarazem $e(0) = 1$, więc $\boxed{\forall x : \forall l \in \mathbf{Z} : e(lx) = e(x)^l}$.

Stąd dla każdego $q = \frac{l}{m}$ (gdzie $m \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{Z}$) mamy $e(q)^m = e(mq) = e(l) = e(1)^l = e^l$, a więc $e(q) = \sqrt[m]{e^l} = e^{\frac{l}{m}} = e^q$.

Lemat 2. Jeśli funkcje $e(\cdot), f(\cdot) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ są (słabo) rosnące, $e(\cdot)$ jest ciągła oraz $\forall q \subset \mathbf{Q} : e(q) = f(q)$, to $e(\cdot) = f(\cdot)$.

Istotnie, przypuśćmy, że $\exists x_0 : e(x_0) < f(x_0)$. Weźmy w $\mathbf{Q}$ ciąg (q_n) taki, że $q_n \searrow x_0$; wtedy $\lim_{n\to\infty} e(q_n) = e(x_0) < f(x_0)$, więc $\exists q > x_0 : e(q) < f(x_0)$; zarazem $f(x_0) \leqslant f(q) = e(q)$, sprzeczność. Tak samo pokazujemy, że $\neg\exists x_0 : e(x_0) > f(x_0)$.

(II) Wynika wprost z (I) i własności $e(x) \geqslant 1 + x$. (III) Wynika z (I) i stąd, że $\frac{1}{e^x} = e^{-x} \geqslant 1 - x$, a dla $x < 1$ mamy $1 - x > 0$.

2. Niech $E_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}$. Dowieść, że dla każdego $x \in [0,1]$ ciąg $\left(E_n(x)\right)$ jest malejący.

Sposób 1. Skorzystamy z nierówności Bernoulliego: $\frac{E_{n-1}(x)}{E_n(x)} = \left(\frac{1+\frac{x}{n-1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \left(1+\frac{x}{n-1}\right)^{-1} = \left(1+\frac{x}{(n-1)(n+x)}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n-1+x} \geqslant \left(1+\frac{(n+1)x}{(n-1)(n+x)}\right) \frac{n-1}{n-1+x} = \frac{n(n-1+2x)}{(n-1)(n+x)} \frac{n-1}{n-1+x} = 1 + \frac{x(1-x)}{(n+x)(n-1+x)} \geqslant 1.$

Sposób 2. $\frac{E_{n-1}(x)}{E_n(x)} = \left(\frac{1+\frac{x}{n-1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} = \left(1+\frac{x}{(n-1)(n+x)}\right)^n \frac{n}{n+x} \geqslant \left(1+\frac{nx}{(n-1)(n+x)}\right) \frac{n}{n+x} = \frac{n(n-1)+(2n-1)x}{(n-1)(n+x)} \frac{n}{n+x} = 1 + x\,\frac{n(1-x)+x}{(n-1)(n+x)^2} \geqslant 1.$

Uwaga. Teza pozostaje prawdziwa także dla $x \in [0,2]$, gdyż $\log E_n(x) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, gdzie $f(t) := \begin{cases} \left(1+\frac{1}{t}\right)\log(1+xt), & t > 0, \\ x, & t = 0, \end{cases}$ jest dla $t \geqslant 0$ rosnąca. Istotnie, $g(t) := t^2 f'(t) = x\frac{t(1+t)}{1+xt} - \log(1+xt)$ ma pochodną $\geqslant 0$, gdyż $g'(t) = x\frac{t(2-x+xt)}{(1+xt)^2}$; zatem $g(t) \geqslant g(0) = 0$, czyli $f'(t) \geqslant 0$. Natomiast dla $x > 2$ jest inaczej: ciąg $n \mapsto E_n(x)$ z początku maleje, a od pewnego miejsca rośnie. Istotnie, $g'(t) < 0$ na $\left]0, 1-\frac{2}{x}\right[$, a więc $g(t) \leqslant g(0) = 0$ na $[0, t_x]$ dla pewnego $t_x > 1 - \frac{2}{x}$; zatem f maleje na $[0, t_x]$, a rośnie na $[t_x, \infty[$.

3. Wykazać, że $\forall n \geqslant 1 :\ e \leqslant n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \leqslant ne$.

$\boxed{1}$: Ciąg o wyrazach $x_n := n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$ jest rosnący, gdyż $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} > 1$, gdyż $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$; z kolei ostatnia nierówności wynika stąd, że ciąg $e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący: $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \geqslant \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{n} = 1.$

$\boxed{2}$: Ciąg $y_n := \frac{1}{n}x_n$ jest malejący, gdyż $\frac{y_{n+1}}{y_n} = e\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n-1} < 1$; ostatnia nierówność wynika z kolei stąd, że ciąg $E_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ maleje: $\frac{E_{n-1}}{E_n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geqslant \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \frac{n-1}{n} = 1.$

4. (a) Sprawdzić, że $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = e$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = 2e$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = 5e$. (b) Dowieść, że $\forall m \in \mathbf{N} : \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^m}{k!} \in \mathbf{N}$.

(a) $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k$, więc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{k!} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 3\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 5e.$

(b) Zauważmy najpierw, że dla $m \in \mathbf{N}$ wielomian t^m jest $\mathbf{Z}$-liczbową kombinacją liniową wielomianów $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, gdzie $u_m(t) := m!\binom{t}{m} = t(t-1)\ldots(t-m+1)$. Istotnie, wynika to przez indukcję ze spostrzeżenia, że wielomian $t^m - u_m(t)$ jest stopnia $m-1$, ma współczynniki z $\mathbf{Z}$ oraz zeruje się w $t = 0$. Mając to wystarczy zauważyć, że $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_m(k)}{k!} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{u_m(k)}{k!} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{(k-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$

5. Niech funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia warunek $\forall x, x' :\ f(x + x') = f(x)f(x')$ oraz jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$. Dowieść, że albo $f = \mathrm{const} = 0$, albo $\exists c \in \mathbf{R} : \forall x : f(x) = e^{cx}$.

$\boxed{A}$ Załóżmy, że f nie jest tożsamościowo zerem; wtedy $y_0 := f(0) \neq 0$, gdyż $\forall x :\ f(x) = f(x+0) = f(x)y_0$; ponadto $f(0)f(0) = f(0+0)$ daje $y_0^2 = y_0$, więc $y_0 = 1$. Pokażemy teraz, że $\forall x : f(x) > 0$. W tym celu weźmy $\varepsilon = y_0 = 1$ w warunku ciągłości w $x_0 = 0$; dostajemy $\exists \delta > 0 : \forall x \in]-\delta, \delta[: f(x) > 0$; zatem dla zadanego x możemy znaleźć $n \in \mathbf{N}$, takie że $\frac{x}{n} \in]-\delta, \delta[$, a więc $f\left(\frac{x}{n}\right) > 0$ i w konsekwencji $f(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) > 0$. $\boxed{B}$ Dzięki dodatniości ma sens $h(x) := \log f(x)$, przy czym $\forall x, x' : h(x + x') = h(x) + h(x')$. Stąd $h(-x) = -h(x)$ oraz $\forall n \in \mathbf{Z} : h(nz) = nh(z)$ (łatwa indukcja wzgl. $|n|$); zatem $\forall l \in Z$, $m \in \mathbf{N} :\ mh(\frac{l}{m}x) = h(lx) = lh(x)$, tj. $h(\frac{l}{m}x) = \frac{l}{m}h(x)$, czyli $\forall q \in \mathbf{Q} : h(qx) = qh(x)$, w szczególności $h(q) = qh(1)$. $\boxed{C}$ Pokażemy, że $\forall x \in \mathbf{R} : h(x) = xh(1)$: Weźmy ciąg liczb wymiernych q_n, takich że $\lim_{n\to\infty} q_n = x$, wtedy $q_n h(1) - h(x) = h(q_n) + h(-x) = h(q_n - x)$, więc przy $n \to \infty$ dzięki ciągłości $h = \log f$ w zerze dostajemy $xh(1) - h(x) = h(0) = 0$, tzn. $h(x) = xh(1)$. $\boxed{D}$ Zatem $\forall x : f(x) = e^{h(x)} = e^{cx}$, gdzie $c = h(1)$, QED.

6. Wykazać, że $\forall n \in \mathbf{N}$: $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$.

Uogólnienie. Dowieść, że jeśli $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ oraz $1 + \frac{x}{n} > 0$, to $\boxed{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+x}}$.

Do nierówności $e^t > 1 + t$ (dla $t \neq 0$) podstawiamy $t = \frac{x}{n}$, otrzymując $e^x > (1+\frac{x}{n})^n$, a następnie $t = -\frac{x}{n+x}$, co z kolei daje $e^{-\frac{x}{n+x}} > \frac{n}{n+x}$, czyli $e^{\frac{x}{n+x}} < 1 + \frac{x}{n}$, skąd wynika druga nierówność.

7. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi$.

Oznaczmy $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$; wtedy $n!S_n \in \mathbf{N}$ oraz $\frac{1}{n+1} < n!(e - S_n) < \frac{1}{n}$, gdyż $\frac{1}{(n+1)!} < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - S_n < \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k-n}}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{q}{1-q}$, gdzie $q := \frac{1}{n+1}$. Zatem $\sin(2\pi e n!) = \sin\bigl(2\pi n!(e - S_n)\bigr) \in \bigl]\sin\frac{2\pi}{n+1}, \sin\frac{2\pi}{n}\bigr[$ dla $n \geqslant 4$, skąd wynika teza.

Suplement do ciągów oraz funkcji exp i log

© G.Cieciura

1. Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich, takim że istnieje granica $g = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dowieść, że jeśli $g < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, a jeśli $g > 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Podać przykłady dowodzące, że dla każdego $a \geqslant 0$ oraz dla $a = +\infty$ istnieje ciąg (a_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $g = 1$ (a więc przy $g = 1$ trzeba stosować inne metody).

(1) Z założenia $\forall \varepsilon > 0 : \forall^* n : \frac{a_{n+1}}{a_n} < g + \varepsilon$; jeśli $g < 1$, to biorąc $\varepsilon = \frac{1-g}{2}$ dostajemy $\exists m : \forall n \geqslant m : \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda := \frac{1+g}{2}$; zatem

$$\forall n \geqslant m : 0 \leqslant a_n \leqslant a_m \lambda^{n-m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ (\text{gdyż } 0 < \lambda < 1).$$

(2) Z założenia $\forall \varepsilon > 0 : \forall^* n : \frac{a_{n+1}}{a_n} > g - \varepsilon$; jeśli $g > 1$, to biorąc $\varepsilon = \frac{g-1}{2}$ dostajemy $\exists m : \forall n \geqslant m : \frac{a_{n+1}}{a_n} > \lambda := \frac{1+g}{2}$; zatem

$$\forall n \geqslant m : a_n \geqslant a_m \lambda^{n-m} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \ \ (\text{gdyż teraz } \lambda > 1).$$

(3) Dla $a \geqslant 0$ ciąg o wyrazach $a_n := a + \frac{1}{n}$ dąży do a oraz ma $g = 1$; biorąc $a_n = n$ dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oraz $g = 1$.

2. Korzystając z poprzedniego zadania obliczyć: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}\cdot 10^n \cdot (n!)^3}{(3n)!}$.

Odpowiedź. (a) 0, gdyż $g = \frac{e}{3} < 1$; (b) $+\infty$, gdyż $g = \frac{1}{4}e^2 > 1$; (c) 0, gdyż $g = \frac{10}{27} < 1$.

3. Podać przykład rozbieżnego, ale ograniczonego ciągu (a_n) takiego, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Takie własności ma każdy ciąg rozbieżny o wyrazach z pewnego przedziału $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$, spełniający warunek $\lim\limits_n (a_{n+1} - a_n) = 0$, wtedy bowiem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{\alpha}|a_{n+1} - a_n|$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Prostym tego przykładem jest np. ciąg

$$1,\ 1.1,\ 1.2, \ldots,\ 1.9,\ 2,\ 1.99,\ 1.98,\ \ldots,\ 1.01,\ 1,\ 1.001,\ 1.002,\ \ldots,\ 1.999,\ 2,\ 1.9999,\ 1.9998,\ \ldots,\ 1.0001,\ 1,\ \ldots;$$

pewnych trudności mogło by tu przysporzyć napisanie jawnego wzoru na a_n. Inny ciąg o żądanych własnościach określa np. wzór $\boxed{a_n := c + \sin\sqrt{n}}$ lub $\boxed{a_n = c + \sin\log n}$, gdzie $c > 1$; jest wtedy $\alpha = c - 1$, $\beta = c + 1$, zaś warunek $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ wynika stąd, że $|\sin x' - \sin x| = \left|2 \sin\frac{x'-x}{2} \cos\frac{x'+x}{2}\right| \leqslant |x' - x|$.

Jeszcze inny przykład: Niech $F(x) := x - E(x) =$ ('pozacałkowita' część x). Ciąg $a_n = 1 + F(\sqrt{n})$ nie ma własności $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, gdyż $n = m^2 + 2m \ \Rightarrow\ a_{n+1} - a_n = 0 - F(\sqrt{m^2+2m}) = m - \sqrt{m^2+2m} \longrightarrow -1$. Natomiast biorąc $f(x) := |F(x) - \frac{1}{2}|$ mamy $\forall x, x' :\ |f(x') - f(x)| \leqslant |x' - x|$ (gdyż $f(x) = \inf\limits_{n\in\mathbf{Z}} \left|x - \frac{1}{2} - n\right|$), zatem dobry jest ciąg $a_n = 1 + f(\sqrt{n})$, czyli $\boxed{a_n := 1 + \left|F(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right|}$.

4. **Fakt**. Dla każdego $p \in\,]0, \infty[$ zachodzą równości:

$$1^\circ \ \lim_{x\to+\infty} x^p e^{-x} = 0; \qquad 2^\circ \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^p} = 0; \qquad 3^\circ \ \lim_{t\to 0+} t^p \log t = 0.$$

Zwykle wyraża się te fakty, mówiąc że przy $x \to +\infty$ wielkość e^x rośnie szybciej niż każda z potęg x^p, zaś $\log x$ rośnie wolniej niż każda z potęg x^p; przy $t \to 0^+$ wielkość $|\log t|$ rośnie do $+\infty$ wolniej niż każda z potęg x^{-p}.

Ad 1°: Skoro $e^{\frac{x}{2p}} > \frac{x}{2p}$, to $e^x > \left(\frac{x}{2p}\right)^{2p}$, więc $\frac{e^x}{x^p} > \frac{x^p}{(2p)^{2p}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *Ad* 2°: Z nierówności $\log x = \frac{2}{p}\log(x^{2/p}) < \frac{2}{p}x^{2/p}$ wynika oszacowanie $0 \leqslant \frac{\log x}{x^p} \leqslant \frac{2}{p}x^{-\frac{p}{2}}$, skąd teza. *Ad* 3°: Wystarczy we wzorze 2° podstawić $x = \frac{1}{t}$, gdzie $t \to 0^+$.

5. Wykazać, że $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \log a}$ dla $a > 0$. Korzystając z tego sprawdzić, że: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{5} - 1}{\sqrt[n]{3} - 1} = \dfrac{\log 5}{\log 3}$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n = \sqrt[3]{abc}$ dla $a, b, c > 0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + p}{1 + p}\right)^n = a^{\frac{1}{1+p}}$ dla $a > 0$, $1 + p > 0$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + p}{\sqrt[n]{b} + p}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1+p}}$ dla $a, b > 0$, $1 + p > 0$.

W nierówności $x \leqslant e^x - 1 \leqslant \frac{x}{1-x}$ wstawmy $x = \log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$; jest to dopuszczalne, gdyż wtedy $\forall^* n : x < 1$; dostajemy $\frac{\log a}{n} \leqslant \sqrt[n]{a} - 1 \leqslant \dfrac{\frac{1}{n}\log a}{1 - \frac{1}{n}\log a}$, czyli $\log a \leqslant n(\sqrt[n]{a} - 1) \leqslant \dfrac{\log a}{1 - \frac{1}{n}\log a}$, skąd wynika teza.

(a) Pomnożyć przez n licznik i mianownik. (b) Zauważyć, że $x_n = (1 + a_n)^n$, gdzie $na_n = \frac{1}{3}n(\sqrt[n]{a} - 1) + \frac{1}{3}n(\sqrt[n]{b} - 1) + \frac{1}{3}n(\sqrt[n]{c} - 1) \longrightarrow \frac{1}{3}\log(abc)$. (c) Zauważyć, że $x_n = (1 + a_n)^n$, gdzie $na_n = \dfrac{n(\sqrt[n]{a} - 1)}{1 + p} \longrightarrow \frac{\log a}{1+p}$. (d) Skorzystać z (c).

6. Dowieść, że (a) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \left[n(\sqrt[n]{n} - 1) - \log n\right] = 0}$ i wyprowadzić stąd następujące wzory:

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log n}(\sqrt[n]{n} - 1) = 1$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)\log n = 0$; (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p(\sqrt[n]{n} - 1) = 0$ dla $p \in\,]-\infty, 1[$.

(a) W nierówności $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{1-x}$ podstawmy $x = \frac{\log n}{n}$ (jest to dopuszczalne, gdyż wtedy $x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$); dostajemy wtedy oszacowanie $0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{\frac{1}{n}(\log n)^2}{1 - \frac{1}{n}\log n}$, a stąd już natychmiast wynika teza (tw. o 3 ciągach wraz z tym, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^p} = 0$ dla $p > 0$);

(b) Mnożymy (a) przez $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$; (c) Mnożymy (a) przez $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$, stosując wzór $\frac{\log n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$; (d) Mnożymy (a) przez $\lim\limits_{n\to\infty} n^{p-1} = 0$, stosując wzór $\frac{\log n}{n^{1-p}} \longrightarrow 0$.

7. Wykazać, że: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n = 1$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n = 1$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} n(2-\sqrt[n]{n})^n = 1$.

(1) $x_n = (1+a_n)^n$, gdzie $a_n = n^{-1/n}\left[1+\frac{\log n}{n}\right]$, a zatem $na_n = n^{-1/n}\left[\log n - n(\sqrt[n]{n}-1)\right] \longrightarrow 0$ na mocy ??(a). (2) $x_n = (1+a_n)^n$, gdzie $a_n = \sqrt[n]{n}\left(1-\frac{\log n}{n}\right)$, a zatem $na_n = \left[n(\sqrt[n]{n}-1)-\log n\right] - (\sqrt[n]{n}-1)\log n$, więc dzięki ??(a),(c) mamy $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0-0=0$. (3) $x_n = (1+a_n)^n$, gdzie $1+a_n = \sqrt[n]{n}(2-\sqrt[n]{n})$, więc $na_n = -n(\sqrt[n]{n}-1)^2 \longrightarrow 0$ na mocy wzoru ??(d).

Uwaga. Można otrzymać (2) z (1) oraz równości $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\log^2 n}{n^2}\right)^n = 1$, wynikającej z oszacowania $\forall^* n:\ 1 \geqslant 1-\frac{\log^2 n}{n^2} \geqslant 1-\frac{1}{n^{3/2}}$, będącego z kolei konsekwencją tego, że $\forall^* n:\ \frac{\log^2 n}{n^{1/2}} \leqslant 1$.

1. **Funkcja potęgowa o wymiernym wykładniku**. Niech $q = \frac{l}{m}$ będzie ułamkiem nieskracalnym, $l \in \mathbf{Z}$, $m \in \mathbf{N}$. Wtedy dla $x > 0$ określamy potęgę x^q wzorem $x^{\frac{l}{m}} := \sqrt[m]{x^l} = (\sqrt[m]{x})^l$. Chcąc określić x^q dla $\boxed{x < 0}$ załóżmy teraz ponadto, że $L_2(q) :=$ (wykładnik przy 2 w rozkładzie q na czynniki pierwsze) jest $\geqslant 0$; oznacza to, że m jest nieparzyste, więc wielkość $\sqrt[m]{x} := -\sqrt[m]{-x}$ ma pożądaną własność $(\sqrt[m]{x})^m = x$, czyli $\sqrt[m]{\cdot} : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$ jest funkcją odwrotną do $y \mapsto y^m$. Zatem możemy znów określić $x^{\frac{l}{m}} := (\sqrt[m]{x})^l = \sqrt[m]{x^l}$, dostając $\left(x^{\frac{l}{m}}\right)^m = x^l$. Zauważmy, że

   (1) parzystość funkcji $x \mapsto \operatorname{sgn} x^{\frac{l}{m}}$ jest taka, jak liczby l: jest parzysta dla $L_2(q) > 0$, a nieparzysta dla $L_2(q) = 0$;
   (2) zbiór $\{q \in \mathbf{Q} : L_2(q) \geqslant 0\}$ jest podpierścieniem $\mathbf{Q}$ oraz $(x^q)^{q'} = x^{qq'}$, $x^q x^{q'} = x^{q+q'}$ i $\frac{x^q}{x^{q'}} = x^{q-q'}$;
   (3) zachodzi wzór $\frac{d}{dx}x^q = qx^{q-1}$ dla $x \in \mathbf{R}^*$ i $L_2(q) \geqslant 0$ (wtedy oczywiście również $L_2(q-1) \geqslant 0$).

2. **Notacja E.Landaua**. Mając dany punkt $x_0 \in \mathbf{R}$ i wykładnik $\alpha \in \mathbf{R}_+$ wprowadźmy relację w zbiorze $\mathcal{F}_{x_0} :=$ $\{$*funkcje skalarne, określone na pewnym otoczeniu* x_0, *ciągłe w* $x_0\}$ wzorem $f \underset{x_0}{\overset{\alpha}{\sim}} g \overset{\text{def}}{\iff} \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^\alpha} = 0$. Łatwo sprawdzić, że jest to relacja równoważności. W notacji E.Landaua konstatację "$f \underset{x_0}{\overset{\alpha}{\sim}} g$" pisze się w postaci $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ lub $g(x) = f(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ lub $f(x) - g(x) = o(|x - x_0|^\alpha)$; mówimy wtedy, że $f(x) - g(x)$ jest *rzędu wyższego od* $|x - x_0|^\alpha$, albo że $f(x) - g(x)$ jest *wielkością nieskończenie małą rzędu wyższego niż* $|x - x_0|^\alpha$. Jeśli $\alpha \in \mathbf{N}$ (najczęstszy przypadek), to zamiast $o(|x - x_0|^\alpha)$ można pisać $o\big((x - x_0)^\alpha\big)$.

   Oprócz zwrotności $f(x) = f(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$, symetrii $g(x) = f(x) + o(|x - x_0|^\alpha) \iff f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ i przechodniości $\left\{\begin{matrix} f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha) \\ g(x) = h(x) + o(|x - x_0|^\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = h(x) + o(|x - x_)|^\alpha)$, relacja ta ma jeszcze inne własności:

   (1) Jeśli $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ oraz $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, to także $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\beta)$.

   (2) Jeśli $\left\{\begin{matrix} f_1(x) = g_1(x) + o(|x - x_0|^\alpha) \\ f_2(x) = g_2(x) + o(|x - x_0|^\alpha) \end{matrix}\right\}$, to $f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ (addytywność), a także $f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ (multiplikatywność); drugi z tych wzorów wynika wprost z rozkładu $f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2 - g_2) + (f_1 - f_2)g_2$ oraz tego, że f_1 i g_2 są ograniczone na otoczeniu x_0 (gdyż $f_i, g_i \in \mathcal{F}_{x_0}$).

   (3) Jeśli $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$, to $f(x_0) = g(x_0)$ oraz $\varphi \circ f(x) = \varphi \circ g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$ dla dowolnej funkcji $\varphi \in \mathcal{F}_{y_0}$ klasy C^1, gdzie $y_0 := f(x_0) = g(x_0)$ (wzór Lagrange'a: $\varphi(g(x)) - \varphi(f(x)) = \varphi'(\tilde{y})\big(g(x) - f(x)\big)$).

   (4) Jeśli $f(x) = o(|x - x_0|^\alpha)$ oraz $g(x) = o(|x - x_0|^\beta)$, to $f(x)g(x) = o(|x - x_0|^{\alpha+\beta})$.

   Można tu założyć nieco mniej, zastępując jedno 'o' przez 'O', przy czym 'O' oznacza drugi symbol Landaua:

   $$f(x) = g(x) + O(|x - x_0|^\alpha) \overset{\text{def}}{\iff} \tfrac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^\alpha} \text{ jest funkcją ograniczoną na pewnym 'nakłutym' otoczeniu } x_0.$$

   Oczywiście jest to także relacja równoważności i własności (1),...,(4) pozostaną prawdziwe po zamianie 'o' na 'O'. Ponadto oczywiście $f(x) = o(|x - x_0|^\alpha) \Rightarrow f(x) = O(|x - x_0|^\alpha) \Rightarrow f(x) = o(|x - x_0|^\beta)$ dla $0 \leqslant \beta < \alpha$.

   (5) Jeśli $f(x) = g(x) + o(|x - x_0|^\alpha)$, $\psi \in \mathcal{F}_{t_0}$ i $\psi(t) = x_0 + o(|t - t_0|^\beta)$ (jedno "o" można tu zastąpić przez "O"), to $f \circ \psi(t) = g \circ \psi(t) + o(|t - t_0|^{\alpha\beta})$, gdyż dla $x := \psi(t)$ mamy $\frac{f \circ \psi(t) - g \circ \psi(t)}{|t - t_0|^{\alpha\beta}} = \frac{f(x) - g(x)}{|x - x_0|^\alpha} \left|\frac{\psi(t) - x_0}{|t - t_0|^\beta}\right|^\alpha \longrightarrow 0$.

3. **Przykłady**. (A) Jeśli $f \in C^{n+1}(\mathcal{O}_{x_0})$ oraz $T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$, to $f(x) = T_n(x) + O\big((x - x_0)^{n+1}\big)$, tym bardziej $f(x) = T_n(x) + o\big((x - x_0)^n\big)$ (wzór Taylora z resztą Lagrange'a).

   (B) Pokażemy, że $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)} = -2$. Posłużymy się wzorem Taylora: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, $(1 + t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \binom{1/2}{2}x^2 + o(x^2)$. Stosując własność (3) do $\varphi(y) = \log y$ dostajemy $\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\Big(\big(-\frac{x^2}{2}\big)^2\Big) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ponadto $e^x - \sqrt{1 + 2x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2x - \frac{1}{8}(2x)^2\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$.

   Wobec tego $\frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{1 + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} \longrightarrow -2$ przy $x \longrightarrow 0$, QED. [Ciekawsze przykłady: początek `POW_SER.TEX`].

1. **Terminologia**: Funkcja $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ jest *niemalejąca w punkcie* $x_0 \in]a,b[$, jeśli $(x-x_0)(f(x)-f(x_0)) \geqslant 0$ dla $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \subset]a,b[$ dla pewnego $\delta = \delta(x_0) > 0$. Wykazać, że: (a) Funkcja niemalejąca w każdym punkcie przedziału $]a,b[$ jest niemalejąca. (b) Funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dana wzorami $f(x) := x + x^2 \sin\frac{\pi}{2x}$ dla $x \neq 0$, $f(0) := 0$, jest niemalejąca w punkcie $x_0 = 0$ (co więcej: $f'(0) = 1$), lecz nie jest niemalejąca na żadnym otoczeniu x_0.

(a) Przypuśćmy, że $S_x := \{s \in]x,b[: f(x) > f(s)\} \neq \emptyset$ dla pewnego $x \in]a,b[$; niech $s_0 := \inf S_x$, wtedy $S_x \subset]x+\delta(x), b[$, więc $x < s_0$. Są dwie możliwości: 1° $f(x) \leqslant f(s_0)$, wtedy $[s_0, s_0+\delta(s_0)] \cap S_x = \emptyset$; 2° $f(x) > f(s_0)$, wtedy $[s_0-\delta(s_0), s_0] \subset S_x$. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność z definicją s_0, a więc $\forall x \in]a,b[: S_x = \emptyset$, tzn. f jest niemalejąca. (b) $xf(x) = x^2(1 + x\sin\frac{\pi}{2x}) \geqslant x^2(1-|x|) \geqslant 0$ dla $x \in [-1,1]$, więc f jest niemalejąca w 0. Oznaczmy $x_n := \frac{1}{2n-1}$ dla $n \in \mathbf{N}$; gdyby f była niemalejąca na jakimś otoczeniu 0, wtedy dla pewnego $n_0 \in \mathbf{N}$ ciąg $(f(x_n))_{n \geqslant n_0}$ byłby nierosnący (gdyż $x_n \searrow 0$), co jest niemożliwe, gdyż skoro $\sin x_n = (-1)^{n-1}$, to $(-1)^n\big[f(x_{n+1}) - f(x_n)\big] = x_n^2 + x_{n+1}^2 - (-1)^n(x_n - x_{n+1}) \geqslant \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} - (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = \frac{4}{(4n^2-1)^2} > 0$.

2. Ciągi o wyrazach $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, $\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$ są przykładami ciągów (x_n) postaci $x_n = a_1 \ldots a_n$, gdzie $a_n = \frac{n+\alpha}{n+\beta}$ dla pewnych stałych $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{-1,-2,-3,\ldots\}$. Dowieść, że jeśli $\alpha < \beta$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, jeśli zaś $\alpha > \beta$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$. *Wskazówka.* Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} n\log a_n$.

Kładąc $x = \frac{1}{n}$ dostajemy $\lim\limits_{n\to\infty} n\log a_n = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+\alpha x) - \log(1+\beta x)}{x} = \alpha - \beta$. Zatem dla $\alpha < \beta$ biorąc $\gamma \in]0, \beta-\alpha[$ dostajemy $\forall^* n : n\log a_n < -\gamma$, czyli $\forall n > m : \big(a_n > 0$ i $\log a_n \leqslant -\frac{\gamma}{n}\big)$ dla pewnego $m \in \mathbf{N}$. Stąd dla $n > m$ mamy $\frac{x_n}{x_m} = a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_n > 0$ oraz $\log\frac{x_n}{x_m} = -\big(\frac{\gamma}{m+1} + \frac{\gamma}{m+2} + \ldots + \frac{\gamma}{n}\big) \longrightarrow -\infty$ wskutek rozbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; stąd $\frac{x_n}{x_m} \longrightarrow 0$, a więc także $x_n \longrightarrow 0$ przy $n \longrightarrow +\infty$. Analogicznie rozważamy przypadek $\alpha > \beta$.

3. Sprawdzić, że: (a) $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+1} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3\pi}{4}, & x < -1, \\ \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{4}, & x > -1; \end{cases}$ (b) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Dla $p \in \mathbf{R}$ określmy funkcje $T_p, U_p :]-1,1[\to \mathbf{R}$ wzorami $T_p(x) := \cos(p \arccos x)$, $U_p(x) := \sin(p \arccos x)$. Sprawdzić, że każda z tych dwóch funkcji spełnia równanie różniczkowe $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + p^2 f(x) = 0$.

Oznaczmy $f(x) := \cos(\theta + p\arccos x)$, wtedy $f = T_p$ dla $\theta = 0$ oraz $f = U_p$ dla $\theta = -\frac{\pi}{2}$; mamy: $f'(x) = \frac{p}{\sqrt{1-x^2}}\sin(\theta + p\arccos x)$, $f''(x) = \frac{px}{(1-x^2)^{3/2}}\sin(\theta + p\arccos x) - \frac{p^2}{1-x^2}\cos(\theta + p\arccos x)$, skąd wynika teza.

Uwaga. $U_p(x) = \sqrt{1-x^2}[T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \ldots + T_{1-n}(x)]$ dla $n \in \mathbf{N}$.

5. Dla $n \in \mathbf{N}$ funkcja $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z} \ni \varphi \to \frac{\sin n\varphi}{\sin^n\varphi} \in \mathbf{R}$ jest okresowa o okresie π, więc da się wyrazić przez $\operatorname{ctg}\varphi$: $\frac{\sin n\varphi}{\sin^n\varphi} = f_n(\operatorname{ctg}\varphi)$. Dowieść, że: (a) $f_n'(u) = nf_{n-1}(u)$; (b) $f_n(u)$ są wielomianami, przy czym $f_n(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$.

Różniczkując wzgl. φ tożsamość $\sin n\varphi = \sin^\varphi f_n(\operatorname{ctg}\varphi)$ dostajemy $n\cos n\varphi = n\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi f_n(u) + \sin^n\varphi\left(-\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)f_n'(u)$, skąd $f_n'(u) = n\sin\varphi\cos\varphi f_n(u) - n\frac{\cos n\varphi}{\sin^{n-2}\varphi} = n\frac{\sin n\varphi\cos\varphi - \cos n\varphi\sin\varphi}{\sin^{n-1}\varphi} = n\frac{\sin(n\varphi-\varphi)}{\sin^{n-1}\varphi} = nf_{n-1}(u)$. Stąd, skoro $f_1(u) = 1$, przez indukcję wnosimy, że $f_n(u)$ są wielomianami. Biorąc $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dostajemy $f_n(0) = \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sin^n\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{n\pi}{2}$.

Uwaga. Można łatwo sprawdzić, że $f_n(u) = \operatorname{Im}(u+i)^n$, np. $f_2(u) = 2u$, $f_3(u) = 3u^2 - 1$, $f_4(u) = 4u^3 - 4u$.

6. Niech $\mu \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{N}$. Sprawdzić, że jeśli funkcja $y \in C^{m+2}(]-1,1[)$ spełnia tzw. *równanie Legendre'a* $(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y = 0$, to funkcja $]-1,1[\ni x \mapsto w(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}}y^{(m)}(x)$ spełnia tzw. *stowarzyszone równanie Legendre'a* $(1-x^2)w'' - 2xw + \left(\mu - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)w = 0$.

$w' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[y^{(m+1)} - \dfrac{mx}{1-x^2}y^{(m)}\right]$, $w'' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[y^{(m+2)} - \dfrac{2mx}{1-x^2}y^{(m+1)} + \dfrac{m\big((m-1)x^2 - 1\big)}{(1-x^2)^2}y^{(m)}\right]$. Stąd $(1-x^2)w'' - 2xw' + \left(\mu - \dfrac{m^2}{1-x^2}\right)w = (1-x^2)^{\dfrac{m}{2}}\left[(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \big(\mu - m(m+1)\big)y^{(m)}\right]$. Otóż stosując uogólniony wzór Leibniza $(uv)^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{m}{k}u^{(m-k)}v^{(k)}$ łatwo się przekonać, że ostatnie wyrażenie $[\ldots]$ jest równe $\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y\right]$.

Uwaga. Wynika z tych rachunków, że $\mathcal{L}\circ\mathcal{F}_m - \mathcal{F}_m\circ\mathcal{L} = \dfrac{m^2}{1-x^2}\mathcal{F}_m$, gdzie $\mathcal{L}[y] := (1-x^2)y'' - 2xy' + \mu y$, $\mathcal{F}_m[y] := (1-x^2)^{\frac{m}{2}}y^{(m)}$.

7. Niech $a, b \in \mathbf{R}$, przy czym $a > 0$. Dowieść, że jeśli równanie $x^3 - 3a^2x + b = 0$ ma więcej niż jeden rzeczywisty pierwiastek, to ma ono po jednym pierwiastku w każdym z trzech przedziałów $[-2a,-a]$, $[-a,a]$ i $[a,2a]$.

Skoro dla $W(x) := x^3 - 3a^2x + b$ mamy $W(-a) = W(2a) = b + 2a^3 > b - 2a^3 = W(-2a) = W(a)$, to w przypadku $W(-a)W(a) \leqslant 0$ teza jest spełniona (własność Darboux). Rozważmy więc przeciwny przypadek $W(-a)W(a) > 0$, tzn. $W(a) > 0$ albo $W(-a) < 0$. Zauważmy, że skoro $W'(x) = 3(x^2 - a^2)$, to W maleje na $[-a,a]$, a rośnie na $]-\infty,-a]$ i na $[a,\infty[$; stąd $W(-a) = \max_{x\leqslant a}W(x)$, $W(a) = \min_{x\geqslant -a}W(x)$, więc w przypadku $W(a) > 0$ albo $W(-a) < 0$, wbrew założeniu, W ma tylko jeden rzeczywisty pierwiastek.

8. Dowieść, że jeśli $\begin{cases} \cos a = b \\ \cos b = a \end{cases}$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{R}$, to $a = b$.

Jeśli $\cos a = b$, $\cos b = a$, to punkty (a,b) i (b,a) leżą na krzywych $\Gamma_1 = \{(x,y) : y = \cos x\}$ i $\Gamma_2 = \{(x,y) : x = \cos y\}$, więc wystarczy pokazać, że przecięcie $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ jest 1-elementowe. **Sposób 1.** $(x,y) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \Leftrightarrow \big[\varphi(x) = 0,\ y = \cos x\big]$, gdzie $\varphi(x) := x - \cos(\cos x)$; otóż $\varphi'(x) = 1 - \sin(\cos x)\sin x > 0$, więc $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest rosnąca, a zatem ma dokładnie jedno zero: $\varphi(0) = -\cos 1 < 0$, $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$. **Sposób 2.** Jeśli $(x,y) \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, to $x\cos y \in [-1,1]$, więc $y = \cos x \in [0,1]$, a więc $x = \cos y$ jest równoważne $y = \arccos x$, czyli mamy $0 = f(x) := \cos x - \arccos x$; otóż $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x \geqslant 1 - \sin x > 0$, więc f jest rosnąca, więc ma tylko jedno zero: $f(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$, $f(1) = \cos 1 > 0$.

9. Obliczyć granicę $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - 2\sqrt{x}\right)$.

Podstawiając $u = \frac{1}{x}$ i stosując dwukrotnie regułę de l'Hospitala otrzymujemy: $L = \lim\limits_{u\to0} \dfrac{(u^{-1}+2)^{\frac12} + (u^{-1}-2)^{\frac12} - 2(u^{-1})^{\frac12}}{u^{3/2}} =$

$$= \lim_{u\to0} \frac{(1+2u)^{\frac12} + (1-2u)^{\frac12} - 2}{u^2} \overset{H}{=} \lim_{u\to0} \frac{(1+2u)^{-\frac12} + (1-2u)^{-\frac12}}{2u} \overset{H}{=} \lim_{u\to0} \frac{(1+2u)^{-\frac32} + (1-2u)^{-\frac32}}{2} = -1.$$

Inny sposób. Wzór Taylora dla funkcji $g(x) := \sqrt{x}$ daje $\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac12 x_1^{-\frac32}$ oraz $\sqrt{x-2} - \sqrt{x} = -\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac12 x_2^{-\frac32}$, gdzie $x_1 \in \,]x, x+2[$ i $x_2 \in \,]x-2, x[$ zależą od x. Dodając to stronami dostajemy $f(x) = -\frac12\left[\left(\frac{x_1}{x}\right)^{-\frac32} + \left(\frac{x_2}{x}\right)^{-\frac32}\right] \longrightarrow -1$.

10. Obliczyć: (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{1 - \cos\frac{1}{x}}$; (b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\log(\cos x)}$; (c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1 - x^2\operatorname{ctg}(x^2)}{x^4}$;

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\log x}}$; (e) $\lim\limits_{x\to0} \left[\operatorname{ctg}(x^2) - \frac{1}{x^2}\right]$; (f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$.

(a) $L \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-2}{x(x^2+1)}}{(-\frac{1}{x^2})\sin\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{\frac1x}{\sin\frac1x}\cdot\dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$; (b) $L \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - (1+2x)^{-\frac12}}{-\operatorname{tg} x} \overset{H}{=} -\lim \dfrac{e^x + (1+2x)^{-\frac32}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -2$;

(c) $L = \lim\limits_{t\to0}\left[\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\operatorname{ctg} t\right] = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t - t\cos t}{t^2\sin t} \overset{H}{=} \lim \dfrac{t\sin t}{2t\sin t + t^2\cos t} = \lim \dfrac{\frac{\sin t}{t}}{\frac{2\sin t}{t} + \cos t} = \frac13$;

(d) $\log f(x) = \dfrac{\log\operatorname{arc\,tg}\frac1x}{\log x}$, więc $\lim\limits_{x\to\infty} \log f(x) = -\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\log\operatorname{arc\,tg} t}{\log t} \overset{H}{=} -\lim \dfrac{t}{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg} t} = -1$, a więc $L = e^{-1}$;

(e) Podstawmy $t = x^2$, wtedy $L = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{t\cos t - \sin t}{t\sin t} \overset{H}{=} \lim\limits_{t\to0} \dfrac{-\sin t}{\cos t + \frac{\sin t}{t}} = 0$;

(f) $L \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac1x} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{x}{1+x} - \log(1+x)}{x^2} \overset{H}{=} e\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = e\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-(1+x)}{2x(1+x)^2} = -\frac12 e$.

11. Obliczyć $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2r+1} - (n-1)(n^2-1)^r}{(n^2-1)^r}$ dla $r \in \mathbf{R}$.

Podstawmy $\frac1n = x \to 0$, wtedy $L = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-(1-x)(1-x^2)^r}{x} \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{(1-x^2)^r} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{(1-x^2)^r + (1-x)2rx(1-x^2)^{r-1}}{1} \cdot 1 = 1$.

Inny sposób. Oznaczmy $t = \frac{1}{n^2}$, wtedy $\frac{n^{2r+1}-(n-1)(n^2-1)^r}{(n^2-1)^r} = 1 + n\frac{(n^2)^r - (n^2-1)^r}{(n^2-1)^r} = 1 + \sqrt{t}\,\frac{1-(1-t)^r}{t} \longrightarrow 1$, gdyż $\lim\limits_{t\to0} \frac{1-(1-t)^r}{t} = 1$.

12. Dowieść, że $\lim\limits_{b\to a} \frac{1}{(b-a)^3}\left[f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right)\right] = -\frac{1}{12}f'''(a)$, jeśli f jest na otoczeniu a klasy C^3.

Łatwe zastosowanie twierdzenia de l'Hospitala.

13. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbf{R}$ funkcja $f(x) := \begin{cases} ax + b, & \text{gdy} \quad x \leqslant 0 \\ (\frac{1}{x}\arcsin x)^{1/x^2}, & \text{gdy} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$ jest różniczkowalna?

$\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x^2}\log\frac{\arcsin x}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{\arcsin x} \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{2x^3} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{6x^2} = \frac16$. *Odpowiedź.* Tylko dla $a = 0$, $b = e^{\frac16}$.

14. Dowieść, że jeśli funkcja $f : \,]0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ jest wypukła oraz spełnia warunek $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, to jest malejąca.

Jeśli $0 < x_0 < x_1$, to dla $x > x_1$ wypukłość f na $[x_0, x]$ daje $f(x_1) \leqslant \frac{x-x_1}{x-x_0}f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x-x_0}f(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$; zatem $f(x_1) \leqslant f(x_0)$.

15. Funkcja $f : \,]0,\infty[\, \to \mathbf{R}$ jest wypukła oraz ma asymptotę dla $x \to \infty$. Dowieść, że wykres f leży nad asymptotą.

$f(x_1) \leqslant \frac{x-x_1}{x-x_0}f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x-x_0}f(x)$ dla $0 < x_0 < x_1 < x$; przy $x \to \infty$ daje to $f(x_1) \leqslant f(x_0) + a(x_1 - x_0)$, a więc $x \mapsto f(x) - ax$ maleje. Stąd $\forall x \geqslant 0 : f(x) \geqslant b = \lim\limits_{\xi\to\infty} f(\xi)$, QED.

16. Dowieść, że maksimum dwóch (lub wielu) funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą. Zbadać, jak jest dla minimum.

Niech $f() = \max\limits_{k\in K} f_k()$, gdzie funkcje $f_k : X \to \mathbf{R}$ są wypukłe, oraz niech $\lambda' + \lambda'' = 1$, $\lambda' \geqslant 0$, $\lambda'' \geqslant 0$; wtedy $f(\lambda'' + \lambda''') = \max\limits_{k\in K}\big(f_k(\lambda'' + \lambda''')\big) \leqslant \max\limits_{k\in K}\big(\lambda' f_k(') + \lambda'' f_k('')\big) \leqslant \max\limits_{k\in K}\big(\lambda' f(') + \lambda'' f('')\big) = \lambda' f(') + \lambda'' f('')$, a więc f też jest wypukła. Z kolei jest widoczne, że np. funkcja $f(x) = \min(x^2, 1)$ nie jest wypukła.

17. (a) Niech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ będzie funkcją wypukłą i taką, że $\forall x: f(x)>0$. Dowieść, że $\inf\{f(x): x\in\mathbf{R}\}>0$.
(b) Niech $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ będzie funkcją wypukłą i taką, że $\forall x: f(x)\leqslant 0$. Dowieść, że f jest stała.

WORKING ...

18. Niech $I\subset\mathbf{R}$ będzie przedziałem, a funkcja $f:I\to\mathbf{R}$ spełnia warunek $\forall t\in\mathbf{R},\ x,x'\in I:\ f\big((1-t)x+tx'\big)=(1-t)f(x)+tf(x')$ ('ultrawypukłość'). Dowieść, że f jest postaci $f(x)=ax+b$ dla pewnych stałych $a,b\in\mathbf{R}$.

Niech x_1,x_2,x_3 będzie dowolną trójką różnych punktów I. Skoro $x_2=(1-t)x_1+tx_3$, gdzie $t=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$, to $f(x_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_3)=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$, czyli $(x_2-x_3)f(x_1)+(x_3-x_1)f(x_2)+(x_1-x_2)f(x_3)\leqslant 0$. Zarazem $x_3=(1-t)x_1+tx_2$, gdzie $t=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}$, więc $f(x_3)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$, czyli $(x_2-x_3)f(x_1)+(x_3-x_1)f(x_2)+(x_1-x_2)f(x_3)\geqslant 0$. Jest to nierówność przeciwna do poprzedniej, a zatem $(x_2-x_3)f(x_1)+(x_3-x_1)f(x_2)+(x_1-x_2)f(x_3)=0$. Ustalmy w tej tożsamości x_1 i x_2 oraz oznaczmy $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$; biorąc $x_3=x$ dostaniemy wtedy, że $\forall x\in I\setminus\{x_1,x_2\}:\ f(x)=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}y_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$. Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz zauważyć, że: (1) prawa strona jest funkcją postaci $ax+b$ (mianowicie $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ oraz $b=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$), oraz (2) równość $f(x)=ax+b$ zachodzi także dla $x=x_1$ i $x=x_2$.

19. Narysować wykres funkcji $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+1}-\operatorname{arc\,tg}x$.

$f'(x)=\dfrac{1}{1+(\frac{x-1}{x+1})^2}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}-\dfrac{1}{x^2+1}=0$ dla $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$, więc f jest stała na $]-\infty,-1[$ i $]-1,\infty[$.

Stąd, skoro $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi$ oraz $f(0)=-\frac{\pi}{4}$, to $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}\pi, & x<-1,\\ -\frac{1}{4}\pi, & x>-1.\end{cases}$

20. Zbadać przebieg funkcji $f:\mathbf{R}\setminus]0,1]\to\mathbf{R}$ określonej wzorem $f(x):=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}(2x-3)\sqrt{\frac{x}{(x-1)^3}}$, $f''(x)=\frac{3}{4\sqrt{x(x-1)^5}}>0$, więc f jest wypukła i ma minimum lokalne $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}=2.598$. Asymptoty ukośne: $y=-x-\frac{1}{2}$ dla $x\longrightarrow-\infty$ oraz $y=x+\frac{1}{2}$ dla $x\longrightarrow+\infty$. Ponadto $f(0)=0$, $f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=0$ i $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$.

21. Zbadać funkcję $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, określoną wzorem $f(x):=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}(x+2), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Naszkicować wykres, znaleźć $f(\mathbf{R})$.

f jest ciągła na $\mathbf{R}^*$, w $x=0$ jest lewostr. ciągła (nawet klasy C^∞). Skoro $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\frac{x^2-x-2}{x^2}$, więc mamy ekstrema $f(-1)=e^{-1}=0.37$ (lok.maks.) i $f(2)=4e^{\frac{1}{2}}=6.6$ (lok.min.); f rośnie na $]-\infty,-1[$ i $]2,\infty[$, a maleje na $]-1,0[$ i $]0,2[$. Zbiorem wartości f jest $f(\mathbf{R})=\mathbf{R}\setminus\left]e^{-1},4e^{\frac{1}{2}}\right[$. Skoro $f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\frac{5x+2}{x^4}$, to f jest wypukła na $\left]-\frac{2}{5},0\right[$ i $]0,\infty[$, a wklęsła na $\left]-\infty,-\frac{2}{5}\right[$. Prosta $y=x+3$ jest asymptotą f przy $x\longrightarrow\pm\infty$, gdyż $f(x)-x=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+2e^{\frac{1}{x}}\longrightarrow 1+2=3$.

22. Zbadać przebieg i naszkicować wykres funkcji:

$$f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R},\qquad\qquad f(x):=(x+1)\exp\frac{1}{x-1}.$$

$f'(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$, $f(0)=e^{-1}=0.37$ (maks.lok.), $f(3)=4e^{\frac{1}{2}}=6.6$ (min.lok.); $f'(x)=\dfrac{5x-3}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}$, $f(\frac{3}{5})=\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}=0.131$ (p.przeg.); prosta $y=x+2$ jest asymptotą dla $x\to\pm\infty$.

