1 Liczby rzeczywiste

1.1 Dlaczego nie wystarczają liczby wymierne

Analiza zajmuje się problemami, w których pojawia się *przejście graniczne*. Przykładami takich problemów w matematyce bądź fizyce mogą być:

1. Pojęcie *prędkości chwilowej* w mechanice. Jeżeli mamy do czynienia z ruchem jednostajnym, to określenie prędkości nie sprawia kłopotu: Prędkość jest to iloraz przebytej drogi i czasu:
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
Jeśli jednak w przeciągu czasu Δt prędkość się zmienia, to powyższa definicja daje *prędkość średnią* na odcinku czasu Δt. Dopóki mamy do czynienia ze *skończonymi* odcinkami czasu Δt, dopóty – używając powyższej definicji – możemy mówić jedynie o prędkościach średnich. Z drugiej strony, intuicyjnie czujemy, że istnieje coś takiego jak prędkość *chwilowa* – prędkość w danej konkretnej chwili czasu (np. gdy jadąc samochodem rzucamy okiem na prędkościomierz), a nie jedynie prędkość średnia na jakimś odcinku czasu. Pojawia się więc potrzeba należytej definicji prędkości chwilowej.

2. Długość krzywej. Nie nastręcza problemów zmierzenie długości odcinka linii prostej. Ale jak zmierzyć długość krzywej, nie będącej prostą? Receptą na rozwiązanie *przybliżone* jest zastąpienie krzywej przez łamaną złożoną z odcinków i zsumowanie ich długości. Postępując w ten sposób, mierzymy długość krzywej z pewnym błędem, który można uczynić dowolnie małym, ale który jest skończony, jeśli długości odcinków łamanej są niezerowe. Znów czujemy, że takie pojęcie, jak długość krzywej, jest dobrze określone (np. długość węża ogrodowego albo nitki ma określoną wartość). Chcielibyśmy nadać dokładniejsze znaczenie powiedzeniu: "dążymy z długością odcinka łamanej do zera, a jednocześnie z ilością tych odcinków do nieskończoności, i to co otrzymamy W GRANICY, to długość krzywej." Ale jak to porządnie zdefiniować?

Zanim zaczniemy powyższe problemy analizować, zastanówmy się, jakich liczb będziemy używać. Liczby: naturalne $\mathbb{N}$ i całkowite $\mathbb{Z}$ są w oczywisty sposób zbyt ubogie, aby przy ich użyciu analizować pojęcie granicy (np. nie jest w wielu przypadkach wykonalne dzielenie). Następnym nasuwającym się kandydatem są liczby *wymierne* $\mathbb{Q}$. Takie wielkości, jak długość, położenie itd. można z dowolną dokładnością określić używając liczb wymiernych. Okazuje się jednakże, że w zbiorze liczb wymiernych są luki. Pozostając przy mierzeniu odległości: istnieją dobrze określone obiekty, np. długość przekątnej kwadratu o boku 1, które *nie są* liczbami wymiernymi. Powoduje to, że granica ciągu liczb wymiernych może nie być liczbą wymierną i do uprawiania analizy trzeba mieć większy zbiór liczbowy – zbiór *liczb rzeczywistych* $\mathbb{R}$.

Zacznijmy od pokazania, że długość przekątnej kwadratu o boku długości 1, tzn. $\sqrt{2}$, nie jest liczbą wymierną. Przyjmijmy, że jest przeciwnie; wtedy możemy zapisać ją w postaci ułamka nieskracalnego:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{czyli} \quad p^2 = 2q^2$$

gdzie p, q są względnie pierwsze. Mamy w takiej sytuacji trzy możliwości: *i)* obie liczby p, q są parzyste, *ii)* p jest parzysta, q jest nieparzysta, *i)* p jest nieparzysta, q jest parzysta.

Patrząc na sytuację *i)* mamy: , czyli p^2 jest parzysta, a więc p też jest parzysta – wbrew założeniu. W sytuacji *ii)*: Skoro p jest parzysta, to zapiszmy: $p = 2p'$ i równość $p^2 = 2q^2$ jest równoważna $4p'^2 = 2q^2$, czyli $2p'^2 = q^2$, co znaczy, że q jest parzysta – wbrew założeniu. Wreszcie w *iii)* mamy: $p^2 = 2q^2$ znaczy, że p jest parzysta – znów w sprzeczności z założeniem.

Stwierdziliśmy więc, że nie istnieje ułamek $\frac{p}{q}$ taki, że $\frac{p^2}{q^2} = 2$, co znaczy, że $\sqrt{2}$ *nie jest* liczbą wymierną – tzn. jest liczbą *niewymierną*.