23. Zbadać przebieg i naszkicować wykres funkcji $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x):=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

f jest ciągła (złożenie wielomianu i $\sqrt[3]{\cdot}$). Pochodna: $f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2-x^3)^{-\frac{2}{3}}(4x-3x^2)=\frac{1}{3}(2-x)^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(4-3x)$ dla $x\in\mathbf{R}\setminus\{0,2\}$, $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=+\infty$, $f'(0^-)=-\infty$; zatem f rośnie na $\left[0,\frac{4}{3}\right]$, a maleje na $]-\infty,0]$ i na $[2,\infty[$, osiągając min lok. $f(0)=0$ oraz maks. lok. $f(\frac{4}{3})=\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$. Druga pochodna: $f''(x)=-\frac{8}{9}x^{-\frac{4}{3}}(2-x)^{-\frac{5}{3}}$ dla $x\in\mathbf{R}\setminus\{0,2\}$, więc $f''>0$ na $[0,\infty[$ (wypukła w dół) oraz $f''<0$ na $]-\infty,0[$ i na $]0,2[$ (wypukła w górę); punkt $(2,0)$ jest punktem przegięcia wykresu, zaś $(0,0)$ — punktem ostrzowym. Asymptoty: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=-1$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)+x\big)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{(x^3-2x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3-2x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2}=\frac{2}{3}$; zatem prosta $y=-x+\frac{2}{3}$ jest asymptotą f przy $x\to\pm\infty$.

24. Zbadać funkcję $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x):=\dfrac{x^2+6x+17}{\sqrt{x^2+2}}$; naszkicować jej wykres.

$f'(x)=\mu^{-3}(x+4)(x-1)(x-3)$, $f''(x)=2\mu^{-5}(2x+1)(8x-13)$, gdzie $\mu:=\sqrt{x^2+2}$; zatem f rośnie na $[-4,1]$ i $[3,\infty[$, maleje zaś na $]-\infty,-4]$ i $[1,3]$; jest wypukła na $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ i $\left[\frac{13}{8},\infty\right[$, a wklęsła na $[-\frac{1}{2},\frac{13}{8}]$. Skoro $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$, to $f(-4)=\frac{3}{\sqrt{2}}$ jest glob. minimum, $f(1)=8\sqrt{3}$ — lok. maksimum, a $f(3)=4\sqrt{11}$ — lok. minimum f. Asymptoty: $a_\pm:=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{\pm(1+\frac{6}{x}+\frac{17}{x^2})}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\pm 1$, $b_+:=\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim\frac{x^2+6x+17-x\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}=6+\lim\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(x-\sqrt{x^2+2})=6$; podobnie $b_-=-6$. Zatem są dwie asymptoty: $y=x+6$ dla $x\to+\infty$ i $y=-x-6$ dla $x\to-\infty$. Przecięcie asymptot z wykresem: $\frac{(x^2+6x+17)^2}{x^2+2}=(x+6)^2$, po uproszczeniu $32x^2+180x+217=0$; zatem $y=x+6$ przecina wykres w $(-\frac{7}{4},\frac{17}{4})$ i $(-\frac{31}{8},\frac{17}{8})$, a $y=-x-6$ nie przecina wykresu.

25. Zbadać przebieg (w szczególności monotoniczność i zbiór wartości) funkcję $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x(p^{\frac{1}{x}} - 1)$, gdzie p jest parametrem, $p > 1$.

$f'(x) = p^{\frac{1}{x}} \left(1 - \log p^{\frac{1}{x}}\right) - 1$; dla zbadania znaku f' weźmy $h(u) := u(1 - \log u)$, wtedy $h'(u) = -\log u$, więc $\max h(u) = h(1) = 1$. Zatem f' jest wszędzie < 0, a więc f maleje na $]-\infty, 0[$ i na $]0, +\infty[$. Granice: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{t\log p} - 1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{t\log p}\log p}{1} = \log p$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{t\to -\infty} \frac{e^{t\log p} - 1}{t} = 0$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{e^{t\log p} - 1}{t} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{\log p\, e^{t\log p}}{1} = +\infty$. Zatem zbiorem wartości f jest $]0, +\infty[\setminus \{\log p\}$. Ponadto $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} p^{\frac{1}{x}} - 1 = -1$, więc po dookreśleniu $f(0) := f(0^-) = 0$ mamy $f'(0^-) = -1$. Wypukłość: $f'(x) = h(p^{\frac{1}{x}}) - 1$, przy czym h maleje (rośnie) na $]1, +\infty[$ (odpowiednio: na $]0, 1[$), zaś $x \mapsto p^{\frac{1}{x}}$ maleje na $]0, +\infty[$ oraz na $]-\infty, 0[$; stąd f' maleje na $]-\infty, 0[$ (tzn. f jest tu wypukła w górę) oraz rośnie na $]0, +\infty[$ (tzn. f jest tu wypukła w dół).

26. Zbadać przebieg funkcji $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x\, \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Zauważmy, że $f(-x) = -x\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = -x\frac{1+e^x}{1-e^x} = f(x)$, czyli f jest parzysta; ponadto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, więc f można dookreślić warunkiem $f(0) := 2$ do funkcji ciągłej na $\mathbf{R}$. Skoro $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x) - x\big] = \lim \frac{2x}{e^x - 1} = 0$, to f ma asymptoty $y = \pm x$. $f'(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{(e^x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{2e^x}{(e^x-1)^3} h(x)$, gdzie $h(x) = e^x(x-2) + x + 2$. Pokażemy, że $\operatorname{sgn} h(x) = \operatorname{sgn} x$, więc $\forall x \neq 0 :\ f''(x) > 0$. Mamy $h'(x) = e^x(x-1) + 1$, $h''(x) = e^x x$, więc $\operatorname{sgn} h''(x) = \operatorname{sgn} x$, skąd $\forall x : h'(x) \geqslant h'(0) = 0$, czyli h rośnie, więc $\operatorname{sgn} h(x) = \operatorname{sgn} x$, QED. Zatem f jest wypukła, $\forall x > 0 : f'(x) > f'(0^+) = 0$, czyli f rośnie na $\mathbf{R}_+$ (a maleje na $\mathbf{R}_-$). Ponadto $\forall x \neq 0 :\ f(x) > f(0) = 2$.

27. Zbadać i naszkicować przebieg funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \dfrac{(x-4)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Oznaczmy $u = \sqrt{x^2 - x + 1}$, wtedy $f'(x) = \frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}} x(x-4)(2x+5)$, więc są dwa minima: $f(4) = 0$ globalne i $f(-\frac{5}{2}) = \frac{13}{6}\sqrt{39} = 13.531$ lokalne, oraz maks. lokalne $f(0) = 16$. Ponieważ $f''(x) = \frac{1}{2}u^{-\frac{5}{2}}(95x^2 - 32x - 40)$, więc są dwa p. przegięcia $x_1 = \frac{16 - 26\sqrt{6}}{95} = -0.502$, $f(x_1) = 15.3$ oraz $x_2 = \frac{16+26\sqrt{6}}{95} = 0.839$, $f(x_1) = 10.746$. Asymptoty: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1$, $f(x) - x = \frac{(x-4)^2 - ux}{u} = \frac{(x-4)^4 - (x^2 - x + 1)x^2}{u[(x-4)^2 + ux]} = \frac{-15x^3 + \ldots}{\ldots} \longrightarrow \mp\frac{15}{2}$; więc są asymptoty ukośne: $y = x - \frac{15}{2}$ dla $x \to +\infty$, $y = -x + \frac{15}{2}$ dla $x \to -\infty$.

28. Zbadać przebieg (m.in. ekstrema, wypukłość, miejsca zerowe i asymptoty) funkcji $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, określonej wzorem

$$f(x) := \sqrt{(x-1)^2 + 9} + \sqrt{(x-8)^2 + 16} - 10.$$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 9}} + \dfrac{x-8}{\sqrt{(x-8)^2 + 16}}$, więc $f'(x) = 0 \iff x \in\,]1, 8[$ (tzn. składniki $f'(x)$ są przeciwnych znaków) oraz $0 = (x-1)^2\left[(x-8)^2 + 16\right] - (x-8)^2\left[(x-1)^2 + 9\right] = 7(x^2 + 16x - 80) = 7(x-4)(x+20)$; zatem $f'(x) = 0 \iff x = 4$, przy czym $f(4) = 7\sqrt{2} - 10 \approx -0.1005$. Ponieważ $f''(x) = \dfrac{9}{(x^2 - 2x + 10)^{3/2}} + \dfrac{16}{(x^2 - 16x + 80)^{3/2}} > 0$, więc f jest wypukła i ma dla $x = 4$ minimum. Zera f: $x_1 = \frac{155}{51} \approx 3.0392$ i $x_2 = 5$. Asymptoty: $L_+(x) = 2x - 19$ (dla $x \to +$) oraz $L_-(x) = -2x - 1$ (dla $x \to -\infty$); asymptoty przecinają się w punkcie $(\frac{9}{2}, -10)$, a wykres leży nad asymptotami (wypukłość).

29. Ustalmy $n \geqslant 3$. Niech L_n oznacza obwód, a S_n — pole n-kąta foremnego wpisanego w jednostkowy okrąg; podobnie niech $\widehat{L}_n$ i $\widehat{S}_n$ odnoszą się do n-kąta opisanego na tym samym okręgu. Dowieść, że:

(1) $L_n\widehat{L}_n > L^2$, (2) $S_n\widehat{S}_n < S^2$, gdzie L jest obwodem, a S — polem rozważanego okręgu.

Ze szkolnej geometrii dostajemy wzory $L = 2\pi r$, $S = \pi r^2$, $\begin{cases} L_n = 2nr\sin\frac{\pi}{n}, \\ S_n = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}, \end{cases}$ oraz $\begin{cases} \widehat{L}_n = 2nr\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \\ \widehat{S}_n = \frac{1}{2}r\widehat{L}_n = nr^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \end{cases}$ więc dowodzone nierówności przyjmują postać (1) $\boxed{\frac{\sin^2 x}{\cos x} > x^2}$ oraz (2) $\boxed{\sin x < x}$, gdzie $x = \frac{\pi}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. **Dowód (1)**: $f(x) := \frac{\sin^2 x}{\cos x} - x^2$, wtedy $f'(x) = \frac{2c^2 s + s^3}{c^2} - 2x$, $f''(x) = \frac{2c^4 + 3s^2c^2 + 2s^4}{c^3} - 2 = \frac{c^4 - 2c^3 - c^2 + 2}{c^3} = \frac{c^2(1-c)^2 + 2(1-c^2)}{c^3} > 0$, gdzie $\begin{cases} c = \cos x, \\ s = \sin x; \end{cases}$ zatem f' rośnie na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) \geqslant f'(0) = 0$, więc f też rośnie i $f(x) > f(0) = 0$. **Dowód (2)**: $f(x) := x - \sin x$ rośnie, bo $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$.

30. Zdefiniujmy dwie funkcje: $\alpha(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\log(1+x), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ dla $x > -1$ oraz $\beta(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}(e^x - 1), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Wykazać, że: (a) funkcja $\alpha :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ jest malejąca; (b) funkcja $\beta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest rosnąca.

(a) $g(x) := x^2\alpha'(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x)$ jest zawsze $\leqslant 0$, np. dlatego, że $g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$, a więc $\max g(x) = g(0) = 0$.
(b) $h(x) := x^2\beta'(x) = e^x(x-1) + 1$ jest zawsze $\geqslant 0$, np. dlatego, że $h'(x) = xe^x$, a więc $\min h(x) = h(0) = 0$.

31. Dowieść, że $(1+x)^p \geqslant 1 + px$ dla $x \in\,]-1, \infty[$ oraz $p \in\,]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$ (*uogólniona nierówność Bernoulliego*).

Sposób 1. $F(p) := (1+x)^p - 1 - px$ jest (tak jak funkcja wykładnicza $p \mapsto a^p$) wypukła, ponadto $F(0) = F(1) = 0$; stąd teza.
Sposób 2. $f(x) := (1+x)^p - 1 - px$, $f'(x) = p\left[(1+x)^{p-1} - 1\right]$. Widać stąd, że f' jest rosnąca (zarówno dla $p \geqslant 1$, jak i dla $p \leqslant 0$) oraz $f'(0) = 0$, więc $0 = f(0) = \min f(x)$, QED. Modyfikacja: to, że f' jest rosnąca, wynika też ze wzoru $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-1} \geqslant 0$.

32. Dowieść, że dla $p \in\,]0, \infty[$ funkcja $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) := px^{p+1} - (p+1)x^p + 1$, jest nieujemna.

Sposób 1. $f'(x) = p(p+1)x^{p-1}(x-1)$, więc f ma w punkcie $x = 1$ minimum $f(1) = 0$. **Sposób 2** (dla $p \geqslant 1$). Stosując 'uogólnioną nierówność Bernoulliego' $(1+u)^p \geqslant 1+pu$, $p \in [1,\infty[$, $1+u \geqslant 0$, dostajemy $x^{-p}f(x) = px-p-1+(\frac{1}{x})^p \geqslant px-p-1+1+p(\frac{1}{x}-1) = px-2p+\frac{p}{x} = \frac{p}{x}(x-1)^2 \geqslant 0$.

33. Niech $r, s \in \mathbf{Z}$, $0 < r < s$ oraz $\left\{\begin{smallmatrix} r\equiv 1\\ s\equiv 0\end{smallmatrix}\right\}$ mod 2. Dowieść, że funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \dfrac{x^s-1}{x^r-1}$ dla $x \neq 1$, $f(1) := \frac{s}{r}$, jest rosnąca.

Sposób 1. $f'(x) = x^{r-1}\frac{L(x)}{(x^r-1)^2}$, gdzie $L(x) := (s-r)x^s - sx^{s-r} + r$, zaś $x^{r-1} \geqslant 0$, gdyż $r-1 \equiv 0$. Otóż $\frac{L}{I}(x) = (s-r)sx^{s-r-1}(x^r-1)$, przy czym $x^{s-r-1} \geqslant 0$ (bo $s-r-1 \equiv 0$), więc $\min\limits_x L(x) = L(1) = 0$; zatem $\forall x : L'(x) \geqslant 0$, tzn. $f'(x) \geqslant 0$.

Sposób 2. $f(x) = \tilde{f}(t) := \dfrac{|t|^\alpha - 1}{t-1}$, gdzie $t = x^r$ jest rosnącą bijekcją $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, zaś $\alpha := \frac{s}{r} > 1$. Dla $t \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ mamy $\tilde{f}'(t) = \dfrac{L(t)}{(t-1)^2}$, gdzie $L(t) = (\alpha-1)|t|^\alpha - \alpha\epsilon|t|^{\alpha-1} + 1$, $\epsilon = \operatorname{sgn} t$. Jeśli $t < 0$, tzn. $\epsilon = -1$, to $\tilde{f}'(t) > 0$, bo wszystkie składniki $L(t)$ są > 0. Jeśli $t > 0$, tzn. $\epsilon = 1$, to $L'(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}(t-1)$, więc $\sup\limits_{t\geqslant 0}\varphi(t) = \varphi(1) = 0$, skąd także $L(t) \geqslant 0$.

Uwaga. Dla innych parzystości (r,s) funkcja f nie jest monotoniczna, gdyż $f(x) \to +\infty$ nie tylko przy $x \to \infty$, ale także przy $x \to -\infty$ lub $x \to -1^+$.

34. Dowieść, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi nierówność $1 + \frac{x}{2}\log(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}$.

$f(x) := 2 - 2\sqrt{1+x^2} + x\log(x+\sqrt{1+x^2})$, wtedy $f'(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2}) - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$; zatem f jest wypukła, f' — rosnąca, więc $f'(x)$ jest $\leqslant 0$ na $\mathbf{R}_-$ oraz $\geqslant 0$ na R_+, więc $f(x) \geqslant f(0) = 0$; stąd teza. **Uwaga**. f jest parzysta!!!

Sposób 2. Należy sprawdzić, że funkcja $g(x) := \log(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \log(x+\sqrt{1+x^2}) - \dfrac{2x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ ma zawsze wartości o takim znaku, jak x. Otóż mamy $g'(x) = \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0$, co wraz z $g(0) = 0$ daje tezę. **Uwaga**. g jest nieparzysta!!!

35. Dowieść, że $\forall x > 0, x \neq 1$, spełniona jest nierówność $\dfrac{x+1}{x-1} \cdot \log x > 2$.

$h(x) := \log x - 2\dfrac{x-1}{x+1}$, wtedy $h'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geqslant 0$, więc h jest rosnąca; zatem $h(x) < 0$ na $]0,1[$ oraz $h(x) > 0$ na $]1,\infty[$, skąd natychmiast wynika teza. **Inny sposób**. Badamy $f(x) := (x+1)\log x - 2(x-1)$ dla $x > 0$: $f'(x) = \log x - 1 + \frac{1}{x}$, $f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$, więc f' ma minimum dla $x = 1$; stąd $\forall x > 0 :\ f'(x) \geqslant f'(1) = 0$. Zatem f jest rosnąca, więc f jest $\begin{cases} < 0 \text{ na }]0,1[, \\ > 0 \text{ na }]1,+\infty[; \end{cases}$ stąd teza.

36. Dowieść, że dla każdego $x > 0$ spełniona jest nierówność $\sin x < \dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{3}x^2}}$.

Możemy założyć, że prawa strona $P(x)$ jest $\leqslant 1$, tzn. że $0 < x \leqslant x_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.225$. Skoro arc sin rośnie na $[0,1]$, dowodzona nierówność jest równoważna $\arcsin(\sin x) < \arcsin P(x)$; zarazem $x \in\ ]0,x_0] \Rightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \arcsin(\sin x) = x$, więc wystarczy wykazać, że $f(x) := \arcsin P(x) - x$ jest > 0 dla $x \in\ ]0,x_0]$. Otóż $f'(x) = \dfrac{P'(x)}{\sqrt{1-P^2(x)}} - 1 = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{3}x^2)\sqrt{1-\frac{2}{3}x^2}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{Q(x)}} - 1 > 0$, gdyż $Q(x) = (1+u)^2(1-2u) = 1-u^2(3+2u) < 1$ dla $u = \frac{1}{3}x^2 > 0$; zatem $f(x) > f(0) = 0$.

37. Wyprowadzić nierówności: (a) $|\log t| \leqslant \frac{1}{2}|t-t^{-1}|$ dla $t > 0$; (b) $(1+x)\log^2(1+x) \leqslant x^2$ dla $1+x > 0$; (c) $\frac{1}{2}\log^2(x+\sqrt{1+x^2}) \leqslant \sqrt{1+x^2} - 1$ dla $x \in \mathbf{R}$; (d) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{3})\log(1+x) < 1$ dla $|x| < 1$; (e) $\pi < \frac{\sin \pi x}{x(1-x)} \leqslant 4$ dla $x \in\ ]0,1[$; (f) $\sin x < \dfrac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{3}}}$ dla $x > 0$; (g) $\frac{x+1}{x-1}\log x > 2$ dla $x > 0, x \neq 1$.

(a) $f(t) := \frac{1}{2}(t-t^{-1}) - \log t$ jest rosnąca: $f'(t) = \frac{(t-1)^2}{2t^2} \geqslant 0$; przy tym $f(1) = 0$ oraz znak $\log t$ jest taki, jak znak $t-1$, skąd teza. (b) **Sposób 1**. $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x}} - \log(1+x)$ jest rosnąca na $]-1,\infty[$ (bo $f'(x) = (1+x)^{-3/2}(1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}) \geqslant 0$) oraz $f(0) = 0$; stąd i z tego, że $\log(1+x)$ ma taki sam znak, jak x, wynika teza. **Sposób 2**. Podstawmy $t = \sqrt{1+x}$ do (a); otrzymujemy $|\log(1+x)|^2 \leqslant |(1+x)^{1/2} - (1+x)^{-1/2}|^2 = \frac{x^2}{1+x}$. (c) $f(x) := \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\log^2(x+\sqrt{1+x^2})$ jest parzysta i $f(0) = 1$; wystarczy więc sprawdzić, że f rośnie, tzn. $f'(x) \geqslant 0$, dla $x \geqslant 0$; otóż $f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}g(x)$, gdzie $g(x) = x - \log(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant 0$, gdyż $g(0) = 0$ i $g'(x) = 1-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \geqslant 0$. (f) Funkcja $f(t) := \arcsin t - \frac{t}{\sqrt{1-t^2/3}}$ jest rosnąca na $[0,1]$, gdyż $f'(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} - (1-\frac{t^2}{3})^{-\frac{3}{2}} \geqslant 0$.
(g) Funkcja $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) := \log x - 2\frac{x-1}{x+1}$, jest rosnąca, gdyż $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geqslant 0$; to i $f(1) = 0$ daje tezę.

38. Wykazać, że:(a) $\frac{1+x}{x}\operatorname{arc\,tg} x \geqslant \frac{\pi}{2}$ dla $x > 1$; (b) $\frac{\log x}{x-1} > \frac{2}{x+1}$ dla $0 < x \neq 1$; (c) $\frac{x}{e^x-1} > \frac{2}{e^x+1}$ dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

(a) $f(x) := \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{1+x}$; wtedy $f(1) = f(+\infty) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{\pi}{2(x+1)^2} = -\frac{\pi-2}{M}\left(x^2 - \frac{4}{\pi-2}x + 1\right)$. Skoro $\Delta = \frac{4\pi(4-\pi)}{(\pi-2)^2} > 0$, to f' ma dwa dodatnie pierwiastki $x_0 < x_1$, t.że $x_0x_1 = 1$. Stąd f rośnie na $[1,x_1]$, maleje na $[x_1,\infty[$, skąd teza.

(b) $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) := \log x - 2\frac{x-1}{x+1}$; wtedy $f'(x) = x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \geqslant 0$ i $f(1) = 0$; stąd $f(x)/(x-1) > 0$.

(c) **Sposób 1**. Wystarczy wstawić $x = e^t$ do (b). **Sposób 2**. Dla $f(x) := x - 2\frac{e^x-1}{e^x+1}$ mamy $f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geqslant 0$ oraz $f(0) = 0$, a zatem $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$; dzieląc to stronami przez $\operatorname{sgn}(e^x-1) = \operatorname{sgn} x$ dostajemy tezę. **Sposób 3**. Dla $g(x) := \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$ mamy $g'(x) = \frac{\operatorname{sh} x - x}{e^x(e^x-1)^2}$, zaś $\operatorname{sh} x - x$ ma znak taki, jak x; zatem $g(0) = 1 = \min\{g(x) : x \neq 0\}$, QED. **Sposób 4**. $h(x) := x(e^x+1) - 2(e^x-1)$, wtedy $h'(x) = (x-1)e^x + 1$, $h''(x) = xe^x$, więc $h' \geqslant h'(0) = 0$, czyli h rośnie; stąd $\operatorname{sgn} h(x) = \operatorname{sgn} x$, co daje tezę.

39. Znaleźć zbiór wartości funkcji $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x \cdot \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

$f'(x) = e^x \cdot \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{(e^x - 1)^2}$; skoro $h'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 \geqslant 0$ dla $h(x) := e^x - e^{-x} - 2x$, to $h(x) \geqslant h(0) = 0$ dla $x \geqslant 0$, a zatem $f'(x) > 0$ dla $x > 0$; stąd $f(x) > \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. Zarazem f jest parzysta oraz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, więc zbiorem wartości f jest $]2, \infty[$.

40. Dowieść, że dla każdego $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zachodzi nierówność $\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^{\frac{3}{2}} \cos x \leqslant 1$.

Wystarczy pokazać, że $f(x) \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$, gdzie $f(x) := x - \arccos \dfrac{1}{(1 + \frac{1}{3}x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Otóż $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1 + \frac{1}{3}x^2)\sqrt{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{27}x^4}} \geqslant 0$, więc $f(x) \geqslant f(0) = 0$, QED.

41. Dla $t \in [0, 1]$ oznaczmy $D_t := \{(x, y) : \ x, y \in [0, 1], \ (t - x)(x^2 + y^2 - 1) \geqslant 0\}$. Narysować zbiór D_t, znaleźć jawny wzór na wielkość $S(t) :=$ (pole obszaru D_t) oraz znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $S : [0, 1] \to \mathbf{R}$.

$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, gdzie $S_1(t)$ jest polem $D_t \cap K$, $S_2(t)$ — polem $D_t \setminus K$, a K — kołem $\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Wprowadzając $\varphi = \arccos t$ oraz $u = \sqrt{1 - t^2}$ widzimy, że $S_1(t) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}tu$ oraz $S_2(t) = t - \frac{1}{2}tu - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, więc $\boxed{S(t) = \arccos t - \frac{\pi}{4} + t - t\sqrt{1 - t^2}}$. Stąd łatwy rachunek pokazuje, że $S'(t) = \dfrac{u(1 - 2u)}{u}$, więc $S(t)$ maleje, gdy $u \geqslant \frac{1}{2}$, tzn. dla $t \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, rośnie zaś na $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$. Zatem $\min S(t) = S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{12} \approx 0.1712$, a $\max S(t)$ jest większą z liczb $S(0) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ i $S(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146$.

42. Zbadać, dla jakich wartości parametru $p \in \mathbf{R}$ spełniony jest warunek $\boxed{\forall x \geqslant 0 : \ \log(1 + x) \geqslant \frac{x}{1+px}}$.

$f(x) := \log(1 + x) - \frac{x}{1+px}$, wtedy $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+px)^2}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{2p}{(1+px)^3}$, więc $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2p - 1$. Stąd $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2f(x)}{x^2} = 2p - 1$, więc jeśli $\forall x \geqslant 0 : f(x) \geqslant 0$, to $p \geqslant \frac{1}{2}$. Odwrotnie, jeśli $p \geqslant \frac{1}{2}$, to $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2px+x^2} \geqslant \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2px} \geqslant 0$ dla $x \geqslant 0$, więc $f(x) \geqslant f(0) = 0$, czyli rozważany warunek jest spełniony. *Odpowiedź*. Dla $p \geqslant \frac{1}{2}$.

Inny sposób. $\log(1 + x) \geqslant \frac{x}{1+px} \iff p \geqslant \varphi(x) := \frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}$; otóż φ dookreślona warunkiem $\varphi(0) := \varphi(0^+) = \frac{1}{2}$ jest ciągła (a nawet gładka) oraz $\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{(1+x)\log(1+x)}\right)^2 \leqslant 0$, gdyż $\log(1 + x) \geqslant \frac{x}{1+x}$; zatem $\inf\limits_{x\geqslant 0} \varphi(x) = \varphi(0) = \frac{1}{2}$.

43. **Wzór Taylora i różne postaci reszty**. Oznaczmy $\xi = x_0 - x$, $\theta \in]0, 1[$, $x_\theta = x_0 + \theta\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$; wtedy

$$f(x) = f(x_0 + \xi) = f(x_0) + f'(x_0)\xi + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)\xi^{n-1} + R_n(x_0; \xi),$$

gdzie $\lim\limits_{\xi\to 0} \dfrac{R_n(x_0; \xi)}{\xi^n} = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$; co więcej:

$R(x_0; \xi) = \dfrac{(1 - \theta)^{n-m}}{m(n-1)!} f^{(n)}(x_\theta)\xi^n$, gdzie $m \in \overline{1, n}$, zaś θ zależy od m [Schlömilcha];

$R(x_0; \xi) = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_\theta)\xi^n$ (Schlömilcha dla $m = n$) [Lagrange'a];

$R(x_0; \xi) = \dfrac{(1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_\theta)\xi^n$ (Schlömilcha dla $m = 1$) [Cauchy'ego].

44. Napisać wzór Taylora w $x_0 = 0$ dla funkcji $f(x) := \log(1 + x)$. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$: (a) dla $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$, przedstawiając resztę w postaci Lagrange'a; (b) dla $x \in]-1, 1[$, przedstawiając resztę w postaci Cauchy'ego.

$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}$ (indukcja), więc $\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + r_n(x)$, gdzie: (a) $r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1}$ (Lagrange), przy czym $\xi_n = \theta_n x$, $\theta_n \in]0, 1[$, więc $|r_n(x)| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{1+\xi_n}\right)^n \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0$, gdyż $\frac{|x|}{1+\xi_n} \leqslant |x| \leqslant 1$ dla $x \in [0, 1]$ oraz $\frac{|x|}{1+\xi_n} \leqslant \frac{|x|}{1-|x|} \leqslant 1$ dla $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$; (b) $r_n(x) = (-1)^n \frac{x(x-\xi_n)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}}$ (Cauchy), więc $|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|}{1-|x|}\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right|^n$; przy tym $\left|\frac{x-\xi_n}{1+\xi_n}\right| \leqslant \frac{|x|-|\xi_n|}{1-|\xi_n|} \leqslant \frac{|x|-|\xi_n x|}{1-|\xi_n|} = |x| < 1$, co daje $r_n(x) \to 0$.

45. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[2\sqrt{n^2 - n + 4} - 3\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}\right]$.

Korzystając ze wzoru Taylora $\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ dostajemy: $\frac{1}{n^2}a_n = 2\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} - 3\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{8n^2}\right) - 3\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} - \frac{4}{8n^2}\right) + o(\frac{1}{n^2}) = \frac{7}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2})$; zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{7}{4}$.

46. Korzystając ze wzoru Taylora obliczyć $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ dla $f(x) := x^2 \log x\left[\log\log(x + 1) - \log\log x\right] - x$.

Niech $h(x) := \log\log x$, wtedy $h(x+1) - h(x) = h'(x) + \frac{1}{2}h''(\tilde{x})$ dla pewnego $\tilde{x} \in]x, x + 1[$; przy tym $h'(x) = \frac{1}{x\log x}$, $h''(x) = -\frac{1+\log x}{x^2\log^2 x}$, więc dostajemy wzór $f(x) = x^2 \log x\left[\frac{1}{x\log x} - \frac{1+\log\tilde{x}}{2\tilde{x}^2\log^2\tilde{x}}\right] - x = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\tilde{x}}\right)^2 \frac{\log x(1+\log\tilde{x})}{\log^2\tilde{x}}$. Zarazem nierówność $x < \tilde{x} < x + 1$ sprawia, że $1 \leqslant \frac{\tilde{x}}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{x}$ oraz $1 \leqslant \frac{\log\tilde{x}}{\log x} \leqslant 1$, więc $\frac{\tilde{x}}{x} \longrightarrow 1$ oraz $\frac{\log\tilde{x}}{\log x} \longrightarrow 1$, skąd $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$. **Uwaga**. $f(10^6) \approx -0.5362$

47. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie funkcją klasy C^∞, taką że $\forall x \leqslant 0 : f(x) = 0$ oraz $\forall x > 0 : f(x) > 0$. Korzystając ze wzoru Taylora wykazać, że $\forall\, C > 0 :\ \forall \varepsilon > 0 :\ \exists\, n \in \mathbf{N} :\ \exists\, x \in \,]0, \varepsilon[\, :\ \left|f^{(n)}(x)\right| > C^n$.

Pochodna $f^{(k)}$ jest ciągła i znika na $]-\infty, 0[$, więc $\forall k : f^{(k)}(0) = 0$; stąd wzór Taylora na $f(0+\varepsilon)$ redukuje się do reszty (Lagrange'a).

Sposób 1. Niech $C, \varepsilon > 0$ będą dane. Ze wzoru Taylora $\forall n : \exists x_n \in \,]0, \varepsilon[\, :\ f(\varepsilon) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n)\varepsilon^n$, a więc $\frac{1}{C^n} f^{(n)}(x_n) = \frac{n!}{(C\varepsilon)^n} f(\varepsilon)$; przy $n \to \infty$ prawa strona dąży do $+\infty$ (gdyż $\forall a > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$), więc jest większa od 1 dla dostatecznie dużych n. Stąd teza.

Sposób 2 (*Ad.abs.*). Nagacją tezy jest warunek $\exists C, \varepsilon > 0 :\ \forall n \in \mathbf{N} :\ \forall x \in \,]0, \varepsilon[\, :\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant C^n$. Stąd oraz ze wzoru Taylora $\forall n : \exists x_n \in \,]0, \varepsilon[\, :\ f(\varepsilon) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n)\varepsilon^n$ dostajemy $|f(\varepsilon)| \leqslant \frac{(C\varepsilon)^n}{n!}$, a więc także $|f(\varepsilon)| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(C\varepsilon)^n}{n!} = 0$, tzn. $f(\varepsilon) = 0$; sprzeczność.

48. Niech $f : [0, \infty[\, \to \mathbf{R}$ klasy C^2, taka że f'' jest monotoniczna (być może poza jakąś zwartą częścią dziedziny). Dowieść, że ciąg o wyrazach $a_n := f'(1) + \ldots + f'(n) - f(n)$ jest zbieżny $\iff$ całka $\int_0^\infty f''(x)dx$ jest zbieżna.

$a_n - a_{n-1} = f(n-1) - f(n) + f'(n) = \frac{1}{2} f''(n - \theta_n)$, gdyż $f(n-1) = f\big((n + (-1)\big) = f(n) + f'(n)(-1) + \frac{1}{2} f''(n - \theta_n)(-1)^2$ na mocy wzoru Taylora. Zatem (przy założeniu, że $f''(x) \nearrow 0$) mamy $f''(n) \leqslant a_n - a_{n-1} \leqslant f''(n-1)$, więc szereg $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ szereg $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f''(n)$ jest zbieżny $\iff$ całka $\int_m^\infty f''(x)dx$ jest zbieżna.

49. **Przykłady zastosowań zadania ??**

$\boxed{1}$ Ciąg $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ jest zbieżny: tutaj $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ oraz $f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.
$\boxed{2}$ $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{1}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{n^3}$ jest zbieżny: $f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}$, $f'(x) = x^{-\frac{1}{4}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$.
$\boxed{3}$ Ciut ogólniej: $f(x) = x^p$, wtedy ciąg $a_n = p\left(1^{p-1} + \ldots + n^{p-1}\right) - n^p$ jest zbieżny $\iff$ $p \leqslant 1$, bo $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$.
$\boxed{4}$ Ciąg $a_n = \frac{1}{\log 2} + \ldots + \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log^2 2} - \ldots - \frac{1}{\log^2 n} - \frac{n}{\log n}$ dostajemy dla $f(x) := \frac{x}{\log x}$; jest on zbieżny, gdyż $f'(x) = \log^{-1} x - \log^{-2} x$, $f''(x) = \frac{2}{x\log^3 x} - \frac{1}{x\log^2 x}$, więc $\int_e^\infty f''(x)dx$ jest zbieżna. Istotnie, całka $\int_e^\infty \frac{dx}{x\log^p x} = \left\|^{t=\log x}\right\| = \int_1^\infty \frac{dt}{t}^p$ jest zbieżna dla $p > 1$.

50. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ oraz dwukrotnie różniczkowalna na $]a, b[$. Dowieść, że

$$\exists \xi \in \,]a, b[\, :\ f(a) - 2f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b) = \tfrac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

Wskazówka. Jeśli $W(x)$ jest trójmianem kwadratowym oraz $f - W$ zeruje się w punktach a, $\frac{a+b}{2}$ i b, to $\exists \xi \in \,]a, b[\, :\ f''(\xi) - W''(\xi) = 0$.

$W(x) := \sum\limits_k \frac{f(x_k)}{c_k} \prod_{l \neq k}(x - x_l)$ jest wielomianem, takim że $f - W$ zeruje się w punktach $x_0, \ldots, x_n$; stąd $\exists\, \xi : f^{(n)}(\xi) = W^{(n)}(\xi)$, a $W^{(n)}(\xi) = \sum\limits_k \frac{f(x_k)}{c_k}$. W przypadku, gdy $x_k = x_0 + ks$, mamy $c_k = \prod_{l\neq k}(sk - sj) = s^n(-1)^{n-k}k!(n-k)!$.

Uogólnienie (*uogólnione twierdzenie Lagrange'a o przyrostach*):

51. Niech funkcja $f : \,]a, b[\, \to \mathbf{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna, a liczby $x_0, \ldots, x_n \in \,]a, b[$ — parami różne; oznaczmy $c_k := \prod\limits_{l\neq k}(x_k - x_l)$, $k, l \in \overline{0, n}$. Wykazać, że istnieje liczba $\xi \in \,]a, b[$, zawarta między najmniejszą a największą z liczb x_k, taka ze $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{c_k} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Ponadto, gdy w szczególności $x_k = x_0 + ks$ tworzą postęp arytmetyczny, wtedy tezę można przedstawić w postaci $\exists\, \xi : \Delta_s^n f(x_0) := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} f(x_k) = s^n f^{(n)}(\xi)$.

52. Dowieść, że jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ jest klasy C^3, to $\exists \xi \in \,]a, b[\, :\ f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\left(f'(a) + f'(b)\right) = -\frac{1}{12} f'''(\xi)$.

Wskazówka. Istnieje taki wielomian 3. stopnia $W(x)$, że $f - W$ znika wraz z pochodną w obu końcach przedziału $[a, b]$; wtedy $\frac{d^3}{dx^3}(f(x) - W(x))$ znika w pewnym punkcie przedziału $]a, b[$.

Jeśli $W(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) + (c_0 x + c_1)(x - a)(b - x)$, to $W'''(x) = 6c_0$ oraz $f - W$ znika w a i b; ponadto $W'(a) + W'(b) = \frac{2}{b-a}\left(f(b) - f(a)\right) - (b - a)^2 c_0$, więc żądając by $f' - W'$ znikało w a i b otrzymamy $c_0 = \ldots$.

53. Niech $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną i niech $y = L(x)$ będzie równaniem prostej łączącej punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Dowieść, że $\forall x \in \,]a, b[\, : \exists\, \xi_x \in \,]a, b[\, :\ f(x) = L(x) - \frac{1}{2}(x - a)(b - x)f''(\xi_x)$.

Przy *ustalonym* x niech $\varphi(t) := f(t) - L(t) + C(t - a)(b - t)$, gdzie $C = C_x \in \mathbf{R}$ — dobrana tak, by $\varphi(x) = 0$. Wtedy $\exists\, \xi_x : \varphi''(\xi_x) = 0$ (skoro φ ma 3 zera $a < b < x$, to φ' ma 2 zera $x_1 < x_2$, więc φ'' ma zero); daje to $C = \frac{1}{2} f''(\xi_x)$, więc $0 = \varphi(x) = \ldots$.

54. Niech funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ będzie klasy $C^n, n \geqslant 1$. Dowiesc, że jeśli n-ta pochodna f jest funkcją okresową, to istnieje taki wielomian $w(x)$ stopnia $\leqslant n$, że funkcja $x \mapsto f(x) + w(x)$ też jest okresowa.

Dowód indukcyjny: $\boxed{T_1}$ $\frac{d}{dx}[f(x+T) - f(x)] = 0 \ \Rightarrow\ f(x+T) - f(x) = C = \text{const}$, a stąd wynika, że funkcja $f(x) - \frac{C}{T}x$ jest okresowa.
$\boxed{T_{n-1} \Rightarrow T_n,\ n \geqslant 2}$ Dla $g := f'$ okresowa jest $g^{(n-1)}$, więc $\exists\, v(x) :\ f'(x) + v(x)$ — okresowa; stąd $f(x) + V(x)$, $V(x) := \int_0^x v(\xi)d\xi$, spełnia założenia T_1, a zatem $\exists\, c \in \mathbf{R}$: $f(x) + V(x) + cx$ — okresowa. Można też inaczej: skoro $h := f^{(n-1)}$ ma okresową pochodną, to $\exists c :\ h(x) + cx = [f(x) + \frac{c}{n!}x^n]^{(n-1)}$ — okresowa; T_{n-1} daje więc $\exists v(x) :\ f(x) + \frac{c}{n!}x^n + v(x)$ — okresowa.

55. Dla danych $n \geqslant 2$ parami różnych liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ określmy na $\mathbf{R}^n$ formy liniowe $\phi_0(\boldsymbol{x}) := x_1 + \ldots + x_n$, $\phi_r(\boldsymbol{x}) := {a_1}^r x_1 + \ldots + {a_n}^r x_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $r \in \mathbf{N}$. Dowieść, że jedyne rozwiązanie układu n równań $\phi_0(\boldsymbol{x}) = \ldots = \phi_{n-2}(\boldsymbol{x}) = 0$, $\phi_{n-1}(x) = 1$, dane jest wzorami $x_k := \prod\limits_{l \neq k} \frac{1}{a_k - a_l}$, przy czym $\phi_n(x) = a_1 + \ldots + a_n$.

Układ jest cramerowski (wyznacznik Vandermonde'a), więc ma jednoznaczne rozwiązanie. Funkcja $f(t) := \frac{t^{n-1}}{(1-a_1 t)\cdot\ldots\cdot(1-a_n t)}$ ma jednoznaczny rozkład na ułamki proste; ma on postać $\frac{x_1}{1-a_1 t} + \ldots + \frac{x_n}{1-a_n t}$. Wstawiając $t = a_k^{-1}$ do rozkładu $f(t)(1 - a_k t)$ dostajemy $x_k = \prod\limits_{l \neq k} \frac{1}{a_k - a_l}$; jeśli $\exists k : a_k = 0$, to $x_k = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$, co też daje poprzedni wzór. Ponieważ $\frac{1}{r!} \frac{d^r}{dt^r} \frac{1}{1-a_1 t} = \frac{{a_1}^r}{(1-a_1 t)^{r+1}}$ (przez indukcję), to $\frac{1}{r!} f^{(r)}(0) = \phi_r()$. Z drugiej strony $f(t) = t^{n-1} g(t)$, gdzie g jest klasy C^∞ na otoczeniu $t = 0$, $g(0) = 1$ i $g'(0) = a_1 + \ldots + a_n$; zatem $f^{(r)}(0) = 0$ dla $r \in \overline{0, n-2}$, $\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) = 1$ oraz $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \sum\limits_k a_k$, więc wartości $\phi_r()$ są takie, jak chcieliśmy.

1. Niech $f \in C^1(\mathbf{R}^2_*)$. Sprawdzić, że $\quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists g \in C^1\big(]0,\infty[\big) : f(x,y) = g(x^2+y^2)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Niech $F(\varrho,\varphi) := f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)$, wtedy $F'_\varphi = -\varrho\sin\varphi f'_x(x,y) + \varrho\cos\varphi f'_y(x,y) = -yf'_x(x,y) + xf'_y(x,y) = 0$, a zatem $F(\varrho,\varphi) = h(\varrho) = g(\varrho^2)$, czyli $f(x,y) = g(x^2+y^2)$; przy tym, dla $x = \sqrt{u}$, $y = 0$, mamy $g(u) = f(\sqrt{u}, 0)$, więc $g \in C^1$.

2. Niech $D_+ := \{(x,y) : \ y > 0\} \subset \mathbf{R}^2$ oraz $u \in C^1(D_+)$. Sprawdzić, że

$$2xu'_x - yu'_y + u = 0 \iff \big[u \text{ jest postaci } u(x,y) = y\,\varphi(xy^2), \text{ gdzie } \varphi \in C^1(\mathbf{R})\big].$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Poziomica $xy^2 = c$ ma parametryzację $(x,y) = (ct^{-2}, t)$, więc obliczmy $\frac{d}{dt}\left[t^{-1}u(ct^{-2},t)\right] = -t^{-2}\left[2ct^{-2}u'_x - tu'_y + u\right] = -t^{-2}\left[2xu'_x - yu'_y + u\right] = 0$; zatem $t^{-1}u(ct^{-2},t)$ nie zależy od $t > 0$, więc biorąc $\varphi(c) := u(c,1) = t^{-1}u(ct^{-2},t)$ mamy $\varphi \in C^1(\mathbf{R})$ i

$$u(x,y) = t\,\varphi(c)\big|_{t=y,c=xy^2} = y\,\varphi(xy^2).$$

3. Niech $u \in C^1(\mathbf{R}^2)$, $p \in \mathbf{R}$. Dowieść, że

$$(1+x^2)u'_x - 2pxyu'_y = 0 \iff \big[\,u \text{ jest postaci } u(x,y) = \varphi\big(y(1+x^2)^p\big), \ \text{ gdzie } \varphi \in C^1(\mathbf{R})\,\big].$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Poziomica $(1+x^2)^p y = c$ ma parametryzację $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = c(1+t^2)^{-p} \end{array}\right\}$, więc liczmy $\frac{d}{dt}u\left(t, c(1+t^2)^{-p}\right) = u'_x - 2pct(1+t^2)^{-p-1}u'_y = u'_x - p\frac{2xy}{1+x^2}u'_y = 0$. Zatem $u\left(t, c(1+t^2)^{-p}\right)$ nie zależy od t, czyli $u\left(t, c(1+t^2)^{-p}\right) = u(0,c) =: \varphi(c)$. Biorąc tu parę (t,c) określoną warunkiem $\left(t, c(1+t^2)^{-p}\right) = (x,y)$, tzn. $t = x$, $c = y(1+x^2)^p$, dostajemy $u(x,y) = \varphi\left(y(1+x^2)^p\right)$, QED.

4. Niech $u \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Wykazać, że

$$(1+x^2)u'_x + 2xyu'_y = 0 \iff \left[\text{funkcja } u \text{ ma postać } u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{1+x^2}\right), \ \text{ gdzie } \varphi \in C^1(\mathbf{R})\right].$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Poziomica $\frac{y}{1+x^2} = c$ ma parametryzację $(x,y) = \big(t, c(1+t^2)\big)$, więc liczmy $\frac{d}{dt}u\big(t, c(1+t^2)\big) = u'_x + 2ctu'_y = u'_x + \frac{2xy}{1+x^2}u'_y = 0$. Zatem $u\big(t, c(1+t^2)\big)$ nie zależy od t, czyli $u\left(t, c(1+t^2)\right) = u(0,c) =: \varphi(c)$. Biorąc tu parę (t,c) określoną warunkiem $\left(t, c(1+t^2)\right) = (x,y)$, tzn. $t = x$, $c = \frac{y}{1+x^2}$, dostajemy $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$, QED. $\boxed{\Leftarrow}$ Gdyż różniczkując tożsamość $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$ dostajemy wzory $u'_x = \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{y}{1+x^2}\right) = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\varphi'\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$ oraz $u'_y = \frac{1}{1+x^2}\varphi'\left(\frac{y}{1+x^2}\right)$.

5. Niech $u \in C^1(\mathbf{R}^2)$; sprawdzić, że

$$u'_x + 2xu'_y = (2x^2+y)u \iff \big[\ u \text{ jest postaci } u(x,y) = e^{xy}\varphi(x^2-y), \ \text{ gdzie } \varphi \in C^1(\mathbf{R})\ \big].$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $u'_x = yu + e^{xy}2x\varphi'(x^2-y)$, $u'_y = xu - e^{xy}\varphi'(x^2-y)$, skąd teza. $\boxed{\Rightarrow}$ Sprawdzimy, że $e^{-xy}u(x,y)$ jest stałe na parabolach $y = x^2 - c$: $\frac{d}{dt}\left[e^{-x(x^2-c)}u(x, x^2-c)\right] = e^{-x(x^2-c)}\left[u'_x(*) + 2xu'_y(*) - (3x^2-c)u(*)\right] = e^{-x(x^2-c)}\left[u'_x + 2xu'_y - (2x^2+y)u\right]\Big|_{y=x^2-c} = 0$; zatem $e^{-x(x^2-c)}u(x, x^2-c) =: \varphi(c)$ nie zależy od x, więc biorąc $c := x^2 - y$ dostajemy $e^{-xy}u(x,y) = \varphi(x^2-y)$, QED.

6. Niech $f \in C^1(D)$, gdzie $D := \{(x,y) : y > 0\}$. Sprawdzić, że

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{y}f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in C^1(\mathbf{R}) : \ f \text{ ma postać } f(x,y) = y\,g(x^2+y^2).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Jeśli $f(x,y) = y\,g(x^2+y^2)$, to $f'_x = 2xy\,g'(*)$, $f'_y = g(*) + 2y^2g'(*)$, więc $xf'_y - yf'_x = xg(*) + 2xy^2g'(*) - 2xy^2g'(*) = xg(*) = \frac{x}{y}f$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Niech $xf'_y - yf'_x = \frac{x}{y}f$. Sprawdzimy, że $\frac{1}{y}f(x,y)$ ma stałą wartość na każdym półokręgu $\Gamma_r = \{(x,y) \in D : x^2+y^2 = r^2\}$. Otóż jeśli $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}$, $\varphi \in\,]0,\pi[$, to dla $h(\varphi) := \frac{1}{r\sin\varphi}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{1}{y}f(x,y)$, przy stałym $r > 0$, mamy $h'(\varphi) = -\frac{\cos\varphi}{r\sin^2\varphi}f(x,y) + \frac{1}{r\sin\varphi}\left[-f'_x r\sin\varphi + f'_y r\cos\varphi\right] = \frac{1}{y}\left[-\frac{x}{y}f - f'_x y + f'_y x\right] = 0$. Zatem $h(\varphi) = h(\frac{\pi}{2})$, czyli $\frac{1}{y}f(x,y) = \frac{1}{r}f(r,0) =: g(r^2) = g(x^2+y^2)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Inny sposób**. Ustalmy $r > 0$ i weźmy $h(x) := \frac{f(x,y)}{y}\Big|_{y=\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{(f(x,\sqrt{r^2-x^2})}{\sqrt{r^2-x^2}}$; wtedy $h'(x) = \frac{\left(f'_x(*) - \frac{x}{y}f'_y(*)\right)y + f(*)\frac{x}{y}}{y^2} = 0$.

$\boxed{\Leftrightarrow}$ **Inny sposób**. Weźmy w $D_\pm = \{\pm x > 0, y > 0\}$ współrzędne $\left\{\begin{array}{l} u = x^2+y^2 \\ v = y \end{array}\right\}$; skoro $f(x,y) = \tilde{f}(x^2+y^2, y)$, to $\left\{\begin{array}{l} f'_x = 2x\tilde{f}'_u \\ f'_y = 2y\tilde{f}'_u + \tilde{f}'_v \end{array}\right\}$. Zatem $\mathcal{L}(f) = x(2y\tilde{f}'_u + \tilde{f}'_v) - y\,2x\tilde{f}'_u - \frac{x}{y}\tilde{f} = x\left(\tilde{f}'_v - \frac{1}{y}\tilde{f}\right)$, a więc $\mathcal{L}(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ v\tilde{f}'_v = \tilde{f} \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial}{\partial v}\frac{\tilde{f}}{v} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\tilde{f}}{v} = g(u)$, gdzie $g \in C^1$.

$\boxed{\Leftrightarrow}$ **Inny sposób**. Weźmy w D współrzędne $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = x^2+y^2 \end{array}\right\}$ i zróżniczkujmy zależności $f(x,y) = \tilde{f}(x, x^2+y^2)$: $\left\{\begin{array}{l} f'_x = \tilde{f}'_u + 2x\tilde{f}'_v \\ f'_y = 2y\tilde{f}'_v \end{array}\right\}$. Zatem $\mathcal{L}(f) = x\,2y\tilde{f}'_v - y(\tilde{f}'_u + 2x\tilde{f}'_v) - \frac{x}{y}\tilde{f} = -\frac{(v-u^2)\tilde{f}'_u + u\tilde{f}}{\sqrt{v-x^2}}$, a więc $\mathcal{L}(f) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\tilde{f}}{\sqrt{v-u^2}} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\tilde{f}}{\sqrt{v-u^2}} = g(u)$ gdzie $g \in C^1$.

7. Niech u będzie funkcją klasy C^2 na obszarze $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^3$, zaś funkcje $U = U(\varrho,\varphi,z)$ i $\tilde{U} = \tilde{U}(r,\theta,\varphi)$ — jej przedstawieniami we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych. Wyprowadzić wzory:

$$(1)\ |\nabla u|^2 = U'^2_\varrho + \tfrac{1}{\varrho^2}U'^2_\varphi + U'^2_z; \qquad (2)\ \Delta u = U''_{\varrho\varrho} + \tfrac{1}{\varrho}U'_\varrho + U''_{zz} + \tfrac{1}{\varrho^2}U''_{\varphi\varphi};$$

$$(3)\ |\nabla u|^2 = \tilde{U}'^2_r + \tfrac{1}{r^2}\tilde{U}'^2_\theta + \tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\tilde{U}'^2_\varphi; \qquad (4)\ \Delta u = \tilde{U}''_{rr} + \tfrac{1}{r^2}\tilde{U}''_{\theta\theta} + \tfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\tilde{U}''_{\varphi\varphi} + \tfrac{2}{r}\tilde{U}'_r + \tfrac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\tilde{U}'_\theta.$$

Różniczkując tożsamość $\boxed{U(\varrho,\varphi,z)=u(\varrho\cos\varphi,\varrho,\sin\varphi,z)}$ względem ϱ,φ,z dostajemy $(\star)\begin{cases}U'_\varrho=u'_x\cos\varphi+u'_y\sin\varphi,\\ U'_\varphi=\varrho(-u'_x\sin\varphi+u'_y\cos\varphi),\\ U'_z=u'_z.\end{cases}$ Stąd $\begin{cases}U'_\varrho\cos\varphi-\frac{1}{\varrho}U'_\varphi\sin\varphi=u'_x,\\ U'_\varrho\sin\varphi+\frac{1}{\varrho}U'_\varphi\cos\varphi=u'_y,\end{cases}$ więc ${u'_x}^2+{u'_y}^2=(U'_\varrho\cos\varphi-\frac{1}{\varrho}U'_\varphi\sin\varphi)^2+(U'_\varrho\sin\varphi+\frac{1}{\varrho}U'_\varphi\cos\varphi)^2={U'_\varrho}^2+\frac{1}{\varrho^2}{U'_\varphi}^2$, co dowodzi (1).

Pamiętając, że argumentami u'_* są $\varrho\cos\varphi,\varrho,\sin\varphi,z$, zróżniczkujmy $(\star)$ wzgl. ϱ,φ,z: $\begin{cases}U''_{\varrho\varrho}=u''_{xx}c^2+2u''_{xy}cs+u''_{yy}s^2,\\ U''_{\varphi\varphi}=\varrho^2(u''_{xx}s^2-2u''_{xy}sc+u''_{yy}c^2)-\varrho U'_\varrho,\\ U''_{zz}=u''_{zz},\end{cases}$ gdzie $\begin{cases}c=\sin\varphi,\\ s=\sin\varphi;\end{cases}$ wynika stąd, że $U''_{\varrho\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}U''_{\varphi\varphi}=u''_{xx}+u''_{yy}-\frac{1}{\varrho}U'_\varrho$, skąd dostajemy (2).

Różniczkując wzgl. r,θ,φ tożsamość $\boxed{\tilde U(r,\theta,\varphi)=U(\underbrace{r\sin\theta}_{=\varrho},\varphi,\underbrace{r\cos\theta}_{=z})}$ dostajemy $\begin{cases}\tilde U'_r=U'_\varrho\sin\theta+U'_z\cos\theta,\\ \tilde U'_\theta=r(U'_\varrho\cos\theta-U'_z\sin\theta),\\ \tilde U'_\varphi=U'_\varphi,\end{cases}$ skąd $\tilde U'r^2+\frac{1}{r^2}{\tilde U'_\theta}{}^2={U'_\varrho}^2+{U'_z}^2$, co wraz z (1) dowodzi (3). Dalsze różniczkowanie daje $\begin{cases}\tilde U''_{rr}=U''_{\varrho\varrho}S^2+2U''_{\varrho z}CS+U''_{zz}C^2,\\ \tilde U''_{\theta\theta}=r^2(U''_{\varrho\varrho}C^2-2U''_{\varrho z}CS+U''_{zz}S^2)-r\tilde U'_r,\end{cases}$ gdzie $\begin{cases}C=\cos\theta,\\ S=\sin\theta,\end{cases}$ więc $\tilde U''_{rr}+\frac{1}{r^2}\tilde U''_{\theta\theta}=U''_{\varrho\varrho}+U''_{zz}-\frac{1}{r}\tilde U'_r$, co wraz ze wzorem (2) i tożsamością $\frac{1}{\varrho}U'_\varrho=\frac{1}{rS}(\tilde U'_rS+\frac{1}{r}\tilde U'_\theta C)$ dowodzi (4).

Krótszy sposób dla (3),(4): Przy transformacji $\begin{pmatrix}\text{współrzędne}\\ \text{kartezjańskie } x,y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\text{współrzędne}\\ \text{biegunowe } \varrho,\varphi\end{pmatrix}$ zgodnie z (1) i (2) mamy ${u'_x}^2+{u'_y}^2={U'_\varrho}^2+\frac{1}{\varrho^2}{U'_\varphi}^2$ oraz $u''_{xx}+u''_{yy}=U''_{\varrho\varrho}+\frac{1}{\varrho^2}U''_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\varrho}U'_\varrho$. Zastosujmy to dla transformacji $(z,\varrho)\longrightarrow(r,\theta)$, prowadzącej od współrzędnych cylindrycznych do sferycznych; dostajemy wtedy ${U'_\varrho}^2+{U'_z}^2={\tilde U'_r}{}^2+\frac{1}{r^2}{\tilde U'_\theta}{}^2$, skąd wynika (3), oraz $U''_{zz}+U''_{\varrho\varrho}=\tilde U''_{rr}+\frac{1}{r^2}\tilde U''_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\tilde U'_r$, co po dodaniu składników $\frac{1}{\varrho}U'_\varrho=\frac{1}{r\sin\theta}(\tilde U'_r\sin\theta+\frac{1}{r}\tilde U'_\theta\cos\theta)$ oraz $\frac{1}{\varrho^2}U''_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\tilde U''_{\varphi\varphi}$ daje (4).

8. Niech $u=u(x,y)$ będzie funkcją klasy C^2 na pewnym obszarze w $\mathbf{R}^2$, a $U=U(\varrho,\varphi)$ — jej przedstawieniem we współrzędnych biegunowych. Wyrazić wielkość $L:=\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)$ we współrzędnych kartezjańskich $\begin{cases}x=\varrho\cos\varphi,\\ y=\varrho\sin\varphi.\end{cases}$

Różniczkując po φ tożsamość $U(\varrho,\varphi)=u(\varrho\cos\varphi,\varrho\sin\varphi)$ dostajemy $\frac{1}{\varrho}U'_\varphi=-u'_x\sin\varphi+u'_y\cos\varphi$; różniczkując to wzgl. ϱ dostajemy $L=-u''_{xx}CS-u''_{xy}S^2+u''_{yx}C^2+u''_{yy}SC$, gdzie $\left\{\begin{array}{l}C=\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ S=\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{array}\right\}$. Stąd ostatecznie $L=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}u''_{xy}-\frac{xy}{x^2+y^2}\big(u''_{xx}-u''_{yy}\big)$.

9. W obszarze $\Omega:=\mathbf{R}^2_+=\{(x,y):x>0,y>0\}$ określamy nowe współrzędne $u:=xy$, $v:=\frac{y}{x}$. (a) Wyrazić w tych współrzędnych wyrażenie $\mathcal{L}(f):=x^2f''_{xx}-y^2f''_{yy}$, jeśli $f\in C^2(\Omega,\mathbf{R})$. (b) Rozwiązać równanie $\mathcal{L}(f)=0$.

Różniczkowanie $f(x,y)=F(u,v)=F(xy,\frac{y}{x})$ daje $\left\{\begin{array}{l}f'_x=yF'_u-x^{-2}yF'_v\\ f'_y=xF'_u+x^{-1}F'_v\end{array}\right\}$, $\left\{\begin{array}{l}f''_{xx}=y^2F''_{uu}-2x^{-2}y^2F''_{uv}+x^{-4}y^2F''_{vv}+2x^{-3}yF'_v\\ f''_{yy}=x^2F''_{uu}+2F''_{uv}+x^{-2}F''_{vv}\end{array}\right\}$, więc $x^2f''_{xx}-y^2f''_{yy}=-4y^2F''_{uv}+2x^{-1}yF'_v=2v\big(F'_v-2uF''_{uv}\big)$.

Odpowiedź. $\mathcal{L}(f)=2v(F'_v-2uF''_{uv})$; $\mathcal{L}(f)=0\ \Leftrightarrow\ \tilde F:=F'_v$ spełnia $\tilde F=2u\tilde F'_u$, czyli $\frac{\partial}{\partial u}\left[u^{-\frac12}\tilde F\right]=0$, tzn. $f(x,y)=\varphi_1(u)+\sqrt{u}\varphi_2(v)$.

10. W obszarze $\Omega:=\mathbf{R}^2_+=\{(x,y):x>0,y>0\}$ określamy nowe współrzędne $u:=\sqrt{xy}$, $v:=\frac{y}{x}$. (a) Wyrazić w tych współrzędnych wyrażenie $\mathcal{L}(f):=x^2f''_{xx}-y^2f''_{yy}$, jeśli $f\in C^2(\Omega,\mathbf{R})$. (b) Rozwiązać równanie $\mathcal{L}(f)=0$.

$f(x,y)=F(\sqrt{xy},\frac{y}{x})$; stąd $f'_x=\frac12x^{-\frac12}y^{\frac12}F'_u-x^{-2}yF'_v$, $f'_y=\frac12x^{\frac12}y^{-\frac12}F'_u+x^{-1}F'_v$; różniczkując ponownie dostajemy: $x^2f''_{xx}=\frac14u^2F''_{uu}-uvF''_{uv}+v^2F''_{vv}-\frac14uF'_u+2vF'_v$ oraz $y^2f''_{yy}=\frac14u^2F''_{uu}+uvF''_{uv}+v^2F''_{vv}-\frac14uF'_u$.

Odpowiedź. $\mathcal{L}(f)=2v(F'_v-uF''_{uv})=-2u^2v\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}(u^{-1}F)$; zatem $\mathcal{L}(f)=0\iff f(x,y)=\varphi_1(u)+u\varphi_2(v)$.

11. Znaleźć równanie (rzędu 2), którego ogólnym rozwiązaniem są funkcje postaci $f(x,y)=\varphi_1(x+y)+\varphi_2(xy)$, gdzie φ_1,φ_2 są 'dowolnymi' funkcjami jednej zmiennej.

Weźmy współrzędne $\left\{\begin{array}{l}u=x+y\\ v=xy\end{array}\right\}$ w obszarze $\mathcal{O}=\{(x,y):x<y\}$; wtedy zależność $f(x,y)=F(x+y,xy)=F(u,v)$ oznacza, że rozwiązania w nowych wspólrzędnych są postaci $F(u,v)=\varphi_1(u)+\varphi_2(v)$, czyli są rozwiązaniami równania $\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}F=0$. Otóż różniczkując wzgl. x,y zależność $f(x,y)=F(x+y,xy)$ dostajemy $\left\{\begin{array}{l}f'_x=F'_u+yF'_v\\ f'_y=F'_u+xF'_v\end{array}\right\}$ oraz $\left\{\begin{array}{l}f''_{xx}=F''_{uu}+2yF''_{uv}+y^2F''_{vv}\\ f''_{xy}=F''_{uu}+(x+y)F''_{uv}+xyF''_{vv}+F'_v\\ f''_{yy}=F''_{uu}+2xF''_{uv}+x^2F''_{vv}\end{array}\right\}$.

Aby stąd wyrazić F''_{uv} przez f'_* i f''_{**} zastosujemy wzory Cramera: $D=\begin{vmatrix}1&2y&y^2\\1&x+y&xy\\1&2x&x^2\end{vmatrix}=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$, $D_2=\begin{vmatrix}1&f''_{xx}&y^2\\1&f''_{xy}-F'_v&xy\\1&f''_{yy}&x^2\end{vmatrix}=(xy-x^2)f''_{xx}+(x^2-y^2)(f''_{xy}-F'_v)+(y^2-xy)f''_{yy}$, przy czym $F'_v=\frac{1}{y-x}(f'_x-f'_y)$. Zatem ostatecznie

$$0\overset{!}{=}(x-y)^3F''_{uv}=D_2=(y-x)(xf''_{xx}+yf''_{yy})+(x^2-y^2)f''_{xy}+(x+y)(f'_x-f'_y).$$

Inny sposób (formalny rachunek na zamianę zmiennych):
Weźmy współrzędne $\left\{\begin{array}{l}u=x+y\\ v=xy\end{array}\right\}$ w obszarze $\mathcal{O}=\{(x,y):x<y\}$; wtedy zależność $f(x,y)=F(x+y,xy)=F(u,v)$ oznacza, że rozwiązania w nowych wspólrzędnych są postaci $F(u,v)=\varphi_1(u)+\varphi_2(v)$, czyli są rozwiązaniami równania $\frac{\partial^2}{\partial u\partial v}F=0$. Otóż $\left\{\begin{array}{l}\partial_x=\frac{\partial u}{\partial x}\partial_u+\frac{\partial v}{\partial x}\partial_v=\partial_u+y\partial_v\\ \partial_y=\frac{\partial u}{\partial y}\partial_u+\frac{\partial v}{\partial y}\partial_v=\partial_u+x\partial_v\end{array}\right\}$, więc $\left\{\begin{array}{l}\partial_u=\frac{1}{y-x}(y\partial_y-x\partial_x)\\ \partial_v=\frac{1}{y-x}(\partial_x-\partial_y)\end{array}\right\}$. Stąd $\partial_v\partial_u=\frac{1}{y-x}(\partial_x-\partial_y)\frac{y\partial_y-x\partial_x}{y-x}=\frac{1}{(y-x)^3}L$, gdzie

$\boxed{L = (x-y)(x\partial_{xx} + y\partial_{yy}) - (x^2-y^2)\partial_{xy} - (x+y)(\partial_x - \partial_y)}$. *Odp.* $\boxed{(x-y)(xf''_{xx} + yf''_{yy}) - (x^2-y^2)f''_{xy} = (x+y)(f'_x - f'_y)}$.

Jeszcze inny sposób: Dla $(u,v) \in \tilde{\mathcal{O}} = \{(u,v) : u^2 - 4v > 0\}$ mamy $\left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2-4v}) \\ y = \frac{1}{2}(u + \sqrt{u^2-4v}) \end{matrix}\right\}$, więc możemy wystartować z zależności $f\left(\frac{1}{2}(u-\sqrt{u^2-4v}), \frac{1}{2}(u+\sqrt{u^2-4v}\right) = F(u,v)$; jednak jej różniczkowanie nie wygląda zachęcająco ...

12. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, danej wzorem $f(x,y,z) := e^x + e^y + e^z + 4e^{-x-z} + e^{-y+z}$.

$\left\{\begin{array}{l} f'_x = X - \frac{4}{XZ}, \\ f'_y = Y - \frac{Z}{Y}, \\ f'_z = Z - \frac{4}{XZ} + \frac{Z}{Y}, \end{array}\right.$ gdzie $X = e^x,\ Y = e^y,\ Z = e^z$. Zatem dla p.krytycznego $Z = Y^2$ oraz $\left\{\begin{array}{l} X^2Y^2 = 4, \text{ tzn. } XY = 2, \\ Y^2 - \frac{4}{XY^2} + Y = 0, \end{array}\right.$ czyli $\left\{\begin{array}{l} XY = 2, \\ Y^2 - \frac{4}{2Y} + Y = 0; \end{array}\right.$ stąd $0 = Y^3 + Y^2 - 2 = (Y-1)(Y^2+2Y+2)$, więc $Y = 1$, wobec czego $X = 2$, $Z = Y^2 = 1$. Zatem $= (\log 2, 0, 0)$ jest jedynym p. krytycznym; $\left[f''\right] = \begin{bmatrix} X + \frac{4}{XZ} & 0 & \frac{4}{XZ} \\ 0 & Y + \frac{Z}{Y} & -\frac{Z}{Y} \\ \frac{4}{XZ} & -\frac{Z}{Y} & Z + \frac{4}{XZ} + \frac{Z}{Y} \end{bmatrix}$, więc $\left[f''()\right] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $D_1 = 4$, $D_2 = 8$, $D_3 = 20$, więc w p.krytycznym jest lok. minimum.

13. Znaleźć ekstremalne wartości funkcji $f(x,y) = (x+y)e^{-\left(\frac{x}{2} + 2y\right)}$ na zbiorze $K = \{(x,y) :\ x, y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$.

$f'(x,y) = e^{-\left(\frac{x}{2}+2y\right)}\left[1 - \frac{x}{2}, 1 - 2y\right]$, więc $f' \neq 0$ na K, czyli nie ma p.krytycznych we wnętrzu K. Na bokach trójkąta: $\varphi_1(x) := f(x,0) = xe^{-\frac{x}{2}}$, $\varphi_1'(x) = (1 - \frac{x}{2})e^{-\frac{x}{2}} > 0$, czyli φ_1 rośnie dla $x \in [0,1]$; $\varphi_2(y) := f(0,y) = ye^{-2y}$, $\varphi_2'(y) = (1-2y)e^{-2y}$ zmienia znak z + na − dla $y = \frac{1}{2}$, czyli $\max \varphi_2 = f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{-1} \approx 0.184$; $\varphi_3(x) := f(x, 1-x) = e^{-2+\frac{3}{2}x}$ rośnie dla $x \in [0,1]$. Stąd, skoro w wierzchołkach mamy $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607$, $f(0,1) = e^{-2} \approx 0.135$, to $\min f(K) = f(0,0) = 0$, $\max f(K) = f(1,0) = e^{-\frac{1}{2}}$.

14. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$, $\ f(x,y,z) := ax + by + \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$, $\ a^2 + b^2 \neq 0$.

$\left\{\begin{array}{l} f'_x = a - 4r^{-4}xz, \\ f'_y = b - 4r^{-4}yz, \\ f'_z = 2r^{-4}(x^2+y^2-z^2); \end{array}\right.$ jeśli więc $f'_x = f'_y = f'_z = 0$, to $z \neq 0$ oraz $r^2 = x^2+y^2+z^2 = 2z^2$, $r^4 = 4z^4$, skąd $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}ar^4z^{-1} = az^3, \\ y = \frac{1}{4}br^4z^{-1} = bz^3; \end{array}\right.$ przy tym $z^2 = x^2 + y^2 = (a^2+b^2)z^6$, skąd $z = \pm(a^2+b^2)^{-\frac{1}{4}} = c^{-\frac{1}{2}}$. Zatem są dwa p.krytyczne $_\pm = \pm c^{-\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, gdzie $\boxed{c := \sqrt{a^2+b^2}}$, przy czym $f(\pm) = \pm 2c^{\frac{1}{2}}$. Druga pochodna: $\left\{\begin{array}{l} f''_{xx} = 4r^{-6}z(3x^2 - y^2 - z^2), \\ f''_{xy} = 16r^{-6}xyz, \\ f''_{zz} = 4r^{-6}z(-3x^2 - 3y^2 + z^2), \\ f''_{xz} = 4r^{-6}x(-x^2 - y^2 + 3z^2), \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} f''_{xx}(+) = (a^2-b^2)c^{-\frac{1}{2}}, \\ f''_{xy}(+) = 2abc^{-\frac{1}{2}}, \\ f''_{zz}(+) = -c^{\frac{3}{2}}, \\ f''_{xz}(+) = ac^{\frac{1}{2}}, \end{array}\right.$ skąd $c^{\frac{1}{2}}\left[f''(_+)\right] = \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab & ac \\ 2ab & b^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{bmatrix}$. Mamy więc $D_2 = -(a^2+b^2)^2 < 0$, więc forma kwadratowa $f''(\mathbf{p}_+)$ jest nieokreślona (obliczenie minorów $D_1 = a^2 - b^2$ i $D_3 = 2(a^2+b^2)^3$ nie jest tu konieczne). **Uwaga**. To, że f ma w $_+$ siodło widać także stąd, że $f(ac^{-\frac{1}{2}}, bc^{-\frac{1}{2}}, z) = c^{\frac{1}{2}} + \frac{2cz}{1+cz^2}$ ma dla $z = c^{-\frac{1}{2}}$ maksimum, natomiast $f(at, bt, ct) = c^2t + \frac{1}{ct}$ ma dla $t = c^{-\frac{3}{2}}$ minimum.

15. Dla danych $a, b, c > 0$ znaleźć $x, y, z > 0$, spełniające warunek $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, dla których prostopadłościan o wierzchołkach $(\pm x, \pm y, \pm z)$ $\big[$wpisany w elipsoidę o półosiach $a, b, c\big]$ ma największą możliwą objętość.

$\frac{V^2}{64} = x^2y^2z^2 = x^2y^2c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) = a^2b^2c^2F(x^2, y^2)$, gdzie $F(u,v) := uv(1-u-v)$. Należy zbadać F na zbiorze $T = \{(u,v) :\ u, v \geqslant 0,\ u+v \leqslant 1\}$: $\left\{\begin{matrix} F'_u = v(1-2u-v) \\ F'_v = u(1-u-2v) \end{matrix}\right\}$, więc wewnątrz T jest tylko jeden punkt krytyczny $(\hat{u}, \hat{v}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $F(\hat{u}, \hat{v}) = \frac{1}{27}$. Jest to lokalne maksimum, gdyż $F''_{uu} = -2u$, $F''_{uv} = 1 - 2u - 2v$, $F''_{vv} = -2u$, więc $F''() = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} < 0$. Natomiast $F = 0$ na brzegu T, gdyż tu $u = 0$ lub $v = 0$ lub $u + v = 1$. Stąd i ze zwartości T wynika, że $\sup F(T) = F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$.

Odpowiedź. $\sup V = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ osiągane dla $(x,y,z) = (\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$.

Uwaga. Bardzo proste rozwiązanie można otrzymać stosując nierówność Cauchy'ego o średniej geometrycznej i arytmetycznej: $(\frac{1}{8abc})^2V^2 = \frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}\frac{z^2}{c^2} \leqslant \left[\frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right]^3 = \left[\frac{1}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$, przy czym zamiast $\leqslant$ jest równość $\Leftrightarrow$ $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{y^2}{c^2} = \frac{1}{3}$.

16. Niech $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dana wzorem $f(x,y) := e^{-2x}(x+y)(x^2+x-y)$. (a) Znaleźć i zbadać punkty krytyczne f; (b) wyznaczyć zbiór wartości f.

Wsk. Obliczyć $\hat{f}(x) := \sup_y f(x,y)$. **Odp.** $f(0,0) = 0$, $f(-2,2) = 0$, $f(\sqrt{2}, 1) = e^{-\sqrt{8}}(3+\sqrt{8}) \approx 0.344$, $f(-\sqrt{2}, 1) = e^{\sqrt{8}}(3-\sqrt{8}) \approx 2.903$; wartości $(f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy})$ w tych punktach są następujące: $(2, 0, -2)$, $2e^4(-3, -2, -1)$, $2e^{-\sqrt{8}}(-\sqrt{2} - 4, \sqrt{2}, -1)$, $2e^{\sqrt{8}}(\sqrt{2} - 4, -\sqrt{2}, -1)$, a więc pierwsze dwa punkty są siodłowe, a w pozostałych dwóch są (lokalne) maksima; ponadto $f(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}$.

17. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$, $f(\boldsymbol{x}) := \|x\|^{-1} + a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$, gdzie $\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, zaś $\mathbf{0} \neq (a_1, \ldots, a_n) = \boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ jest danym wektorem; zbadać określoność formy $\boldsymbol{h} \mapsto f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h})$ dla $\boldsymbol{x} \neq 0$. [Można dla 'ułatwienia' przyjąć $n = 4$]

Niech $r : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $r() := \|\|$, wtedy $r_j' := \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{} = \frac{1}{2\sqrt{}}2x_j = \frac{x_j}{r}$, więc $f_j' = -r^{-2}\frac{x_j}{r} + a_j = a_j - r^{-3}x_j$. Zatem $f'() = 0 \iff \forall j : x_j = r^3 a_j \iff \; = r^3$; wtedy $r = \|\| = \|r^3\| = r^3\|\|$, więc $r^{-2} = \|\|$, $r = \|\|^{-\frac{1}{2}}$, czyli $\boxed{\hat{} = \|\|^{-\frac{3}{2}}}$ jest jedynym punktem krytycznym, $f(\hat{}) = 2\|\|^{\frac{1}{2}}$. Drugie pochodne: $f_{i,j}'' = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j - r^{-3}x_j\right) = 3r^{-5}x_ix_j - r^{-3}\delta_{ij}$; zatem $f''()(,) = \sum\limits_{i,j} f_{i,j}''h_ih_j = r^{-5}\left(3(|)^2 - \|\|^2\|\|^2\right)$, gdzie $(|) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_ih_i$; stąd $f''()(,) > 0$, $(|) = 0 \Rightarrow f''()(,) < 0$, więc forma $f''()$ dla $n > 1$ jest nieokreślona. *Odpowiedź*. Jedyny punkt krytyczny $\hat{} = \|\|^{-\frac{3}{2}}$ jest p. siodłowym f.

Uwaga. $\operatorname{sgn} f''() = (1, n-1)$, gdyż $\mathbf{R}^n = U_1 \dot{+} U_2$, gdzie $U_1 = \langle\rangle$, $U_2 = \{ : (|) = 0\}$, przy czym $\dim U_1 = 1$, $\dim U_2 = n-1$, $U_1 \perp U_2$ względem formy $f''()(,) = r^{-5}(|)(|) - r^{-3}(|)$ oraz $f''() > 0$ na U_1 i $f''() < 0$ na U_2.

Uwaga. Można tu zastosować metodą Sylvestera-Jacobiego, korzystając ze wzoru $\det\left[a_ib_j + \lambda\delta_{ij}br\right]_{i,j\in\overline{1,k}} = (c+\lambda)\lambda^{k-1}$, gdzie $c = \sum_{i=1}^{k} a_ib_i$. Dostaniemy wtedy $r^{5k}D_k = \det[3x_ix_j - r^2\delta_{ij}]_{i,j\leqslant n} = (-r^2)^{k-1}s_k$, gdzie $s_k = 3x_1^2 + \ldots + 3x_k^2 - r^2$; skoro $-r^2 = s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_n = 2r^2$, to ujemne są wszystkie $\frac{D_j}{D_{j-1}}$, oprócz $j = k$ takiego, że $s_{k-1} < 0 < s_k$ (włącznie z $k = 0$).

18. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(\boldsymbol{x}) := \dfrac{2(x_1 + \ldots + x_n) - 1}{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}$.

$s := x_1 + \ldots + x_n$, $r := \|\|$, wtedy $\frac{\partial r}{\partial x_i} = r^{-1}x_i$, więc $f_i' = 2\frac{r^2 - (2s-1)x_i}{r^4}$; zatem $f_1' = \ldots = f_n' = 0 \iff x_1 = \ldots = x_n = \alpha > 0$, gdzie $n\alpha^2 = (2n\alpha - 1)\alpha$, skąd $\alpha = \frac{1}{n}$. Zatem jest jeden p.krytyczny $\hat{} = \frac{1}{n}(1, \ldots, 1)$ oraz $f(\hat{}) = \frac{2-1}{\frac{1}{n}} = n$. Drugie pochodne: $f_{ij}'' = 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(r^{-2} - (2s-1)r^{-4}x_i\right) = 8r^{-6}(2s-1)x_ix_i - 4r^{-4}(x_i + x_j) - 2(2s-1)r^{-4}\delta_{ij}$, więc skoro $= \hat{} \Rightarrow 2s - 1 = 1$ i $r^2 = \frac{1}{n}$, to $i \neq j \Rightarrow f_{ij}''(\hat{}) = 8\frac{n^3}{n^2} - 8\frac{n^2}{n} = 0$, $f_{ii}''(\hat{}) = -2n^2$. Zatem $f''(\hat{})(,) = -2n^2\|\|^2 < 0$, czyli $f\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) = n$ — maximum.

Uwaga. Do ilustracji poniższego faktu nadają się zadania ??, ??, ??, ??, ??(a) i (chyba?) ??.

19. Dowieść, że jeśli $f : D \to \mathbf{R}$ jest funkcją różniczkowalną na zbiorze otwartym $D \subset \mathbf{R}^n$, $\hat{y} \in \mathbf{R}$ — największą wartością krytyczną f na D, oraz istnieje zwarty podzbiór $K \subset D$ taki, że $\forall x \in D \setminus K : f(x) \leqslant \hat{y}$, to $\sup f(D) = \hat{y}$.

Analogicznie: Jeżeli $\check{y}$ jest najmniejszą wartością krytyczną f na D oraz $\forall x \in D \setminus K : f(x) \geqslant \check{y}$, to $\inf f(D) = \check{y}$.

Skoro K jest zwarty, zaś f — ciągła, to $\exists a \in K : f(a) = \sup f(K)$. Przypuśćmy, że $f(a) > \hat{y}$; wtedy $f(a) = \sup f(D)$, gdyż $\sup f(D \setminus K) \leqslant \hat{y} < f(a)$; zatem $f(a)$ jest globalnym maksimum f na D, a więc a jest punktem krytycznym f; stąd, z określenia $\hat{y}$, $f(a) \leqslant \hat{y}$, sprzeczność. Zatem $\sup f(K) = f(a) \leqslant \hat{y}$, a z założenia $\sup f(D \setminus K) \leqslant \hat{y}$, więc $\sup f(D) \leqslant \hat{y}$; zarazem $\hat{y} \in f(D)$, skąd teza.

Inny sposób. Ciągłość f i zwartość K powodują, że $\exists a \in K : f(a) = \sup f(K)$. Jeśli $a \in K^\circ$, to f ma w a lokalne maksimum, więc a jest punktem krytycznym f, skąd $f(a) \leqslant \hat{y}$ z określenia $\hat{y}$; jeśli zaś $a \notin K^\circ$, to $a \in D \setminus K^\circ \subset \overline{D \setminus K}$[1], więc $f(a) \leqslant \hat{y}$, gdyż $f(x) \leqslant \hat{y}$ dla $x \in \overline{D \setminus K}$ z ciągłości f. Zatem zawsze $f(a) \leqslant \hat{y}$, więc $f \leqslant \hat{y}$ i na $D \setminus K$, i na K, skąd $\sup f(D) \leqslant \hat{y}$; stąd teza, bo $\hat{y} \in f(D)$.

20. Niech $f : D \to \mathbf{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na obszarze $D \subset \mathbf{R}^n$, a liczby $\check{y} < \hat{y}$ — najmniejszą i największą z wartości krytycznych f na D. Dowieść, że jeśli istnieje zwarty $K \subset D$ taki, że $f(D \setminus K) \subset [\check{y}, \hat{y}]$, to $f(D) = [\check{y}, \hat{y}]$.

Z rezultatu ?? wynika wprost, że $f(D) \subset \,]-\infty, \hat{y}] \cap [\check{y}, +\infty[\, = [\check{y}, \hat{y}]$. Zarazem $f(D)$, jako ciągły obraz zbioru spójnego, jest spójny, czyli jest przedziałem; zatem $f(D)$ wraz z punktami $\check{y}, \hat{y}$ zawiera $[\check{y}, \hat{y}]$, skąd teza.

21. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : {\mathbf{R}_+}^3 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x, y, z) := x + 4y + \dfrac{1}{z} + \dfrac{z+1}{xy}$.

$f_x' = 1 - \frac{z+1}{x^2y}$, $f_y' = 4 - \frac{z+1}{xy^2}$, $f_z' = \frac{1}{xy} - \frac{1}{z^2}$, więc $f_x' = f_y' = 0$ dają $y = \frac{1}{4}x$; rugując y z $f_x' = f_z' = 0$ mamy $x^3 = 4(z+1)$, $z^2 = \frac{1}{4}x^2$, czyli $x = 2z$, $0 = 2z^3 - z - 1 = (z-1)(2z^2 + 2z + 1)$. Stąd $= (2, \frac{1}{2}, 1)$, $f() = 7$ jest jedynym punktem krytycznym. Mamy w nim: $f_{xx}'' = 1$, $f_{xy}'' = 2$, $f_{xz}'' = -\frac{1}{2}$, $f_{yy}'' = 16$, $f_{yz}'' = -2$, $f_{zz}'' = 2$, a więc $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 12$, $\Delta_3 = 20$, czyli w jest lok. minimum.

Uwaga. Minimum jest globalne: jeśli $f(x, y, z) \leqslant 8$, to $x \leqslant 8$, $y \leqslant 2$ (więc $xy \leqslant 16$), $z \geqslant \frac{1}{8}$, $xy \geqslant \frac{1}{8}$ (więc $x \geqslant \frac{1}{8y} \geqslant \frac{1}{16}$, $y \geqslant \frac{1}{8x} \geqslant \frac{1}{64}$), $z + 1 \leqslant 8xy \leqslant 128$. Zatem poza zwartym zbiorem $K := \left[\frac{1}{16}, 8\right] \times \left[\frac{1}{64}, 2\right] \times \left[\frac{1}{8}, 127\right]$ wartości f są > 8.

22. Wykazać że zbiorem wartości funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) := \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$ jest zwarty odcinek; wyznaczyć go.

$f_x' = \frac{1-2xy-x^2}{(x^2+1)^2(y^2+1)}$, $f_y' = \frac{1-2xy-y^2}{(x^2+1)(y^2+1)^2}$; zatem w p. kryt. jest $x^2 = 1 - 2xy = y^2$, skąd $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli f ma 2 p. kryt.: $f(\frac{\pm 1}{\sqrt{3}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.65$. Zauważmy, że dla $|x| > 2$ mamy $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leqslant \left|\frac{x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ oraz $\frac{1}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{5}$, a więc $|f(x, y)| \leqslant \frac{\frac{1}{2}}{y^2+1} + \frac{\frac{1}{5}y}{y^2+1} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = 0.6$; analog. jest dla $|y| > 2$, a zatem poza zwartym zbiorem $K := \{(x, y) : |x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2\}$ mamy $|f(x, y)| \leqslant 0.6$.

23. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : D \to \mathbf{R}$ oraz zbiór $f(D)$, jeśli

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}, \quad f(x, y, z) := (1 + x)(1 + y)(1 + z)\left(1 + \frac{1}{xyz}\right).$$

[1] Korzystamy tutaj z otwartości zbioru D: Niech $A := X \setminus K$ (tu $X := \mathbf{R}^n$), wtedy $D \setminus K^\circ = D \cap \overline{A} \subset \overline{D \cap A} = \overline{D \setminus K}$, QED.

$f'_x = \frac{(1+y)(1+z)(x^2y-1)}{x^2yz}$, więc $f'_x = 0 \Leftrightarrow x^2y = 1$, skąd $f'() = 0 \ \Leftrightarrow x = y = z = 1$, czyli $\check{\ } = (1,1,1)$ jest jedynym p. krytycznym f. Druga pochodna: $f''_{xx} = \frac{2(1+y)(1+z)}{x^3yz}$, $f''_{xy} = \frac{(1+z)(1+x^2y^2z)}{x^2y^2z}$, więc $f''(\check{\ })$ ma macierz $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$; stąd $f''(\check{\ }) > 0$, bo $\begin{cases} D_1 = 8 \\ D_2 = 48 \\ D_3 = 256 \end{cases}$; **inny sposób**: $Q := 8(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) = 2(2a+b+c)^2+6(b+\frac{1}{3}c)^2+\frac{16}{3}c^2 > 0$; nieco prościej: $Q = 4[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2] > 0$. Zatem w $\check{\ }$ jest lok. minimum. **Globalność**: poza zwartym $K := \{(x,y,z) :\ x,y,z \in [0,15],\ xyz \geqslant \frac{1}{15}\}$, $K \subset D$, choć jedna z liczb $x, y, z, \frac{1}{xyz}$ jest > 15, więc $f > 16 = \check{y}$, skąd teza; **inny sposób**: skoro $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$, to $(1+x)(1+y) \geqslant (1+\sqrt{xy})^2$ dla $x, y > 0$, więc $f(x,y,z) \geqslant (1+\sqrt{xy})^2(1+\frac{1}{\sqrt{xy}})^2 \geqslant \big((1+1)^2\big)^2 = 16$. Zatem $f(D) = [16, +\infty[$, gdyż $f(D)$ jest spójny oraz $\sup f(D) = +\infty$.

Ogólniejsza wersja:

24. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x) := (1+x_1)\dots(1+x_n)(1+\frac{c}{x_1\dots x_n})$ (dla danego $c > 0$) na zbiorze $D := \{x \in \mathbf{R}^n : \forall k \in \overline{1,n} : x_k > 0\}$.

Oznaczając $P = P(x) = x_1 \dots x_n$ mamy $\frac{1}{f}f'_k = \frac{1}{1+x_k} - \frac{c}{(P+c)x_k}$, więc $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \ldots = x_n =: \xi \\ \frac{1}{1+\xi} = \frac{c}{(\xi^n+c)\xi} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x_1 = \ldots = x_n = \xi \\ \xi^{n+1} = c \end{matrix}\right\}$, czyli jest jeden punkt krytyczny $\check{x} = (\xi, \dots, \xi)$, gdzie $\xi := c^{\frac{1}{n+1}}$; ponadto $f(\check{x}) = (1+\xi)^{n+1}$. Druga pochodna: $\frac{1}{f(\check{x})}f''_{jk}(\check{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{1}{f}f'_k) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{1+x_k} - \frac{c}{(P+c)x_k}\right) = \left[-\frac{1}{(1+x_k)^2} + \frac{c}{(P+c)x_k^2}\right]\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \frac{c}{(P+c)^2x_k}\frac{\partial P}{\partial x_j} = \frac{1}{\xi(1+\xi)^2}\delta_{jk} + \frac{1}{\xi^n(1+\xi)^2}\frac{\xi^n}{\xi} = \frac{1}{\xi(1+\xi)^2}(\delta_{jk}+1)$. Zatem $f''_{jk}(\check{x}) = \delta(\delta_{jk}+1)$, gdzie $\delta > 0$, więc $\frac{1}{\delta}f''(\check{x})(,) = \sum\limits_j {h_j}^2 + \Big(\sum\limits_j h_j\Big)^2 > 0$, czyli jest to lokalne minimum. Pokażemy, że jest to minimum globalne: poza zwartym podzbiorem $K := \{x \in \mathbf{R}^n : \forall k \in \overline{1,n} : x_k \in [0, M-1],\ x_1 \dots x_n \geqslant \frac{c}{M-1}\} \subset D$, gdzie $M := f(\check{x})$, choć jeden z czynników $1 + x_k$ lub $1 + \frac{c}{x_1 \dots x_n}$ jest $\geqslant M$, więc $f(x) \geqslant M$; stąd $\sup f(D) = M$ (zob. ??

Inny sposób. Zastosujemy nierówność $\boxed{\prod\limits_{k=0}^n (1+x_k) \geqslant (1+\gamma)^{n+1}}$ (*) dla $x_0, \dots, x_n > 0$, gdzie $\gamma := G(x_0, \dots, x_n) := \sqrt[n+1]{\prod\limits_{k=0}^n x_k}$; biorąc w niej $x_0 := \frac{c}{x_1 \dots x_n}$ dostajemy $f(x) \geqslant (1+\xi)^{n+1}$, $\xi = c^{\frac{1}{n+1}}$. (*) jest nierównością Jensena $\phi(\frac{t_0+\ldots+t_n}{n+1}) \leqslant \frac{1}{n+1}\sum\limits_k \phi(t_k)$ dla funkcji (wypukłej!) $\phi(t) := \log(1+e^t)$ oraz $t_k = \log x_k$. **Inny** (elementarny, gdyż bez log, exp i wypukłości) **dowód** (*): $\prod\limits_{k=0}^n (1+x_k) = 1 + \sum\limits_{r=1}^{n+1} T_r$, gdzie $T_r = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_r} x_{i_1}\dots x_{i_r}$; stosując do sumy T_r nierówność Cauchy'ego dostajemy $\binom{n+1}{r}^{-1}T_r \geqslant \Big(\prod\limits_{i_1<\ldots<i_r} x_{i_1}\dots x_{i_r}\Big)^{1/\binom{n+1}{r}} = (x_1 \dots x_n)^{\binom{n}{r-1}/\binom{n+1}{r}} = (x_1 \dots x_n)^{\frac{r}{n+1}} = \gamma^r$. Stąd $\prod\limits_{k=0}^n (1+x_k) \geqslant 1 + \sum\limits_{r=1}^{n+1}\binom{n+1}{r}\gamma^r = (1+\gamma)^{n+1}$.

25. Dla danej funkcji $\varphi : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} = \{(u,v) : u > 0\} \to \mathbf{R}$ oraz symetrycznego operatora $A \in \operatorname{End}\mathbf{R}^n$ określmy funkcję $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $f(x) := \varphi(|x|^2, \langle x|Ax\rangle)$. Wtedy $\frac{1}{2}f'(x) = \varphi'_u \cdot x + \varphi'_v \cdot Ax$, zatem $f'(x) = 0$ w trzech przypadkach: 1^0 $x = 0$; 2^0 $(u,v) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ jest p. kryt. φ oraz $u = |x|^2, v = \langle x|Ax\rangle$ — musi być wtedy $\frac{v}{u} \in [\inf \operatorname{Sp}A, \sup \operatorname{Sp}A]$; 3^0 $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, $\lambda \in \operatorname{Sp}A$, oraz $\varphi'_u + \lambda\varphi'_v = 0$, tzn. $\hat{u} = |x|^2$ jest p. kryt. funkcji $\mathbf{R}_+ \ni u \mapsto \varphi(u, \lambda u)$.

Przykład. Dla $\varphi(u,v) := \frac{e^v}{1+au}$, $a > 1$, mamy: $\varphi'_u + \lambda\varphi'_v = \frac{e^v}{(1+au)^2}\big(\lambda(1+au) - a\big) = 0 \iff \lambda = \frac{a}{1+au} \in [1, a[$.

26. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x,y) := \sin(x+y) - \sin x - \sin y$.

$f'_x = \cos(x+y) - \cos x$, $f'_y = \cos(x+y) - \cos y$, więc w p. kryt. $\cos x = \cos y =: \lambda$, oraz $\lambda = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, tzn. $\pm(1-\lambda^2) = \lambda^2 - \lambda$, gdzie $\pm = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$. Stąd $\lambda = 1$ lub $0 = 2\lambda^2 - \lambda - 1 = (2\lambda+1)(\lambda-1)$, czyli $\lambda = 1$ lub $\lambda = -\frac{1}{2}$. Mamy więc trzy rodziny p. kryt.: 1^0 $f(2k\pi, 2l\pi) = 0$ — są to zdegen. p. kryt. typu «małpie siodło», gdyż np. $f(x,y) = (x+y) - \frac{1}{6}(x+y)^3 - x + \frac{1}{6}x^3 - y + \frac{1}{6}y^3 + \ldots = -\frac{1}{2}xy(x+y) + \ldots$; 2^0 $f(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2l\pi) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2.598$ — są to glob. minima; 3^0 $f(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2.598$ — są to globalne maksima.

27. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem: (a) $f(x,y) := \sin(x+y) + \sin x + \sin y$; (b) $f(x,y) := 6\sin(x+y) + \sin x + \sin y$; (c) $f(x,y) := 7\sin(x+y) + 2\sin x + 7\sin y$; (d) $f(x,y) := \sin(x+y) + 6\sin x + \sin y$; (e) $f(x,y) := 17\sin(x+y) + 3\sin x + 17\sin y$; (f) $f(x,y) := 17\sin(x+y) + 10\sin x + 17\sin y$.

Dla $f(x,y) = \sin(x+y) + \frac{1}{a}\sin x + \frac{1}{b}\sin b$ mamy: $0 = f'_x = \cos(x+y) + \frac{1}{a}\cos x$, $0 = f'_y = \cos(x+y) + \frac{1}{b}\cos y \Rightarrow L := \cos(x+y) = -\frac{1}{a}\cos x = -\frac{1}{b}\cos y$, przy czym $L = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = abL^2 \mp \sqrt{1-a^2L^2}\sqrt{1-b^2L^2}$, co po uproszczeniu daje $\boxed{2abL^3 - (a^2+b^2+1)L^2 + 1 = 0}$, przy czym dopuszczalne są tylko te pierwiastki L, dla których $|L| \leqslant \min\{1, \frac{1}{|a|}, \frac{1}{|b|}\}$. (a) $0 = 2L^3 - 3L^2 + 1 = (L-1)^2(2L+1)$, co daje: $\cos x = \cos y = -1$, $\sin x = \sin y = 0$, $f(x,y) = 0$ (siodła) lub $\cos x = \cos y = \frac{1}{2}$, $\sin x = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(x,y) = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$. (b) $0 = 72L^3 - 73L^2 + 1 = (L-1)(9L+1)(8L-1)$, co daje: $\cos x = \cos y = -\frac{3}{4}$, $\sin x = \sin y = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$, $f(x,y) = \pm\frac{7}{4}\sqrt{7} \approx 4.63$ (siodła) lub $\cos x = \cos y = \frac{2}{3}$, $\sin x = \sin y = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $f(x,y) = \pm\frac{10}{3}\sqrt{5} \approx 7.45$ (min. i max.); (c) $7L^3 - \frac{53}{4}L^2 + 1 = \frac{1}{4}(L-2)(4L+1)(7L-2)$, co daje: $\cos x = \frac{7}{8}$, $\sin x = \pm\frac{1}{8}\sqrt{15}$, $\cos y = \frac{1}{4}$, $\sin y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{15}$, $f(x,y) = \pm\frac{205}{64}\sqrt{15} \approx 12.41$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{2}{7}$, $\sin y = \frac{3}{7}\sqrt{5}$, $f(x,y) = 0$ (siodła). (d) $0 = \frac{1}{36}(12L^3 - 73L^2 + 36) = \frac{1}{36}(L-6)(3L+2)(4L-3)$, co daje: $\cos x = \frac{1}{9}$, $\sin x = \pm\frac{4}{9}\sqrt{5}$, $\cos y = \frac{2}{3}$, $\sin y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$, $f(x,y) = \pm\frac{265}{81}\sqrt{5} \approx 7.32$ (max. i min.) lub $\cos x = -\frac{1}{8}$, $\sin x = \frac{3}{8}\sqrt{7}$, $\cos y = -\frac{3}{4}$, $\sin y = \pm\frac{1}{4}\sqrt{7}$, $f(x,y) = \pm\frac{137}{64}\sqrt{7} \approx 5.66$ (siodła). (e) $0 = \frac{1}{9}(102L^3 - 307L^2 + 9) = \frac{1}{9}(L-3)(6L+1)(17L-3)$, co daje: $\cos x = \frac{17}{18}$, $\sin x = \pm\frac{1}{18}\sqrt{35}$, $\cos y = \frac{1}{6}$, $\sin y = \pm\frac{1}{6}\sqrt{35}$, $f(x,y) = \pm\frac{707}{162}\sqrt{35} \approx 25.82$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{3}{17}$, $\sin y = \pm\frac{2}{17}\sqrt{70}$, $f(x,y) = 0$ (siodła). (f) $0 = \frac{1}{100}(340L^2 - 489L^2 + 100) = \frac{1}{100}(4L-5)(5L+2)(17L-10)$, co daje: $\cos x = \frac{17}{25}$, $\sin x = \pm\frac{4}{25}\sqrt{21}$, $\cos y = \frac{2}{5}$, $\sin y = \frac{1}{5}\sqrt{21}$, $f(x,y) = \pm\frac{5131}{625}\sqrt{21} \approx 37.62$ (min. i max.) lub $\cos x = -1$, $\cos y = -\frac{10}{17}$, $\sin y = \pm\frac{3}{17}\sqrt{21}$, $f(x,y) = 0$ (siodła).

28. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem: (a) $f(x,y) := \frac{xy(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$; (b) $f(x,y) := \frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1}$.

(a) $f'_x = \frac{(x^2y-2x-y)y}{(x^2+1)^2(y^2+1)}$, $f'_y = \frac{(xy^2-x-2y)x}{(x^2+1)(y^2+1)^2}$, więc w p. kryt. $(x,y) \neq (0,0)$ mamy $(2-\lambda)x + y = 0$, $x + (2-\lambda)y = 0$, gdzie $\lambda := xy$; stąd $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$. Gdy $\lambda = 1$, dostajemy $x + y = 0$, $xy = 1$, tj. sprzeczność; gdy $\lambda = 3$ dostajemy $x = y$, $xy = 3$, tj. $x = y = \pm\sqrt{3}$ przy czym $f(\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}) = \pm\frac{3}{8}\sqrt{3}$; są to odpow. maks. i min. lokalne (nawet globalne!); z kolei pkt. $(x,y) = (0,0)$ jest typu «małpie siodło». (b) $f'_x = \frac{1}{y^2+1} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$, $f'_y = \frac{1}{x^2+1} - \frac{2xy}{(y^2+1)^2}$, więc w p. kryt. $\frac{(x^2+1)^2}{y^2+1} = 2xy = \frac{(y^2+1)^2}{x^2+1}$, skąd $y^2 = x^2$ i $2xy > 0$, tzn. $y = x$. Są więc dwa p. kryt.: $f(\pm) = \pm 1$, gdzie $= (1,1)$; w obu są siodła, bo np. $f''_{xx}() = f''_{yy}() = \frac{1}{2}$, $f''_{xy}() = -1$; f jest nieograniczona z dołu i z góry, gdyż np. $f(x,0) = x$.

29. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbf{R}_+^3 \to \mathbf{R}$, określonej wzorem $f(x,y,z) := \dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y}$.

f jest (dod.) jednorodna stopnia 1, więc $f(x,y,z) = \varphi(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$, gdzie $\varphi(x,y) := f(x,y,1) = \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$. Warunek $0 = \varphi'_x - \varphi'_y = \frac{1+x+y}{(y+1)^2} - \frac{1+x+y}{(x+1)^2}$ daje $x = y$, więc z $0 = \varphi'_x$ wynika $0 = \frac{(x-1)(3x+1)}{4x^2(x+1)^2}$. Zatem jedynym p. kryt. φ jest $= (1,1)$; skoro $\varphi''()$ ma $\varphi''_{xx} = \varphi''_{yy} = \frac{1}{2}$, $\varphi''_{xy} = -\frac{1}{4}$, to $f() = \frac{3}{2}$ jest (lokalnym) minimum. Pok. że jest to min. *globalne*: $\frac{d}{dx}\varphi(x, t-x) = \frac{(t+1)(t+2)(2x-t)}{(t-x+1)^2(x+1)^2}$, więc $\inf\{\varphi(x,y) : x,y \in \mathbf{R}_+,\ x+y = t\} = \varphi(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) = 2 + \frac{1}{t} - \frac{4}{t+2} =: \psi(t)$; z kolei $\psi'(t) = \frac{4}{(t+2)^2} - \frac{1}{t^2}$, a zatem $\forall t > 0 : \psi(t) \geqslant \psi(2) = \frac{3}{2}$.

1. Sprawdzić, że jeśli wielomiany $\xi(t), \eta(t), \varrho(t)$ są stopnia $\leqslant 2$, to krzywa opisana parametryzacją $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) = \frac{\xi(t)}{\varrho(t)} \\ y = y(t) = \frac{\eta(t)}{\varrho(t)} \end{array} \right\}$ spełnia równanie postaci $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, gdzie $A, \dots, F \in \mathbf{K}$ są nie wszystkie równe 0. Zatem jest to krzywa stożkowa (lub jej część) lub prosta lub półprosta lub punkt.

Sprawdzić, że jeśli dla dowolnego $t_0 \in \mathbf{K}$, takiego że $\varrho(t_0) \neq 0$, określimy na naszej krzywej wielkość s wzorem $s = s(t) = \dfrac{x(t) - x(t_0)}{y(t) - y(t_0)}$, to funkcja $t \mapsto s(t)$ jest homografią.

$\xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi\varrho, \eta\varrho, \varrho^2$ jest układem sześciu wielomianów z przestrzeni $\mathbf{K}_4[\cdot]$, zaś $\dim \mathbf{K}_4[\cdot] = 5$. Stąd istnieje $[A, \dots, F] \neq 0$ taki, że $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + D\xi\varrho + E\eta\varrho + F\varrho^2 = 0$, skąd teza.

$s(t) = \dfrac{\eta(t)\varrho(t_0) - \eta(t_0)\varrho(t)}{\xi(t)\varrho(t_0) - \xi(t_0)\varrho(t)}$; licznik i mianownik są tu wielomianami stopnia $\leqslant 2$ mającymi wspólny pierwiastek $t = t_0$, więc po skróceniu przez $t - t_0$ dostajemy homografię.

2. Przykład parametryzacji krzywych stożkowych

$\left\{ \begin{array}{c} x = t \\ y = t^{-1} \end{array} \right\}$ hiperbola $xy = 1$.

$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \\ y = \frac{2t}{t^2-1} \end{array} \right\}$ hiperbola $x^2 - y^2 = 1$.

$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{(2s-1)^2}{s(1-s)} \\ y = \frac{2s-1}{s(1-s)} \end{array} \right\}$ hiperbola $(x+2)^2 - y^2 = 4$, gdyż $x + 2 = \frac{2s^2-2s+1}{s(1-s)}$, skąd $(x+2-y)(x+2+y) = \frac{2s^2-4s+2}{s(1-s)} \frac{2s^2}{s(1-s)} = 4$.

$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ y = \frac{2t}{t^2+1} \end{array} \right\}$ okrąg $x^2 + y^2 = 1$.

3. **Klasyfikacja w przypadku $\mathbf{K} = \mathbf{R}$**. Mamy następujące możliwości dotyczące mianownika $\varrho(t)$:

$\varrho(t)$ jest trójmianem kwadratowym o ujemnym wyróżniku

Przekształceniem postaci $t \mapsto at + b$ można uzyskać $\boxed{\varrho(t) = t^2 + 1}$. Wtedy $\left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = a_0(1+t^2) + a_1(1-t^2) + a_2\, 2t \\ \eta(t) = b_0(1+t^2) + b_1(1-t^2) + b_2\, 2t \end{array} \right\}$, dla stosownych $a_i, b_i \in \mathbf{R}$. Macierz trójki ϱ, ξ, η w bazie $1 + t^2, 1 - t^2, 2t$ ma wyznacznik równy $D := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, więc $D = 0 \iff \varrho, \xi, \eta$ są lin. zależne.

Mamy dwie możliwości: 1° $D \neq 0$; wtedy z $\left\{ \begin{array}{l} x(t) - a_0 = a_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} + a_2 \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) - b_0 = b_1 \frac{1-t^2}{1+t^2} + b_2 \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\}$ można wyliczyć $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) \\ \frac{2t}{1-t^2} = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) \end{array} \right\}$, skąd mamy równanie elipsy: $\big[\alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)\big]^2 + \big[\beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t)\big]^2 = 1$. 2° $D = 0$; wtedy dla pewnych c_1, c_2 mamy zależność $c_1 \big[x(t) - a_0\big] + c_2 \big[y(t) - b_0\big] = 0$, więc krzywa stanowi część prostej; jest to odcinek, gdyż $\left|\frac{1-t^2}{1+t^2}\right| \leqslant 1$, $\left|\frac{2t}{1+t^2}\right| \leqslant 1$.

$\varrho(t)$ jest trójmianem kwadratowym o dodatnim wyróżniku

Przekształceniem postaci $t \mapsto at + b$ można uzyskać $\boxed{\varrho(t) = 1 - t^2}$. Wtedy $\left\{ \begin{array}{l} \xi(t) = a_0(1-t^2) + a_1(1-t) + a_2(1+t) \\ \eta(t) = b_0(1-t^2) + b_1(1-t) + b_2(1+t) \end{array} \right\}$, dla stosownych $a_i, b_i \in \mathbf{R}$. Macierz trójki ϱ, ξ, η w bazie $1-t^2, 1-t, 1+t$ ma wyznacznik równy $D := \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, więc $D = 0 \iff \varrho, \xi, \eta$ są lin. zależne.

Mamy dwie możliwości: 1° $D \neq 0$; wtedy $\left\{ \begin{array}{l} x(t) - a_0 = a_1 \frac{1}{1+t} + a_2 \frac{1}{1-t} \\ y(t) - b_0 = b_1 \frac{1}{1+t} + b_2 \frac{1}{1-t} \end{array} \right\}$ można odwrócić, a więc $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+t} = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) \\ \frac{1}{1-t} = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) \end{array} \right\}$; stąd z tożsamości $\left[\frac{2}{1+t} - 1\right]\left[\frac{2}{1-t} - 1\right] = 1$ dostajemy równanie $\left[\alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) - \frac{1}{2}\right]\left[\beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$, więc mamy hiperbolę. 2° $D = 0$; wtedy znów krzywa jest częścią prostej; przy tym jeśli $\big(x(t), y(t)\big)$ nie jest stale, to choć jeden z wsp. a_i, b_i jest $\neq 0$, więc $x(t)$ lub $y(t)$ jest nieograniczone przy $t \to 1$ lub $t \to -1$; zatem krzywa wypełnia całą prostą.

Uwaga. Podstawiając tu $s = \frac{t_2 - t}{t - t_1} = \frac{1-t}{1+t}$ dostaniemy parametryzację z mianownikiem stopnia 1. Istotnie, wtedy $t = \frac{1-s}{1+s}$, więc $\frac{1}{1+t} = \frac{1+s}{2}$, $\frac{1}{1-t} = \frac{1+s}{2s}$, a zatem nowy mianownik wynosi $\tilde{\varrho}(s) = s$.

$\varrho(t)$ jest stopnia 1

Możemy przyjąć $\varrho(s) = s$; wtedy $\left\{ \begin{array}{l} x(s) - a_0 = a_1 s + a_2 s^{-1} \\ y(s) - b_0 = b_1 s + b_2 s^{-1} \end{array} \right\}$; jeśli $D \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, to dostajemy stąd $\left\{ \begin{array}{l} s = \alpha_0 + \alpha_1 x(s) + \alpha_2 y(s) \\ s^{-1} = \beta_0 + \beta_1 x(s) + \beta_2 y(s) \end{array} \right\}$, a zatem $\big[\alpha_0 + \alpha_1 x(s) + \alpha_2 y(s)\big]\big[\beta_0 + \beta_1 x(s) + \beta_2 y(s)\big] = 1$, czyli mamy hiperbolę.

Uwaga. Podstawiając tu $s = \frac{1-t}{1+t}$ dostaniemy parametryzację o mianowniku $\tilde{\varrho}(t) = 1 - t^2$.

$\varrho(t)$ jest trójmianem o wyróżniku 0

Przyjmijmy $\varrho(t) = t^2$, wtedy $\left\{ \begin{array}{l} x(t) - a_0 = a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} \\ y(t) - b_0 = b_1 t^{-1} + b_2 t^{-2} \end{array} \right\}$; jeśli $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, to dostajemy stąd $\left\{ \begin{array}{l} t^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) \\ t^{-2} = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) \end{array} \right\}$, a zatem $\beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) = \big[\alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)\big]^2$, czyli mamy parabolę.

Uwaga. Podstawienie $t^{-1} = s$ daje parametryzację wielomianową.

$\varrho(t) = \mathrm{const}$, czyli parametryzacja wielomianowa

$\left\{ \begin{array}{l} x(s) - a_0 = a_1 s + a_2 s^2 \\ y(t) - b_0 = b_1 s + b_2 s^2 \end{array} \right\}$, więc przy $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ dostajemy stąd $\left\{ \begin{array}{l} s = \alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t) \\ s^2 = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t) \end{array} \right\}$; zatem $\big[\alpha_0 + \alpha_1 x(t) + \alpha_2 y(t)\big]^2 = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 y(t)$; jest to równanie paraboli.

4. Niech $\xi(t), \eta(t), \varrho(t)$ będą wielomianami stopnia $\leqslant 2$, $\varrho \neq 0$; załóżmy też, że $\mathrm{NWD}(\xi(t), \eta(t), \varrho(t)) \sim 1$. Sprawdzić, że homografia $t = h(s) = \dfrac{as+b}{cs+d}$, sprowadzająca krzywą $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\xi(t)}{\varrho(t)} \\ y = \frac{\eta(t)}{\varrho(t)} \end{array} \right\}$ do postaci $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + x_1 s + x_2 s^2 \\ y = y_0 + y_1 s + y_2 s^2 \end{array} \right\}$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\varrho(t) = \mathrm{const}$ lub $\varrho(t)$ ma pierwiastek podwójny lub układ $\xi(t), \eta(t), \varrho(t)$ jest liniowo zależny.

$\boxed{\Leftarrow}$. Jeśli $\varrho(t) = \mathrm{const}$, to wystarczy wziąć $h(s) = s$. Jeśli $\varrho(t) = a(t-t_0)^2$, to dla $h(s) = t_0 + \frac{1}{s}$ dostajemy $\varrho \circ h(s) = as^{-2}$, skąd widać, że złożenia $\dfrac{\xi \circ h(s)}{\varrho \circ h(s)}$ i $\dfrac{\eta \circ h(s)}{\varrho \circ h(s)}$ są wielomianami stopnia $\leqslant 2$. Jeśli mamy liniową zależność $\lambda_1 \xi(t) + \lambda_2 \eta(t) - \lambda_0 \varrho(t) = 0$, to $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$; niech np. $\lambda_2 \neq 0$, wtedy $y = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x$, więc mamy prostą lub jej część
Może w tym przypadku nie istnieć $h(t)$, np. dla $x(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{(t-3)(t-4)}$, $y(t) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$. Jeśli $\dfrac{\xi \circ h(s)}{\varrho \circ h(s)} = a_0 + a_1 s + a_2 s^2$, to kładąc $s = h^{-1}(t) = \dfrac{dt-b}{-ct+a}$ dostajemy $\dfrac{\xi(t)}{\varrho(t)} = a_0 + a_1 \dfrac{dt-b}{-ct+a} + a_2 \left(\frac{dt-b}{-ct+a}\right)^2$, analogicznie $\dfrac{\eta(t)}{\varrho(t)} = b_0 + b_1 \dfrac{dt-b}{-ct+a} + b_2 \left(\frac{dt-b}{-ct+a}\right)^2$; zatem $\varrho = \mathrm{const}(-ct+a)^2$, skąd teza.

Mapa i parametryzacja powierzchni

1. **Definicja**: *Parametryzacją (lokalną)* r-wymiarowej powierzchni $M \subset \mathbf{R}^n$ nazywamy gładkie i regularne (tzn. maksymalnego rzędu) odwzorowanie $\kappa : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$, gdzie $\mathcal{O}$ jest otwartym podzbiorem r-wymiarowej przestrzeni wektorowej, takie że $\kappa(\mathcal{O}) \subset M$. Z regularności κ wynika *lokalna injektywność*: każdy punkt $\mathcal{O}$ ma otoczenie, na którym κ jest injektywne; wynika to stąd, że istnieje r-wymiarowy rzut $\mathbf{R}^n \ni x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) \in \mathbf{R}^r$, taki że $p \circ \kappa'(v_0)$ jest odwracalne, a więc $p \circ \kappa$ jest odwracalne na pewnym otoczeniu v_0.

   Często jednak od parametryzacji wymaga się dodatkowo injektywności globalnej.

   Definicja. Odworowanie odwrotne do parametryzacji $\kappa : \mathcal{O} \to M$ (istnieje gdy κ jest injektywne) nazywa się *mapą* na powierzchni; jest ono bijekcją otwartego kawałka M na $\mathcal{O}$.

   Istnienie: Dla każdego $x \in M$ istnieje parametryzacja, której obraz zawiera x; tym samym istnieje mapa na pewnym otoczeniu x. Istotnie, istnieje rozkład $\mathbf{R}^n = V + W$ i odwzorowanie gładkie $\varphi : \mathcal{O}_v \to \mathcal{O}_w$ [gdzie $\mathcal{O}_v \subset V$, $\mathcal{O}_w \subset W$ są otoczeniami składowych v, w punktu x], takie że $M \cap (\mathcal{O}_v + \mathcal{O}_w)$ jest wykresem φ, tzn. zbiorem $\{v + \varphi(v) : v \in \mathcal{O}_v\}$. Wtedy $\kappa : \mathcal{O}_v \to \mathbf{R}^n$, $\kappa(v) := v + \varphi(v)$, jest parametryzacją.

2. **Twierdzenie**. Niech $r < n$, $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^r$ oraz $\kappa : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$ — gładkie i regularne, tzn. $\operatorname{rk} \kappa'(u) = r$. Wówczas:

   Wersja lokalna. κ jest lokalnie injektywne i κ-obrazy dostatecznie małych obszarów w $\mathcal{O}$ są r-wymiarowymi powierzchniami; przy tym $\mathrm{T}S = \operatorname{im} \kappa'(u)$ dla $\boldsymbol{x} = \kappa(u) \in S = \kappa(D)$.
   Uwaga. Dodatkowe założenie o injektywności κ nie wystarczy, by mieć tezę globalną, że $\kappa(\mathcal{O})$ jest powierzchnią; świadczy o tym przykład krzywej w kształcie cyfry '6' (dla $r = 1$, $n = 2$).

   Wersja globalna. Jeśli dodatkowo $\overline{\mathcal{O}}$ jest zwarty i κ ma przedłużenie do odwzorowania *ciągłego i injektywnego* na $\overline{\mathcal{O}}$, to zbiór $\kappa(\mathcal{O})$ jest (r-wymiarową) powierzchnią.

3. **Twierdzenie o rzędzie**. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}^m$ i $\kappa : \mathcal{O} \to \mathbf{R}^n$. Jeśli κ ma stały rząd, tzn. $\operatorname{rk} \kappa'(u) = r = \mathrm{const} \leqslant m$, to κ-obrazy dostatecznie małych obszarów w $\mathcal{O}$ są r-wymiarowymi powierzchniami, przy czym $\mathrm{T}S = \operatorname{im} \kappa'(u)$ dla $\boldsymbol{x} = \kappa(u) \in S = \kappa(D)$.

4. **Twierdzenie**. Załóżmy, że $s < n$, $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^n$ jest otwarty, $F : \mathcal{V} \to \mathbf{R}^s$ jest gładkie i regularne (tzn. $\operatorname{rk} F'(\boldsymbol{x}) = s$ dla $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$). Wtedy zbiór $S = F^{-1}(0)$ (ogólniej: każda poziomica F) jest powierzchnią (*podrozmaitością*) w $\mathbf{R}^n$ wymiaru $n - s$, przy czym $\mathrm{T}S = \ker F'(\boldsymbol{x})$.

   Uwaga. Wystarczy tu, by $\operatorname{rk} F'(\boldsymbol{x}) = s$ dla $\boldsymbol{x} \in S = F^{-1}(0)$, gdyż wtedy, wskutek ciągłości, będzie tak na pewnym otwartym otoczeniu S.

5. **Wstęga Möbiusa w $\mathbf{R}^3$**. Niech $\boxed{\kappa(\varphi, u) := \boldsymbol{h}(\varphi) + u\left(\boldsymbol{h}(\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{e}_3 \sin\frac{\varphi}{2}\right)}$, gdzie $\boldsymbol{h}(\varphi) := \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi$ jest parametryzacją horyzontalnego okręgu. Gdy u przebiega $]-1, 1[$ (przy ustalonym φ) punkt $\kappa(\varphi, u)$ przebiega odcinek P_φ o środku $\boldsymbol{h}(\varphi)$, leżący w płaszczyźnie $\langle \boldsymbol{h}(\varphi), \boldsymbol{e}_3 \rangle$ i tworzący kąt $\frac{\varphi}{2}$ z płaszczyzną $z = 0$; zauważmy, że $\kappa(\varphi + 2\pi, u) = \kappa(\varphi, -u)$, czyli odcinki P_φ i $P_{\varphi+2\pi}$ różnią się tylko orientacją. Z kolei krzywa $u = \mathrm{const}$ leży na torusie o promieniach $\left\{\begin{smallmatrix} R=1 \\ r=u \end{smallmatrix}\right\}$ i ma na tym torusie opis $\theta = \frac{1}{2}\varphi$.

   Zauważmy, że przy $u, u' \in \,]-1, 1[$ mamy $\kappa(\varphi, u) = \kappa(\varphi', u') \iff \exists n \in \mathbf{Z} : \begin{Bmatrix} \varphi' = \varphi + 2\pi n \\ u' = (-1)^n u \end{Bmatrix}$; istotnie, z $\kappa(\varphi, u) = \kappa(\varphi', u')$ wynika $\boldsymbol{h}(\varphi) = \boldsymbol{h}(\varphi')$ (czyli $\varphi' - \varphi = n \in \mathbf{Z}$) oraz $u\boldsymbol{h}(\frac{\varphi}{2}) = u'\boldsymbol{h}(\frac{\varphi'}{2})$, a $\boldsymbol{h}(\frac{\varphi}{2} + n\pi) = (-1)^n \boldsymbol{h}(\frac{\varphi}{2})$.

   Regularność odwzorowania κ: $\frac{\partial\kappa}{\partial\varphi}(\varphi, u) = -\frac{u}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{h} + (1 + u\cos\frac{\varphi}{2})\boldsymbol{h}' + \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{e}_3$, $\frac{\partial\kappa}{\partial u} = \cos\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{h} + \sin\frac{\varphi}{2}\,\boldsymbol{e}_3$; te wektory są lin. niezależne, gdyż układ $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}', \boldsymbol{e}_3$ jest bazą $\mathbf{R}^3$, a $1 + u\cos\frac{\varphi}{2} \neq 0$; zatem $\operatorname{rk} \kappa'(\varphi, u) = 2$.

   Znajdziemy równanie wstęgi M: jeśli $(x, y, z) = \kappa(\varphi, u)$, to $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + u\cos\frac{\varphi}{2}$ oraz $z = u\sin\frac{\varphi}{2}$; stąd $\dfrac{z}{\varrho - 1} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \dfrac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}$, więc wskutek $\begin{Bmatrix} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \end{Bmatrix}$ dostajemy równanie $\boxed{\dfrac{z}{\varrho - 1} = \dfrac{y}{\varrho + x}}$, bądź, równoważnie, $\boxed{\dfrac{z}{\varrho - 1} = \dfrac{\varrho - x}{y}}$. Inne postacie równania wstęgi M: $\boxed{\varrho = \dfrac{xz + y}{y - z}}$, $\boxed{\varrho = x + \dfrac{y(y - z)}{x + 1}}$.

   Płaszczyzna styczna: Skoro M ma opis $\varrho = \dfrac{xz + y}{y - z}$, to funkcja $F(\boldsymbol{x}) := xz + y + (z - y)\varrho$ znika na M, więc

   $$\mathrm{T}M = \ker F'(\boldsymbol{x}) = \ker\left[z + \frac{x(z - y)}{\varrho},\ 1 - \varrho + \frac{y(z - y)}{\varrho},\ \varrho + x\right].$$

   Rzutem na płaszczyznę (x, y) wstęgi M (dla $|u| < 1$) jest obszar pomiędzy krzywymi $\boldsymbol{a}(\varphi) = (1 - \cos\frac{\varphi}{2})\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}$ i $\tilde{\boldsymbol{a}}(\varphi) = (1 + \cos\frac{\varphi}{2})\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}$; oczywiście $\tilde{\boldsymbol{a}}(\varphi) = \boldsymbol{a}(\varphi + 2\pi)$ oraz $\boldsymbol{a}(\pi) = \tilde{\boldsymbol{a}}(\pi) = \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}$ (punkt samoprzecięcia).

6. **Prostokreślność i parametryzacje hiperboloidy jednopowłokowej** $\mathcal{H} := \{(x, y, z) :\ 1 + z^2 = x^2 + y^2\}$

   $\boxed{1}$ $\varrho = \sqrt{1 + z^2}$ na $\mathcal{H}$, więc mamy parametryzację $\kappa(\varphi, z) := \left(\sqrt{z^2 + 1}\cos\varphi,\ \sqrt{z^2 + 1}\sin\varphi,\ z\right)$, dla której linie

$\varphi = \varphi_0$ są południkami, a $z = z_0$ — równoleżnikami $\mathcal{H}$. Biorąc tu $z = \operatorname{tg}\psi$ dostajemy

$\boxed{2}$ $\boxed{\frac{1}{\cos\psi}(\cos\phi, \sin\phi, \sin\psi)}$, parametryzację, w której linie $\phi = \phi_0$ są południkami, a $\psi = \psi_0$ — równoleżnikami.

$\boxed{3}$ Pisząc równanie $\mathcal{H}$ w postaci $(1-x)(1+x) = (y-z)(y+z)$ widzimy, że dla każdych $(x, q \neq 0)$ dostaniemy punkt $\mathcal{H}$, znajdując (y,z) z układu $\begin{cases} z + y = q & (x+1), \\ z - y = q^{-1}(x-1). \end{cases}$ Dostajemy stąd $\kappa(q,x) := \begin{bmatrix} x \\ \frac{q^2+1}{2q} + x\frac{q^2-1}{2q}, \\ \frac{q^2-1}{2q} + x\frac{q^2+1}{2q} \end{bmatrix}$; można uprościć te wzory, biorąc $q = e^t$: $\kappa(t,x) := \begin{bmatrix} x \\ \operatorname{ch} t + x \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t + x \operatorname{ch} t \end{bmatrix}$. Linie $q = q_0$, tzn. $t = t_0$, są prostymi leżącymi na $\mathcal{H}$.

$\boxed{4}$ Wyliczając x, y, z z układu $\left\{\begin{array}{c} z + y = p(x-1) = q(x+1) \\ z - y = \frac{1}{p}(x+1) = \frac{1}{q}(x-1) \end{array}\right\}$ dostajemy parametryzację, dla której linie $p = p_0$ i $q = q_0$ są prostymi: $\boxed{\frac{1}{p-q}(p+q, pq-1, pq+1)}$. Jej wartości obejmują $\mathcal{H}$ bez prostych $\{x = \pm 1, y = z\}$ (suma dwoch spójnych i przystających "połowek" $\mathcal{H}$). Kierunki izotropowe([1]): $l_p = [2p, p^2-1, p^2+1]$ oraz l_q.

$\boxed{5}$ Na $\mathcal{H}$ mamy dwie rodziny prostych: $L_\alpha := \left\{\begin{array}{c} x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1 \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = z \end{array}\right\}$, $L'_\beta := \left\{\begin{array}{c} x\cos\beta + y\sin\beta = 1 \\ -x\sin\beta + y\cos\beta = -z \end{array}\right\}$. Znajdziemy $L_\alpha \cap L'_\beta$: wstawienie $\left\{\begin{array}{c} x = \cos\alpha - z\sin\alpha \\ y = \sin\alpha + z\cos\alpha \end{array}\right\}$ do opisu L'_β daje $\left\{\begin{array}{c} \cos(\beta-\alpha) + z\sin(\beta-\alpha) = 1 \\ -\sin(\beta-\alpha) + z\cos(\beta-\alpha) = -z \end{array}\right\}$; każde z tych równań daje $z = \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}$, więc punktem przecięcia jest $\boxed{\frac{1}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}\left(\cos\frac{\beta+\alpha}{2}, \sin\frac{\beta+\alpha}{2}, \sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$. Linie $\alpha = \alpha_0$ i $\beta = \beta_0$ są prostymi na $\mathcal{H}$. Kierunki izotropowe: $l_\alpha = [-\sin\alpha, \cos\beta, 1]$, $l'_\beta = l_{\beta+\pi} = [\sin\beta, -\cos\beta, 1]$.

$\boxed{6}$ W tożsamości $(1-pq)^2 + (p+q)^2 = (1+pq)^2 + (p-q)^2$ połóżmy $1 - pq = \lambda$, $p + q = \lambda z$, $1 + pq = \lambda x$, $p - q = \lambda y$; dostaniemy wtedy parametryzację $\boxed{\frac{1}{1-pq}(1+pq, p-q, p+q)}$. Linie $p = p_0$ i $q = q_0$ są prostymi; kierunki izotropowe: $l_p = [2p, p^2-1, p^2+1]$ oraz $l_{\frac{1+q}{1-q}} \equiv [1-q^2, 2q, 1+q^2]$.

$\boxed{7}$ $\mathcal{H}$ ma parametryzację wielomianową; dostaniemy ją, kładąc $x = 1 + 2uv$ do równania $(z-y)(z+y) = x^2 - 1 = 4uv(1+uv)$; rozwiązaniem odpowiadającym $z + y = 2u(1+uv)$, $z - y = 2v$ jest $\boxed{(1+2uv, u + u^2v - v, u + u^2v + v)}$. Mapa związana z tą parametryzacją: $u = \frac{x-1}{z-y} = \frac{y+z}{x+1}$, $v = \frac{z-y}{2}$. Linie $u = u_0$ są prostymi, a $v = v_0$ — parabolami (przekrój $\mathcal{H}$ płaszczyzną $z = y + 2v_0$); zbiór wartości: $\mathcal{H}$ bez prostej $\{x = -1, y = z\}$. Kierunki izotropowe: $l_u = [2u, u^2-1, u^2+1]$ oraz $l_{u+v^{-1}} = v^{-2}[2v(1+uv), (1+uv)^2 - v^2, (1+uv)^2 + v^2]$.

7. **Prostokreślność i parametryzacja paraboloidy hiperbolicznej** $\mathcal{P} := \{(x,y,z) : z = x^2 - y^2\}$.

   Proste $L_p := \left\{\begin{array}{l} z = p(x-y) \\ p = x + y \end{array}\right\}$, $L'_q := \left\{\begin{array}{l} z = q(x+y) \\ q = x - y \end{array}\right\}$ są zawarte w $\mathcal{P}$ (nawet dla $p = 0$ bądź $q = 0$); zatem są dwie rodziny prostych leżących na $\mathcal{P}$. Wszystkie proste L_p są równoległe do płaszczyzny $x + y = 0$, a wszystkie L'_q — do płaszczyzny $x - y = 0$. Jasne, że przez każdy punkt $(x,y,z) \in \mathcal{P}$ przechodzi dokładnie jedna prosta L_p oraz prosta L'_q, mianowicie $p := x + y$, $q = x - y$. Odwrotnie, skoro $\left\{\begin{smallmatrix} p=x+y \\ q=x-y \end{smallmatrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{p+q}{2}$, $y = \frac{x-y}{2}$, to $L_p \cap L'_q$ składa się z jedynego punktu $\boxed{\Psi(p,q) := \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}, pq\right)}$. Prosta L_p ma kierunek $[1, -1, 2p]^T$, a L'_q — $[1, 1, 2q]^T$.

   Uwaga. *Dach dworca Warszawa-Ochota*, czyli powierzchnię $\mathcal{P} \cap \{|x+y| \leqslant 1, |x-y| \leqslant 1\}$, wypełniają odcinki prostych L_p, L'_q, odpowiadające zakresowi $p, q \in [-1, 1]$.

8. Niech $S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : z = xy\}$. Dowieść, że dla każdego punktu $\boldsymbol{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ część wspólna powierzchni S i płaszczyzny stycznej w punkcie $\boldsymbol{p}_0$ do S składa się z dwóch prostych.

   $S = \{ : g() = 0\}$, gdzie $g(x,y,z) := xy - z$; skoro $[g'(_0)] = [y_0, x_0, -1] \neq \mathbf{0}$, to S jest gładką powierzchnią (*paraboloidą hiperboliczną*) oraz $\mathrm{T}_0 = \ker[x_0, y_0, -1]$. Zatem płaszczyzna styczna $\Pi = \Pi_0$ ma równanie $y_0(x - x_0) + x_0(y - x_0) - (z - z_0) = 0$, zaś $S \cap \Pi = \{ : z = xy,\ h(x,y) = 0\}$, gdzie $h(x,y) = y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) - xy + x_0y_0 = (x - x_0)(y_0 - y)$. Zatem $S \cap \Pi = \Big\{ : (x = x_0, z = x_0y) \vee (y = y_0, z = xy_0\Big\} = L_1 \cup L_2$, gdzie L_1, L_2 są prostymi o równaniach $L_1 = \left\{\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{1} = \frac{z-z_0}{x_0}\right\}$, $L_2 = \left\{\frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{y_0}\right\}$.

9. **Torus w $\mathbf{R}^3$**. Jest to powierzchnia S, otrzymana przez obrót okręgu $\left\{\begin{array}{l} (x-b)^2 + z^2 = a^2 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ wokół osi $\mathbf{R}e_3$, tzn. $\boxed{S = \{\boldsymbol{p} : (\varrho - b)^2 + z^2 = a^2\}}$; liczby $a, b > 0$ (zazwyczaj $0 < a < b$) są *promieniami* torusa, a $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Regularnośc więzu: Funkcja $g(x,y,z) := \frac{1}{2}[(\varrho - b)^2 + z^2 - a^2]$ jest gładka poza osią $\{\varrho = 0\} = \{x = y = 0\}$

---

[1] Są to kierunki prostych leżących na $\mathcal{H}$ i przechodzących przez dany punkt $p = \kappa(\cdot) \in \mathcal{H}$; są one określone wektorami izotropowymi formy kwadratowej $x^2 + y^2 - z^2$, obciętej do $\mathrm{T}_p\mathcal{H}$. Dla $p = (x,y,z)$ są to $= [x^2 - 1, xy + z, y + xz]$, $' = [x^2 - 1, xy - z, -y + xz]$.

oraz $\left[g'\right] = \left[(1-\frac{b}{\varrho})x, (1-\frac{b}{\varrho})y, z\right]$; stąd $(g'_x)^2 + (g'_y)^2 + (g'_z)^2 = (\varrho - b)^2 + z^2$ ma na M stałą wartość $a^2 \neq 0$, czyli wiąz g jest regularny. Zatem dla $0 < a < b$, gdy torus S nie przecina osi $\varrho = 0$, dostajemy stąd gładkość S.

Z kolei dla $0 < b \leqslant a$ torus S przecina oś $\{\varrho = 0\}$, lecz g tu jest nieróżniczkowalna. Zamiast g można S opisać innym wiązem $h \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$: otóż $\in S \iff \varrho^2 + b^2 + z^2 - a^2 = 2b\varrho \iff 0 = h() := (r^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2+y^2)$, $r^2 := x^2 + y^2 + z^2$. Skoro $\frac{1}{4}\left[h'\right] = (r^2 + b^2 - a^2)[x,y,z] - b^2[x,y,0]$, to $h() = h'() = 0 \iff \ = (0, 0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$; są to punkty samoprzecięcia S.

Parametryzacja torusa: Podstawiając $\begin{Bmatrix} \varrho = a\cos\theta + b \\ z = a\sin\theta \end{Bmatrix}$ oraz $\begin{Bmatrix} x = \varrho\cos\varphi \\ y = \varrho\sin\varphi \end{Bmatrix}$ dostajemy wzory $\kappa(\varphi,\theta) = \begin{bmatrix} (a\cos\theta + b)\cos\varphi \\ (a\cos\theta + b)\sin\varphi \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$; łatwo widać, że $\kappa(\varphi,\theta) = \kappa(\varphi_1,\theta_1) \iff \varphi_1 - \varphi,\ \theta_1 - \theta \in 2\pi\mathbf{Z}$.

Regularność κ: $\left[\kappa'(\varphi,\theta)\right] = \begin{bmatrix} -\varrho\sin\varphi & -a\cos\varphi\sin\theta \\ \varrho\cos\varphi & -a\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & a\cos\theta \end{bmatrix}$; 2-minorami tej macierzy są $a\varrho\sin\theta$, $-a\varrho\sin\varphi\cos\theta$, $a\varrho\cos\varphi\cos\theta$, więc suma ich kwadratów $a^2\varrho^2 = a^2(a\cos\theta + b)^2$ jest zawsze $\neq 0$ przy $0 < a < b$. Natomiast przy $0 < b < a$ są punkty nieregularności!

Mapa na otoczeniu punktu $\begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$: Jest nią np. odwrotność odwzorowania $\kappa : \mathbf{R}^2 \to M$ na otoczeniu $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Oczywiście szukając wzoru na κ^{-1} można wziąć $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ lub (równoważnie) $\varphi = \arcsin\frac{y}{\varrho}$, ale nie $\varphi = \arccos\frac{x}{\varrho}$, bo φ nie jest parzysta wzgl. y. Z kolei $\theta = \arccos\frac{\varrho - b}{a}$ lub $\theta = \operatorname{arc\,ctg}\frac{\varrho - b}{z}$, natomiast nie byłby dobry wzór $\theta = \arcsin\frac{z}{a}$, gdyż np. nie rozróżnia punktów $\begin{bmatrix} b \pm a\sin\alpha \\ 0 \\ a\cos\alpha \end{bmatrix}$; też $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{\varrho - b}$ jest niedobre: dąży do $\begin{Bmatrix} +\pi/2 \text{ przy } \varrho \searrow b \\ -\pi/2 \text{ przy } \varrho \nearrow b \end{Bmatrix}$. Maksymalną dziedziną, na której mapą jest odwzorowanie $\Phi() := \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \operatorname{arc\,ctg}\frac{\varrho - b}{z}\right)$, jest 'ćwiartka torusa' $\{ \in M :\ x > 0,\ z > 0\}$.

Inna mapa: Jest nią rzut $\Psi() := (x,y)$; jest to bijekcja 'połówki' $S_+ := \{ \in S : z > 0\}$ na pierścień $\{(x,y) : b - a < \varrho < b + a\}$; jest tak dlatego, że $\in S \Rightarrow |\varrho - b| \leqslant a$ oraz $\Psi^{-1}(x,y) = \left(x, y, \sqrt{a^2 - (\varrho - b)^2}\,y\right)$ (parametryzacja S_+).

10. Znaleźć przekrój torusa $S = \{\boldsymbol{p} : (\varrho - b)^2 + z^2 = a^2\}$, $0 < a < b$, płaszczyzną styczną w punkcie $\boldsymbol{p}_0 = (b - a, 0, 0)$.

$\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 S = \ker[1,0,0]$, więc pł. styczną jest $_0 + \mathrm{T} = \{(x,y,z) : x = b - a\}$. Stąd, skoro S ma równanie $\left[r^2 + b^2 - a^2\right]^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$, więc przekrój ma równanie $\left[y^2 + z^2 + 2b(b-a)\right]^2 = 4b^2\left[(a-b)^2 + y^2\right]$. Można to zapisać w postaci $\boxed{(y^2+z^2)^2 = 4b(ay^2 + az^2 - bz^2)}$; dla $b = 2a$ jest to lemniskata Bernoulliego $(y^2+z^2)^2 = 2c^2(y^2 - z^2)$, $c = 2a$; dla $b = a$ jest to para stycznych okręgów $(y \pm a)^2 + z^2 = a^2$. W ogólnym przypadku kładąc $\begin{Bmatrix} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{Bmatrix}$ dostajemy $r^2 = 4b(a - b\sin^2\theta) = 8b(2a - b + b\cos 2\theta)$. Przekrój jest krzywą, mającą samoprzecięcie w $_0$; styczne do niej są proste $\begin{Bmatrix} x = b - a \\ ay^2 + az^2 - bz^2 = 0 \end{Bmatrix}$, tzn. $z = \pm\sqrt{\frac{a}{b-a}}\,y$; zatem kąt przecięcia jest $2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b-a}}$.

Uwaga. Ogólniej, dla $_0 = (x_0, y_0, 0)$, gdzie $\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = b - a$, mamy $\mathrm{T} = \ker[x_0, y_0, 0]$, $_0 + \mathrm{T} = \{x_0 x + y_0 y = (b-a)^2\}$. Dla $t := \frac{x_0 y - y_0 x}{b - a}$ mamy tożsamość $\left(\frac{x_0 x + y_0 y}{b-a}\right)^2 + t^2 = x^2 + y^2$, więc przekrój torusa $(r^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(x^2+y^2)$ płaszczyzną $\frac{xx_0 + yy_0}{b-a} = b - a$ daje $\left[(b-a)^2 + t^2 + z^2 - a^2\right]^2 = 4b^2\left[(b-a)^2 + t^2\right]$, co prowadzi do identycznych j.w. równań, z zamianą y na t.

11. Znaleźć przekrój torusa $S = \{\boldsymbol{p} : (\varrho - b)^2 + z^2 = a^2\}$, $0 < a < b$, płaszczyzną styczną w $\boldsymbol{p}_0 = \begin{bmatrix} a\cos\theta + b \\ 0 \\ a\sin\theta \end{bmatrix}$; wykazać, że ten przekrój składa się jedynie z punktu $\boldsymbol{p}_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos\theta > 0$.

Wskazówka. Wprowadzić w płaszczyźnie przekroju współrzędne biegunowe.

Niech $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$, wtedy $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 S = \ker[c, 0, s]$, więc pł. styczna $_0 + \mathrm{T}$ ma parametryzację $\kappa(y,t) = (ac + b - st, y, as + ct)$; Ponadto S ma równanie $\left[r^2 + b^2 - a^2\right]^2 = 4b^2\varrho^2$, zaś tu $r^2 = a^2 + b^2 + y^2 + t^2 + 2abc - 2bst$, $\varrho^2 = (ac + b - st)^2 + y^2$, więc przekrój ma opis $0 = (y^2+t^2)^2 - 4bs(y^2+t^2)t + 4b[ac(y^2+t^2) + bt^2]$. We współrzędnych biegunowych $\begin{Bmatrix} y = R\cos\alpha \\ t = R\sin\alpha \end{Bmatrix}$ daje to $R = 0$ lub $\boxed{R^2 - 4bsR\sin\alpha + 4b(ac + b\sin^2\alpha) = 0}$, tj. równanie kwadratowe na R; przy tym $\boxed{\Delta = -16bc[a + bc\sin^2\alpha]}$. Kwestią dodatniości R możemy się tu nie przejmować: jeśli $R_\pm(\alpha) := 2bs\sin\alpha \pm 2\sqrt{-bc[a + bc\sin^2\alpha]}$ oraz $_\pm(\alpha) := R_\pm(\alpha)\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$, to $_+(\alpha + \pi) = _-(\alpha)$ wskutek tego, że $R_+(\alpha + \pi) = -R_-(\alpha)$. Zatem przekrój ma bijektywną parametryzację $_+(\alpha)$, gdzie $\alpha \in\ ]-\pi, \pi]$ takie, że $\Delta \geqslant 0$.

$\boxed{1}$ Jeśli $c > 0$, to $\forall\alpha : \left(a + bc\sin^2\alpha > 0\text{, a więc } \Delta < 0\right)$, czyli przekrój jest pojedynczym punktem.

$\boxed{2}$ Jeśli $\theta = \frac{\pi}{2}$, tj. $c = 0$, $s = 1$, to przekrój $0 = (y^2+t^2)^2 - 4bs(y^2+t^2)t + 4b^2t^2 = (y^2 + t^2 - 2bst)^2$ jest okręgiem o promieniu b;

$\boxed{3}$ jeśli $-\frac{a}{b} < c < 0$, to $\forall\alpha : \left(a + bc\sin^2\alpha > a + bc > 0\text{, a więc } \Delta > 0\right)$; zatem $_+(\alpha)$ jest określone dla wszystkich α; dla α określonego warunkiem $ac + b\sin^2 = 0$, tj. $\sin^2\alpha = -\frac{ac}{b}$, mamy $R_-(\alpha)R_+(\alpha) = 0$. Kąt samoprzecięcia wynosi $2\arcsin\sqrt{-\frac{ac}{b}}$, co najłatwiej widać stąd, że dla $(y,t) \to (0,0)$ głowną częścią równania przekroju jest $ac(y^2+t^2) + bt^2 = 0$, a więc $\sin\alpha = \frac{t}{\sqrt{y^2+t^2}} = \pm\sqrt{\frac{ac}{b}}$.

$\boxed{4}$ Dla $c = -\frac{a}{b}$, $s = \frac{d}{b}$, gdzie $d := \sqrt{b^2 - a^2}$; to (jedyny!) przypadek, gdy płaszczyzna przekroju przechodzi przez $\mathbf{0}$ (środek torusa), a więc jest styczna do S także w punkcie $-_0$. Wtedy przekrojem jest $0 = (y^2+t^2)^2 - 4d(y^2+t^2)t - 4a^2(y^2+t^2) + 4b^2t^2 = (y^2 + t^2 - 2dt)^2 - 4a^2y^2 = \left[y^2 - 2ay + t^2 - 2dt\right]\left[y^2 + 2ay + t^2 - 2dt\right]$; są to dwa okręgi o promieniu $\sqrt{a^2 + d^2} = b$ i środkach $\begin{pmatrix} y = \pm a \\ t = d \end{pmatrix}$ leżących na prostej $x = z = 0$; te okręgi przecinają się w punktach $\begin{pmatrix} y = 0 \\ t = 0 \end{pmatrix} = {}_0$ i $\begin{pmatrix} y = 0 \\ t = 2d \end{pmatrix} = -_0$.

Uwaga: $c = -\frac{a}{b} \;\Rightarrow\; \Delta = 16a^2\cos^2\alpha$, więc $R_\pm(\alpha) = 2(d\sin\alpha \pm a\cos\alpha) = \pm 2b\cos(\alpha \mp \theta)$; przy tym $R_\pm(\alpha)\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{bmatrix}$ ma okres π.

$\boxed{5}$ Dla $-1 < c < -\frac{a}{b}$ wyróżnik jest > 0 dla $\sin^2\alpha < p$, gdzie $p := -\frac{a}{bc} < 1$; przekrojem jest krzywa w kształcie ósemki.

$\boxed{6}$ Dla $c = -1$, $s = 0$, mamy równanie $R^2 = 4b(a - b\sin^2\alpha)$, tj. uogólnioną (zwykłą dla $b = 2a$) lemniskatę Bernoulliego.

12. **Helikoida**. Tak nazywa się powierzchnia, jaką zakreśla prosta, obracająca się wokół prostopadłej do niej osi i równocześnie przesuwająca się w kierunku osi obrotu. Jeśli osią obrotu jest $\mathbf{R}e_3$, to opisem parametrycznym M jest $\kappa(t,\varphi) := \begin{bmatrix} t\cos\varphi\\ t\sin\varphi\\ a\varphi\end{bmatrix}$, gdzie $a \neq 0$. **Injektywność** κ: $\kappa(t,\varphi) = \kappa(t_1,\varphi_1) \;\Rightarrow\; a\varphi = a\varphi_1 \;\Rightarrow\; \varphi = \varphi_1$; mamy więc też $t[\cos\varphi, \sin\varphi] = t_1[\cos\varphi,\sin\varphi]$, co daje $t = t_1$. **Regularność** κ: $\big[\kappa'(t,\varphi)\big] = \begin{bmatrix}\frac{\partial\kappa}{\partial t} & \frac{\partial\kappa}{\partial\varphi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -t\sin\varphi\\ \sin\varphi & t\cos\varphi\\ 0 & a\end{bmatrix}$; minory stopnia 2. wynoszą $t,\ a\cos\varphi,\ a\sin\varphi$, więc nie mogą być równocześnie zerami; zatem κ jest regularna na całej dziedzinie $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. **Równanie**: Skoro $\varphi = \frac{z}{a}$ oraz $y\sin\varphi = x\cos\varphi$, to $\boxed{x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}}$; odwrotnie, jeśli to równanie jest spełnione, to dla $\varphi := \frac{z}{a}$ wektory $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$ są liniowo zależne, więc $\exists t:\ [x,y,z]^T = \kappa(t,\varphi)$.

13. **"Quasihelokoida"**(²). Niech $J_u \subset \mathbf{R}^3$ będzie 'otwartym' (tzn. pozbawionym swoich końców) odcinkiem o końcach $(0,0,u) \pm (\cos u, \sin u, 1)$. Dowieść, że zbiór $S := \bigcup_{u\in\mathbf{R}} J_u$ jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^3$; znaleźć jej parametryzację oraz płaszczyznę styczną $\mathrm{T}S$ dla $\boldsymbol{p} := (0,0,0)$.

Z definicji $S = \big\{\kappa(t,u):\ (t,u) \in\,]-1,1[\times\mathbf{R}\big\}$, gdzie $\kappa(t,u) := \begin{bmatrix}t\cos u\\ t\sin u\\ t+u\end{bmatrix}$; sprawdzimy, że κ jest regularne: $\big[\kappa'(t,u)\big] = \begin{bmatrix}\cos u & -t\sin u\\ \sin u & t\cos u\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ma 2-minory równe t, $\cos u + t\sin u$, $\sin u - t\cos u$, ich kwadraty dają w sumie $1 + 2t^2$, więc $\forall (t,u):\ \operatorname{rk}\kappa'(t,u) = 2$, czyli $\operatorname{rk}\kappa = 2$.

Pokażemy, że κ na $]-1,1[\times\mathbf{R}$ jest injektywne: Niech $\kappa(t',u') = \kappa(t,u)$; wtedy $t' = \pm t$, gdyż $|t|$ jest odległością $\kappa(t,u)$ od osi $\mathbf{R}e_3$; jeśli $t' = t$, to równość $t' + u' = t + u$ daje także $u' = u$. Z kolei przy $t' = -t \neq 0$ mamy $u' = 2t + u$ oraz $(\cos u', \sin u') = -(\cos u, \sin u)$, więc $\exists k \in \mathbf{Z}: 2t = (2k+1)\pi$; lecz stąd $|t| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$, sprzeczność.

Zatem S jest obrazem gładkiego, regularnego i injektywnego odwzorowania, a więc jest gładką powierzchnią. Przestrzeń styczna: $\Pi = \mathrm{T}_p S = \operatorname{im}\kappa'(0,0) = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \ker[0\ 1\ 0]$.

14. Niech $L_u \subset \mathbf{R}^3$ będzie prostą, przechodzącą przez punkt $(0,0,u)$ równolegle do wektora $(\cos u, \sin u, 1)$. Zbadać, czy zbiór $S := \bigcup\limits_{u\in\mathbf{R}} L_u$ jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^3$. Znaleźć płaszczyznę styczną $\Pi := \mathrm{T}M$ dla $\boldsymbol{p} := (0,0,0)$. Znaleźć i narysować zbiór $\Pi \cap M$.

$\kappa(t,u) := \begin{bmatrix}t\cos u\\ t\sin u\\ t+u\end{bmatrix}$, wtedy $\big[\kappa'(t,u)\big] = \begin{bmatrix}\cos u & -t\sin u\\ \sin u & t\cos u\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ ma 2-minory równe t, $\cos u + t\sin u$, $\sin u - t\cos u$, ich kwadraty dają w sumie $1 + 2t^2$, więc $\forall(t,u):\ \operatorname{rk}\kappa'(t,u) = 2$. Przestrzeń styczna: $\Pi = \mathrm{T}_p S = \operatorname{im}\kappa'(0,0) = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \ker[0\ 1\ 0]$. Przecięcie: $\kappa(t,u) \in \Pi \iff t\sin u = 0 \iff \big(t = 0 \text{ lub } u = k\pi\big)$; wtedy $\kappa(t,u)$ jest równe $(0,0,u)$ lub $(t(-1)^k, 0, t + k\pi)$. Zatem $S \cap \Pi$ jest sumą prostych $x = 0$, $z = x + 2k\pi$ oraz $z = -x + (2k+1)\pi$ leżących w płaszczyźnie $y = 0$.

Charakter nieinjektywności κ. Niech $(t,u) \neq (t,u)$, lecz $\kappa(t',u') = \kappa(t,u)$; wtedy $t' = \pm t$, gdyż $|t|$ jest odległością $\kappa(t,u)$ od osi $\mathbf{R}e_3$; lecz przy $t' = t$ równość $t' + u' = t + u$ dałaby też $u' = u$, wbrew założeniu; zatem $t' = -t \neq 0$, $u' = 2t + u$ oraz $(\cos u', \sin u') = -(\cos u, \sin u)$, czyli $\exists k \in \mathbf{Z}: 2t = (2k+1)\pi$. Zatem $(t,u) = \big((2k+1)\frac{\pi}{2}, u\big)$, $\big(t', u'\big) = \big(-(2k+1)\frac{\pi}{2}, u + (2k+1)\pi\big)$, zaś $\kappa(t,u) = \kappa(t',u') = (2k+1)\frac{\pi}{2}\begin{bmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ u\end{bmatrix}$.

Punkty krytyczne funkcji na powierzchni; metoda mnożników Lagrange'a

15. Niech $M \subset \mathbf{R}^n$ będzie powierzchnią; punkt $\hat{\boldsymbol{x}} \in M$ nazywa się *punktem krytycznym* funkcji gładkiej $\varphi: M \to \mathbf{R}$, jeśli $d\varphi(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$, tzn. jeśli $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\varphi\circ\gamma) = 0$ dla każdej krzywej $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ takiej, że $\gamma(0) = \hat{\boldsymbol{x}}$; jeśli mamy jakąś parametryzację κ : (obszar w $\mathbf{R}^r$) $\to \mathbf{R}^n$ powierzchni M, to przy $\hat{\boldsymbol{x}} = \kappa(\hat{\boldsymbol{u}})$ zachodzi równoważność

$$(\hat{\boldsymbol{x}} \text{ jest punktem krytycznym funkcji } \varphi) \iff (\hat{\boldsymbol{u}} \text{ jest punktem krytycznym funkcji } \varphi\circ\kappa).$$

Przy tym typ (sygnatura) punktu krytycznego $\hat{\boldsymbol{u}}$ funkcji $\varphi\circ\kappa$ nie zależy (przy ustalonym $\hat{\boldsymbol{x}}$) od wyboru parametryzacji i nazywa się *typem (sygnaturą) punktu krytycznego* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *funkcji* φ. W praktyce zazwyczaj funkcja φ jest zadana jako obcięcie do M pewnej gładkiej funkcji $f: \mathcal{O} \to \mathbf{R}$, określonej na jakimś otoczeniu $\mathcal{O} \supset M$

[2] Zamiast *prostopadłości* (wymaganej dla helikoidy) mamy tu stały kąt 45° między obracającym się odcinkiem i prostą po której porusza się środek odcinka.

powierzchni; warto uświadomić sobie, że różne funkcje f mogą dawać to samo obcięcie $\varphi = f|_M$; inaczej mówiąc, jest wiele rozszerzeń funkcji φ z powierzchni M na obszar w $\mathbf{R}^n$.

16. []**Twierdzenie** (*o mnożnikach Lagrange'a*). Niech $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \text{const}\}$, gdzie $\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{bmatrix}$: (obszar w $\mathbf{R}^n$) $\to \mathbf{R}^s$ jest odwzorowaniem regularnym(3). Niech ponadto κ : (obszar w $\mathbf{R}^r$) $\to \mathbf{R}^n$ będzie parametryzacją M, $\hat{\boldsymbol{u}} \in \mathbf{R}^s$ — ustalonym punktem, zaś $\hat{\boldsymbol{x}} := \kappa(\hat{\boldsymbol{u}})$. Wtedy:

1° $\big(\hat{\boldsymbol{u}}$ jest punktem krytycznym funkcji $f \circ \kappa\big) \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{R} :\ f'(\hat{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i'(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$;

2° Przy spełnionym warunku 1° określmy formę $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ wzorem $B := f''(\hat{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i''(\hat{\boldsymbol{x}})$, gdzie liczby λ_i są 'mnożnikami' wyznaczonymi (jednoznacznie dzięki regularności $\boldsymbol{g}$) równaniem z warunku 1°. Wtedy

$$\forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^r :\ (f \circ \kappa)''(\hat{\boldsymbol{u}})(\delta\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = B\big(\delta\boldsymbol{x}, \delta\boldsymbol{x}\big), \quad \text{gdzie} \quad \delta\boldsymbol{x} := \kappa'(\hat{\boldsymbol{u}})\delta\boldsymbol{u};$$

zatem sygnatura formy B obciętej do przestrzeni TM określa typ $\hat{\boldsymbol{u}}$ jako punktu krytycznego funkcji $f \circ \kappa$.

Wniosek. Punkty krytyczne $f|_M : M \to \mathbf{R}$ można znaleźć, rozwiązując względem $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ i $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbf{R}^s$ układ równań $\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}) = c_i, \\ f'(\boldsymbol{x}) = \sum_i \lambda_i g_i'(\boldsymbol{x}), \end{cases}$ a typ $\hat{\boldsymbol{x}}$ jako punktu krytycznego dla $f|_M$ określa obcięcie do TM formy

$$B := f''(\hat{\boldsymbol{x}}) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i''(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

1° $(f \circ \kappa)'() = f'() \circ \kappa'()$, więc $\big(\hat{}$ jest krytyczny dla $f \circ \kappa$, tzn. $(f \circ \kappa)'() = 0\big) \iff f'() \in V^0$ (tzn. kowektor $f'()$ znika na V), gdzie $V := \operatorname{im} \kappa'()$; otóż, jak wiemy, $V = \mathrm{T}M = \big\langle g_1'(), \ldots, g_s'() \big\rangle^0$, więc $V^0 = \langle \cdot \rangle^{00} = \big\langle g_1'(), \ldots, g_s'() \big\rangle = \big\{ \sum_i \lambda_i g_i'() \big\}$.

2° Różniczkując tożsamość $(f \circ \kappa)'()\delta_1 = f'(\kappa()) \circ \kappa'()\delta_1$ względem , w kierunku wektora $\delta_2 \in \mathbf{R}^r$, dostajemy tożsamość

$$(f \circ \kappa)''()(\delta_1, \delta_2) = f''(\kappa())(\kappa'()\delta_1, \kappa'()\delta_2) + f'(\kappa()) \circ \kappa''()(\delta_1, \delta_2).$$

Wstawmy tu $=\hat{}$, a więc $\kappa() = \hat{}$ oraz $f'() = \sum_i \lambda_i g_i'()$; dostaniemy wtedy

$$(f \circ \kappa)''()(\delta_1, \delta_2) = f''(\kappa())(\kappa'()\delta_1, \kappa'()\delta_2) + \sum_i \lambda_i g_i'() \circ \kappa''()(\delta_1, \delta_2).$$

Lecz $\kappa() \in M$ implikuje $g_i \circ \kappa() = c_i$, skąd $g_i'(\kappa()) \circ \kappa'()\delta_1 = 0$, to zaś po ponownym zróżniczkowaniu (dla $=\hat{}$) daje $g_i'() \circ \kappa''()(\delta_1, \delta_2) = -g_i''()(\kappa'()\delta_1, \kappa'()\delta_2)$, co oczywiście kończy dowód.

17. Metodą mnożników Lagrange'a znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x, y) := \frac{y}{x}$ na zbiorze $K := \{(x, y) :\ (x-3)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2\}$; zbadać (badając drugą pochodną) typ jednego ze znalezionych punktów krytycznych.

$f'(x, y) = \frac{1}{x^2}[-y, x]$ jest $\neq 0$ na K, więc w Int K nie ma p.krytycznych. Badanie f na $B = \partial K$: jeśli $\frac{1}{x^2}[-y, x] \stackrel{!}{=} \lambda[2x-6, 2y-2]$, to $\lambda \neq 0$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & \varrho \\ -\varrho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\varrho = \frac{1}{2x^2\lambda}$ skąd $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\varrho^2} \begin{bmatrix} 3-\varrho \\ 1+3\varrho \end{bmatrix}$; wtedy $(x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{(\varrho+3\varrho^2)^2 + (3\varrho-\varrho^2)^2}{(1+\varrho^2)^2} = \frac{10(\varrho^2+\varrho^4)}{(1+\varrho^2)^2} = \frac{10\varrho^2}{1+\varrho^2}$, więc $(x, y) \in B \Leftrightarrow \varrho^2 = \frac{1}{4}$. $\boxed{\text{Dla } \varrho = \frac{1}{2}}$: $(x, y) = (2, 2)$, $\lambda = \frac{1}{2x^2\varrho} = \frac{1}{4}$, $f(x, y) = 1$; $\boxed{\text{dla } \varrho = -\frac{1}{2}}$: $(x, y) = \left(\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, $f(x, y) = -\frac{1}{7}$, $\lambda = -\frac{25}{196}$. Badanie p.krytycznych: Formę kwadratową Q o macierzy $= [f''] - \lambda[g''] = x^{-3} \begin{bmatrix} 2y & -x \\ -x & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ należy ewaluować na wektorze z przestrzeni $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{(x,y)}B = \ker g'(x, y) = \ker[x-3, y-1]$. $\boxed{\text{Dla } \varrho = \frac{1}{2}}$: $= -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{T} = \ker[-1, 1]$, zaś $Q(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]) = -1 < 0$, więc jest to lok. maks. $\boxed{\text{Dla } \varrho = -\frac{1}{2}}$: $= C \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$, gdzie $C = \frac{25}{4 \cdot 7^3} > 0$, $\mathrm{T} = \ker[1, 7]$, zaś $Q(\left[\begin{smallmatrix} 7 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]) = C(12 \cdot 7^2 - 14 \cdot 7 + 14) > 0$, więc jest to lok. min. *Odpowiedź.* $f(2, 2) = 1$ — maksimum, $f\left(\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{7}$ — minimum.

18. Znaleźć minimum i maksimum funkcji $f(x, y, z) := \dfrac{x+y}{z+1}$ na zbiorze $K := \{(x, y, z) : z \geqslant 0, \sqrt{z} + \sqrt[4]{x^2 + y^2} \leqslant 1\}$.

$f' = \left[\frac{1}{z+1}, \frac{1}{z+1}, -\frac{x+y}{(z+1)^2}\right] \neq 0$, więc nie ma p. kryt. w Int K. Na PB:$= \{0 < z < 1, g = 1\}$, gdzie $g := \sqrt{z} + \sqrt[4]{x^2 + y^2}$: $g' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/4}[x, y, (\cdot)^{3/4}\sqrt{z}]$, więc $f' = \lambda g$ daje $x = y$ i $f_z' : f_x' = g_z' : g_x'$, czyli $-\frac{2x}{z+1} = \frac{(.)^{3/4}\sqrt{z}}{x}$, sprzeczność (przeciwne znaki obu stron). Na S:$= \{z = 0, x^2 + y^2 < 1\}$: $f(x, y, 0) = x + y$ też nie ma p. kryt. Na okręgu O:$= \{z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$: $[1, 1] = \lambda[x, y]$, tzn. $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. *Odpowiedź.* $\min_K f = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\sqrt{2}$, $\max_K f = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \sqrt{2}$.

19. Niech będą dane $a, b, c \in \mathbf{R}$, przy czym $2c > \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. Stosując metodę mnożników Lagrange'a znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z) := ax + by + cz$ na zbiorze $B := \big\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\big\}$. Zbadać typ jednego ze znalezionych punktów krytycznych, badając pochodne rzędu 2.

[3] Dla $s \leqslant n$ oznacza to, że $\operatorname{rk}'() = s$, czyli że formy liniowe $g_1'(x), \ldots, g_s'(x)$ są liniowo niezależne dla każdego $x \in$ dziedzina . Założenie regularności jest tu potrzebne tylko do istnienia mnożników; o jego istotności przekonuje np. to, że zastępując $g_i() = c_i$ równoważnym warunkiem $0 = G_i() := \big(g_i() - c_i\big)^2$ dostaniemy $G_i'() = 0$ na M, więc na ogół nie będzie rozkładu $f'() = \sum_i \lambda_i G_i'()$.

Ponieważ $f' = [a,b,c] \neq 0$, więc f nie ma p.kryt. w zbiorze $\operatorname{Int} B$. Nie ma ich też na 'pokrywce' $B_+ := \{x^2+y^2 < z = 1\}$, gdyż $\tilde{f}(x,y) := ax+by+c$ ma wszędzie $\tilde{f}' \neq 0$. Na 'denku' $B_: = \{x^2+y^2 = z < 1\}$ jest jeden p.krytyczny $f\left(-\frac{a}{2c}, -\frac{b}{2c}, \frac{p^2}{4c^2}\right) = -\frac{p^2}{4c}$, gdzie $p := \sqrt{a^2+b^2}$ (założenie $2c > p$ sprawia tu, że $z < 1$). Na 'krawędzi' $K := \{x^2+y^2 = 1 = z\}$ są dwa p.krytyczne $f\left(\frac{\pm a}{p}, \frac{\pm b}{p}, 1\right) = c \pm p$. jest to lok. minimum i maksimum $f|_K$. Skoro $(c-\frac{p}{2})^2 = c^2 - pc + \frac{p^2}{4} > 0$, to mamy $-\frac{p^2}{4c} < c-p < c+p$, więc $\begin{cases} \min f(B) = -\frac{p^2}{4c}, \\ \max f(B) = c+p. \end{cases}$

20. Znaleźć p.kty krytyczne funkcji $f : S \to \mathbf{R}$, jeśli $f(x,y,z) := (x-3y)z$, $S := \{(x,y,z) :\ 3x^2+5y^2+30z^2 = 32\}$. Zbadać drugą różniczkę funkcji f w jednym z punktów krytycznych.

Metoda mnożników Lagrange'a przy $g(x,y,z) := \frac{1}{2}(3x^2+5y^2+30z^2)$ daje $f'() = \lambda g'() \iff [z, -3z, x-3y] = \lambda[3x, 5y, 30z] \iff$ $\begin{bmatrix} 3\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 5\lambda & 3 \\ -1 & 3 & 30\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$; wtedy $0 = \det = 450\lambda^3 - 32\lambda$, czyli $\lambda \in \left\{0, \frac{4}{15}, -\frac{4}{15}\right\}$. $\boxed{\text{Dla } \lambda = 0}$ mamy $= c(3,1,0)$, przy czym $\in S \iff$ $c^2(3\cdot 9 + 5\cdot 1) = 32 \iff c = \pm 1$; $f(\pm 3, \pm 1, 0) = 0$; $:= [f''()] - \lambda[g''()] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ określa formę $Q() = \frac{1}{2}{}^T = (v_1 - 3v_2)v_3$, która na $\mathrm{T}S = \ker g'() = \ker[9,5,0]$ ma postać $Q(v) = Q(5\alpha, -9\alpha, \beta) = 32\alpha\beta$, więc jest nieokreślona, czyli $\pm(3,1,0)$ są punktami siodłowymi.
Z kolei $\boxed{\text{dla } \lambda = \frac{4}{15}}$ dostajemy $= \frac{\pm 1}{\sqrt{30}}(5,-9,4)$, $f() = 128$, zaś $\boxed{\text{dla } \lambda = -\frac{4}{15}}$ $= \frac{\pm 1}{\sqrt{30}}(5,-9,-4)$, $f() = -128$; są to maksimum i minimum, gdyż $= \frac{1}{15}\begin{bmatrix} \mp 12 & 0 & 15 \\ 0 & \mp 20 & -45 \\ 15 & -45 & \mp 120 \end{bmatrix}$, więc ....

21. **Ćwiczenie**. Znaleźć zbiór wartości funkcji $f(\boldsymbol{x}) := \frac{{a_1}^2}{x_1} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{x_n}$ na $S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n :\ x_1 + \ldots + x_n = c,\ x_k > 0\}$
Ćw. 8.L.96 (jest to tzw. *sympleks* $(n-1)$-*wymiarowy*), jeśli dane są dodatnie stałe $c, a_1, \ldots, a_n$.

$f'(x) = \lambda[1,\ldots,1] \iff \forall k : -\frac{a_k^2}{x_k^2} = \lambda$; wtedy $\lambda < 0$, więc $\exists \mu > 0 : \lambda = -\mu^2$. Mamy stąd $\forall k : x_k = \mu a_k$ oraz $\mu(a_1+\ldots+a_n) = c$, więc $\mu = \frac{c}{a_1+\ldots+a_n}$; zatem jest jeden punkt krytyczny $\hat{x} \in S$, mianowicie $\hat{x}_k = \frac{ca_k}{a_1+\ldots+a_n}$, $f(\hat{x}) = \frac{1}{c}(a_1+\ldots+a_n)^2$. W punkcie $\hat{x}$ mamy minimum globalne, gdyż poza zwartym $K := \left\{ \in S : \forall k : x_k \geqslant \frac{a_k^2}{\alpha}\right\}$ (jest on ograniczony, bo $x \in K \Rightarrow \forall k : \frac{a_k^2}{\alpha} \leqslant x_k \leqslant c$) mamy $f(x) \geqslant \alpha$, zaś $\hat{x} \in K$, gdy $\alpha > 0$ jest dostatecznie duże (gdy $\alpha \geqslant \max_k \frac{a_k^2}{\hat{x}_k}$). *Odpowiedź.* $f(S) = [f(\hat{x}), \infty[$.

Uwaga. Wynika stąd, że $x \in S \Rightarrow \sum_j x_j \cdot \sum_k \frac{{a_k}^2}{x_k} = cf(x) \geqslant cf(\hat{x}) = (a_1+\ldots+a_n)^2$; stąd i z dowolności $c > 0$ wynika, że $\sum_j x_j \sum_k \frac{{a_k}^2}{x_k} \geqslant (a_1+\ldots+a_n)^2$ dla dowolnych $x_1,\ldots,x_n > 0$. Tę nierówność można też łatwo dostać z nierówności Schwarza.

22. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(x,y,z) := ax+by+z$ na torusie $S := \{(x,y,z) : (\varrho - R)^2 + z^2 = r^2\}$, gdzie $\varrho := \sqrt{x^2+y^2}$. Zakładamy tu, że $0 < r < R$ oraz $(a,b) \neq (0,0)$.

Niech $g() := \frac{1}{2}\left[(\varrho-R)^2 + z^2 - r^2\right]$, wtedy $f'() = \lambda g'() \iff [a,b,1] = \lambda\left[\left(1-\frac{R}{\varrho}\right)x, \left(1-\frac{R}{\varrho}\right)y, z\right]$; zatem $\lambda = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ oraz $\left\{\begin{matrix} az = (1-\frac{R}{\varrho})x \\ bz = (1-\frac{R}{\varrho})y \end{matrix}\right\}$, tzn. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, przy czym $z = \mu\left(1-\frac{R}{\varrho}\right)$ i $\varrho = c|\mu| = \varepsilon_1 c\mu$, gdzie $\boxed{c := \sqrt{a^2+b^2}}$ i $\boxed{\varepsilon_1 = \operatorname{sgn}\mu = \pm 1}$, a więc $z = \mu\left(1-\frac{R}{\varepsilon_1 c\mu}\right)$, tzn. $\boxed{\mu = \varepsilon_1 \frac{R}{c} + z}$. Wstawmy to do równania $g() = 0$: mamy $\varrho = \varepsilon_1 c\mu = R + \varepsilon_1 cz$, $(\varrho - R)^2 = c^2z^2$, więc dostajemy $r^2 \stackrel{!}{=} c^2z^2 + z^2$, czyli $z = \varepsilon_2 \frac{r}{\sqrt{1+c^2}}$, $\varepsilon_2 = \pm 1$; stąd z kolei $x = \mu a = \left(\varepsilon_1 \frac{R}{c} + \varepsilon_2 \frac{r}{\sqrt{1+c^2}}\right) a$ i $y = \mu b = \left(\varepsilon_1 \frac{R}{c} + \varepsilon_2 \frac{r}{\sqrt{1+c^2}}\right) b$.
Zatem są 4 punkty krytyczne $_{++}$, $_{-+}$, $_{+-}$ i $_{--}$, przy czym $f(_{\varepsilon_1\varepsilon_2}) = \varepsilon_1 Rc + \varepsilon_2 r\sqrt{1+c^2}$.

Badanie drugiej pochodnej: $Q := f''(_{\varepsilon_1\varepsilon_2}) - \lambda g''(_{\varepsilon_1\varepsilon_2})$, przy czym $f''() = 0$ oraz $\operatorname{sgn}\lambda = \operatorname{sgn} z = \varepsilon_2$; zatem $-\frac{1}{\lambda}\left[Q\right] =$ $\begin{bmatrix} 1 - R\frac{y^2}{\varrho^3} & R\frac{xy}{\varrho^3} & 0 \\ R\frac{xy}{\varrho^3} & 1 - R\frac{x^2}{\varrho^3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \delta\frac{b^2}{c^2} & \delta\frac{ab}{c^2} & 0 \\ \delta\frac{ab}{c^2} & 1 - \delta\frac{a^2}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tzn. $-\frac{1}{\lambda}Q() = \|\|^2 - \delta\left(\frac{ah_2 - bh_1}{c}\right)^2$, gdzie $\delta := \frac{R}{\varrho} = \frac{R}{R + \varepsilon_1\varepsilon_2 rc(1+c^2)^{-\frac{1}{2}}}$.

Otóż przestrzeń $\mathrm{T} = \mathrm{T}S = \ker g'() = \ker f'() = \ker[a,b,1]$ ma bazę ortonormalną $_1 = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, $_2 = \frac{1}{c\sqrt{c^2+1}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ -c^2 \end{bmatrix}$, a dla $= u_1{}_1 + u_2{}_2$ mamy $ah_2 - bh_1 = cu_1$, więc $-\frac{1}{\lambda}Q() = u_1^2 + u_2^2 - \delta u_1^2$. Stąd forma $-\frac{1}{\lambda}Q|_{\mathrm{T}}$ jest dodatnia dla $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ (bo wtedy $\delta < 1$), a dla $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ — nieokreślona; zatem $\operatorname{sgn} Q|_{\mathrm{T}} = \begin{cases} (+,+), \text{ gdy } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \\ (-,-), \text{ gdy } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1, \\ (+,-), \quad \text{gdy } \varepsilon_1\varepsilon_2 = -1 \end{cases}$; skąd $\begin{cases} _{++} \text{ jest p. minimum,} \\ _{--} \text{ jest p. maksimum,} \\ _{-+}, _{+-} \text{ są siodłami.} \end{cases}$

23. Znaleźć najmniejszą i największą wartość $f(\boldsymbol{x}) := x_1x_2 + x_3x_4$ na zbiorze $S := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4 : \begin{matrix} \sum_{i=1}^4 {x_i}^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2(x_3+x_4) \end{matrix} \right\}$.

Zbiór S jest zwarty (ograniczony i domknięty w $\mathbf{R}^4$), więc f (ciągła) osiąga swoje kresy; są one najmniejszą i największą z wartości krytycznych. Warunek na ekstr. warunkowe: $\left\{\begin{matrix} f'() = \lambda g'() + \mu h'() \\ 0 = g() = h() \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} [x_2, x_1, x_4, x_3] = \lambda[x_1, x_2, x_3, x_4] + \mu[1, 1, -2, -2] \\ \|\|^2 = 1, \qquad x_1 + x_2 = 2(x_3+x_4) \end{matrix}\right\}$.

Pierwsze równanie oznacza, że $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\mu \\ -2\mu \end{bmatrix}$. Skoro $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$, to mamy trzy przypadki: $\boxed{1}$ $\lambda = 1$; wtedy $\mu = 0$ i $\;= (2a, 2a, a, a)$, gdzie $1 = \|\,\|^2 = 10a^2$; $\boxed{2}$ $\lambda = -1$; wtedy $\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 = \mu \\ x_3 + x_4 = -2\mu \\ \mu = 2(-2\mu) \end{matrix}\right\}$, czyli $\mu = 0$, więc $\;= \frac{1}{\sqrt{2}}(a, -a, b, -b)$, gdzie $1 = \|\,\|^2 = a^2 + b^2$. $\boxed{3}$ $\lambda^2 \neq 1$; wtedy $\left\{\begin{matrix} x_1 = x_2 = \frac{\mu}{1-\lambda} \\ x_3 = x_4 = \frac{-2\mu}{1-\lambda} \end{matrix}\right\}$ i $\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \\ \|\,\|^2 = 1 \end{matrix}\right\}$, sprzeczność.

Odpowiedź. Maksimum: $f(\,) = \frac{1}{2}$ dla $\;= \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(2, 2, 1, 1)$; minimum: $f(\,) = -\frac{1}{2}$ dla $\;= \frac{1}{\sqrt{2}}(a, -a, b, -b)$, gdzie $a^2 + b^2 = 1$.

24. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$ na sferze $S := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 1\}$, jeśli dane są macierz symetryczna $\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^n{}_n$ oraz wektor $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$.
Dla uproszczenia zakładamy, że $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ i że wszystkie rzuty wektora $\boldsymbol{a}$ na przestrzenie własne $\boldsymbol{A}$ są niezerowe.

$\frac{1}{2}f'(\,) = (x)^T$, $\frac{1}{2}g'(\,) = (\;-\;)^T$, co daje równanie $\;= \lambda(\;-\;)$, tzn. ${}_\lambda = -\lambda$. Przy $\lambda \notin \mathrm{Sp}$ mamy stąd $\boxed{\;= -\lambda_\lambda{}^{-1}}$. Użyjmy ortonormalnej bazy ${}_1, \ldots, {}_n$ w. własnych : ${}_k = \lambda_k{}_k$, $\;= \sum_k a_k{}_k$; wtedy $\;-\;= \sum_k \left(\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_k} - 1\right) a_k{}_k = \sum_k \frac{\lambda_k a_k}{\lambda - \lambda_k}{}_k$, więc $\;\in S \iff \|(1 + \lambda_\lambda{}^{-1})\| = 1 \iff \varphi(\lambda) = 1$, gdzie $\varphi(\lambda) := \sum_k \left(\frac{\lambda_k a_k}{\lambda - \lambda_k}\right)^2$. Ponieważ $\big(\varphi(\lambda) - 1\big) \prod_{\mu \in Sp} (\lambda - \mu)^2$ jest wielomianem stopnia $2m$, $m := \#\,\mathrm{Sp}$, więc $\#\{\lambda \in \mathbf{R} : \varphi(\lambda) = 1\} \leqslant 2m$. Przy tym $f(\,) = \sum_k \lambda_k x_k{}^2 = \sum_k \lambda_k \left(\lambda \frac{a_k}{\lambda - \lambda_k}\right)^2$, czyli $\boxed{f(x) = \lambda^2 \sum_k \lambda_k \left(\frac{a_k}{\lambda - \lambda_k}\right)^2}$. Druga różniczka $Q := \frac{1}{2}[f''(\,) - \lambda g''(\,)]$ nie zależy od : $Q(\,,\,) = {}^T{}_\lambda = \sum_k (\lambda_k - \lambda) h_k{}^2$; zarazem $\mathrm{T}S = (\;-\;)^\perp = \left\{\; : \sum_k \frac{\lambda_k a_k}{\lambda - \lambda_k} h_k = 0\right\}$ jest Q-ortogonalnym dopełnieniem $\langle\rangle$, gdzie $\;= \sum_k \frac{\lambda_k a_k}{(\lambda_k - \lambda)^2}{}_k$, $Q(\,,\,) = \sum_k \frac{(\lambda_k a_k)^2}{(\lambda_k - \lambda)^3} = \frac{1}{2}\varphi'(\lambda)$; stąd, jak wiemy, $\operatorname{sgn}\big(Q \text{ na } \mathrm{T}S\big) = \begin{cases} (p-1, q), & \varphi'(\lambda) > 0, \\ (p-1, q-1), & \varphi'(\lambda) = 0, \\ (p, q-1), & \varphi'(\lambda) < 0, \end{cases}$ gdzie $(p, q) = \operatorname{sgn} Q$, $\begin{cases} p = \#\{k : \lambda_k > \lambda\}, \\ q = \#\{k : \lambda_k < \lambda\}. \end{cases}$

$\boxed{\text{Dla } \lambda \in \mathrm{Sp}}$ Zobaczymy, że ten przypadek daje sprzeczność: Warunek na ekstr. warunkowe $\;= \lambda(\;-\;)$, czyli $\lambda_k x_k = \lambda(x_k - a_k)$ (w bazie o.n.w.wł.) oznacza teraz, że $\lambda a_i = 0$ (x_i dowolne) dla $\lambda_i = \lambda$, natomiast $x_k = \frac{\lambda a_k}{\lambda - \lambda_k}$ dla $\lambda_k \neq \lambda$. Lecz $\det \neq 0$ daje $\lambda \neq 0$, więc mamy $\forall i : \lambda_i = \lambda \Rightarrow a_i = 0$, czyli wektor ma zerowy rzut na przestrzeń własną $V(\lambda)$, wbrew założeniu.

Uwaga. Równanie $\varphi(\lambda) = 1$ zawsze ma $\geqslant 2$ pierwiastki, mianowicie jeden w przedziale $]-\infty, \min_k \lambda_k[$, dający $\min f(S)$, i jeden w $]\max_k \lambda_k, \infty[$, dający $\max f(S)$; wynika to stąd, że $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \varphi(\lambda) = 0$ oraz $\lim_{\lambda \to \lambda_k} \varphi(\lambda) = +\infty$. Z kolei jeśli nie ma wielokr. wartości własnych, tzn. $m = \#\,\mathrm{Sp} = n$, to $\exists \varepsilon > 0 : (\forall k : 0 < |a_k| < \varepsilon) \Rightarrow \varphi(\lambda) = 1$ ma dokładnie $2n$ pierwiastków; są one krotności 1, czyli $\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \varphi'(\lambda) \neq 0$. Istotnie, mając $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ określmy ε warunkiem $\varepsilon^2 \max_{1 \leqslant j < n} \sum_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_j^* - \lambda_k}\right)^2 = 1$, gdzie $\lambda_j^* := \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2}$; wtedy będzie $\varphi(\lambda_j^*) < 1$, więc $\varphi(\lambda) = 1$ ma pierwiastek w każdym z przedziałów $\big]-\infty, \lambda_1\big[$, $\big]\lambda_j, \lambda_j^*\big[$, $\big]\lambda_j^*, \lambda_{j+1}\big[$ i $\big]\lambda_n, \infty\big[$.

Zadania z Analizy Matematycznej

Seria 2. Listopad 1998

1. Sprawdzić, że odwzorowanie $\Phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $\Phi(s,t) := (s + t\sin s, \log|\cos s| + t\cos s)$, jest odwracalne na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$. Wykazać, że współrzędne S, T odwzorowania odwrotnego $\Phi^{-1}(x,y) = (S(x,y), T(x,y))$ spełniają równania: $|\nabla T|^2 := (T'_x)^2 + (T'_y)^2 = 1$, $\langle \nabla S | \nabla T \rangle := S'_x T'_x + S'_y T'_y = 0$, $|\nabla S| = (T + \frac{1}{\cos S})^{-1}$.

1. Oznaczając $\delta := t + \frac{1}{\cos s}$ mamy: $\Phi'(s,t) = \begin{bmatrix} \delta\cos s & \sin s \\ -\delta \sin s & \cos s \end{bmatrix}$, więc $\det \Phi'(s,t) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \delta$, co w $(s,t) = (0,0)$ jest równe 1, skąd odwracalność; z kolei $(\Phi^{-1})'(x,y) = (\Phi'(s,t))^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \delta \sin s & \delta \cos s \end{bmatrix}$, skąd teza.

2. Jaką powierzchnię w $\mathbf{R}^3$ opisuje parametryzacja $x = \frac{u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$, $y = \frac{2uv}{1+u^2+v^2}$, $z = \frac{1}{1+u^2+v^2}$? Sprawdzić jej regularność.

2. *Odpowiedź.* Część stożka $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, opisana nierównościami $0 < z < 1$. Istotnie, $|x+iy| = \frac{|(u+iv)^2|}{1+u^2+v^2} = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 1 - z$.

3. Dowieść, że dla $p > 3$ zbiór $C_p := \{(x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3 : xy + yz + zx = p, xyz = 1\}$ jest gładką, zwartą i spójną krzywą w $\mathbf{R}^3$. Dla $p = 5$ wyznaczyć ekstremalne wartości x, y i z na C_p.

3. Skoro $\nabla f_1 \times \nabla f_2 = [x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)]$, to dla $\mathbf{x} = (x,y,z) \in {\mathbf{R}_+}^3$ rząd $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$ jest mniejszy od 2 $\iff$ $x = y = z$, a ten warunek dla $\mathbf{x} \in C_p$ nie jest spełniony; to dowodzi, że C_p jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.

4. Określmy $\phi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\mathrm{U} := \{u \in \mathbf{C} : |u| = 1\}$, wzorem $\phi(u,t) := (tu, \mathrm{Im}(u^2)) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$. Sprawdzić, że: 1^0 $S := \phi(\mathrm{U} \times \mathbf{R}) = \{(x,y,z) : (x^2+y^2 > 0,\ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x = y = 0, |z| \leqslant 1)\}$; 2^0 ϕ jest lokalnym dyfeomorfizmem na $\mathrm{U} \times \mathbf{R}$ pomniejszonym o 4 punkty nieregularne $(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}, 0)$, których obrazami są 2 punkty $(0,0,\pm 1) \in S$; 3^0 $\phi(-u,-t) = \phi(u,t)$, więc ϕ określa odwzorowanie ϕ_0 *wstęgi Möbiusa* $M := (\mathrm{U} \times \mathbf{R})/_{\pm}$ w S (symetrycznie położone punkty "równika" wstęgi są sklejane przez odwzorowanie ϕ_0).

4. 2^0 Niech $\tilde\phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $\tilde\phi(s,t) := \phi(e^{is}, t) = (t\cos s, t\sin s, \sin 2s)$ (złożenie ϕ z lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathrm{U} \times \mathbf{R}$, $(s,t) \mapsto (e^{is}, t)$); macierz $\tilde\phi'(s,t)$ ma następujące minory stopnia 2.: t, $2\cos s \cos 2s$, $2 \sin s \cos 2s$; są one $= 0$ (tzn. $\tilde\phi'$ ma < 2 rząd) $\iff$ $(t = 0, \cos 2s = 0)$ $\iff$ $(t = 0, e^{is} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}})$.

5. Utożsamijmy $\mathbf{R}^4$ z $\mathbf{C}^2$, zapisując punkt $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbf{R}^4$ w postaci (u,v), gdzie $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$. Oznaczmy $S := \{(u,v) : v \neq 0,\ u = \frac{v^2}{|v|^2}\}$. Dowieść, że: 1^0 S jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^4$, homeomorficzną z powierzchnią walca; 2^0 $\overline{S}$ (domknięcie S w $\mathbf{R}^4$) jest gładką powierzchnią, homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa.

5. Ad 1^0. S jest wykresem gładkiego odworowania $\mathbf{C}^* \ni v \mapsto \frac{v^2}{|v|^2} \in \mathbf{C}$, więc jest gładka. Odwzorowanie $\phi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to S$, $\mathrm{U} := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, dane wzorem $\phi(z,t) := (z^2, e^t z)$, jest oczywiście ciągłą bijekcją (parametryzacja S); odwzorowanie odwrotne $\phi^{-1}(u,v) = (\frac{v}{|v|}, \log|v|)$ także jest ciągłe, więc ϕ jest homeomorfizmem walca $\mathrm{U} \times \mathbf{R}$ na S. Ad 2^0 $\overline{S} = S \cup \{(u,v) : |u| = 1, v = 0\}$ (łatwe sprawdzenie), więc $\overline{S} = \{(u,v) : |u| = 1,\ v \in \mathbf{R}\sqrt{u}\}$. Warunek $v \in \mathbf{R}\sqrt{u}$ jest równoważny $\mathrm{Im}(\sqrt{u}\,\overline{v}) = 0$; łatwo tez sprawdzić, że dla $u \in \mathrm{U}$ mamy: $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2+2u_1}}[(1+u_1) + iu_2]$ dla $u \neq -1$, $\sqrt{u} = \pm\frac{1}{\sqrt{2-2u_1}}[u_2 + i(1-u_1)]$ dla $u \neq 1$. Rozłóżmy $\overline{S}$ na sumę dwóch otwartych w $\overline{S}$ podzbiorów: $\overline{S} = S_1 \cup S_2$, określonych warunkami $u \neq -1$ (dla S_1) i $u \neq 1$ (dla S_2); mamy wtedy: $S_1 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_1 = 0\}$, $S_2 = \{(u,v) : g_0 = 0, g_2 = 0\}$, gdzie $g_0 := |u|^2 - 1 = u_1^2 + u_2^2 - 1$, a $g_1 := u_2 v_1 - (1+u_1)v_2$ i $g_2 := (1-u_1)v_1 - u_2 v_2$ (części urojone liczb $[(1+u_1)+iu_2]\overline{v}$ i $[u_2 + i(1-u_1)]\overline{v}$ odpowiednio). Zauważmy teraz, że na S_1 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_1,v_2)} = -2u_1(1+u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_1)}{\partial(u_2,v_2)} = -2u_2(1+u_1)$, a na S_2 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_1,v_1)} = 2u_1(1-u_1)$ i $\frac{\partial(g_0,g_2)}{\partial(u_2,v_1)} = 2u_2(1-u_1)$; zatem $\nabla g_0, \nabla g_1$ są lin. niezal. na S_1, a $\nabla g_0, \nabla g_2$ są lin. niezal. na S_2, a więc obie częsci S_1, S_2 powierzchni $\overline{S}$ są gładkie. Weźmy odworowanie $\psi : \mathrm{U} \times \mathbf{R} \to \overline{S}$, $\psi(z,t) := (z^2, tz)$; jasne, że ψ jest ciągłą surjekcją, przy czym $\psi(z,t) = \psi(z',t')$ $\iff$ $(z',t') = \pm(z,t)$, a więc mamy ciągłą bijekcję $\tilde\psi : M := (\mathrm{U} \times \mathbf{R})/_{\pm} \to \overline{S}$; odwzorowanie odwrotne $\tilde\psi^{-1}(u,v) = \sqrt{u}(1, \frac{v}{u})$ też jest ciągłe, więc ψ jest homeomorfizmem wstęgi Möbiusa M na $\overline{S}$.

6. Niech $H := \{(x,y,z) : x\sin z - y\cos z = 0\}$ (tzw. *helikoida*). Dowieść, że: 1^0 H jest gładką powierzchnią w $\mathbf{R}^3$; 2^0 H jest homeomorficzna z $\mathbf{R}^2$. 3^0 Wyznaczyć przecięcie H z płaszczyzną $\Sigma(\mathrm{p}_0)$ styczną do H w punkcie $\mathrm{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$; 4^0 dowieść, że $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ zawiera dwie krzywe, przecinające się prostopadle w punkcie p_0.

6. 1^0 $H = h^{-1}(0)$, gdzie $h(x,y,z) := x\sin z - y\cos z$; skoro $\nabla h = [\sin z, -\cos z, x\cos z + y\sin z] \neq 0$, to H jest powierzchnią gładką. 2^0 Niech $\phi(t,u) := (t\cos u, t\sin u, u)$; wtedy $\phi(\mathbf{R}^2) = H$: $h\circ\phi(t,u) = 0$ oraz $x\sin z - y\cos z = 0 \Rightarrow \phi(x\cos z + y\sin z, z) = (x,y,z)$; ϕ jest injektywne: $\phi(t,u) = (x,y,z) \Rightarrow u = z$ & $t = x\cos z + y\sin z$; zarówno ϕ, jak i $\phi^{-1} : H \to \mathbf{R}^2$, są ciągłe: $\phi^{-1}(x,y,z) = (x\cos z + y\sin z, z)$; stąd teza. 3^0 Oznaczmy dla wygody $c := \cos z_0$, $s := \sin z_0$, $d := cx_0 + sy_0$; wtedy $|d|$ jest odległością p_0 od osi $0z$: $x_0^2 + y_0^2 = (cx_0 + sy_0)^2 + (sx_0 - cy_0)^2 = d^2$. $T_{\mathrm{p}_0}(H) = \ker\nabla h(\mathrm{p}_0) = \ker[s, -c, d]$ jest rozpięta przez $[c,s,0]^T$ i $[-sd, cd, 1]^T$, więc $\Sigma(\mathrm{p}_0) = \{(x_0 + ct - sdu, y_0 + st + cdu, z_0 + u) : (t,u) \in \mathbf{R}^2\}$; stąd $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisana jest równaniem $0 = x\sin z - y\cos z = (x_0 + ct - sdu)(s\cos u + c\sin u) - (y_0 + st + cdu)(c\cos u - s\sin u) = (t+d)\sin u - du\cos u$. 4^0 *Przypadek* $d \neq 0$: $(t+d)\sin u - du\cos u = 0$ przy $\sin u \neq 0$ oznacza $t = d(u\cot u - 1)$, a przy $\sin u = 0$ oznacza $u = 0$; wobec tego przez p_0 przechodzą dwie krzywe z $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$: $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + d[c(u\cot u - 1) - su, s(u\cot u - 1) + cu, \frac{1}{d}u]$ oraz $p_2(t) = \mathrm{p}_0 + t[c,s,0]$ (prosta pozioma), przy czym $p_1'(0) = [-sd, cd, 1]$ jest prostopadły do $p_2'(0) = [c,s,0]$. *Przypadek* $d = 0$: Teraz $H \cap \Sigma(\mathrm{p}_0)$ opisane jest warunkiem $t\sin u = 0$; $t = 0$ daje prostą pionową $p_1(u) = \mathrm{p}_0 + u[0,0,1]$, zaś $u = n\pi$ daje proste poziome $p_{2,n}(t) = \mathrm{p}_0 + [ct, st, n\pi]$, przecinające prostopadle $p_1(u)$.

7. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbf{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem: (a) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2$; (b) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + 1$; (c) $0 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)z^3 + xyz^2 + z + 1$.

7. Dla (a),(b),(c) mamy: $F = 0 \Rightarrow z \neq 0$, więc $[0 = F_x' = (xz+y)z^2, 0 = F_y' = (yz+x)z^2] \iff [(z-1)(x-y) = 0, (z+1)(x+y) = 0] \iff [z = 1, y = -x] \vee [z = -1, y = x] \vee [x = y = 0]$. (a) Jeden p. kryt. $z(0,0) = 2$, $z'' = -\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (lok. maksimum). (b) Nie ma p. kryt. (c) Niesk. wiele p. kryt.: $z(x,x) = -1$, $z'' = \frac{1}{x^2+1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0$ — osobliwa. Pokażę, że w (x,x) funkcja z ma lok. minima (przykład $z := x^2 + y^3$ pokazuje, że $z'(p) = 0, z''(p) \geqslant 0$ tego nie gwarantują). Mamy tożsamość $2F(x,y,u-1) = (x^2+y^2)u^3 - (3x^2 - 2xy + 3y^2)u^2 + (3x^2 - 4xy + 3y^2 + 2)u - (x-y)^2$; wszystkie współczynnki (.) są tu > 0, a więc $2F(x,y,u-1) > 0$ dla $u < 0$, tzn. $F(x,y,z) = 0 \Rightarrow z \geqslant -1$, QED.

8. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbf{R}$, zdefiniowanej niejawnie równaniem $0 = F(x,y,z) := 2(x^3+y^3)z^3 + 3(x^2-y^2)z^2 + az + b$, gdzie $a > 0$ oraz $b \in \mathbf{R} \setminus \{-1,0,1\}$ są danymi parametrami.

8. $0 = F_x' = 6xz^2(xz+1), 0 = F_y' = 6yz^2(yz-1)$ daje 4 przypadki: (1) $x = y = 0$, wtedy $z = -\frac{b}{a}$; (2) $xz = -1, y = 0$, wtedy $z = -\frac{1+b}{a}$; (3) $x = 0, yz = 1$, wtedy $z = \frac{1-b}{a}$; (4) $xz = -1, yz = 1$, wtedy $0 = F = az + b$, czyli $z = -\frac{b}{a}$. We wszystkich p. kryt.: $\boxed{z(0,0) = -\frac{b}{a},\ z(\frac{a}{1+b},0) = -\frac{1+b}{a},\ z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a},\ z(\frac{a}{b},-\frac{a}{b}) = -\frac{b}{a}}$ jest $F_z' = a$, a $F_{xx}'' = 6z^2(2xz+1)$, $F_{yy}'' = 6z^2(2yz-1)$, $F_{xy}'' = 0$, więc $z''(p) = -\frac{6z^2}{a}M$, gdzie $M := \begin{bmatrix} 2xz+1 & 0 \\ 0 & 2yz-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w kolejnych p. kryt. Zatem $z(\frac{a}{1+b},0) = -\frac{1+b}{a}$ jest lok. minimum, $z(0,\frac{a}{1-b}) = \frac{1-b}{a}$ — lok. maksimum, a pozostałe p. kryt. są punktami siodłowymi.

9. Funkcja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest 2-krotnie różniczkowalna oraz $\forall x \in \mathbf{R} : f(x,0) = 0$, $f_y'(x,0) = 0$, $f_{yy}''(x,0) > 0$ (wynika z tego, że $f''(x,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_{yy}'' \end{bmatrix} \geqslant 0$). Dowieść, że każdy punkt $(x,0)$ jest punktem lokalnego minimum funkcji f.

9. Wprost z założeń wynika, że $\forall x : \exists\epsilon(x) > 0 : \forall y \in]-\epsilon(x), \epsilon(x)[: f(x,y) > 0$; jednakże taki warunek nie gwarantuje tezy zadania (zbiór $\{(x,y) : |y| < \epsilon(x)\}$ dla dodatniej, lecz nieciągłej funkcji $\epsilon(.)$ może mieć puste wnętrze!). Postąpimy inaczej: wystarczy dowieść, że f ma postać $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jest *ciągła* i $h(x,0) > 0$. Otóż $f(x,0) = 0$ daje $f(x,y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x,ty)dt = y\int_0^1 f_y'(x,ty)dt$; tak samo z $f'(x,0) = 0$ wynika $f'(x,ty) = ty\int_0^1 f_{yy}''(x,sty)ds$, mamy więc $f(x,y) = y^2 h(x,y)$, gdzie funkcja $h(x,y) := \int_0^1\int_0^1 t f_{yy}''(x,sty)ds\,dt$ jest ciągła oraz $h(x,0) = f_{yy}''(x,0)\int_0^1\int_0^1 t ds\,dt = \frac{1}{2}f_{yy}''(x,0) > 0$, QED.

10. Dowieść, że dla dowolnych funkcji $a,b,c \in C^k(\mathbf{R})$, $k \geqslant 1$, zbiór $S := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, gdzie $F(x,y,z) := a(z)x^2 + 2b(z)xy + c(z)y^2 - 1$, jest (regularną) powierzchnią klasy C^k w $\mathbf{R}^3$.

10. Tożsamość $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y,z) = 2F(x,y,z) + 2$ sprawia, że $(F_x', F_y') \neq 0$ w każdym punkcie S.

1. Sprawdzić, że jeśli $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}$ jest otoczeniem punktu 0, a $f : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$ — funkcją różniczkowalną, to równanie $z = f\left(xe^z - ye^{-z}\right)$ określa w sposób uwikłany funkcję $z = z(x,y)$ na pewnym otoczeniu punktu $(0,0) \in \mathbf{R}^2$, spełniającą równanie $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x} + e^{2z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0}$.

Niech $F(x,y,z) := -z + f(xe^z - ye^{-y})$, wtedy $F_z'(x,y,z) = -1 + f'(\ldots)[xe^z + ye^{-z}]$, więc $\left\{\begin{array}{l} F(0,0,z_0) = 0 \\ F_z'(0,0,z_0) = -1 \neq 0 \end{array}\right.$ dla $z_0 = f(0)$; zatem $F(x,y,z) = 0$ da się rozwikłać wzgl. z na otoczeniu $(x,y) = (0,0)$. Różniczkując po x i y tożsamość $\boxed{z = f(xe^z - ye^{-z})}$, w której z oznacza $z(x,y)$, dostajemy $\left\{\begin{array}{c} z_x' = f'[e^z + z_x'(xe^z + ye^{-z})] \\ z_y' = f'[-e^{-z} + z_y'(xe^z + ye^{-z})] \end{array}\right\}$, tzn. $\left\{\begin{array}{c} \alpha z_x' = e^z f' \\ \alpha z_y' = -e^{-z} f' \end{array}\right\}$, gdzie $f' := f'(xe^z - ye^{-y})$, zaś $\alpha = \alpha(x,y) := 1 - (xe^z + ye^{-z})f'$. Skoro $\alpha(0,0) = 1$, to $\alpha \neq 0$ na pewnym otoczeniu $(0,0)$, więc $\left\{\begin{array}{c} z_x' = \frac{f'}{\alpha}e^z \\ -z_y' = \frac{f'}{\alpha}e^{-z} \end{array}\right\}$, QED.

2. **O równaniu** $\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

   Niech $D \subset \mathbf{R}^2$ będzie obszarem wypukłym, a $f \in C^1(D)$.

3. **Fakt**. Funkcja $f \in C^1(D)$ spełnia w D równanie $\boxed{f_x' + f \cdot f_y' = 0}$(1) $\iff$ $\forall\ (x_0,y_0) \in D : f$ przyjmuje stałą wartość $f(x_0,y_0)$ na przedziale (odcinku) $L(x_0,y_0) := \big\{(x,y) \in D \colon y - y_0 = f(x_0,y_0)(x - x_0)\big\} \subset D$.

Ustalając chwilowo $(x_0,y_0) \in D$ weźmy $C_0 := f(x_0,y_0)$ i oznaczmy krótko $(*) = (x, y_0 + C_0(x - x_0)) \in L(x_0,y_0)$. Dla $\varphi(x) := f(*) - C_0$ mamy wtedy $\varphi'(x) = f_x'(*) + f_y'(*)C_0 = f_x'(*) + f(*)f_y'(*) - [f(*) - C_0]f_y'(*)$. W szczególności $\varphi'(x_0) = f_x'(x_0,y_0) + f(x_0,y_0)f_y'(x_0,y_0)$, co dowodzi $\boxed{\Leftarrow}$ dzięki dowolności $(x_0,y_0) \in D$. By dowieść $\boxed{\Rightarrow}$, tzn. że $\varphi(x) = 0$ na (spójnej!) dziedzinie φ, zauważmy, że $\varphi(x_0) = 0$, zaś (1) daje $\varphi'(x) = -\varphi(x)f_y'(*)$, więc $\frac{d}{dx}\left[\varphi(x)e^{g(x)}\right] = 0$, gdzie $g(x)$ jest funkcją pierwotną dla $f_y'(*)$, tzn. $g'(x) = f_y'(*)$.

4. **Wniosek 1** [*rozwiązanie i geometryczna charakteryzacja równania* (1)]. Niech $f \in C^1(D)$ spełnia równanie (1); wtedy dwa przedziały $L(x_0,y_0)$, $L(x_1,y_1) \subset D$, mające wspólny punkt (x,y), mają też wspólny kierunek, określony wartością $f(x,y)$, więc są równe. Zatem $\mathcal{F} := \big\{L(x,y) \colon (x,y) \in D\big\}$ jest *podziałem zbioru* D, tzn. rodziną rozłącznych podzbiorów, których sumą jest D; mówi się czasem w tym znaczeniu, że przedziały rodziny $\mathcal{F}$ *pokrywają regularnie obszar* D. Przy tym znając rodzinę $\mathcal{F}$ można w pełni odtworzyć funkcję f, mianowicie
$$f(x,y) = \big(\text{współczynnik kierunkowy tego przedziału } L \in \mathcal{F}, \text{ który zawiera punkt } (x,y)\big). \tag{2}$$
Powyższy wywód możemy odwrócić: Jeśli mamy daną rodzinę $\mathcal{F}$ otwartych (i niepionowych) przedziałów, pokrywających regularnie jakiś obszar wypukły $D \subset \mathbf{R}^2$, to wzór (2) określa pewną funkcję $f : D \to \mathbf{R}$. Sprawdzimy, że jeśli rodzina $\mathcal{F}$ jest 'dostatecznie gładka' w tym sensie, że f jest różniczkowalna, to spełnione jest równanie (1):

Zauważmy w tym celu, że przedział $L \in \mathcal{F}$ zawierający dowolnie zadany punkt $(x_0,y_0) \in D$ pokrywa się z przedziałem $L(x_0,y_0)$ (określonym powyżej funkcją f), gdyż oba przedziały mają wspólny punkt i kierunek, a zarazem są maksymalne w D. Stąd dostajemy równanie (1), gdyż — wprost z definicji (2) — funkcja f jest stała na każdym przedziale $L \in \mathcal{F}$.

5. **Aspekt rachunkowy**: Jeśli rodzina prostych $\boxed{y = a(t)x + b(t)}$(2) pokrywa regularnie obszar D, tzn. $(x,t) \mapsto (x, a(t){+}b(t))$ jest dyfeomorfizmem pewnego obszaru $\tilde{D}$ na D, to wzór $\boxed{f(x, a(t)x + b(t)) = a(t)}$(3) określa poprawnie pewną funkcję funkcję $f : D \to \mathbf{R}$; spełnia ona równanie (1), co zresztą łatwo sprawdzić bezpośrednio, różniczkując (3) względem x; mniej trywialna jest — także zawarta we Wniosku 1 — konstatacja, że można tak otrzymać każde rozwiązanie równania (1).

6. **Przykłady**. Dla rodziny $y = (t + \frac{q}{p})x + pt$, gdzie $p, q \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$, pokrywającej obszar $D = \{(x,y) \colon x + p \neq 0\}$, dostajemy $t = \frac{py - qx}{p(x+p)}$, więc $f(x,y) = a(t) = t + \frac{q}{p} = \frac{y+q}{x+p}$. Przypadek $p = 0$, tzn. $f(x,y) = \frac{y+q}{x}$, też można uzyskać wychodząc z rodziny $y = tx - q$ i $D = \{x \neq 0\}$.

   Dla rodziny $y = tx + \frac{q}{t-p}$, gdzie $p, q \in \mathbf{R}$, dostajemy na t równanie kwadratowe $xt^2 - (px+q)t + (py+q) = 0$. Zatem $\Delta = (px-y)^2 - 4qx$ oraz $f(x,y) = t = \frac{1}{2x}(px + q \pm \sqrt{\Delta})$ w obszarze $D = \{\Delta > 0\} =$ (dopełnienie 'parabolitu' $\Delta \leqslant 0$).Dla rodziny $t^2 - 2tx + y = 0$, czyli $y = 2t(x-t) + t^2 =$ (styczna w (t,t^2) do paraboli $y = x^2$), dostajemy $f_\pm(x,y) = 2t = 2(x \pm \sqrt{x^2 - y})$; obszarem pokrywanym przez te proste, a więc i dziedziną f, jest $D = \{(x,y) \colon y < x^2\}$.

7. **Wniosek 2**. Na $D = \mathbf{R}^2$ równanie $\boxed{f_x' + f \cdot f_y' = 0}$(1) ma tylko stałe rozwiązania: $\begin{pmatrix} f \in C^1(\mathbf{R}^2) \\ \text{spełnia (1)} \end{pmatrix} \Rightarrow\ f = \text{const}.$

Dla $f(x_0,y_0) \neq f(x_1,y_1)$ proste $L(x_0,y_0)$, $L(x_1,y_1)$ są nierównoległe, więc mają wspólny punkt, zaś równanie (1) powoduje, że te dwie proste są poziomicami f dla dwóch różnych wartości, sprzeczność!

Do charakteryzacji równania (1) można również użyć pojęcia krzywych całkowych równania różniczkowego:

8. **Fakt**. Następujące warunki są równoważne: (a) f spełnia równanie $\boxed{f_x' + f \cdot f_y' = 0}$; (b) f jest stała na każdej krzywej całkowej równania $y' = f(x,y)$; (c) wszystkie krzywe całkowe równania $y' = f(x,y)$ są prostoliniowe.

Niech $y = y(x)$ spełnia $y' = f(x,y)$, wtedy $\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = f_x'(*) + f_y'(*)y'(x) = f_x'(*) + f(*)f_y'(*)$, gdzie $(*) = (x,y(x))$, co dowodzi, że (a) $\iff$ (b). Z kolei (c) $\iff$ wszystkie krzywe $y(x)$ są prostoliniowe $\iff$ $\big[y'(x)$, równe $f(x,y(x))$, jest stałe$\big]$ $\iff$ (b).

9. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $z : \mathcal{O} \to \mathbf{R}$, określonej w obszarze $\mathcal{O} := \big\{(x,y) :\ x,y > 0\big\}$ niejawnie równaniem

$$F(x,y,z) := (x+z)(y+z)\big(1+\frac{z}{xy}\big) = 8.$$

Jeśli $F=8$, to $x+z, y+z \neq 0$, więc $\left\{\begin{array}{l} 0 = F'_x = (y+z)\big(1-\frac{z^2}{x^2y}\big) \\ 0 = F'_y = (x+z)\big(1-\frac{z^2}{xy^2}\big) \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1 = \frac{z^2}{x^2y} = \frac{z^2}{xy^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=y=t^2,\ z=t^3 \\ 0 = F = (t+t^2)^3 - 8 \end{array}\right\}$; zatem są dwa punkty krytyczne odpowiadające $t=1$ i $t=-2$: $\boxed{z(1,1)=1,\ \ z(4,4)=-8}$. Ponieważ $F'_z = (x+y+2z)\big(1+\frac{z}{xy}\big) + \frac{1}{xy}(x+z)(y+z) = \begin{cases} 12, & = (1,1,1) \\ -3, & = (4,4,-8) \end{cases}$ zaś $F''_{xx} = (y+z)\frac{2z^2}{x^3y} = \begin{cases} 4, \\ -2, \end{cases}$ oraz $F''_{xy} = \frac{x^2y^2+z^3}{x^2y^2} = \left\{\begin{array}{l} 2, \\ -1, \end{array}\right\}$ to $z''(1,1) = \frac{-1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} < 0,$ $z''(4,4) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} < 0,$ więc są to lokalne maksima.

10. Znaleźć i zbadać (określając typ) punkty krytyczne funkcji $z = z(x,y)$ określonej w sposób uwikłany równaniem

$$0 = F(x,y,z) := 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz + 6xy - 4.$$

$\left\{\begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2}F'_x = 2x+3y+z, \\ 0 = \frac{1}{2}F'_y = 3x+5y+2z \end{array}\right. \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, zaś $F(t,-t,t) = 4t^2 - 4$, więc są dwa punkty krytyczne funkcji $z(\cdot,\cdot)$: $z(1,-1) = 1$ oraz $z(-1,1) = -1$. Drugie pochodne: $z'' = -\frac{1}{F'_z}\begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2x+4y+10z}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$, więc $z''(1,-1) = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} < 0$ (maksimum) oraz $z''(-1,1) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} > 0$ (minimum).

11. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $(x,y) \mapsto z(x,y)$ opisanej niejawnie równaniem $z^3 + z + \frac{14xz}{x^2+1} + (2x-y)^2 + 9 = 0$; zbadać jeden z punktów krytycznych, znajdując $\big[z''(x,y)\big] = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{l} 0 = F'_x = 14z\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} + 4(2x-y) \\ 0 = F'_y = -2(2x-y) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ z = 0 \text{ lub } x^2 = 1 \end{array}\right\}$, przy czym przypadek $z=0$ odpada, bo daje $F = 9 \neq 0$. Zatem są 2 p. krytyczne: (a) $(x,y) = (1,2)$, $0 = F = z^3 + 8z + 9 = (z+1)(z^2 - z + 9)$, czyli $z = z(1,2) = -1$; (b) $(x,y) = (-1,-2)$, $0 = F = z^3 - 6z + 9 = (z+3)(z^2 - 3z + 3)$, czyli $z = z(-1,-2) = -3$. Badanie $z''()$: w p. krytycznym $\big[z''()\big] = -\frac{1}{F'_z}\begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{bmatrix}$, przy czym $F'_z = 3z^2 + 1 + \frac{14x}{x^2+1} = \begin{cases} 11 \\ 21 \end{cases}$, $F''_{xx} = 28z\frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} + 8 = \big\|^{x^2=1}\big\| = -7xz + 8 = \begin{cases} 15 \\ -13 \end{cases}$, $F''_{xy} = -4$, $F''_{yy} = 2$. Zatem

Odpowiedź. $\big[z''(1,2)\big] = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} < 0$ (maksimum lokalne), $\big[z''(-1,-2)\big] = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ nieokreślona (siodło).

12. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $z = z(x,y)$, określonej niejawnie równaniem $z^3 + z + \dfrac{28xz}{x^2+4} = 9 + (x+y)^2$. Określić typ jednego z tych punktów krytycznych, znajdując i badając macierz $\begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}$.

Dla $z = z(x,y)$ określonej równaniem $0 = F(x,y,z) := z^3 + z + \dfrac{28xz}{x^2+4} - 9 - (x+y)^2$ zależność $F(x,y,z(x,y)) = 0$ prowadzi do wzorów $\left\{\begin{array}{l} F'_x + F'_z z'_x = 0 \\ F'_y + F'_z z'_y = 0 \end{array}\right\}$; zatem $z'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 0 = F'_x = 28z\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} - 2(x+y) \\ 0 = F'_y = -2(x+y),\ 0 = F(x,y,z) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ 4-x^2=0 \\ F=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2,\ y=-2 \\ \quad 0 = z^3 + 8z - 9 = \\ = (z-1)(z^2+z+9) \end{array}\right\}$ lub $\left\{\begin{array}{l} x=-2,\ y=2 \\ \quad 0 = z^3 - 6z - 9 = \\ = (z-3)(z^2+3z+3) \end{array}\right\}$, są więc 2 p. krytyczne: $\boxed{z(2,-2)=1}$ i $\boxed{z(-2,2)=3}$. W obu warunek lok. rozwikływalności jest spełniony: $F'_z(2,-2,1) = 11 \neq 0$, $F'_z(-2,2,3) = 21 \neq 0$. Druga pochodna: $\big[z''(x,y)\big] = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix} = -\frac{1}{F'_z}\begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{bmatrix}$, więc mamy: $\big[z''(2,-2)\big] = \frac{1}{44}\begin{bmatrix} 15 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} > 0$ (minimum lokalne) oraz $\big[z''(-2,2)\big] = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} -13 & 8 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ — forma nieokreślona (p. siodłowy).

13. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $(x,y) \mapsto z(x,y)$ opisanej niejawnie równaniem $6z^3 - 7(x^3-3x)z + (2x+y)^2 = 20$; zbadać jeden z punktów krytycznych, znajdując $\big[\ z''(x,y)\ \big] = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}$.

$\left\{\begin{array}{l} 0 = F'_x = -21(x^2-1)z + 4(2x+y) \\ 0 = F'_y = 2(2x+y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=0 \\ (x^2-1)z=0 \end{array}\right\}$, czyli $\left\{\begin{array}{c} x=1,\ y=-2 \\ 0 = 6z^3 + 14z - 20 = \\ = (z-1)(6z^2+6z+20) \end{array}\right\}$, albo $\left\{\begin{array}{c} x=-1,\ y=2 \\ 0 = 6z^3 - 14z - 20 = \\ = (z-2)(6z^2+12z+10) \end{array}\right\}$; skoro $\Delta < 0$, to są tylko dwa p. krytyczne: $z(1,-2) = 1$ i $z(-1,2) = 2$. Druga pochodna: $F''_{xx} = 8 - 42xz$, $F''_{xy} = 4$, $F''_{yy} = 2$ oraz $F'_z = 18z^2 - 7(x^3-3x)$; stąd, $\big[\ z''(1,-2)\ \big] = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -17 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (siodło), $\big[\ z''(-1,2)\ \big] = -\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 46 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} < 0$ (lok.maks.), bo $z''_{ij}(\hat{p}) = -\frac{F''_{ij}}{F'_z}$.

14. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $(x,y) \mapsto z(x,y)$ opisanej niejawnie równaniem $3z^3 - 7z\cos(x+y) + \frac{20x}{x^2+1} = 0$; zbadać jeden z punktów krytycznych, znajdując $\big[\ z''(x,y)\ \big] = \begin{bmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{bmatrix}$.

$\begin{Bmatrix} 0 = F'_x = 7z\sin(x+y) + \frac{20(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \\ 0 = F'_y = 7z\sin(x+y) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sin(x+y) = 0 \\ 1-x^2 = 0 \end{Bmatrix}$, czyli $\begin{Bmatrix} x=1,\ y+1 = 2k\pi \\ 0 = 3z^3 - 7z + 10 = \\ = (z+2)(3z^2-6z+5) \end{Bmatrix}$ lub $\begin{Bmatrix} x=-1,\ y-1 = 2k\pi \\ 0 = 3z^3 - 7z - 10 = \\ = (z-2)(3z^2+6z+5) \end{Bmatrix}$ lub $\begin{Bmatrix} x=1,\ y+1 = (2k+1)\pi \\ 0 = 3z^3 + 7z + 10 = \\ = (z+1)(3z^2-3z+10) \end{Bmatrix}$ lub $\begin{Bmatrix} x=-1,\ y-1 = (2k+1)\pi \\ 0 = 3z^3 + 7z - 10 = \\ = (z-1)(3z^2+3z+10) \end{Bmatrix}$; skoro $\Delta < 0$, to są 4 wartości krytyczne: $z(1, 2k\pi - 1) = -2$, $z(-1, 2k\pi+1) = 2$, $z(1, 2k\pi + \pi - 1) = -1$, $z(-1, 2k\pi + \pi + 1) = 1$. Druga pochodna: $F''_{xx} = 7z\cos(x+y) + \frac{40x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 7\epsilon z - 10x$, $F''_{xy} = 7z\cos(x+y) = 7\epsilon z$, $F''_{yy} = 7z\cos(x+y) = 7\epsilon z$, $F'_z = 9z^2 - 7\cos(x+y) = 9z^2 - 7\epsilon$; zatem ze wzoru $z''_{ij}(\hat p) = -\frac{F''_{ij}}{F'_z}$ dostajemy $\left[z''(1,-1)\right] = \frac{2}{29}\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} > 0$, $\left[z''(-1,1)\right] = -\frac{2}{29}\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} < 0$, $\left[z''(1,\pi-1)\right] = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$, $\left[z''(-1,\pi+1)\right] = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$.

15. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbf{R}^2 \ni (x,y) \mapsto z(x,y) \in \mathbf{R}$, określonej niejawnie równaniem

$$0 = F(x,y,z) := 2(x^3+y^3)z^3 - 3(x^2-y^2)z^2 + z - 1.$$

$0 = F'_x = 6xz^2(xz-1)$, $0 = F'_y = 6yz^2(yz+1)$, zaś $F = 0$ daje $z \neq 0$, więc mamy 4 możliwości: $\boxed{x = y = 0}$, wtedy $z = 0$; $\boxed{xz = 1, y = 0}$, wtedy $0 = F = 2 - 3 + z - 1$, więc $z = 2, x = \frac{1}{2}$; $\boxed{x = 0, yz = -1}$, wtedy $0 = F = -2 + 3 + z - 1$, więc $z = 0$, sprzeczność; $\boxed{xz = 1, yz = -1}$, wtedy $0 = F = 2(1-1) - 3(1-1) + z - 1$, więc $z = 1, x = 1, y = -1$. Zauważmy że $F'_z = 6(x^3+y^3)z^2 - 6(x^2-y^2)z + 1$ jest $= 1$ w każdym z tych 3 punktów, zaś $\begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''''_{yx} & F''_{yy} \end{bmatrix} = 6z^2 \begin{bmatrix} 2xz - 1 & 0 \\ 0 & 2yz+1 \end{bmatrix}$ jest w tych punktach równe $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, więc $z''(p)$ jest kolejno równe $6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $-24\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $6\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Odpowiedź. $z(0,0) = 1$ (siodło), $z(\frac{1}{2}, 0) = 2$ (max.), $z(1,-1) = 1$ (siodło).

16. Układ współrzędnych na obszarze $D \subset \mathbf{R}^n$: Jest to dyfeomorfizm $\Phi = (y^1, \ldots, y^n) : D \to \mathbf{R}^n$; z definicji $\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ są to takie pola wektorowe na D, które (w każdym punkcie $\boldsymbol{x} \in D$) tworzą bazę sprzężoną względm form liniowych $dy^1, \ldots, dy^n$. Jawny wzór: $\boxed{\frac{\partial}{\partial y^j} f(\boldsymbol{x}) := \tilde f'_j(\Phi(\boldsymbol{x}))}$, gdzie $\tilde f := f \circ \Phi^{-1}$ jest *wyrażeniem funkcji f w nowych współrzędnych*, bowiem mamy tożsamość $f(x_1, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x}) = \tilde f(y^1(\boldsymbol{x}), \ldots, y^n(\boldsymbol{x}))$. Faktycznie mamy $\langle dy^i, \frac{\partial}{\partial y^j}\rangle = \delta^i_j$, gdyż dla $f = y^i$ funkcja $\tilde f$ ma postać $\boldsymbol{y} \mapsto y^i$. Inny ważny wzór: $\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^i}$.

17. **Sofizmat**. Określmy $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ wzorem $u(x,y) := x = \varrho\cos\varphi$, gdzie (x,y) są współrzędnymi kartezjańskimi, a (ϱ, φ) — biegunowymi na płaszczyźnie. Wtedy $\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\varrho}1 = 0$, zaś $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\varrho} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Symbol '$\frac{\partial}{\partial x}$' odpowiada tu (i w całym tym akapicie!) współrzędnym kartezjańskim (tzn. 'mierzy' zmienność funkcji na prostych $y = \mathrm{const}$), zaś symbol '$\frac{\partial}{\partial\varrho}$' — współrzędnym biegunowym (tzn. określa zmienność funkcji na półprostych $\frac{y}{x} = \mathrm{const}$). Różniczkowania pochodzące z dwóch różnych ukł. współrzędnych nie muszą komutować! W naszym przykładzie: Różniczkowanie $\frac{\partial}{\partial\varrho}$ ma we wsp. kartezjańskich postać $\frac{\partial}{\partial\varrho} = \frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}$, więc dla dowolnej funkcji $u = u(x,y)$ mamy:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\varrho} - \frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{\varrho}u'_x + \frac{y}{\varrho}u'_y\right] - \left[\frac{x}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\varrho}\frac{\partial}{\partial y}\right]u'_x = \frac{y^2}{\varrho^3}u'_x - \frac{xy}{\varrho^3}u'_y + \frac{x}{\varrho}u''_{xx} + \frac{y}{\varrho}u''_{xy} - \left[\frac{x}{\varrho}u''_{xx} + \frac{y}{\varrho}u''_{xy}\right] = \frac{y^2}{\varrho^3}u'_x - \frac{xy}{\varrho^3}u'_y.$$

Wynik powyższego rachunku można wyrazić wzorem na *komutator różniczkowań* $\frac{\partial}{\partial x}$ *i* $\frac{\partial}{\partial\varrho}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial\varrho}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{y^2}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{xy}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{y}{\varrho^3}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{y}{\varrho^3}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Ćwiczenie. Znaleźć wszystkie funkcje $u = u(x,y)$, spełniające warunek $\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\varrho}$. Wzór na komutator pokazuje, że są to funkcje zerowane przez $\frac{\partial}{\partial\varphi}$, czyli postaci $u = f(\varrho) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Bezpośrednie sprawdzenie: $\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial x}f(\varrho) = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[f'(\varrho)\frac{x}{\varrho}\right] = f''(\varrho)\frac{\varrho}{x}$, gdyż $\frac{\partial}{\partial\varrho}\frac{x}{\varrho} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\cos\varphi = 0$; z kolei $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\varrho}f(\varrho) = \frac{\partial}{\partial x}f'(\varrho) = f''(\varrho)\frac{\partial\varrho}{\partial x} = f''(\varrho)\frac{x}{\varrho}$, zgadza się!

18. Niech $D := \{(x,y) :\ y > 0\}$, $\tilde D := \{(x,p) :\ p > |x|\}$. Sprawdzić, że odwzorowanie $\kappa : D \to \tilde D$, $\kappa(x,y) := (x,\varrho) = \left(x, \sqrt{x^2+y^2}\right)$, jest dyfeomorfizmem, a więc para wielkości (x,ϱ) stanowi układ współrzędnych w obszarze D. Wyrazić w tych współrzędnych, a następnie rozwiązać równanie: (a) $y^2u''_{xy} - xyu''_{yy} + xu'_y = 0$;

(b) $yu'_x + \left(a\sqrt{x^2+y^2} - x\right)u'_y = 0$ dla $a = \mathrm{const}$; (c) $y^2u''_{xx} - 2xyu''_{xy} + x^2u''_{yy} = \frac{x^2+y^2}{y}u'_y$.

Dla $y > 0$ mamy $\varrho = \sqrt{x^2+y^2} > |x|$ oraz $\varrho = \sqrt{x^2+y^2} \iff y = \sqrt{\varrho^2 - x^2}$, więc $\kappa : D \to \tilde D$ ma odwrotność $\kappa^{-1}(x,\varrho) = \left(x, \sqrt{x^2-y^2}\right)$, a więc jest bijektywne. Jest dyfeomorfizmem, gdyż $\kappa \in C^\infty(D, \mathbf{R}^2)$ oraz $\frac{\partial(x,\varrho)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varrho'_x & \varrho'_y \end{vmatrix} = \varrho'_y = \frac{y}{\varrho} > 0$, co implikuje gładkość κ^{-1} (zresztą gładkość łatwiej widać wprost z jawnego wzoru na κ^{-1}).

(a) Różniczkując względem x i y relację $u(x,y) = U\left(x, \sqrt{x^2+y^2}\right)$ dostajemy zależności $\begin{Bmatrix} u'_x = U'_x + \frac{x}{\varrho}U'_\varrho \\ u'_y = \frac{y}{\varrho}U'_\varrho \end{Bmatrix}$; z nich z kolei $\begin{Bmatrix} u''_{xx} = U''_{xx} + 2\frac{x}{\varrho}U''_{x\varrho} + \frac{x^2}{\varrho^2}U''_{\varrho\varrho} + \frac{y^2}{\varrho^3}U'_\varrho \\ u''_{xy} = \frac{y}{\varrho}U''_{x\varrho} + \frac{xy}{\varrho^2}U''_{\varrho\varrho} - \frac{xy}{\varrho^3}U'_\varrho \\ u''_{yy} = \frac{y^2}{\varrho^2}U''_{\varrho\varrho} + \frac{x^2}{\varrho^3}U'_\varrho \end{Bmatrix}$. Wstawiając to do równania (a) dostajemy $0 = \frac{y^3}{\varrho}U''_{x\varrho}$, czyli $\boxed{U''_{x\varrho} = 0}$; rozwiązaniem tego równania jest $U(x,\varrho) = \alpha(x) + \beta(\varrho)$, a zatem rozwiązaniem ogólnym (a) jest $u(x,y) = \alpha(x) + \beta\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

(b) Wstawiając uzyskane w (a) zależności dostajemy $0 = y\left(U_x + \frac{x}{\varrho}U'_\varrho\right) + (a\varrho - x)\frac{y}{\varrho}U'_\varrho = yU'_x + U'_\varrho\left[\frac{xy}{\varrho} + \frac{y}{\varrho}(a\varrho - x)\right] = y\left(U'_x + aU'_\varrho\right)$, czyli $U'_x + aU'_\varrho = 0$. Stąd $\forall p \in \mathbf{R} :\ \frac{d}{dx}U(x, p + ax) = \ldots = 0$, więc $U(x, p + ax) =: F(p)$ (nie zależy od p) oraz $U(x, \varrho) = F(\varrho - ax)$. Wobec tego rozwiązaniem ogólnym (b) jest $u(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2} - ax\right)$. (c) Korzystając z powyższych wzorów dostajemy równanie $U''_{xx} = 0$, więc $U(x, \varrho) = \alpha(\varrho)x + \beta(\varrho)$. Stąd wynika *Odpowiedź.* $u(x, y) = x\,\alpha\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \beta\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

19. Rozwiązać równanie $\boxed{y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z}$ w $D := \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$, wprowadzając nowe współrzędne $\boxed{u = x^2 + y^2,\ v = \log\frac{y}{x},\ w = x + y - \log z}$ na obszarze D i traktując w jako nową zmienną zależną: $w = w(u, v)$.

Różniczkując względem x, y tożsamość $w(x^2 + y^2, \log y - \log x) = x + y - \log z$ otrzymujemy $\left\{\begin{matrix} 2xw'_x - \frac{1}{x}w'_v = 1 - \frac{1}{z}z'_x \\ 2yw'_u + \frac{1}{y}w'_v = 1 - \frac{1}{z}z'_y \end{matrix}\right\}$, czyli $\left\{\begin{matrix} \frac{1}{z}z'_x = 1 - 2xw'_u + \frac{1}{x}w'_v \\ \frac{1}{z}z'_y = 1 - 2yw'_u - \frac{1}{y}w'_v \end{matrix}\right\}$. Wstawiając to do równania dostajemy $(y - x)z + (\frac{y}{x} + \frac{x}{y})zw'_v = (y - x)z$, czyli $w'_v = 0$. Rozwiązaniem jest $w = h(u)$, czyli $\log z = x + y - h(x^2 + y^2)$, tzn. $\boxed{z = e^{x+y}F(x^2 + y^2)}$, gdzie $F \in C^1(]0, \infty[)$ jest dowolna.

20. Wyrazić równanie $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$ we współrzędnych $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$ obszaru $D = \{(x, y, z) : x > 0\}$, traktując w jako zmienną zależną, tzn. $w = w(u, v)$. Znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania.

Różniczkując tożsamość $\boxed{z(x, y) = xw(x + y, \frac{y}{x})}$ dostajemy zależności $\left\{\begin{matrix} z'_x = w(*) + xw'_u(*) - \frac{y}{x}w'_v(*) \\ z'_y = xw'_u(*) + w'_v(*) \end{matrix}\right\}$, gdzie $(*) = (x + y, \frac{y}{x})$. Stąd $\left\{\begin{matrix} z''_{xx} = 2w'_u + xw''_{uu} - 2\frac{y}{x}w''_{uv} + \frac{y^2}{x^3}w''_{vv} \\ w''_{xy} = w'_u + xw''_{uu} + (1 - \frac{y}{x})w''_{uv} - \frac{y}{x^2}w''_{vv} \\ z''_{yy} = xw''_{uu} + 2w''_{uv} + \frac{1}{x}w''_{vv} \end{matrix}\right\}$. Stąd $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = \left(\frac{y^2}{x^3} + 2\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}\right)W''_{vv} = \frac{(x+y)^2}{x^3}w''_{vv} = \frac{(1+v)^3}{u}w''_{vv}$, gdyż $x = \frac{u}{1+v}$. Ostatecznie $w''_{vv} = 0$, czyli $w(u, v) = a(u)v + b(u)$. Stąd $z(x, y) = ya(u) + xb(u) = xb(x + y) + ya(x + y)$, gdzie $a(\cdot), b(\cdot)$ są 'dowolnymi' funkcjami.

21. Określmy funkcje $u, v, w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ wzorami $u = x + y + z$, $v = xyz$, $w = z^3$ i załóżmy, że $D \subset \mathbf{R}^3$ jest obszarem, na którym funkcje (u, v, w) tworzą układ współrzędnych. Traktując w jako nową zmienną zależną, tzn. $w = w(u, v)$, wyrazić we współrzędnych u, v, w, a następnie rozwiązać równanie

$$(3z^2 - 1)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{xy}{z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right) = x - y.$$

Różniczkujemy względm x, y tożsamość $w\big(x + y + z(x, y), xyz(x, y)\big) = [z(x, y)]^3$. Dostajemy $\left\{\begin{matrix} w'_u(1 + z'_x) + w'_v(yz + xyz'_x) = 3z^2z'_x \\ w'_u(1 + z'_y) + w'_v(xz + xyz'_y) = 3z^2z'_y \end{matrix}\right\}$; stąd $\left\{\begin{matrix} z'_x = \frac{1}{M}(w'_u + yzw'_v) \\ z'_y = \frac{1}{M}(w'_u + xzw'_v) \end{matrix}\right\}$, gdzie $M = 3z^2 - w'_u - xyw'_v$. Po wstawieniu tych wyrażeń do równania otrzymujemy: $(3z^2 - 1)[x(w'_u + yzw'_v) - y(w'_u + xzw'_v)] + xy(y - x)w'_v = (x - y)(3z^2 - w'_u - xyw'_v)$; po uproszczeniu $(3z^2 - 1)(x - y)w'_u + xy(y - x)w'_v = (x - y)(3z^2 - w'_u - xyw'_v)$, $(3z^2)w'_u = 3z^2$, czyli $w'_u = 1$. Rozwiązaniem jest $w(u, v) = u + \varphi(v)$. *Odpowiedź.* $z^3 = x + y + z + \varphi(xyz)$.

22. W obszarze $D = \big\{(x, y, z) : [x > 0 \text{ lub } y \neq 0],\ z > 0\big\} \subset \mathbf{R}^3$ wprowadźmy nowe współrzędne (u, v, w) wzorami $\left\{\begin{matrix} x = ue^w\cos v,\ y = ue^w\sin v,\ z = e^w \\ u > 0,\quad -\pi < v < \pi \end{matrix}\right\}$. Traktując w jako $w(u, v)$ wyrazić w tych współrzędnych, a następnie rozwiązać równanie $\boxed{(x^2 - y^2)z'_x + 2xyz'_y = xz}$, znajdując rozwiązanie ogólne w postaci niejawnej $F(x, y, z) = 0$.

Wypisujemy najpierw zależność między $w(\cdot\,,\cdot)$ i $z(\cdot\,,\cdot)$; jej różniczkowanie wzgl. 2 niezal. zmiennych daje relacje $z'_x = \ldots$, $z'_y = \ldots$

Sposób 1: Różniczkujemy $\boxed{e^w = z\,(ue^w\cos v, ue^w\sin v)}$, gdzie $w = w(u, v)$: $\left\{\begin{matrix} w'_ue^w = (z'_xC + z'_yS)(1 + uw'_u)e^w \\ w'_ve^w = (z'_xC + z'_yS)uw'_ve^w + (-z'_xS + z'_yC)ue^w \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} z'_xC + z'_yS = \frac{1}{u(1+uw'_u)}uw'_u \\ -z'_xS + z'_yC = \frac{1}{u(1+uw'_u)}w'_v \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} u(1 + uw'_u)z'_x = uw'_uC - w'_vS \\ u(1 + uw'_u)z'_y = uw'_uS + w'_vC \end{matrix}\right\}$; mnożymy to przez $C^2 - S^2$, $2CS$ i wstawiamy to do równania; dostajemy $uw'_uC + Sw'_v = C(1 + uw'_u)$, czyli $w'_v = \frac{C}{S} = \operatorname{ctg} v$.

Sposób 2: $\boxed{\log z = w\Big(\frac{1}{z}\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\Big)}$, gdzie $z = z(x, y)$; różniczkując to dostajemy $\left\{\begin{matrix} z'_x\left(\frac{1}{z} + \frac{\varrho}{z^2}w'_u\right) = w'_u\frac{x}{z\varrho} - w'_v\frac{y}{\varrho^2} \\ z'_y\left(\frac{1}{z} + \frac{\varrho}{z^2}w'_u\right) = w'_u\frac{y}{z\varrho} + w'_v\frac{x}{\varrho^2} \end{matrix}\right\}$; wstawmy to do równania: $0 = (x^2 - y^2)\Big(w'_u\frac{x}{z\varrho} - w'_v\frac{y}{\varrho^2}\Big) + 2xy\Big(w'_u\frac{y}{z\varrho} + w'_v\frac{x}{\varrho^2}\Big) - xz\left(\frac{1}{z} + \frac{\varrho}{z^2}w'_u\right) = yw'_v - x$, czyli $w'_v = \operatorname{ctg} v$.

Odpowiedź. $\frac{\partial}{\partial v}\big(w - \log|\sin v|\big) = 0$, czyli $e^w = f(u)\sin v$, tzn. $z = f\Big(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\Big)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie $f(\cdot) \in C^1(\mathbf{R})$ — dowolna.

23. W obszarze $D = \big\{(x, y, z) : [x > 0 \text{ lub } y \neq 0],\ z > 0\big\} \subset \mathbf{R}^3$ wprowadźmy nowe współrzędne (u, v, w) wzorami $\left\{\begin{matrix} x = uw\cos v,\ y = uw\sin v,\ z = w \\ u > 0,\ w > 0,\ -\pi < v < \pi \end{matrix}\right\}$. Traktując w jako $w(u, v)$ wyrazić w tych współrzędnych, a następnie rozwiązać równanie $\boxed{(x^2 - y^2)z'_x + 2xyz'_y = xz}$, podając rozwiązanie ogólne w postaci niejawnej $F(x, y, z) = 0$.

Różniczkowanie tożsam. $\boxed{w(u, v) = z(uw(u, v)\cos v, uw(u, v)\sin v)}$ daje $\left\{\begin{matrix} w'_u = (z'_x\cos v + z'_y\sin v)(w + uw'_u) \\ w'_v = (z'_x\cos v + z'_y\sin v)uw'_v + (-z'_x\sin v + z'_y\cos v)uw \end{matrix}\right\}$, czyli $\left\{\begin{matrix} z'_x\cos v + z'_y\sin v = \frac{u}{u(w+uw'_u)}w'_u \\ -z'_x\sin v + z'_y\cos v = \frac{1}{u(w+uw'_u)}w'_v \end{matrix}\right\}$; stąd $\left\{\begin{matrix} z'_x = \frac{uw'_u\cos v - w'_v\sin v}{u(w+uw'_u)} \\ z'_y = \frac{uw'_u\sin v + w'_v\cos v}{u(w+uw'_u)} \end{matrix}\right\}$. Wstawiając to do równania po uproszczeniu dostajemy $\boxed{w'_v \sin v = w\cos v}$, tzn. $\frac{w'_v}{w} = \frac{\cos v}{\sin v}$, tzn. $0 = \frac{\partial}{\partial v}\big(\log|w| - \log|\sin v|\big) = \frac{\partial}{\partial v}\log\left|\frac{w}{\sin v}\right| = 0$. Zatem $w = f(u)\sin v$.

Odpowiedź. $z = f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie $f(\,\cdot\,)$ jest 'dowolną' funkcją. $\left[\text{Dla } f(u) = u^{\frac{1}{k}-1} \text{ dostajemy } z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^k\right]$

Inny sposób. Wyraźmy nowe współrzędne przez stare: Skoro $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$, to $\operatorname{tg}\frac{v}{2} = y\varrho + x$, ponadto $\left|\frac{v}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, więc $\left\{\begin{matrix} u = \frac{\varrho}{z} \\ v = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\varrho+x}\end{matrix}\right\}$. Stąd tożsamość $\boxed{z(x,y) = w\left(\frac{\varrho}{z(x,y)},\ 2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\varrho+x}\right)}$, z której dostajemy $\left\{\begin{matrix} z'_x = w'_u\frac{x}{z\varrho} + w'_v\frac{-y}{\varrho^2} - w'_u\frac{\varrho}{z^2}z'_x \\ z'_y = w'_u\frac{y}{z\varrho} + w'_v\frac{x}{\varrho^2} + w'_u\frac{\varrho}{z^2}z'_x\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} z'_x\left(1+\frac{\varrho}{z^2}w'_u\right) = w'_u\frac{x}{z\varrho} - w'_v\frac{y}{\varrho^2} \\ z'_y\left(1+\frac{\varrho}{z^2}w'_u\right) = w'_u\frac{y}{z\varrho} + w'_v\frac{y}{\varrho^2}\end{matrix}\right\}$; wstawiamy to do równania, mnożąc pierwszą zależność przez x^2-y^2, a drugą przez $2xy$; dostajemy $w'_u\frac{x(x^2+y^2)}{z\varrho} + w'_v\frac{y(x^2+y^2)}{\varrho^2} \overset{!}{=} \left(1+\frac{\varrho}{z^2}w'_u\right)xz$; skraca się tu w'_u, pozostaje $w'_v y = xz$, czyli $w'_v = \frac{x}{y}w = \frac{\sin v}{\cos v}w$.

24. W obszarze $D = \{(x,y,z) : [x>0 \text{ lub } y\neq 0],\ z>0\} \subset \mathbf{R}^3$ wprowadźmy nowe współrzędne (u,v,w) wzorami $\left\{\begin{matrix} x = ue^w\cos v,\ y = ue^w\sin v,\ z = w^{-1} \\ u>0,\ w>0,\ -\pi<v<\pi\end{matrix}\right\}$. Traktując w jako $w(u,v)$ wyrazić w tych współrzędnych, a następnie rozwiązać równanie $\boxed{(x^2-y^2)z'_x + 2xyz'_y + xz^2 = 0}$, podając rozwiązanie w postaci niejawnej $F(x,y,z)=0$.

Wypisujemy najpierw zależność między $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ i $z(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$; różniczkując ją wzgl. 2 niezal. zmiennych dost. relacje $z'_x = \ldots$, $z'_y = \ldots$

Sposób 1: Różniczk. $\boxed{w^{-1} = z\left(ue^w\cos v, ue^w\sin v\right)}$, gdzie $w = w(u,v)$: $\left\{\begin{matrix} -w'_u w^{-2} = (z'_xC + z'_yS)(1+uw'_u)e^w \\ -w'_v w^{-2} = (z'_xC + z'_yS)uw'_ve^w + (-z'_xS + z'_yC)ue^w\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} z'_xC + z'_yS = -\frac{e^{-w}}{uw^2(1+uw'_u)}uw'_u \\ -z'_xS + z'_yC = -\frac{e^{-w}}{uw^2(1+uw'_u)}w'_v\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} z'_x = -\frac{e^{-w}}{uw^2(1+uw'_u)}(uw'_uC - w'_vS) \\ z'_y = -\frac{e^{-w}}{uw^2(1+uw'_u)}(uw'_uS + w'_vC)\end{matrix}\right\}$; wstawiając do równania dostajemy $w'_v = \frac{C}{S} = \operatorname{ctg} v$.

Sposób 2: $\boxed{z^{-1} = w\left(e^{-\frac{1}{z}}\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)}$, gdzie $z = z(x,y)$; mamy stąd $\left\{\begin{matrix} z'_x\left(1+\varrho w'_ue^{-w}\right)w^2 = -w'_ux\varrho^{-1}e^{-w} + w'_vy\varrho^{-2} \\ z'_y\left(1+\varrho w'_ue^{-w}\right)w^2 = -w'_uy\varrho^{-1}e^{-w} - w'_vx\varrho^{-2}\end{matrix}\right\}$; mnożąc przez x^2-y^2 i $2xy$ wstawiamy do równania , wtedy w'_u się skraca, pozostaje $0 = w'_v\varrho^{-2}[y(x^2-y^2) - x\,2xy] + x = -yw'_v + x$.

Odpowiedź: $w'_v = \operatorname{ctg} v$, czyli $\frac{\partial}{\partial v}\big(w - \log|\sin v|\big) = 0$; zatem $e^w = f(u)\sin v$, czyli $e^{\frac{1}{z}} = f\left(e^{-\frac{1}{z}}\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

25. Rozwiązać równanie $\boxed{(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az-cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx-ay}$, przy ustalonych $a,b,c\in\mathbf{R}$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, wyrażając je w nowych współrzędnych $\boxed{u = ax+by+cz,\ v = xy,\ w = x^2+y^2+z^2}$, oraz traktując w jako nową zmienną zależną: $w = w(u,v)$.

Różniczkując wzgl. x, y tożsamość $\boxed{x^2+y^2+z^2 = w(ax+by+cz,xy)}$, gdzie $z := z(x,y)$, dostajemy $\left\{\begin{matrix} 2x+2zz'_x = (a+cz'_x)w'_u + yw'_v \\ 2y+2zz'_y = (b+cz'_y)w'_u + xw'_v\end{matrix}\right\}$; stąd $\left\{\begin{matrix} (2z-cw'_u)z'_x = aw'_u + yw'_v - 2x \\ (2z-cw'_u)z'_y = bw'_u + xw'_v - 2y\end{matrix}\right\}$, więc rozważane równanie przyjmuje postać $0 = (2z-cw'_u)\big[(cy-bz)z'_x + (az-cx)z'_y - bx + ay\big] =$ $= (cy-bz)(aw'_u + yw'_v - 2x) + (az-cx)(bw'_u + xw'_v - 2y) - (2z-cw'_u)(bx-ay) = (axz - byz - cx^2 + cy^2)w'_v$. Gdyby $w'_v\neq 0$ w pewnym punkcie (x,y), wtedy (z ciągłości) $w'_v\neq 0$ na pewnym zbiorze otwartym $\mathcal{O}\subset\mathbf{R}^2$; stąd na $\mathcal{O}$ byłoby $axz - byz - cx^2 + cy^2 = 0$, więc $a^2+b^2\neq 0$ i $z = \frac{c(x^2-y^2)}{ax-by}$ na $\mathcal{O}\setminus\{ax = by\}$, co daje sprzeczność, gdyż $z = \frac{c(x^2-y^2)}{ax-by}$ nie spełnia równania. Zatem $w'_v = 0$, tzn. $w(u,v) = f(u)$ jest funkcją jedynie u. *Odpowiedź.* $x^2+y^2+z^2 = f(ax+by+cz)$, $f\in C^1(\mathbf{R})$ — niejawna postać funkcji $z(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$.

26. Wiedząc, że zależności $\left\{\begin{matrix} (x,y)\in D \\ z = Z(x,y)\end{matrix}\right\}$ oraz $\left\{\begin{matrix} (y,z)\in \tilde{D} \\ x = X(y,z)\end{matrix}\right\}$ opisują ten sam podzbiór przestrzeni $\mathbf{R}^3$, znaleźć równanie na funkcję $X(y,z)$, równoważne równaniu $(Z'_y)^2Z''_{xx} - 2Z'_xZ'_yZ''_{xy} + (Z'_x)^2Z''_{yy} = 0$.

Sposób 1. Tożsamość $\boxed{z = Z(X(y,z),y)}$ różniczkujemy dwukrotnie wzgl. y, z: $\left\{\begin{matrix} 0 = Z'_x(*)X'_y + Z'_y(*) \\ 1 = Z'_x(*)X'_z\end{matrix}\right\}$, gdzie $(*) = (X(y,z),y)$,
$$\left\{\begin{matrix} 0 = Z''_{xx}(X'_y)^2 + 2Z''_{xy}X'_y + Z''_{yy} + Z'_xX''_{yy} = 0 \\ 0 = Z''_{xx}X'_yX'_z + Z''_{xy}X'_y + Z'_xX''_{yz} \\ 0 = Z''_{xx}(X'_z)^2 + Z'_xX''_{zz}\end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} X'_y = -(Z'_x)^{-1}Z'_y \\ X'_z = (Z'_x)^{-1}\end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} X''_{yy} = -(Z'_x)^{-3}\left[Z''_{xx}(Z'_y)^2 - 2Z''_{xy}Z'_xZ'_y + Z''_{yy}(Z'_x)^2\right] \\ X''_{yz} = (Z'_x)^{-3}\left[Z''_{xx}Z'_y - Z''_{xy}Z'_x\right] \\ X''_{zz} = -(Z'_x)^{-3}Z''_{xx}\end{matrix}\right\}.$$
Widać stąd natychmiast, że lewa strona rozważanego równania jest równa $-(Z'_x)^3X''_{yy}$, a więc otrzymaujemy równanie $X''_{yy} = 0$.

Sposób 2. Tożsamość $\boxed{x = X(y,Z(x,y))}$ różniczkujemy dwukrotnie wzgl. x, y: $\left\{\begin{matrix} 1 = X'_z(*)Z'_x \\ 0 = X'_z(*)Z'_y + X'_y(*)\end{matrix}\right\}$, gdzie $(*) = (y,Z(x,y))$,
$$\left\{\begin{matrix} 0 = X'_zZ''_{xx} + X''_{zz}(Z'_x)^2 \\ 0 = X'_zZ''_{xy} + X''_{yz}X'_x + X''_{zz}Z'_xZ'_y \\ 0 = X'_zZ''_{yy} + X''_{yy} + 2X''_{yz}Z'_y + X''_{zz}(Z'_y)^2 = 0\end{matrix}\right\},\ \boxed{\begin{matrix} Z'_x = (X'_z)^{-1} \\ Z'_y = -(X'_z)^{-1}X'_y\end{matrix}},\ \boxed{\begin{matrix} Z''_{xx} = -(X'_z)^{-3}X''_{zz} \\ Z''_{xy} = -(X'_z)^{-3}\left[X''_{yz}X'_z - X''_{zz}X'_y\right] \\ Z''_{yy} = -(X'_z)^{-3}\left[X''_{yy}(X'_z)^2 - 2X''_{yz}X'_zX'_y + X''_{zz}(X'_y)^2\right]\end{matrix}}.$$
Po wstawieniu tego do równania dostajemy $-(X'_z)^{-3}X''_{yy} = 0$, czyli $X''_{yy} = 0$.

Odpowiedź. $X''_{yy} = 0$.

1. Niech $\omega := (yz\,dx + x\,dy) \wedge dz$, $S := \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = (1-z)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ oraz niech ι będzie orientacją zewnętrzną stożka S. Obliczyć $\int_{(S,\iota)} \omega$ dwoma sposobami: (a) korzystając z twierdzenia Stokesa; (b) bezpośrednio.

(a) Brzeg $V := \{x^2 + y^2 \leqslant (1-z)^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$ składa się z S i $D = \{z = 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, przy czym $\int_{(D,\iota)} \omega = 0$, gdyż dz znika na wektorach stycznych do D. Stąd z twierdzenia Stokesa $\int_{(S,\iota)} \omega = \int_{(\partial V,\iota)} \omega = \int_{(V,+)} d\omega = \int_{(V,+)} (1-z)dx \wedge dy \wedge dz = \int_V (1-z)dx\,dy\,dz = \int_0^1 (1-z)|V_z|dz = \int_0^1 (1-z)\pi(1-z)^2\,dz = \frac{\pi}{4}$.

(b) Parametryzacja $\kappa(\varphi, z) := \big((1-z)\cos\varphi, (1-z)\sin\varphi, z\big)$ jest zgodna z orientacją ι, gdyż $\det[{}_3, \kappa'_\varphi, \kappa'_z] = \ldots = (1-z) > 0$, zaś wektor ${}_3$ jest skierowany na zewnątrz stożka; przy tym $\kappa^*\omega = (1-z)^2 \big[z\sin\varphi\, d\cos\varphi + \cos\varphi\, d\sin\varphi\big] \wedge dz =$

$$= (1-z)^2(\cos^2\varphi - z\sin^2\varphi)d\varphi \wedge dz, \text{ więc } \int_{(S,\iota)} \omega = \int_0^1 (1-z)^2 \left[\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi - z\sin^2\varphi)d\varphi\right] dz = \int_0^1 (1-z)^2(\pi - \pi z)dz = \frac{\pi}{4}.$$

2. Obliczyć $I = \displaystyle\int_{(S,\iota)} (-y\,dx + xz\,dy) \wedge dz$ dwoma sposobami: (a) stosując twierdzenie Stokesa, (b) bezpośrednio, jeśli $S := \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}$, a ι jest orientacją zewnętrzną S (wzgl. standard. orientacji kuli).

(a) Brzeg $B := \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$ składa się z S i $D = \{x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\}$, przy czym ω na D znika (bo $dz = 0$ na D); zatem z tw. Stokesa $I = \int_B d\omega = \int_B (1+z)dx\,dy\,dz = \int_0^1 (1+z)|B_z|dz = \int_0^1 (1+z)\pi(1-z^2)dz = \pi\int_0^1 (1+z-z^2-z^3)dz = \pi(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{11}{12}\pi$.

(b) $\kappa(\theta, \varphi) := [\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta]^T$ jest parametryzacją S zgodną z orientacją ι, gdyż $\det\big[{}_3, \kappa'_\theta, \kappa'_\varphi\big] = \sin\theta\cos\theta > 0$. Stąd, skoro $\kappa^*\omega = \sin^3\theta(\sin^2\varphi + \cos\theta\cos^2\varphi)d\theta \wedge d\varphi$, mamy $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \left[\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \cos\theta\cos^2\varphi)d\varphi\right] d\theta = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta(1 + \cos\theta)d\theta =$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big((1-\cos^2\theta)\sin\theta + \sin^3\theta\cos\theta\Big)d\theta = \pi\Big[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{4}\sin^4\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{11}{12}\pi.$$

Zadania z Analizy Matematycznej (C) **Seria 4** **Listopad 1998**

1. Obliczyć pole obszaru $K \subset \mathbf{R}^2$: (a) ograniczonego cykloidą $(x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, i prostą $y = 0$; (b) ograniczonego krzywą $(x,y) = (\sin 2\varphi, \sin 3\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$; (c) $K = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leqslant a(x^3 - 3xy^2)\}$; (d) $K = \{(x,y) : ax^2 - bxy + cy^4 \leqslant 0;\ x, y \geqslant 0\}$; (e) $K = \{(x,y) : ax^3 - bx^2y + cy^4 \leqslant 0;\ x, y \geqslant 0\}$ $\quad (a,b,c > 0)$.

2. Obliczyć całki: (a) $\int_L e^x\big((1-\cos y)dx - (y - \sin y)dy\big)$, gdzie L jest brzegiem obszaru $\{0 \leqslant y \leqslant \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$; (b) $\int_L (\vec{A}\, d\vec{l})$, jeśli $\vec{A} = xz[6z - 3xy, 2x, 3x]$, a L jest brzegiem powierzchni $S = \{z = xy,\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 1\}$ zorientowanym "do góry"; (c) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = \frac{[x,\,y,\,z]}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, $S = \{\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x^2+y^2+z^2 \geqslant b^2,\ z \geqslant 0\}$ oraz $0 < a < b < c$ są zadane; (d) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = [xz, x^2y, y^2z]$, a $S = \partial\{0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1; x, y \geqslant 0\}$; (e) $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma})$, jeśli $\vec{A} = z\big[e^x \sin y, e^x \cos y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big]$, a $S = S_1 \cup S_2$ składa się z dwoch półsfer, zawartych w brzegu bryły $\{1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\}$. W punktach (a), (c), (d) i (e) przyjmujemy orientację zewnętrzną brzegu.

3. Niech $S \subset \mathbf{R}^3$ będzie powierzchnią zawartą w sferze $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$, a $\omega := \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Dowieść, że przy stosownej orientacji S wartość $\frac{1}{3}\int_S \omega$ jest objętością bryły $[0,1]S := \{r\vec{p} : r \in [0,1], \vec{p} \in S\} \subset \mathbf{R}^3$.

4. (a) Niech $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$; wykazć, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$, $d\theta = 0$ oraz $\int_{x_1^2+x_2^2=1} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną. (b) Niech $\mathcal{O}_0 := \mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}e_3$; wykazać, że jeśli $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O}_0)$, $d\theta = 0$ i $\int_{x_1^2+x_2^2=1, x_3=0} \theta = 0$, to θ jest formą zupełną.

5. Niech $S := \{x \in \mathbf{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathcal{O} := \mathbf{R}^3 \setminus 0$. Dowieść, że jeśli $\omega \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $d\omega = 0$ i $\int_S \omega = 0$, to ω jest zupełna. *Wskazówka.* Wykorzystać ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_+ = \mathbf{R}^3 \setminus (\mathbf{R}_-)e_3$, $\mathcal{O}_- = \mathbf{R}^3 \setminus (\mathbf{R}_+)e_3$ oraz wynik zadania 4(b).

6. Dowieść, że: (a) obszar $\mathcal{O} := \mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}e_3$ nie jest ściągalny; (b) istnieje odwzorowanie gładkie $\phi : [0,1] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, takie że $\phi_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{O}}$ oraz $\phi_0(\mathcal{O})$ jest krzywą; (c) dla $k \in \{2,3\}$ każda zamknięta k-forma $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$ jest zupełna.

7. Korzystając z poprzednich zadań wykazać, że przestrzenie kohomologii $H^1(\mathbf{R}^2 \setminus 0)$, $H^1(\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}e_3)$ i $H^2(\mathbf{R}^3 \setminus 0)$ są 1-wymiarowe, natomiast $H^2(\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}e_3)$ i $H^3(\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{R}e_3)$ — zerowe.

8. Niech $\mathcal{O} := \mathbf{R}^n \setminus 0$ oraz $\omega := \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} x_r\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_r} \ldots \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. (a) Wyprowadzić tożsamość $\omega = x_1^n d\big(\frac{x_2}{x_1}\big) \wedge \ldots \wedge d\big(\frac{x_n}{x_1}\big)$. (b) Dowieść, że $d(f \cdot \omega) = 0 \iff \big(f$ jest dodatnio jednorodna stopnia $-n\big)$. (c) Znaleźć formę pierwotną dla $f \cdot \omega$ na $\mathcal{O}^+ := \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0\}$, jeśli $f(x) = x_1^{-n} g\big(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\big)$ dla $x \in \mathcal{O}^+$.

9. Obliczyć $\theta := \int_0^1 \big(\frac{\partial}{\partial t} \lrcorner\, \phi^*\omega\big)\, dt$, sprawdzić że $d\theta = \omega$, jeżeli $\omega := z^{-3}(x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} := \{(x,y,z) : z > 0\}$ oraz $\phi : [0,1] \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ dane jest wzorem: (a) $\phi(t,x,y,z) := (tx, ty, 1 - t + tz)$; (b) $\phi(t,x,y,z) := (tx, ty, z^t)$. (patrz zadanie 21. z poprzedniej serii)

10. (a) Niech $\mathcal{O} := \mathbf{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}$; podać przykład formy $\theta \in \Omega^1(\mathcal{O})$ zamkniętej, niezupełnej i symetrycznej (tzn. $S^*\theta = \theta$) względem odbicia $S(x,z) := (-x,z)$. (b) Niech $\hat{\mathcal{O}} := \mathbf{R}^3 \setminus C$, gdzie $C := \{(x,y,0) : x^2+y^2 = 1\}$; podać przykład zamkniętej, lecz niezupełnej formy $\hat{\theta} \in \Omega^1(\hat{\mathcal{O}})$.

11. Niech $n \geqslant 2$, $\mathcal{O} := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $\omega := \frac{1}{\|x\|^n}(x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \mathrm{cycl}) = \frac{1}{\|x\|^n}\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \lrcorner\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$. Dowieść, że: (a) $\big(\sigma \in \Omega^{n-1}(\mathcal{O})$ jest obrotowo niezmiennicza: $\forall F \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n) : F^\dagger F = \mathbf{1}, \det F = 1 \Rightarrow F^*\sigma = \sigma\big)$ $\iff \big(\sigma$ ma postać $\sigma = f(\|x\|)\,\omega,\ f \in \Omega^0(\mathbf{R}_+)\big)$. (b) Jeśli $\sigma = f(\|x\|)\,\omega$, $f \in \Omega^0(\mathbf{R}_+)$, to $\big(\sigma$ jest niezmiennicza względem wszystkich jednokładności $J_c : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $J_c(x) := c \cdot x$, $c > 0\big) \iff f = \mathrm{const} \iff \big(\sigma$ jest zamknięta$\big)$.

12. Niech $\vec{R}$ będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O} := \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, tzn. $\vec{R}(x) := \vec{x}$. Sprawdzić, że jeśli pole wektorowe $\vec{A}$ na $\mathcal{O}$ jest dodatnio jednorodne stopnia $\alpha \in \mathbf{R}$, tzn. $\vec{A}(t\,x) = t^\alpha \vec{A}(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$ oraz $t > 0$, to zachodzą wzory:
$$(\alpha+1)\vec{A} = \mathrm{grad}(\vec{A}|\vec{R}) + (\mathrm{rot}\vec{A}) \times \vec{R}, \qquad (\alpha+2)\vec{A} = \mathrm{rot}(\vec{A} \times \vec{R}) + (\mathrm{div}\vec{A})\vec{R}.$$
W konsekwencji $\vec{A}$ ma na $\mathcal{O}$ potencjał skalarny (wektorowy), jeśli $\mathrm{rot}\vec{A} = 0$ i $\alpha \neq -1$ (jeśli $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ i $\alpha \neq -2$).

13. Niech R będzie radialnym polem wektorowym na $\mathcal{O} := \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, tzn. $R(x) = x$. Dowieść, że jeśli $\omega \in \Omega^k(\mathcal{O})$ spełnia warunek $\omega(t\,x) = t^\alpha \omega(x)$ dla $x \in \mathcal{O}$, $t > 0$, tzn. współczynniki ω są funkcjami dodatnio jednorodnymi stopnia α, to $\boxed{(\alpha+k)\omega = d(R \lrcorner\, \omega) + R \lrcorner\, d\omega}$. Sprawdzić, że stanowi to uogólnienie wyniku poprzedniego zadania.

14. Stosując tw. Stokesa dowieść, ze jeśli u i v są funkcjami gładkimi na otoczeniu zwartego obszaru $K \subset \mathbf{R}^2$, to zachodzą następujące *tożsamości Greena*: $\int_K \big(u\Delta v + (\nabla v|\nabla u)\big)dx\,dy = \int_{\partial K} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} ds := \int_{\partial K} u\big(\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx\big)$, $\int_K (u\Delta v - v\Delta u)dx\,dy = \int_{\partial K}\big(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\big)ds$, $\int_K \Delta u\, dx\,dy = \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} ds$. Wyjaśnić sens tradycyjnego symbolu $\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}$.

15. Wyprowadzić wzory: $\int_L (\vec{A}\, d\vec{l}) = \int_L (\vec{A}|\boldsymbol{t})ds_1$, $\int_S (\vec{A}\, d\vec{\sigma}) = \int_S (\vec{A}|\boldsymbol{n})ds_2$, wyrażające całki z form różniczkowych w $\mathbf{R}^3$ po krzywych ($\dim L = 1$) i powierzchniach ($\dim S = 2$) przez całki krzywoliniowe i powierzchniowe; $\boldsymbol{t}$ oznacza pole wersorów stycznych na L, a $\boldsymbol{n}$ — pole wersorów normalnych na S; orientacje L i S określone są przez $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{n}$.

16. Obliczyć całki $\displaystyle\int_S f\,ds_2$ i $\displaystyle\int_S \frac{1}{f}ds_2$, jeśli S jest stożkiem $\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,\ z\in[0,c]\}$, a $f := \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+z^2}$.

17. Niech $\mathcal{O}\subset\mathbf{R}^3\setminus 0$ (otwarty), $f\in\Omega^0(\mathcal{O})$; oznaczmy $f'_{,i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $r:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$, $r(x) := \|x\|$. Dowieść, że: (a) Jeśli f znika na brzegu zwartego obszaru $K\subset\mathcal{O}$, to $\int_K r^{-3}(x_1f'_{,1}+x_2f'_{,2}+x_3f'_{,3})d^3x = 0$; (b) Jeśli f znika na brzegu zwartej powierzchni $S\subset\mathcal{O}$, a $\boldsymbol{n}:S\to\mathbf{R}^3$ jest polem jednostkowych wektorów normalnych na S, to

$$\int_S \frac{1}{r}\begin{vmatrix} f'_{,1} & x_1 & \boldsymbol{n}_1\\ f'_{,2} & x_2 & \boldsymbol{n}_2\\ f'_{,3} & x_3 & \boldsymbol{n}_3\end{vmatrix} ds_2 = 0.$$

1. (a) $|K| = 3\pi$; (b) $|K| = \frac{12}{5}$; (c) $|K| = \frac{\pi}{4}a^2$ (parametryzować kątem φ); (d) $\frac{1}{60}a^{-3}b^5c^{-2}$; (e) $|K| = \frac{1}{210}a^{-5}b^7c^{-2}$.

2. Zastosować twierdzenie Stokesa. *Odp.* (a) $I = -\frac{1}{5}(e^\pi - 1)$; (b) $\frac{4}{5}$; (c) $2\pi\left(1-\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}}\right)$; (d) $\frac{\pi}{8}$; (e) $\frac{3}{2}\pi$.

3. $r^2dr\wedge\omega = dx\wedge dy\wedge dz$, więc sprowadzając całkę wielokrotną do całki iterowanej mamy $|[0,1]S| = \int_{[0,1]S} r^2dr\wedge\omega = \int_0^1 r^2dr\cdot\int_S\omega$.

4. (a) Ściągalność zbiorów $\mathcal{O}_\pm := \mathcal{O}\setminus(\mathbf{R}_\mp)e_2$ daje $\exists f_\pm\in\Omega^0(\mathcal{O}_\pm) : \theta = df_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$; różnica $f := f_+ - f_-$ jest stała na obu spójnych składowych $\mathcal{O}_+\cap\mathcal{O}_-$, tzn. na półpłaszczyznach $\{x_1>0\}$ i $\{x_1<0\}$. Dzieląc γ na dwa łuki o końcach $p=(1,0)$ i $q=(-1,0)$ dostajemy $0 = \int_\gamma\theta = \big(f_+(q)-f_+(p)\big)+\big(f_-(p)-f_-(q)\big) = f(q)-f(p)$, więc obie stałe są równe: $f_+ = f_- + c$. Stąd f_+ ma przedłużenie do gładkiej funkcji na $\mathcal{O}$, której różniczką jest θ. (b) Dowód identyczny; jako $\mathcal{O}_\pm$ bierzemy dopełnienia stosownych półpłaszczyzn w $\mathbf{R}^3$.

5. $\big($ściągalność $\mathcal{O}_\pm\big)\Rightarrow\exists\theta_\pm\in\Omega^1(\mathcal{O}_\pm) : \omega = d\theta_\pm$ na $\mathcal{O}_\pm$. Niech $S_\pm$ będą górną i dolną półsferą, zaś γ — okręgiem $\gamma(t) = (\cos t,\sin t,0)$, stanowiącym wspólny brzeg $S_\pm$. Z tw. Stokesa $0 = \int_S\omega = \int_{S_+}d\theta_+ + \int_{S_-}d\theta_- = \int_\gamma\theta_+ - \int_\gamma\theta_- = \int_\gamma(\theta_+-\theta_-)$; zarazem $\theta_0 := \theta_+-\theta_-$ na $\mathcal{O}_0 := \mathcal{O}_+\cap\mathcal{O}_-$ jest zamknięta (bo $d\theta_\pm = \omega$), więc $\exists f\in\Omega^0(\mathcal{O}_0) : df = \theta_+-\theta_-$ na $\mathcal{O}_0$ (zadanie 4(b)). Przedstawmy f w postaci $f = f_+ - f_-$, $f_\pm\in\Omega^0(\mathcal{O}_\pm)$, np. biorąc $f_+ = h\left(\frac{x_3}{\|x\|}\right)\cdot f$, gdzie $h\in\Omega^0(\mathbf{R})$ jest taka, że $h(t) = \begin{cases}1, & t<-1/2\\ 0, & t>1/2\end{cases}$. Wtedy $\theta_\pm - df_\pm\in\Omega^1(\mathcal{O}_\pm)$ oraz $\theta_+ - df_+ = \theta_- - f_-$ na $\mathcal{O}_+\cap\mathcal{O}_-$, więc $\theta_\pm - df_\pm$ sklejają się do jednej gładkiej formy θ na $\mathcal{O} = \mathcal{O}_+\cup\mathcal{O}_-$; jest jasne, że $d\theta = \omega$.

9. (a) $\phi^*\omega = (1-t+tz)^3[t^2(x\,dy-y\,dx)\wedge(t\,dz+(z-1)dt)+(1-t+tz)(t^2dx\wedge dy+tx\,dt\wedge dy+ty\,dx\wedge dt)]$, więc $\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,\phi^*\omega = \frac{t}{(1-t+tz)^3}(x\,dy-y\,dx)$; skoro $\int_0^1\frac{t}{(1-t+tz)^3} = \left\|\begin{smallmatrix}u=1-t+tz\\ t=(u-1)/(z-1)\end{smallmatrix}\right\| = \frac{1}{(z-1)^2}\int_1^z\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{2z^2}$, to $\theta = \frac{1}{2z^2}(x\,dy-y\,dx)$.
(b) $\phi^*\omega = z^{-2t}t(t\log z-1)dt\wedge(y\,dx-x\,dy)+z^{-2t}t^2dx\wedge dy+z^{-2z-1}t^3(x\,dy-y\,dx)\wedge dz$, więc $\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\,\phi^*\omega = z^{-2t}t(t\log z-1)(y\,dx-x\,dy)$; skoro $\int_0^1 z^{-2t}t(t\log z-1)dt == \left\|{}^{u=t\log z}\right\| = \log^{-2}z\int_0^{\log z}u(u-1)e^{-2u}du = -\frac{1}{2}\log^{-2}z\left[u^2e^{-2u}\right]_0^{\log z} = -\frac{1}{2}z^{-2}$, to $\theta = \frac{x\,dy-y\,dx}{2z^2}$.

10. (a) Np. $\theta := \frac{1}{2}(\omega+S^*\omega)$, gdzie $\omega := \frac{z\,dx-(x-1)dz}{(x-1)^2+z^2}$; niezupełność θ wynika stąd, że $\int_\gamma\theta\neq 0$, gdy γ jest małym okręgiem wokół (1,0).
(b) Można wziąc np. $\hat\theta := \phi^*\theta$, gdzie $\phi:\hat{\mathcal{O}}\to\mathcal{O}$, $\phi(x,y,z) := (\sqrt{x^2+y^2},z)$; wtedy oczywiście $d\hat\theta = \phi^*(d\theta) = 0$, lecz $\hat\theta$ nie jest zupełna (bo $\neq 0$ jest całka z $\hat\theta$ po okręgu $\{(x-1)^2+z^2 = r^2,\ y=0\}$). Warunek $S^*\theta = \theta$ sprawia, że $\hat\theta$ jest gładka na $\hat{\mathcal{O}}$, nie tylko poza osią $0z$, na której ϕ nie jest gładkie. W istocie łatwo policzyć, że $\theta = \frac{2xz\,dx+(-x^2+z^2+1)dz}{(x^2+z^2+1)^2-4x^2}$, a więc $\hat\theta = \frac{2z(x\,dx+y\,dy)+(-x^2-y^2+z^2+1)dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2-4(x^2+y^2)}\in\Omega^1(\hat{\mathcal{O}})$.

11. Oznaczmy $\mathrm{vol} := dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$; przedstawmy $\sigma\in\Omega^{n-1}(\mathcal{O})$ w postaci $\sigma = \sigma_A := A\lrcorner\,\mathrm{vol}$, gdzie $A:\mathcal{O}\to\mathbf{R}^n$ jest polem wektorowym na $\mathcal{O}$. Skoro $F^*\mathrm{vol} = \det F\cdot\mathrm{vol}$ (z definicji wyznacznika), to $\boxed{F^*\sigma_A = \det F\cdot\sigma_{F^*A}}$ dla $F\in\mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$, $\det F\neq 0$, gdzie F^*A jest nowym polem wektorowym ("cofnięciem pola A przez F"), danym wzorem $F^*A = F^{-1}\circ A\circ F$. Tak więc σ_A jest obrotowo niezmiennicza $\iff$ pole A jest obrotowo niezmiennicze, tzn. $F^*A = A$, tzn. $\forall F : F\circ A = A\circ F$. Ustalmy $x\in\mathcal{O}$ i weźmy $y := Ax$; mamy wtedy $Fy = y$ dla wszystkich obrotów F, takich że $Fx = x$; wynika stąd, że prostopadła do x składowa y jest $=0$ (gdyż 0 jest jedynym obrotowo niezmienniczym wektorem w przestrzeni $\langle x\rangle^\perp$), więc $y\|x$. Zatem obrotowo niezmiennicze pole musi mieć postać $A(x) = h(x)x$ dla pewnej $h\in\Omega^0(\mathcal{O})$; wtedy $F^*A = A$ oznacza $\forall F(\text{obrót}) : h(Fx) = h(x)$, skąd $h(x)$ jest funkcją od $\|x\|$, co daje (a). Łatwo sprawdzić, że $J_c^*\omega = \omega$, $d\omega = 0$ oraz $dr\wedge\omega = r^{1-n}\mathrm{vol}$ (gdzie $r(x) := \|x\|$), skąd natychmiast wynika (b).

13. Niech $\theta := R\lrcorner\,\omega$, tzn. $\theta(x) = x\lrcorner\,\omega(x)$ dla $x\in\mathcal{O}$; różniczkując tę zależność otrzymujemy $\theta'(x)v = x\lrcorner\,\big(\omega'(x)v\big)+v\lrcorner\,\omega(x)$ dla $v\in\mathbf{R}^n$; stąd $d\theta(x)(v_1,\ldots,v_r) = \sum_{r=1}^k(-1)^{r-1}\big(\theta'(x)v_r\big)(v_1,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k) = \sum_{r=1}^k\Big[\big(\omega'(x)v_r\big)(x,v_1,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k)+\omega(x)(v_r,v_1,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k)\Big] =$ $= k\cdot\omega(x)(v_1,\ldots,v_k)+\sum_{r=1}^k\big(\omega'(x)v_r\big)(x,v_1,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k)$. Z kolei biorąc $v_0 := x$ mamy: $(R\lrcorner\,d\omega)(x)(v_1,\ldots,v_r) = d\omega(x)(v_0,\ldots,v_r) =$ $= \sum_{r=0}^k(-1)^r\big(\omega'(x)v_r\big)(v_0,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k) = \big(\omega'(x)x\big)(v_1,\ldots,v_r)+\sum_{r=1}^k(-1)^r\big(\omega'(x)v_r\big)(x,v_1,\ldots\widehat{v_r}\ldots,v_k)$. Dodając stronami te dwie równości i korzystając z równania Eulera $\omega'(x)x = \alpha\cdot\omega(x)$ (jednorodność stopnia α) dostajemy tezę. (Symbol $\widehat{\ }$ oznacza pominięcie.)

Inny sposób. Niech $(x^i)_{i=1}^n$ — standardowe współrzędne na $\mathbf{R}^n$, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ oraz $\omega_{i_1\ldots i_k} := \omega(\partial_{i_1},\ldots,\partial_{i_k})$ — współczynniki ω. Wtedy $(d\omega)_{i_0i_1\ldots i_k} = \partial_{i_0}\omega_{i_1\ldots i_k}+\sum_{r=1}^k(-1)^r\partial_{i_r}\omega_{i_0\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k}$, co wraz z równaniem Eulera $\sum_i x^i\partial_i\omega_{\ldots} = \alpha\cdot\omega_{\ldots}$ daje $\big(R\lrcorner\,(d\omega)\big)_{i_1\ldots i_k} =$ $= \sum_i x^i(d\omega)_{i\,i_1\ldots i_k} = \alpha\cdot\omega_{i_1\ldots i_k}+\sum_{r=1}^k(-1)^r\sum_i x^i\partial_{i_r}\omega_{i\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k}$. Z kolei dla $\theta := R\lrcorner\,\omega$ mamy $\theta_{\ldots} = \sum_i x^i\omega_{i\ldots}$, więc $(d\theta)_{i_1\ldots i_k} =$ $= \sum_{r=1}^k(-1)^{r-1}\partial_{i_r}\theta_{i_1\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k} = \sum_{r=1}^k(-1)^{r-1}\sum_i\partial_{i_r}(x^i\omega_{i\,i_1\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k}) = \sum_{r=1}^k(-1)^{r-1}\sum_i\Big[x^i\partial_{i_r}\omega_{i\,i_1\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k}+\omega_{i_ri_1\ldots\widehat{i_r}\ldots i_k}\Big]$. Dodając to do poprzedniej równości dostajemy $\big(R\lrcorner\,d\omega+d(R\lrcorner\,\omega)\big)_{i_1\ldots i_k} = (\alpha+k)\omega_{i_1\ldots i_k}$.

15. *Ad* $\int_L$: Jeśli ϕ jest parametryzacją krzywej L, to $\boldsymbol{t}\circ\phi = \|\phi'\|^{-1}\phi'$, $\phi^*ds_1 = \|\phi'\|$, więc $\phi^*\big((\vec A|\boldsymbol{t})ds_1\big) = (\vec A\circ\phi(u)|\phi'(u))\,|du|$, natomiast $\phi^*(\vec A\,d\vec l) = \sum_{i=1}^3 A_i\circ\phi(u)\frac{d\phi_i}{du}du = (\vec A\circ\phi(u)|\phi'(u))\,du$, skąd teza. *Ad* $\int_S$: Jeśli ϕ jest parametryzacją powierzchni S, to $\phi^*ds_2 = \|\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\| =: \kappa$, zaś $\boldsymbol{n}\circ\phi = \frac{1}{\kappa}\big(\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\big)$, więc $\phi^*\big((\vec A|\boldsymbol{n})ds_2\big) = (\vec A\circ\phi(u)|\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi}{\partial u_2})|du_1\wedge du_2|$, zaś $\phi^*(\vec A\,d\vec\sigma) = \big(A_1\circ\phi(u)\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u_1,u_2)}+\ldots\big)du_1\wedge du_2 = (\vec A\circ\phi(u)|\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\times\frac{\partial\phi}{\partial u_2})du_1\wedge du_2$, skąd teza.

16. $\phi(z,\varphi) := (az\cos\varphi, bz\sin\varphi, z)$, wtedy $\phi^*ds_2 = z\sqrt{a^2b^2+a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,|dz\wedge d\varphi|$. *Odp.* $I_1 = \frac{\pi(a^2+2a^2b^2+b^2)c^3}{3ab}$, $I_2 = 2\pi abc$.

1. **Dwoistości i izomorfizmy Weyla**. Przypomnijmy: *przestrzeń k-wektorów* $\bigwedge^k V$ można określić jako $\left(\bigwedge^k V^*\right)^*$, tzn. przestrzeń sprzeżoną do $\bigwedge^k V^*$; dla $v_1, \ldots, v_k \in V$ element $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \bigwedge^k(V)$ określony jest warunkiem

$$\forall \sigma \in \bigwedge^k V^* : \ \left\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_k, \sigma \right\rangle := \sigma(v_1, \ldots, v_k);$$

wynika stąd, że jeśli $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą V, to k-wektory $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ tworzą bazę $\bigwedge^k V$; w szczególności każdy element $\bigwedge^k V$ jest sumą pewnych k-wektorów *prostych*, tzn. postaci $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$. Wprost z określenia: każda funkcja antysymetryczna k-liniowa $\varphi : V \times \ldots \times V \to W$ ma postać $\varphi(v_1, \ldots, v_k) = \tilde{\varphi}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k)$, gdzie $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(\bigwedge^k V; W)$; istotnie, weźmy bazę $w_1, \ldots, w_m$ przestrzeni W i rozpiszmy φ jako $w_1\varphi_1 + \ldots + w_k\varphi_k$; wtedy każde $\varphi_i : V \times \ldots \times V \to \mathbf{R}$ jest k-liniowe antysymetryczne, czyli $\varphi_i \in V^k(V^*)$; z określenia $\bigwedge^k V$ i izomorfizmu $\left(\bigwedge^k V\right)^* = \left(\bigwedge^k (V^*)\right)^{**} = \bigwedge^k(V^*)$ wynika, że wzory $\tilde{\varphi}_i(v_1 \wedge \ldots v_k) := \varphi_i(v_1, \ldots, v_k)$ określają (jednoznacznie) pewne formy liniowe $\tilde{\varphi}_i \in \left(\bigwedge^k V\right)^*$. Pozostaje zauważyć, że odwzorowanie liniowe $\tilde{\varphi} := w_1\tilde{\varphi}_1 + \ldots + w_k\tilde{\varphi}_k : \bigwedge^k V \to W$ ma żądaną własność.

'Twistowanie' przestrzeni wektorowej W, czyli pomnożenie tensorowe W przez daną 1-wymiarową przestrzeń D. Oto konstrukcja: W zbiorze $(D \setminus \{0\}) \times W$ relacja $(d, w) \sim (d', w') \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}^* : \ d = \lambda d', \ w = \lambda^{-1} w'$ jest równoważnością; niech $d \otimes w$ oznacza $\sim$-klasę pary (d, w), zaś $D \otimes W := \{d \otimes w \ \ d \in D, \ d \neq 0, \ w \in W\}$ — zbiór wszystkich klas. Wprowadźmy w zbiorze $D \otimes W$ strukturę wektorową, zauważając że każde dwa jego elementy mają reprezantanty ze wspólnym d, oraz definiując $\alpha_1 \cdot d \otimes w_1 + \alpha_2 \cdot \otimes w_2 := d \otimes (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)$ dla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$. Wtedy $D \otimes W$ staje się przestrzenią wektorową, $\dim D \otimes W = \dim W$ (gdyż $W \ni w \mapsto d_0 \otimes w \in D \otimes W$, dla ustalonego $d_0 \in D \setminus 0$, jest izomorfizmem); ponadto *mnożenie tensorowe* $\otimes : D \times W \to D \otimes W$ jest dwuliniowe ($0 \otimes w := 0$). **Uwaga**. Dla $\dim D, \dim W > 1$ konstrukcja $d \otimes W$ jest inna, ponadto wtedy $D \otimes W$æ$\{d \otimes w\}$!

(1) Weźmy teraz $D := \bigwedge^n V^*$, gdzie $n = \dim V$, a więc $\dim D = 1$. Dla pary

2. Stara, jeszcze nie upgradowana wersja; trzeba się pozbyć ω przez stos. twistowanie:

(1) Ustalmy $\neq 0$ formę objętości $\omega \in \bigwedge^n V^*$, $n := \dim V$; dowolność wyboru ω jest niewielka, bo $\dim \bigwedge^n V^* = 1$. Dla pary $k, l \in \overline{0, n}$ takich, że $k + l = n$, odwzorowanie $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k, \ w_1 \wedge \ldots \wedge w_l) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l)$ ma rozszerzenie do dwuliniowego odwzorowania $\mathrm{b}^{(k,l)} : \ \bigwedge^k W \times \bigwedge^l V \to \mathbf{R}$; jest ono oczywiście dwuliniowe; co więcej, $\mathrm{b}^{(k,l)}$ jest dwoistością (tzw. *dwoistością Weyla*, zależącą od ω) dla pary przestrzeni $\bigwedge^k V$, $\bigwedge^l V$.

Istotnie, $\mathrm{b}^{(k,l)}(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_l}) = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_l})$ jest $\neq 0 \iff$ zbiór $\{j_1, \ldots, j_l\}$ jest dopełnieniem $\{i_1, \ldots, i_k\}$ w $\overline{1, n}$; widać stąd, że jeśli $\xi = \sum_{x}^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \neq 0$ (tzn. $\exists i_1 < \ldots < i_k : \ x^{i_1 \cdots i_k} \neq 0$), to $\exists j_1 < \ldots j_l : \mathrm{b}^{(k,l)}(\xi, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_l}) \neq 0$.

(2) Przy ustalonej objętości $0 \neq \omega \in \bigwedge^n V^*$ oraz $k + l = n$ odwzorowanie $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto \mathrm{W}^{(k)}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) := \omega(v_1, \ldots, v_k, \cdot, \ldots, \cdot) \in \bigwedge^k V^*$ daje się przez liniowość rozszerzyć na całą przestrzeń $\bigwedge^k V$. Dostajemy w ten sposób liniowy izomorfizm $\mathrm{W}^{(k)} : \bigwedge^k V \to \bigwedge^l V^*$ (zwany *izomorfizmem Weyla*), zależący od objętości ω.

Jeśli $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą V, zaś $\omega = c\, e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$, to $\boxed{\mathrm{W}^{(k)} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = (\pm) c\, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_l}}$ dla $i_1 < \ldots < i_k$, gdzie $j_1 < \ldots < j_l$ jest ciągiem takim, że $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l\} = \overline{1, n}$, zaś $(\pm) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 \ldots k & k+1 \ldots n \\ i_1 \ldots i_k & j_1 \ \ldots j_l \end{pmatrix}$.
W szczególności $W^{(1)}\left(x^1 e_1 + \ldots + x^n e_n\right) = c(x^1 e_2 \wedge \ldots \wedge e_n + \text{cycl}) = c \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x^i e_1 \wedge \ldots \widehat{e_i} \ldots \wedge e_n$.

Jak wiemy z algebry, każdej dwoistości $\mathrm{b} : U_1 \times U_2 \to \mathbf{R}$ odpowiada (i to bijektywnie) izomorfizm $U_1 \to {U_2}^*$, dany wzorem $u \mapsto \mathrm{b}(u, \ldots)$; biorąc tu $U_1 = \bigwedge^k V$, $U_2 = \bigwedge^l V$ widzimy, że istnieje ścisły związek między $\mathrm{b}^{(k,l)}$, a $\mathrm{W}^{(k)}$.

(1)* Zastąpmy ω *objętością absolutną* $0 \neq v \in ps \bigwedge^n V^*$; tak jak w (1) dostaniemy wtedy 'pseudodwoistość' $\hat{\mathrm{b}}^{(k,l)} : \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \to ps\, V$; są z nią ściśle związane dwoistości $\bigwedge^k V \times ps \bigwedge^l V \to \mathbf{R}$ oraz $ps \bigwedge^k V \times \bigwedge^l V \to \mathbf{R}$.

(2)* Podobnie jak w (2), objętość absolutna v określa też izomorfizmy $\bigwedge^k V \to ps \bigwedge^l V^*$ oraz $ps \bigwedge^k V \to \bigwedge^l V^*$.

Norma; zupełność przestrzeni

1. Sprawdzić, że przestrzeń $X = C[-1,1]$ z normą $\|x\| := \int_{-1}^{1} |x(t)|dt$ nie jest zupełna.

Niech $x_n(t) := \begin{cases} nt, & \text{gdy } |t| \leqslant \frac{1}{n}, \\ \operatorname{sgn} t, & \text{gdy } \frac{1}{n} \leqslant |t| \leqslant 1; \end{cases}$ wtedy dla $m < n$ mamy $x_n(t) - x_m(t) = \begin{cases} (n-m)t \geqslant 0, & t \in [0, {}^1\!/_n], \\ 1 - mt \geqslant 0, & t \in [{}^1\!/_n, {}^1\!/_m], \\ 0, & t \in [{}^1\!/_m, 1], \end{cases}$ więc wskutek nieparzystości $\|x_n - x_m\| = 2\int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)|dt = 2(n-m)\frac{1}{2n^2} + 2\left[t - \frac{m}{2}t^2\right]_{1/n}^{1/m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$. Zatem (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego. Przypuśćmy, że $x_n \longrightarrow x$ w $(X, \|\cdot\|)$, czyli $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$. Wtedy dla $\varepsilon \in]0,1[$ oraz $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ mamy $\int_\varepsilon^1 |x(t) - 1|dt = \int_\varepsilon^1 |x(t) - x_n(t)|dt \leqslant \int_{-1}^1 \ldots dt = \|x - x_n\| \longrightarrow 0$; stąd $\int_\varepsilon^1 |x(t) - 1|dt = 0$, a więc, z ciągóści $|x(t) - 1|$, $x(t) = 1$ na $[\varepsilon, 1]$. Wobec tego przy $\varepsilon \searrow 0$ dostajemy $\forall t \in]0,1] : x(t) = 1$. Analogicznie dostajemy $\forall t \in [-1, 0[: x(t) = -1$, co jest sprzeczne z ciągłością x. Zatem ciąg (x_n) nie ma granicy.

2. Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C^1[0,1]$ normy $\|x\|_1 := \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)|$, $\|x\|_2 := |x(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)|$ i $\|x\|_3 = \int_0^1 |x(t)|dt + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)|$ są równoważne. Dowieść, że przestrzeń X jest zupełna względem tych norm.

Oczywiście $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1$, a ze wzoru $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)ds$ dostajemy $|x(t)| \leqslant |x(0)| + \int_0^t \sup|\dot{x}|ds \leqslant \|x\|_2$, skąd $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 + \|x\|_2$; zatem $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$. Jasne, że $\|x\|_3 \leqslant \|x\|_1$; ponadto $\|x\|_3 \geqslant \int_0^1 |x(t)|dt \geqslant \inf|x(t)| = |x(t_0)|$, a z tw. Lagrange'a $|x(t) - x(t_0)| = \left|\dot{x}(s)(t - t_0)\right| \leqslant \sup|\dot{x}(s)| \leqslant \|x\|_3$; zatem $\forall t : |x(t)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0)| \leqslant 2\|x\|_3$, więc $\|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_3 + \|x\|_3$, skąd $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będzie ciągiem Cauchy'ego w X. Skoro $\|\dot{x}_m - \dot{x}_n\|_\infty \leqslant \|x_m - x_n\|_2$, ciąg pochodnych $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \ldots$ jest ciągiem Cauchy'ego wzgl. normy $\|y\|_\infty = \sup_t |y(t)|$ przestrzeni $C[0,1]$; z zupełności tej ostatniej wynika więc, że $\|\dot{x}_n - y\|_\infty \longrightarrow 0$ dla pewnego $y \in C[0,1]$. Zarazem $|x_m(0) - x_n(0)| \leqslant \|x_m - x_n\|_2$, więc istnieje granica $\alpha := \lim x_n(0)$. Określmy $x \in X$ tak, by $x(0) = \alpha$, $\dot{x} = y$, tzn. wzorem $x(t) := \alpha + \int_0^t y(s)ds$; wtedy $\|x_n - x\|_2 = |x_n(0) - \alpha| + \|\dot{x}_n - y\|_\infty \longrightarrow 0$, czyli $x_n \longrightarrow x$ w przestrzeni $(X, \|\cdot\|_2)$.

3. Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C[a,b]$ norma $\|x\|_\infty := \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ jest mocniejsza od normy $\|x\|_1 := \int_a^b |x(t)|dt$, tzn. $\exists C_0 > 0 : \forall x : \|x\|_1 \leqslant C_0\|x\|_\infty$, natomiast $\neg\exists C > 0 : \forall x : \|x\|_\infty \leqslant C\|x\|_1$.

(1) Skoro $\forall t : |x(t)| \leqslant \|x\|_\infty$, to $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt \leqslant \int_a^b \|x\|_\infty dt = (b-a)\|x\|_\infty$, więc $C_0 := b - a$ jest dobre. (2) Określmy $x_n \in X$ wzorem $x_n(t) := \max\bigl(0, 1 - n(t-a)\bigr)$, wtedy $\|x_n\|_\infty = 1$, natomiast dla dost. dużych n mamy $\|x_n\|_1 = \int_a^{a+\frac{1}{n}} [1 - n(t-a)]dt = \frac{1}{2n}$.

Operatory liniowe; ograniczoność

4. Ustalmy $t_0 \in [-1,1]$. Sprawdzić, że na przestrzeni $X = C[-1,1]$ funkcjonał *ewaluacji* $\phi : X \to \mathbf{R}$, $\phi(x) := x(t_0)$, jest nieciągły dla normy $\|x\|_1 := \int_{-1}^1 |x(t)|dt$, natomiast jest ciągły dla normy $\|x\|_\infty := \sup|x(t)|$.

ϕ jest liniowy, więc ciągłość $\Leftrightarrow$ ograniczoność. (a) Dla normy $\|x\|_1 = \int |x|$ weźmy $x_n(t) := \max\bigl(0, 1 - n|t - t_0|\bigr)$, wtedy $\phi(x_n) = x_n(t_0) = 1$, zaś $\|x\|_1 = \int_{-1}^1 |x| \leqslant 2\int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} [1 - n(t - t_0)]dt = \frac{1}{n}$. (b) Dla $\|x\|_\infty = \sup|x|$ mamy $\|\phi(x)\| = |x(t_0)| \leqslant \sup\|x\|_\infty$, więc ϕ jest ograniczony i $\|\phi\| \leqslant 1$. Co więcej, $\|\phi\| = 1$, bo dla $x(t) = \mathrm{const} = 1$ jest $\phi(x) = 1 = \|x\|_\infty$.

5. Niech $X = C\bigl([0,1]; \mathbf{R}\bigr)$ z metryką $d(x,y) = \|x - y\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)|$. Określmy odwzorowanie $P : X \to X$ wzorem $P(x) = y \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] : y(t) = x(0)(1-t) + x(1)t$. Sprawdzić, że odwzorowanie P jest ciągłe.

Oczywiście P jest liniowe. Zauważmy, że $\sup\limits_{t\in[0,1]} |a(1-t) + bt| = \max(|a|, |b|)$, gdyż jeśli $\gamma := \max(|a|, |b|)$, to $|a(1-t) + bt| \leqslant |a|(1-t) + |b|t \leqslant \gamma(1-t) + \gamma t = \gamma$ dla $t \in [0,1]$, przy czym dla $t = 0$ lub $t = 1$ zamiast $\leqslant$ jest równość. Zatem dla $y = P(x)$ mamy $\|y\| = \max\bigl(|x(0)|, |x(1)|\bigr) \leqslant \|x\|$; stąd już wynika teza: $\|P(x) - P(\hat{x})\| = \|P(x - \hat{x})\| \leqslant \|x - \hat{x}\|$, czyli P jest (jednostajnie) ciągłe.

6. Na przestrzeni $X = C\bigl([0,1]; \mathbf{R}\bigr)$ z normą $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)|$ określmy odwzorowanie liniowe $Q : X \to X$ wzorem $Q(x) = z \Leftrightarrow \forall t \in [0,1] : z(t) = x(t) - (1-t)x(0) - tx(1)$. Sprawdzić, że Q jest ograniczone i znaleźć $\|Q\|$.

Zauważmy, że jeśli $z = Q(x)$, to $|z(t)| \leqslant |x(t)| + |(1-t)x(0)| + |tx(1)| \leqslant \|x\| + (1-t)\|x\| + t\|x\| = 2\|x\|$, więc $\|Q(x)\| = \|z\| \leqslant 2\|x\|$; zatem $\|Q\| \leqslant 2$. Zarazem jeśli $x \in X$ ma własności $\|x\| = 1$, $x(0) = x(1) = -1$ i $\exists t_0 : x(t_0) = 1$ $\bigl[$przykłady: $x(t) = 2\sin \pi t - 1$ albo $x(t) = -\cos 2\pi t$ albo $x(t) = 1 - |4t - 2|\bigr]$, to $z(t) = x(t) + 1 \in [0,2]$, $z(t_0) = 2$, więc $\|z\| = 2$; to dowodzi, że $\|Q\| = 2$.

7. Operator liniowy $F : \boldsymbol{l}^\infty \to \boldsymbol{l}^2$ określamy wzorem $F\boldsymbol{x} := \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \ldots\right)$. Sprawdzić, że ta definicja jest poprawna i F jest ograniczony; znaleźć $\|F\|$. Zbadać injektywność i surjektywność F oraz ciągłość $F^{-1} : W \to \boldsymbol{l}^\infty$, $W := \operatorname{im} F$.

$\|F\|^2 = \sum \left|\frac{x_n}{n}\right|^2 \leqslant \sum \frac{1}{n^2}\|\|^2 = S\|\|^2$, gdzie $S := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; zatem F ograniczony i $\|F\| \leqslant \sqrt{S}$. Zarazem dla $= (1,1,1,\ldots)$ mamy $\|F\| = \sqrt{S}\,\|\|$, więc $\|F\| = \sqrt{S}$. Jasne, że $\ker F = \{\mathbf{0}\}$, czyli F jest injektywny. Natomiast jeśli $y = \bigl(n^p\bigr) = (1^p, 2^p, 3^p, \ldots)$, to $= F \iff = \bigl(n^{p+1}\bigr)$, więc $\in W = \operatorname{im} F \iff p \leqslant -1$, zaś $\in {}^2 \iff \sum\limits_n n^{2p} < +\infty \iff 2p < -1 \iff p < -\frac{1}{2}$. Zatem w ^{2}

istnieją elementy spoza W, np. ciągi $\left(y^p\right)$ dla $p \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right[$; także $\left(\frac{\log n}{n}\right) \in {}^2 \setminus W$. Sprawdzimy, że operator $G = F^{-1} : W \to {}^\infty$, $G = (ny_n)$, jest nieciągły: Dla $= {}_n = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ mamy $\|{}_n|_2 = 1$, $\|G{}_n\|_\infty = n$, więc $\sup\Big\|G\| : \|\| = 1\Big\} = +\infty$.

Uwaga. W jest niedomkniętym podzbiorem ^{2}. Istotnie, niech $:= \left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$ oraz ${}^{(n)} := \left(1^{-\frac{2}{3}}, 2^{-\frac{2}{3}}, \ldots, n^{-\frac{2}{3}}, 0\ldots\right)$ dla $n \in \mathbf{N}$; wtedy ${}^{(n)} \in W$, $\in {}^2 \setminus W$, oraz $\| - {}^{(n)}\|_2{}^2 = \sum\limits_{k>n} k^{-\frac{4}{3}} = \left(n\text{-tą resztą szeregu zbieżnego } \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}\right)$, więc $W \ni {}^{(n)} \longrightarrow \notin W$.

8. Niech $X_0 := C^0[0,1]$, $X_1 := C^1[0,1]$. Zbadać ciągłość (ewentualnie obliczyć normę) operatora różniczkowania $D : X_1 \to X_0$, $Dx = \dot{x}$, jeśli w X_0 i X_1 normy zadane są wzorami: (a) $\|x\|_1 := \int_0^1 |x(t)|dt$, $\|y\|_0 := \int_0^1 |y(t)|dt$; (b) $\|x\|_1 := \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$, $\|y\|_0 := \sup\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$; (c) $\|x\|_1 := \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\dot{x}(t)|$, $\|y\|_0 := \sup\limits_{t\in[0,1]} |y(t)|$.

(a) D jest nieciągły, gdyż dla $x_n(t) := \sin(n\pi t)$ mamy $\|x_n\|_1 = n\int_0^{1/n} \sin n\pi t\, dt = \frac{2}{\pi}$, $\|Dx_n\|_0 = n\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 2n$.

(b) D jest nieciągły, gdyż $\|x_n\|_1 = \sup|\sin n\pi t| = 1$, $\|Dx_n\|_0 = \sup|n\pi\cos(n\pi t)| = n\pi$.

(c) D jest ciągły: $\|Dx\|_0 = \sup|Dx(t)| = \sup|\dot{x}(t)| \leqslant \|x\|_1$. Ponadto $\|x_n\|_1 = 1 + n\pi$, $\|Dx_n\|_0 = n\pi$, więc $\|D\| \geqslant \frac{n\pi}{1+n\pi}$ i $\|D\| = 1$.

9. Niech $X = C^0[0,1]$, $Y = C^1[0,1]$ z normami $\|x\|_0 := \sup|x(t)|$, $\|y\|_1 := \sup|y(t)| + \sup|\dot{y}(t)|$. Określmy operator $F : X \to Y$ wzorem $(Fx)(t) := \int_0^t x(s)ds$. Zbadać, czy F jest ograniczony, a jeśli tak, znaleźć jego normę $\|F\|$. Zbadać, czy operator $F^{-1} : \operatorname{im} F \to X$ jest ograniczony, ewentualnie znaleźć jego normę.

Niech $y = Fx$, tzn. $y(t) = \int_0^t x(s)ds$; wtedy $|y(t)| \leqslant \int_0^t |x| \leqslant \int_0^1 |x| \leqslant \int_0^1 \|x\|_0 = \|x\|_0$, ponadto $\dot{y} = x$, więc $\sup|\dot{y}(t)| = \|x\|_0$. Stąd $\|y\|_1 \leqslant 2\|x\|_0$, czyli $\forall x : \|Fx\|_1 \leqslant 2\|x\|_0$, a więc F jest ograniczony i $\|F\| \leqslant 2$. Zarazem dla $x(t) = \text{const} = 1$ mamy $\|Fx\|_1 = 2\|x\|_0$, a więc $\|F\| = 2$. Zauważmy, że $\forall x \in X : Fx \in W := \{y \in Y : y(0) = 0\}$, a z drugiej strony $\forall y \in W : y = F\dot{y} \in \operatorname{im} F$, gdyż $y(t) = y(0) + \int_0^t \dot{y}(s)ds$; zatem $\operatorname{im} F = W$. Skoro $F^{-1}y = \dot{y}$ dla $y \in W$ oraz $\|F^{-1}y\|_0 = \sup|\dot{y}| \leqslant \|y\|_1$, więc odwzorowanie $F^{-1}y = \dot{y}$ jest ograniczone i $\|F^{-1}\| \leqslant 1$. Zarazem dla $y(t) = \sin\omega t$ mamy $y \in W$, $x = F^{-1}y = \dot{y}$, $x(t) = \omega\cos\omega t$, $\|y\|_1 = \sup|y| + \sup|x| = 1 + \omega$ (dla $\omega \geqslant \frac{\pi}{2}$) oraz $\|x\|_0 = \sup|x| = \omega$, więc $\frac{1}{\|y\|}\|F^{-1}y\| = \frac{\omega}{1+\omega} \longrightarrow 1$ przy $\omega \to \infty$, co dowodzi, że $\|F\| \geqslant 1$; zatem $\|F\| = 1$.

10. Dla $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ oznaczmy $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ oraz $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \geqslant 1\}$. Jak wiemy, $V = \boldsymbol{l}^1 := \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_1 < \infty\}$ i $W = \boldsymbol{l}^\infty := \{\boldsymbol{x} : \|x\|_\infty < \infty\}$ są przestrzeniami Banacha względem tych dwu norm. (a) Zbadać, czy operator liniowy $F : V \to W$, dany wzorem $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots)$, jest ograniczony; jeśli tak, to znaleźć jego normę. (b) Zbadać, czy operator $F^{-1} : \operatorname{im} F \to V$ jest ograniczony.

(a) Dla $\in V$ oraz $k \in N$ mamy $|x_1 + \ldots + x_k| \leqslant |x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|\|_1$, więc $\|F()\|_\infty = \sup\limits_k |x_1 + \ldots + x_k| \leqslant \|\|_1$; zatem $\|F\| \leqslant 1$; zarazem dla $= (1,0,0,\ldots)$ mamy $F() = (1,0,0,\ldots)$, więc $\|F()\|_\infty = 1 = \|\|_1$; stąd $\|F\| \geqslant 1$, czyli $\|F\| = 1$.

(b) Dla $m \in \mathbf{N}$ weźmy $:= (1,-1,1,\ldots,(-1)^{m-1},0,0,\ldots) \in V$, wtedy $F() = (1,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$, więc $\|\|_1 = m$, $\|F()\|_\infty = 1$. Dowodzi to, że nie jest spełniony warunek $\exists C > 0 : \forall \in V : \|\|_1 \leqslant C\|F()\|_\infty$, a więc operator F^{-1} jest nieciągły.

Uwaga. Czym jest $\operatorname{im} F$? Oczywiście $\in \operatorname{im} F \iff \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - y_{n-1}| < \infty$; jest to warunek mocniejszy od warunku zbieżności ciągu $= (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ (tzw. '*bezwzględna zbieżność ciągu*'); przykładem ciągu zbieżnego, ale nie bezwzględnie, jest $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

11. Dowieść, że jeśli funkcja $u : [a,b] \to \mathbf{K}$ jest ciągła([1]), to funkcjonał liniowy $\psi : C[a,b] \to \mathbf{K}$, określony wzorem $\psi(v) := \int_a^b u(t)v(t)dt$, jest ciągły względem normy $\|v\| := \sup|v(t)\|$, przy czym $\|\psi\| = \int_a^b |u(t)|dt$.

Liniowość ψ jest oczywista. Skoro $|v(t)| \leqslant M := \|v\|$, to $|\psi(v)| = \left|\int \ldots dt\right| \leqslant \int_a^b |u(t)v(t)|dt \leqslant \int_a^b M|u(t)|dt$, czyli $\forall v : |\psi(v)| \leqslant \|v\| \cdot \int_a^b |u(t)|dt$, skąd wynika ciągłość ψ i to, że $\|\psi\| \leqslant I_u := \int_a^b |u(t)|dt$. Pokażemy, że $\|\psi\| \geqslant I_u$. Dla zadanego $\varepsilon > 0$, takiego że $\varepsilon < \sup|u|$, weźmy $P_\varepsilon := \{t \in [a,b] : |u(t)| \geqslant \varepsilon\}$, $Q_\varepsilon := [a,b] \setminus P_\varepsilon$. Określmy **ciągłą** funkcję $v : [a,b] \to \mathbf{R}$ warunkami (1) $v(t) = \frac{|u(t)|}{u(t)}$ dla $t \in P_\varepsilon$; (2) $v(t)$ jest wielomianem st. 1 na każdym z przedziałów zbioru $Q_\varepsilon := [a,b] \setminus P_\varepsilon$. Wtedy $\|v\| = 1$ (bo $\forall t : |v(t)| \leqslant 1$), $u(t)v(t) = |u(t)|$ na P_ε, więc $\psi(v) - I_u = \int_a^b \big(uv - |u|\big) = \int_{Q_\varepsilon} \big(uv - |u|\big)$. Przy tym $\big|u(t)v(t) - u(t)\big| \leqslant |u(t)| \cdot |1 - v(t)| \leqslant 2\varepsilon$ na Q_ε, więc $|\psi(v) - I_u| \leqslant 2(b-a)\varepsilon$ oraz $\|\psi\| \geqslant \frac{|\psi(v)|}{\|v\|} = |\psi(v)| \geqslant I_u - |\psi(v) - I_u| \geqslant I_u - 2(b-a)\varepsilon$, skąd przy $\varepsilon \to 0$ wynika $\|\psi\| \geqslant I_u$.

12. Korzystając z poprzedniego zadania sprawdzić, że jeśli $u : [a',b'] \times [a,b] \to \mathbf{K}$ jest ciągła (wystarczy całkowalność), to operator liniowy $F : C[a,b] \to C[a',b']$, określony wzorem $(Fv)(s) := \int_a^b u(s,t)v(t)dt$, jest ciągły, przy czym

$$\|F\| = \sup_{s\in[a',b']} \int_a^b |u(s,t)|dt.$$

13. Znaleźć normę operatora $F(\boldsymbol{x}) := \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$, jeśli normy w $X = \mathbf{R}^3$ i $Y = \mathbf{R}^2$ zdefiniowane są wzorami:

[1] Wystarczy założyć, że u jest całkowalna w sensie Riemanna; trzeba wtedy zmodyfikować dobór P_ε tak, by u na P_ε była ciągła. Jest to możliwe, gdyż tw. Lebesguea mówi, że funkcja $u : [a,b] \to \mathbf{K}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przeliczalna rodzina podprzedziałów $[a,b]$, o sumie długości mniejszej od $< \varepsilon$, pokrywająca wszystkie punkty nieciągłości u; tyvh punktów nieciągłości może być dużo, np. dla funkcji Dirichleta są to wszystkie punkty wymierne z $[a,b]$.

(a) $\|\boldsymbol{x}\| := \max|x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \max|y_i|$; (b) $\|\boldsymbol{x}\| := \max|x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \sum\limits_i |y_i|$;

(c) $\|\boldsymbol{x}\| := \sum\limits_j |x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \max|y_i|$; (d) $\|\boldsymbol{x}\| := \sum\limits_j |x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \sum\limits_i |y_i|$.

W (b) i (d) skorzystamy z faktu, że jeśli $P \in \mathbf{R}^n$ jest wielościanem (będzie nim $P = \{ : \|x\| \leqslant 1\}$), a funkcja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jest wypukła, to $\sup f(P)$ jest wartością f w którymś z wierzchołków P. Istotnie, każdy $\in P$ ma postać $= t_{1 1} + \ldots t_{r r}$, gdzie $_i$ są pewnymi wierzchołkami, $t_i \geqslant 0$ oraz $\sum\limits_i t_i = 1$; stąd z wypukłości $f() \leqslant \sum\limits_i t_i f(_i) \leqslant \sum\limits_i t_i \max\big(f(_1), \ldots, f(_r)\big) = \max\big(f(_1), \ldots, f(_r)\big)$.

(a) $\|F\| = 13$, gdyż mamy następujące nierówności, które dla $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ stają się równościami:

$$\|F\| = \max\big(|3x_1 - 4x_2 + x_3|,\ |5x_1 + 2x_2 - 6x_3|\big) \leqslant \max\big(3|x_1| + 4|x_2| + |x_3|, 5|x_1| + 2|x_2| + 6|x_3|\big) \leqslant \|x\| \max(3 + 4 + 1,\ 5 + 2 + 6).$$

(b) Jeśli $\in P$, to $\|F()\| =: f() := |3x_1 - 4x_2 + x_3| + |5x_1 + 2x_2 - 6x_3| \leqslant \max\Big(f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}), f(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}), f(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}), f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix})\Big) =$
$= \max(0 + 1, 6 + 9, 8 + 3, 2 + 13) = 15$ i istnieją wierzchołki $P = \{ : \max|x_i| \leqslant 1\}$, w których $\|F()\| = 15\|x\|$, więc $\|F\| = 15$.

(c) $\|F()\| = \max\big(|3x_1 - 4x_2 + x_3|, |5x_1 + 2x_2 - 6x_3|\big) \leqslant \max\big(4|x_1| + 4|x_2| + 4|x_3|, 6|x_1| + 6|x_2| + 6|x_3|\big) = 6\|x\|$, przy czym równość

$\|F()\| = 6\|x\|$ zachodzi np. dla $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a zatem $\|F\| = 6$.

(d) $\|F\| = \sup\{f() : \in P\}$, gdzie $f() = \|F()\| = |3x_1 - 4x_2 + x_3| + |5x_1 + 2x_2 - 6x_3|$; skoro funkcja f jest wypukła, a $P = \{ : \|x\| \leqslant 1\}$ jest ośmiościanem o wierzchołkach $\pm_1, \pm_2, \pm_3$, to $\|F\| = \max\big(f(_1), f(_2), f(_3)\big) = \max(3 + 5, 4 + 2, 1 + 6) = 8$.

Trochę prościej: $\|F()\| = \|\sum\limits_i x_i F(_i)\| \leqslant \sum\limits_i |x_i| \cdot \|F(_i)\| \leqslant \sum\limits_i |x_i| \max\big(|F_1|, |F_2|, |F_3|\big) = \|\|\max\big(|F_1|, |F_2|, |F_3|\big)$, przy czym równość zachodzi, gdy jest stosownym $_i$. Zatem $\|F\| = \max\big(\|F_1\|, \|F_2\|, \|F_3\|\big) = \max(8, 6, 7) = 8$.

Uwaga. (c) i (d) można natychmiast otrzymać stosując następujący fakt:

14. Określmy na $\mathbf{K}^m$ normę $\|\boldsymbol{x}\| := \sum\limits_j |x_j|$. Dowieść, że jeśli Y jest dowolną przestrzenią unormowaną, a $F : \mathbf{K}^m \to Y$ — operatorem liniowym, to F jest ograniczony i $\|F\| = \max\limits_{j=1,\ldots,m} \|F\boldsymbol{e}_j\|$ [$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ — baza standardowa $\mathbf{K}^m$].

Oznaczmy $C_F := \max\limits_{j=1,\ldots,m} \|F_j\| = \|F_{j_0}\|$; wtedy $\|F\| = \|\sum\limits_j x_j F_j\| \leqslant \sum\limits_j \|x_j F_j\| = \sum\limits_j |x_j| \|F_j\| \leqslant \sum\limits_j |x_j| C_F = C_F\|x\|$, a więc F jest ograniczony i $\|F\| \leqslant C_F$; zarazem $\|F_j\| = C_F\|_j\|$ dla $j = j_0$, więc także $\|F\| \geqslant C_F$, tzn. $\|F\| = C_F$.

15. Określmy na $\mathbf{K}^m$ normę $\|\boldsymbol{x}\| := \max\limits_{j=1,\ldots,m} |x_j|$. Sprawdzić, że jeśli Y jest przestrzenią unormowaną, a $F : \mathbf{K}^n \to Y$ — operatorem liniowym, to F jest ograniczony i $\|F\| \leqslant \sum\limits_{j=1}^m \|F\boldsymbol{e}_j\|$, lecz liczby $\|F\boldsymbol{e}_j\|$ nie określają wartości $\|F\|$.

Niech $C_F := \sum\limits_j \|F_j\|$; wtedy $\|F\| = \|\sum\limits_j x_j F_j\| \leqslant \sum\limits_j \|x_j F_j\| = \sum\limits_j |x_j| \|F_j\| \leqslant \sum\limits_j \|\|\,\|F_j\| = C_F\|x\|$, a więc $\|F\| \leqslant C_F$. Dla $n = 2$ oraz $F() := x_1 + x_2$ mamy $\|F_1\| = \|F_2\| = 1$, $\|F\| = 2$. Dla $F := \mathrm{id} : \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2$ mamy $\|F_1\| = \|F_2\| = 1$, $\|F\| = 1$.

16. Uogólniając wyniki ?? wyrazić przez wyrazy $F^i_{\ j}$ macierzy $\boldsymbol{F} \in \mathbf{K}^m{}_n$ normę operatora $F : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^n$, $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$, jeśli normy w przestrzeniach $X = \mathbf{K}^m$ i $Y = \mathbf{K}^n$ zdefiniowane są następującymi wzorami:

(a) $\|\boldsymbol{x}\| := \max|x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \max|y_i|$; (b)* $\|\boldsymbol{x}\| := \max|x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \sum\limits_i |y_i|$;

(c) $\|\boldsymbol{x}\| := \sum\limits_j |x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \max|y_i|$; (d) $\|\boldsymbol{x}\| := \sum\limits_j |x_j|$; $\|\boldsymbol{y}\| := \sum\limits_i |y_i|$.

(a) $\|F\| = \max\limits_{i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^m \big|F^i_{\ j}\big| = \sum\limits_{j=1}^m \big|F^{i_0}_{\ j}\big|$; kres $\{\|F\| : \|\| = 1\}$ jest osiągany dla takiego, że $\forall j : F^i_{\ j} x_j = |F^i_{\ j}|$, gdzie $i = i_0$.

(b) Dla $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ mamy $\|F\| = \max\Big\{\sum\limits_{i=1}^n \Big|\sum\limits_{j=1}^m F^i_{\ j} u_j\Big| : u_1, \ldots, u_m \in \{-1, 1\}\Big\}$, zob. uwagę w zadaniu ??.

Dla $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ i $m, n \geqslant 2$ znalezienie $\|F\|$ wydaje się niełatwe; nie wiem, czy można tu uzyskać jawny wzór. Oto wstępne kroki:

(1) Łatwo sprawdzić, że punkty ekstremalne dysku $\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbf{C}^m : \forall i : |z_i| \leqslant 1\}$ są postaci $(u_1, \ldots, u_m)$, $u_i \in U := \{z : |z| = 1\}$.

(2) Jeśli $z = z(\varphi) \in \mathbf{C}$ jest różniczkowalne względem $\varphi \in \mathbf{R}$, to $\frac{\partial}{\partial\varphi}|z| = \mathrm{Re}\left(\frac{\overline{z}}{|z|}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)$, jest to wzór typu $\frac{d}{dt}\|v\| = \left(\dot{v} \middle| \frac{v}{\|v\|}\right)$; biorąc tu $z = z_i = \sum\limits_{j=1}^m F^i_{\ j} u_j$, gdzie $u_j = e^{i\varphi_j}$, dostajemy $\frac{\partial}{\partial\varphi_j}|z_i| = \mathrm{Re}\,\frac{\overline{z}_i}{|z_i|} F^i_{\ j} i u_j$. Stąd dla $f(u_1, \ldots, u_m) := \sum\limits_{i=1}^n |z_i| = \sum\limits_{i=1}^n \Big|\sum\limits_{j=1}^m F^i_{\ j} u_j\Big|$ mamy wzór $\frac{\partial f}{\partial\varphi_j} = \sum\limits_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial\varphi_j}|z_i| = \mathrm{Re}(i\varrho_j)$, gdzie $\varrho_j := \sum\limits_{i=1}^n \frac{\overline{z}_i}{|z_i|} F^i_{\ j} u_j$. Zatem warunkiem ekstremum jest $\varrho_1, \ldots, \varrho_m \in \mathbf{R}$. Oznaczmy $r_i := |z_i| \in \mathbf{R}_+$, $v_i := \frac{z_i}{|z_i|} \in U$, wtedy można te wzory zapisać następująco: $\sum\limits_{i=1}^n v_i \overline{F}^i_{\ j} = \varrho_j u_j$, $\sum\limits_{j=1}^m F^i_{\ j} u_j = r_i v_i$, $\|F\| = f(u_1, \ldots, u_m) = r_1 + \ldots + r_n$.

(c) $\|F\| = \max\limits_{i,j} |F^i_{\ j}|$, gdyż $\|F\| = \|F\sum\limits_j x_j F_j\| \leqslant \sum\limits_j |x_j| \|F_j\| \leqslant \|\|\max\limits_j \|F_j\| = \|\|\max\limits_{i,j} |F^i_{\ j}|$ i kres jest osiągany dla $= _{j_0}$.

(d) $\|F\| = \max\limits_{j\leqslant m} \sum\limits_i |F^i{}_j|$, gdyż $\|F\| \leqslant \sum\limits_j |x_j| \|F_j\| \leqslant \|\| \max\limits_j \|F_j\| = \|\| \max\limits_j \sum\limits_i |F^i{}_j|$ i kres jest osiągany dla $= {}_{j_0}$.

17. Określmy w przestrzeni $\mathbf{K}^3$ normę wzorem $\|\boldsymbol{x}\| := \max(\gamma_1|x_1|,\, \gamma_2|x_2|) + |x_3|$, gdzie stałe $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ są zadane. Znaleźć normę funkcjonału $\psi : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}$, $\psi(\boldsymbol{x}) := a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, traktując $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{K}$ jako dane.

Niech $M = M() := \max(\gamma_1|x_1|,\, \gamma_2|x_2|)$, wtedy $|x_1| \leqslant \frac{M}{\gamma_1}$, $|x_2| \leqslant \frac{M}{\gamma_2}$, więc $|\psi()| \leqslant |a_1|\,|x_1| + |a_2|\,|x_2| + |a_3|\,|x_3| \leqslant |a_1|\frac{M}{\gamma_1} + |a_2|\frac{M}{\gamma_2} + |a_3|\,|x_3| = \left(\frac{|a_1|}{\gamma_1} + \frac{|a_2|}{\gamma_2}\right) M + |a_3|\,|x_3| \leqslant \max\left(\frac{|a_1|}{\gamma_1} + \frac{|a_2|}{\gamma_2},\, |a_3|\right)(M + |x_3|)$, czyli $|\psi()| \leqslant \max\left(\frac{|a_1|}{\gamma_1} + \frac{|a_2|}{\gamma_2},\, |a_3|\right)\|x\|$. Przy tym tego oszacownia nie można poprawić, gdyż dla $:= \frac{|a_1|}{a_1\gamma_1}{}_1 + \frac{|a_2|}{a_2\gamma_2}{}_2$ mamy $\|x\| = 1$, $\psi() = \frac{|a_1|}{\gamma_1} + \frac{|a_2|}{\gamma_2}$, natomiast dla $= \frac{|a_3|}{a_3}{}_3$ mamy $\|x\| = 1$, $\psi() = |a_3|$. Wobec tego wykazaliśmy, że $\|\psi\| = \max\left(\frac{|a_1|}{\gamma_1} + \frac{|a_2|}{\gamma_2},\, |a_3|\right)$.

18. Określmy w przestrzeni $\mathbf{K}^3$ normę wzorem $\|\boldsymbol{x}\| := \max\left(\frac{|x_1|}{\gamma_1} + \frac{|x_2|}{\gamma_2},\, |x_3|\right)$, gdzie stałe $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ są zadane. Znaleźć normę funkcjonału $\psi : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}$, $\psi(\boldsymbol{x}) := a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, traktując $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{K}$ jako dane.

$|\psi()| \leqslant \gamma_1|a_1|\frac{|x_1|}{\gamma_1} + \gamma_2|a_2|\frac{|x_2|}{\gamma_2} + |a_3|\,|x_3| \leqslant \max(\gamma_1|a_1|, \gamma_2|a_2|)\left(\frac{|x_1|}{\gamma_1} + \frac{|x_2|}{\gamma_2}\right) + |a_3|\,|x_3| \leqslant \max(\gamma_1|a_1|, \gamma_2|a_2|)\|x\| + |a_3|\|x\|$, a więc $\|\psi\| \leqslant \max(\gamma_1|a_1|,\, \gamma_2|a_2) + |a_3|$. Przy tym tego oszacownia nie można poprawić, gdyż dla $:= \gamma_1\frac{|a_1|}{a_1}{}_1 + \frac{|a_3|}{a_3}{}_3$ mamy $\|x\| = 1$ oraz $\psi() = \gamma_1|a_1| + |a_3|$; podobnie jest dla $:= \gamma_2\frac{|a_2|}{a_2}{}_2 + \frac{|a_3|}{a_3}{}_3|$. Wobec tego $\|\psi\| = \max(\gamma_1|a_1|,\, \gamma_2|a_2) + |a_3|$.

Różniczkowanie odwzorowań

19. **Przykłady badania różniczkowalności.**
$\boxed{1}$ Niech $f(x) := \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$, wtedy pochodne kierunkowe $\nabla_e f(0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} f(te)$ dla $e \neq 0$ nie istnieją; natomiast 'jednostronne pochodne kierunkowe' istnieją: $\lim\limits_{t\searrow 0} \frac{1}{t} f(tx) = f(x)$ (dodatnia jednorodność f).

$\boxed{2}$ Dla $f(x) := \sqrt[3]{{x_1}^3 + {x_2}^3}$ mamy $f(tx) = tf(x)$ (tzn. funkcja f jest jednorodna), więc pochodna kierunkowa istnieje: $\nabla_e f(0) = f(x)$, lecz jest nieliniowa; zatem f nie ma słabej pochodnej w punkcie $x = 0$.

20. Zbadać różniczkowalność funkcji $f : X \to Y$ (łatwe przykłady, improwizowane na konsultacjach 26.3'99):

(1) $f : X \to \mathbf{R}$, $f(\boldsymbol{x}) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$, przy czym $X = \mathbf{l}^1$ z normą $\|\boldsymbol{x}\| = \sum |x_n|$. Przydaje się spostrzeżenie: $|x_n| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$, więc $\sum\limits_n x_n^2 \leqslant \sum\limits_n \|\boldsymbol{x}\|\,|x_n| = \|\boldsymbol{x}\|^2$ oraz $\sum\limits_n |x_n h_n| \leqslant \sum\limits_n \|\boldsymbol{x}\|\,|h_n| = \|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{h}\|$ dla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in X$.

(1*) Uogólnienie: $f(\boldsymbol{x}) := \sum\limits_n \varphi(x_n)$, gdzie $\varphi \in C^1(\mathbf{R})$, $\varphi(0) = 0$; def. jest poprawna, bo $\forall : |x_n| \leqslant \|x\|$, więc $|\varphi(x_n)| \leqslant C|x_n|$, gdzie $C := \sup\{|\varphi'(t)| : |t| \leqslant \|x\|\}$. Pochodna: $f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} = \sum\limits_n \varphi'(x_n)h_n$ (zbieżny, bo $|\varphi'(x_n)| \leqslant C$).

(2) $X = C[0,1]$ z (normą sup) oraz $f : X \to X$, $f(x)(t) := \int_0^t s^3[x(\sin \pi s)]^2 ds$

WORKING...

21. W przestrzeni $V := C([0,1]; \mathbf{R})$ określmy normę wzorem $\|v\| := \sup\limits_{t\in[0,1]} |v(t)|$. Znaleźć wzór na pochodną $\nabla_h F(v)$ i zbadać różniczkowalność odwzorowania $F : V \to V$, zdefiniowanego wzorem $\big(F(v)\big)(t) := \displaystyle\int_0^t v^2 := \int_0^t \big(v(s)\big)^2 ds$.

Dla $v, h \in V$ oraz $\varepsilon \to 0$ mamy $\frac{1}{\varepsilon}\left[\big(F(v + \varepsilon h)\big)(t) - \big(F(v)\big)(t)\right] = 2\int_0^t vh + \varepsilon \int_0^1 h^2 \longrightarrow 2\int_0^t vh$. Stąd: (1) $\nabla_h F(v)$ istnieje i ma postać $\big(\nabla_h F(v)\big)(t) = 2\int_0^1 vh$; (2) jest to liniowe względem h; (3) $\|\nabla_h F(v)\| \leqslant 2\|v\| \cdot \|h\|$, gdyż $\left|\int_0^t vh\right| \leqslant \int_0^t |vh| \leqslant \int_0^1 \|v\| \cdot \|h\| = \|v\| \cdot \|h\|$, więc zależnośc od h jest też ciągła. Sprawdzimy, że jest to **pochodna mocna**: Reszta, tj. $r(v;h) := F(v + h) - F(v) - \nabla_h F(v) \in V$ ma postać $[0,1] \ni t \mapsto \int_0^t h^2$, więc $\|r(v;h)\| \leqslant \sup_t \left|\int_0^t h^2\right| \leqslant \sup_t \left|\int_0^1 h^2\right| \leqslant \int_0^1 \|h\|^2 = \|h\|^2$, skąd $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\|r(v;h)\|}{\|h\|} = 0$, QED.

22. Na $X = C[0,1]$ z normą $\|x\| := \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$ określmy funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ wzorem $f(x) := \int_0^1 t^2 x(t)x(1-t)dt$.
(a) Dla $x, h \in X$ obliczyć pochodną kierunkową $\nabla_h f(x) := \dfrac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(x + \varepsilon h)$. (b) Zbadać różniczkowalność f.

$\big(\nabla_h f(x)\big) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\big(f(x+\varepsilon h) - f(x)\big) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 t^2\left[x(t)h(1-t) + x(1-t)h(t) + \varepsilon h(t)h(1-t)\right]dt = \int_0^1 t^2\big(x(t)h(1-t) + x(1-t)h(t)\big)dt$. Sprawdzimy, że $\frac{1}{\|h\|} r(x;h)$ dąży do zera: otóż $r(x;h) = f(x+h) - f(x) - \nabla_h f(x) = \int_0^1 t^2 h(t)h(1-t)dt$, więc mamy oszacowanie $\|r(x;h)\| = \left|\int \ldots\right| \leqslant \int_0^1 t^2|h(t)h(1-t)|dt \leqslant \|h\|^2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}\|h\|^2$; stąd oczywiście wynika teza, tzn. różniczkowalność f.

23. Niech $X := C^0([0,1]; \mathbf{R})$ z normą $\|x\| := \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$ oraz $f : X \to X$, $f(x) := |x|$. Sprawdzić, że: (a) jeśli zbiór $Z_x := \{t \in [0,1] : x(t) = 0\}$ jest niepusty, to nie dla wszystkich $h \in X$ pochodna kierunkowa $\nabla_h f(x)$ istnieje; (b) dla każdego $x \in X$ takiego, że $Z_x = \emptyset$ funkcja f ma pochodną (mocną) w punkcie x.

(a) Jeśli $x(t_0) = 0$, lecz $h(t_0) \neq 0$, to dla $t = t_0$ nie istnieje $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}|x(t) + \varepsilon h(t)|$. (b) Niech $\epsilon := \operatorname{sgn} x(t) = \text{const}$, wtedy $\nabla_h f(x) = \epsilon h$, czyli $f'(x) = \epsilon\, \mathrm{id}_X$; przy tym $r(x;h) = |x+h| - |x| - \epsilon h$ jest zerem dla $\|h\| = \sup|h(t) \leqslant \delta := \inf|x(t)|$, gdyż $\epsilon\big(x(t) + h(t)\big) = |x(t)| \pm h(t) \geqslant 0$, czyli $|x + h| = \epsilon(x + h) = |x| + \epsilon h$. Zatem $r(x;h)$ znika dla $\|h\| \leqslant \delta$, QED.

Trudniejszy rachunkowo jest poniższy zespolony wariant tego zadania:

24. Niech $X := C^0([0,1];\mathbf{C})$ z normą $\|x\| := \sup\{|x(t)| : t \in [0,1]\}$ oraz $f : X \to X$, $f(x) := |x|$. Sprawdzić, że: (a) jeśli zbiór $Z_x := \{t \in [0,1] : x(t) = 0\}$ jest niepusty, to nie dla wszystkich $h \in X$ pochodna kierunkowa $\nabla_h f(x)$ istnieje; (b) dla każdego $x \in X$ takiego, że $Z_x = \emptyset$ funkcja f ma pochodną (mocną, $\mathbf{R}$-liniową) w punkcie x.

(b) Jeśli x nie znika na $[0,1]$, to pochodna kierunkowa istnieje: $\nabla_h f(x) = \frac{d}{d\varepsilon}|x+\varepsilon h| = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\sqrt{|x|^2 + \overline{x}h + x\overline{h} + \varepsilon^2|h|^2} = \frac{1}{|x|}\operatorname{Re}(\overline{x}h)$. Reszta: $r(x;h) = |x+h| - |x| - \frac{1}{|x|}\operatorname{Re}(\overline{x}h) = |x|\left(\left|1+\frac{h}{x}\right| - 1 - \operatorname{Re}\frac{h}{x}\right) = |x|(|1+z| - 1 - \operatorname{Re} z)$. Otóż jeśli $z = x + iy \in K(0;\frac{1}{2})$, to $0 \leqslant |1+z| - 1 - x = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - (1+x) = \frac{(1+x)^2+y^2-(1+x)^2}{M} = \frac{y^2}{M} \leqslant y^2 \leqslant |z|^2$, gdyż $M = \sqrt{(1+x)^2+y^2} + 1 + x = |1+z| + 1 + x \geqslant 1 - |z| + 1 - |z| \geqslant 1$. Zatem jeśli $\delta_x := \inf_{t\in[0,1]} |x(t)| > 0$ oraz $\|h\| \leqslant \frac{1}{2}\delta_x$, to w każdym punkcie $t \in [0,1]$ wielkość $z = z(t) = \frac{h}{x}$ ma oszacowanie $|z| \leqslant \frac{\|h\|}{\delta_x} \leqslant \frac{1}{2}$, a więc $0 \leqslant r(x;h) \leqslant |x||z|^2 \leqslant \|x\|\left(\frac{\|h\|}{\delta_x}\right)^2 = C\|h\|^2$, skąd $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\|r(x;h)\| = 0$.

Uwaga. Uproszczony, znacznie prostszy technicznie wariant poniższego zadania dostajemy biorąc konkretne f, np. $f(v) = v^2$ lub tp.

25. Niech $X := C\big([0,1];\mathbf{R}\big)$ z normą $\|x\| := \sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$. Sprawdzić, że jeśli funkcja $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest klasy C^2, a $b : [0,1] \to \mathbf{R}$ — całkowalna, to odwzorowanie $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) := \int_0^1 b\cdot a(v) = \int_0^1 b(t)a\big(x(t)\big)\,dt$, jest mocno różniczkowalne; znaleźć jawny wzór na pochodną $\nabla_h f(x) = f'(x)h$.

Ustalmy $x, h \in X$, wtedy dla $\varepsilon \in \mathbf{R}^*$ mamy $\frac{1}{\varepsilon}\big(f(x+\varepsilon h) - f(x)\big) = \int_0^1 b\,\frac{1}{\varepsilon}\big(a(x+\varepsilon h) - a(x)\big)$; przy $\varepsilon \to 0$ wyrażenie podcałkowe dąży do $b\,a'(x)h$, co sugeruje(2), że $\nabla_h f(x)$ istnieje i wynosi $\int_0^1 b\,a'(x)h$. Sprawdzimy teraz, że faktycznie $\psi(x;h) := \int_0^1 b\,a'(v)h$ jest liniową częścią przyrostu $f(x+h) - f(x)$. Otóż mamy: $\boxed{1}$ $\psi(x;h)$ zależy liniowo od $h \in X$ oraz $|\psi(x;h)| \leqslant \int_0^1 \big|b(t)a'\big(x(t)\big)\big| \leqslant \int_0^1 |b(t)|\cdot K\|h\|dt = L\|h\|$, gdzie $K := \sup\{|a'(s)| : |s| \leqslant \|x\|\}$, $L := K\int_0^1 |b|$, a więc forma liniowa $h \mapsto \psi(x;h)$ jest ciągła.

$\boxed{2}$ Reszta $r(x;h) := f(x+h) - f(x) - \psi(x;h)$ maleje przy $h \to 0$ dostatecznie szybko. Istotnie, $r(x;h) = \int_0^1 b(t)U(t)dt$, gdzie $U(t) := a\big(x(t)+h(t)\big) - a\big(x(t)\big) - a'\big(x(t)\big)h(t)$, przy czym (wzór Taylora) $U(t) = \frac{1}{2}a''\big(x(t)+h(t)\theta(t)\big)h(t)^2$, skąd $\|h\| \leqslant 1 \Rightarrow |U(t)| \leqslant M\cdot\|h\|^2$, gdzie $M := \frac{1}{2}\sup\{|a''(s)| : |s| \leqslant \|x\|+1\} < +\infty$. Zatem $|r(v;h)| \leqslant C\|h\|^2$ dla $\|h\| \leqslant 1$, gdzie $C := M\int_0^1 |b(t)|dt$, QED.

26. Na przestrzeni $X = C[0,1]$ (z normą $\|x\| := \sup|x(t)|$) określmy funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ wzorem $f(x) := \int_0^1 |x(t)|dt$; ponadto dla $x \in X$ oraz $\delta > 0$ oznaczmy $P(x;\delta) := \{t \in [0,1] : |x(t)| < \delta\}$. Dowieść, że: (a) jeśli $x \in X$, przy czym $\lim_{\delta\searrow 0}|P(x;\delta)| = 0$, to funkcja f ma mocną pochodną w punkcie x, daną wzorem

$$f'(x)h = \int_0^1 h(t)\operatorname{sgn} x(t)\,dt \ (^3);$$

(b) jeśli dla $x \in X$ zbiór $Z_x := \{t \in [0,1] : x(t) = 0\}$ jest skończony, to warunek $\lim_{\delta\searrow 0}|P(x;\delta)| = 0$ jest spełniony.

(a) Ustalmy x; operator $F(h) := \int_0^1 h(t)\operatorname{sgn} x(t)\,dt$ jest oczywiście liniowy; przy tym $r(x;h) = f(x+h) - f(x) - F(h) = \int_0^1 \lambda(t)dt$, gdzie $\lambda(t) := |x(t)+h(t)| - |x(t)| - h(t)\operatorname{sgn} x(t)$. Zauważmy, że jeśli $U(\xi,\eta) := |\xi+\eta| - |\xi| - \eta\operatorname{sgn}\xi$, to: $\boxed{1}$ $|\eta| < |\xi| \Rightarrow U(\xi,\eta) = 0$, gdyż $\xi+\eta = \operatorname{sgn}\xi\big(|\xi| + \eta\operatorname{sgn}\xi\big)$, zaś $|\xi| + \eta\operatorname{sgn}\xi > 0$ dla $|\eta| < |\xi|$; $\boxed{2}$ $\forall\xi,\eta : U(\xi,\eta) \leqslant 2|\eta|$, gdyż $|\xi+\eta| - |\xi| \leqslant |\eta|$ oraz $-\eta\operatorname{sgn}\xi \leqslant |\eta|$. Stosując $\boxed{1}$ i $\boxed{2}$ do $\lambda(t) = U(x(t),h(t))$ widzimy, że $\lambda(t) = 0$ poza zbiorem $P(x;\|h\|)$ oraz $\forall t \in [0,1] : 0 \leqslant \lambda(t) \leqslant 2|h(t)| \leqslant 2\|h\|$. Zatem $0 \leqslant r(x;h) \leqslant \int_{P(x;\|h\|)} 2\|h| = 2\|h\|\cdot|P(x;\|h\|)|$, skąd wynika (a), QED.

(b) Niech $n = \#Z_x$ oraz $Z_x = \{t_1,\ldots,t_n\}$. Dla zadanego $\varepsilon > 0$ weźmy $T_\varepsilon := \left\{t \in [0,1] : \ \forall i \in \overline{1,n} : |t - t_i| \geqslant \frac{1}{2n}\varepsilon\right\}$; jest to zbiór zwarty, a $|x|$ jest ciągła, więc $\exists t_0 \in T_\varepsilon : |x(t_0)| = \inf\{|x(t)| : t \in T_\varepsilon\}$; zarazem $\delta := x(t_0) > 0$, gdyż $t_0 \in T_\varepsilon$, a $t_1,\ldots,t_n \notin T_\varepsilon$. Skoro $|x(t)| \geqslant \delta$ na T_ε, a $|x(t)| < \delta$ na $P(x;\delta)$, to $P(x;\delta) \cap T_\varepsilon = \emptyset$, więc $P(x;\delta) \subset \bigcup_{i=1}^n \left[t_i - \frac{\varepsilon}{2n}, t_i + \frac{\varepsilon}{2n}\right]$, skąd $|P(x;\varepsilon)| < n\cdot\frac{2}{2n}\varepsilon = \varepsilon$.

Uwaga. Jeśli funkcja $x \in X$ jest taka, że zbiór Z_x zawiera jakiś przedział $[\alpha,\beta]$, to funkcja f nie ma nawet słabej pochodnej w punkcie x. Istotnie, weźmy $h \in X$ taką, że h znika poza $[\alpha,\beta]$, zaś $\gamma := \int_\alpha^\beta |h| > 0$. Wtedy dla $\varepsilon \neq 0$ mamy: $f(x+\varepsilon h) - f(x) = \int_0^1\big[|x+\varepsilon h| - |x|\big] = \int_\alpha^\beta \ldots = \int_\alpha^\beta\big[|0+\varepsilon h| - |0|\big] = |\varepsilon|\int_\alpha^\beta |h| = \gamma|\varepsilon|$, więc granica $f'(x)h = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[f(x+\varepsilon h) - f(x)]$ nie istnieje.

27. Na $X = \mathbf{R}^n$ weźmy normę $\|\boldsymbol{x}\| := \sup_k |x_k|$ i rozważmy funkcję $f : X \to \mathbf{R}$, $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\|$; wprowadźmy też dla $\boldsymbol{x} \in X$ oznaczenie $T := \{k \in \overline{1,n} : |x_n| = \|x\|\}$. Wtedy: $\boxed{1}$ dla każdych $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h} \in X$ istnieją 'jednostronne pochodne kierunkowe' $\nabla^{\pm} f(\boldsymbol{x}) := \lim_{\varepsilon\to 0^\pm} f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{h})$; $\boxed{2}$ przy $\boldsymbol{x} \neq 0$ pochodna kierunkowa $\nabla f(\boldsymbol{x}) := \lim_{\varepsilon\to 0} f(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{h})$ istnieje $\Leftrightarrow$ $h_k \operatorname{sgn} x_k$ jest stałe na T; $\boxed{3}$ pochodna kierunkowa istnieje i jest liniowa względem $\boldsymbol{h}$ $\Leftrightarrow$ $\#T = 1$; $\boxed{4}$ jeśli $\#T = 1$ oraz $T = \{j\}$, to f ma mocną pochodną w punkcie $\boldsymbol{x}$ daną wzorem $f'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} = h_j \operatorname{sgn} x_j$.

Ustalmy $\neq 0$ i ; niech $\gamma := \|\| > 0$, wtedy $T := T = \{k : |x_k| = \gamma\}$. Rozważmy funkcje

$$\varphi_T(\varepsilon) := \max\{|x_k + \varepsilon h_k| : k \in T\}, \qquad \varphi_S(\varepsilon) := \max\{|x_k + \varepsilon h_k| : k \notin T\}, \qquad \varphi(\varepsilon) := f(+\varepsilon) = \|+\varepsilon\| = \max\big(\varphi_T(\varepsilon), \varphi_S(\varepsilon)\big).$$

Skoro $\varphi_T(0) = \gamma > \varphi_S(0)$, to $\exists\varepsilon_0 : \forall\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[: \varphi(\varepsilon) >= \varphi_T(\varepsilon)$; zarazem $k \in T \Rightarrow x_k + \varepsilon h_k = [\gamma + \varepsilon h_k \operatorname{sgn} x_k]\operatorname{sgn} x_k$, przy czym $[\ldots] > 0$ dla dost. małych ε, więc $\exists\varepsilon_1 > 0 : \forall\varepsilon \in]-\varepsilon_1, ve_1[: \varphi(\varepsilon) = \max\{\gamma + \varepsilon h_k \operatorname{sgn} x_k : k \in T\} = \gamma + \max\{\varepsilon h_k \operatorname{sgn} x_k : k \in T\}$. Zatem $\varphi'(0^+) = \max\{h_k \operatorname{sgn} x_k : k \in T\}$ oraz $\varphi'(0^-) = \min\{h_k \operatorname{sgn} x_k : k \in T\}$, skąd wynika $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ i $\boxed{3}$ (dla $\#T > 1$ funkcja

[2] W istocie można to łatwo wykazać, powołując się na twierdzenia o całkach z parametrem. Jednakże nie jest to potrzebne: nasza sugestia, oznaczająca słabą różniczkowalność f, potwierdzi się, gdy tylko wykażemy jego mocną różniczkowalność.

[3] Ten wzór na $f'(x)h$ można wykoncypować, licząc pochodną kierunkową: $\nabla_h f(x) = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}\int_0^1 |x+\varepsilon h| = \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}|x+\varepsilon h|$; przy tym zauważmy, że $\frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}|\xi+\varepsilon\eta| = \eta\operatorname{sgn}\xi$ dla $\xi \neq 0$, gdyż $|\xi+\varepsilon\eta| = \pm(\xi+\varepsilon\eta)$, gdzie $\pm = \operatorname{sgn}\xi$ dla małych ε.

$\mapsto \varphi'(0^+) = \max_{k\in T}(h_k \operatorname{sgn} x_k)$ jest nieliniowa). Ad $\boxed{4}$: Dla $T = \{j\}$ weźmy $\delta := \max_{k\neq j}|x_k| < |x_j| = \|\|$; wtedy dla $\|h\| < \frac{1}{2}(|x_j| - \delta)$ mamy $\forall k \neq j : |x_k + h_k| \leqslant |x_k| + \|\| < |x_j| - \|\| \leqslant |x_j + h_j|$, więc $r(;) = f(+) - f() - h_j \operatorname{sgn} x_j = |x_j + h_j| - |x_j| - h_j \operatorname{sgn} x_j = 0$.

28. Na przestrzeni $X = C([0,1];\mathbf{R})$ z normą $\|x\| := \sup\{|x(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ określmy funkcję $f : X \to \mathbf{R}$ wzorem $f(x) := \|x\|$. Sprawdzić, że: (a) w punkcie $\hat{x} \in X$, danym wzorem $\hat{x}(t) := t$, pochodna kierunkowa $\nabla_h f(\hat{x})$ istnieje i jest równa $h(1)$, a więc jest liniowa i ograniczona; (b) niemniej jednak f nie jest różniczkowalna w punkcie $\hat{x}$.

Uwaga. Można pokazać, że funkcja $f = \|\cdot\|$ jest nieróżniczkowalna w każdym punkcie przestrzeni X.

(a) Wystarczy wykazać, że $\nabla_h^+ f(\hat{x}) = h(1)$, gdyż zawsze $\nabla_h^- f(x) = -\nabla_{-h}^+ f(x)$. Mając $0 \neq h \in X$ określmy $\varphi(\lambda) := \sup_{t\in[0,1]}\big[t + \lambda h(t)\big]$; wtedy $|\lambda| < \frac{1}{2\|h\|} \Rightarrow \varphi(\lambda) = f(\hat{x} + \lambda h)$, gdyż $f(x) = \max\big(\sup x, \sup(-x)\big)$, a dla $x = \hat{x} + \lambda h$ mamy $\sup(-x) \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x(1) \leqslant \sup x$; zatem $\nabla_h^+ f(\hat{x}) = \varphi'(0^+)$. Ponadto $\varphi(0) = 1$, więc dla $\lambda > 0$ mamy $\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda} = \sup_t \big[h(t) - \frac{1-t}{\lambda}\big]$. Wykażemy teraz, że

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \lambda \in\,]0,\delta[\, : \sup_{t\in[0,1]}\big[h(t) - \tfrac{1-t}{\lambda}\big] \leqslant \varepsilon + h(1). \qquad (*)$$

Istotnie, dzięki ciągłości h w $t = 1$, $\exists s = s(\varepsilon) \in [0,1[\, : \sup_{[s,1]} h(t) \leqslant \varepsilon + h(1)$; zatem $\forall \lambda > 0 : \sup_{t\in[s,1]}\big[h(t) - \frac{1-t}{\lambda}\big] \leqslant \sup h(t) \leqslant \varepsilon + h(1)$; z kolei $\sup_{t\in[0,s]}\big[h(t) - \frac{1-t}{\lambda}\big] \leqslant \|h\| - \frac{1-s}{\lambda} \leqslant \varepsilon + h(1)$ dla $0 < \lambda < \delta := \frac{1-s}{\|h\|-h(1)+1}$; to kończy dowód (*). Skoro $\forall \lambda > 0 : \frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda} = \sup_t \big[h(t) - \frac{1-t}{\lambda}\big] \geqslant h(1)$, to na mocy (*) mamy $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta \in\,]0,1[\, : \forall \lambda \in\,]0,\delta[\, : 0 \leqslant \frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda} - h(1) \leqslant \varepsilon$, a więc $\varphi'(0^+) = h(1)$.

(b) Dla $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ określmy $h_\varepsilon \in X$ wzorem $h_\varepsilon(t) := 2\max\big(0, \varepsilon - |t - 1 + \varepsilon|\big)$; wykres h_ε jest łamaną o wierzchołkach $(0,0)$, $(1-2\varepsilon, 0)$, $(1-\varepsilon, 2\varepsilon)$ i $(1,0)$, więc $\|h_\varepsilon\| = 2\varepsilon$ oraz $\nabla_{h_\varepsilon} f(\hat{x}) = h_\varepsilon(1) = 0$; skoro wykres $\hat{x} + h_\varepsilon$ jest łamaną o wierzchołkach $(0,0)$, $(1-2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$, $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ i $(1,1)$, to $f(\hat{x} + h_\varepsilon) = 1 + \varepsilon$. Zatem $r(\hat{x}; h_\varepsilon) = (1+\varepsilon) - 1 - 0 = \varepsilon$, więc $\frac{1}{\|h_\varepsilon\|} r(\hat{x}; h_\varepsilon) = \frac{1}{2}$ nie dąży do zera.