Uzupełniając liczby wymierne o liczby niewymierne, otrzymamy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Działania na nich są takie same, jak na liczbach wymiernych, a różnica pomiędzy zbiorami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ leży w tym, że dla $\mathbb{R}$ spełniona jest *zasada ciągłości Dedekinda.*

1.2 Zasada ciągłości (Dedekinda)

Zasada ciągłości zbioru $\mathbb{R}$ (zasada Dedekinda)[1] mówi, że:

Jeśli podzielimy $\mathbb{R}$ na dwa podzbiory A oraz B: $A \cup B = \mathbb{R}$ w taki sposób, że

$$\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b, \tag{1}$$

(stąd od razu wynika, że $A \cap B = \emptyset$, to albo w zbiorze A istnieje największa liczba, albo w zbiorze B istnieje najmniejsza liczba. (Zakładamy tu, że żaden ze zbiorów A, B nie jest pusty).

Sytuację tę można zilustrować geometrycznie: Jeśli podzielimy prostą na dwie części A i B tak, by każdy punkt części A leżał na lewo od każdego punktu części B, to alborys. istnieje ostatni punkt w części A, albo pierwszy w części B. Nie może wystąpić "luka" w "przekroju", który właśnie zdefiniowaliśmy.

Na tym polega różnica między zbiorami $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: w zbiorze $\mathbb{R}$ *nie mogą* istnieć luki, a w $\mathbb{Q}$ *mogą*. Przykład takiej luki: Podzielmy zbiór $\mathbb{Q}$ na dwie części A i B: Do A zaliczymy liczby mniejsze od $\sqrt{2}$, a do B liczby większe od $\sqrt{2}$. Spełniony jest tu warunek (1), ale w części A nie istnieje liczba największa, a w części B nie istnieje liczba najmniejsza. Wynika to z możliwości przybliżania $\sqrt{2}$ z góry i z dołu z dowolną dokładnością przez liczby wymierne; przykład ciągu takich przybliżeń z góry i z dołu: l_n – rozwinięcie dziesiętne do n–tego miejsca; $u_n = l_n + 10^{-n}$.

1.3 Wartość bezwzględna

Przypomnimy tu własności *wartości bezwzględnej* liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$, które będą wykorzystywane w różnych miejscach.

Def. *Wartością bezwzględną* (moduł) liczby $a \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę nieujemną $|a| \in \mathbb{R} \cup \{0\}$ określaną przez warunki:

- Jeśli $a \geqslant 0$, to $|a| = a$;
- Jeśli $a < 0$, to $|a| = -a$.

[1] Można ją uważać za jeden z aksjomatów liczb rzeczywistych. Wszystkie aksjomaty razem są dla podsumowania zebrane w Subsec. 1.5

Od razu z definicji wynika, że

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} : |a| \geqslant 0, \quad \text{oraz} ||a|| = |a|. \tag{2}$$

Mają miejsce następujące wzory:

$$|a| = |-a|; \tag{3}$$

Dow. Dla $a \geqslant 0$ mamy $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Dla $a < 0$ mamy: $|a| = -a$, $|-a| = -a$.

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|; \tag{4}$$

Dow. Dla $a \geqslant 0$: Po lewej stronie pierwszej nierówności mamy liczbę $\leqslant 0$, po prawej zaś liczbę $\geqslant 0$. W drugiej nierównośći mamy równość. Dla $a < 0$: Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej zachodzi $|a| = -a$, więc w pierwszej nierówności mamy równość. W drugiej nierówności: Po lewej stronie mamy liczbę mniejszą od zera, po prawej liczbę większa od zera.

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|; \tag{5}$$

Dow. Jeśli któraś z liczb a, b jest równa zeru, to mamy równość. Jeśli obie liczby są większe od zera, to mamy równość. Jeśli obie liczby są mniejsze od zera, to mamy równość. Jeśli $a > 0, b < 0$ i $a + b > 0$, to $|a + b| = a + b < a < a + |b| = |a| + |b|$. Jeśli $a > 0, b < 0$ i $a + b < 0$, to $|a + b| = -a - b < -b = |b| < |a| + |b|$.

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|; \tag{6}$$

Dow. Drugą z powyższych nierówności otrzymuje się przez wzięcie $-b$ zamiast b w (6). Pierwsza zaś jest równoważna $|a| \leqslant |a-b|+|b|$ i znów otrzymuje się ją z (6), jeśli zamienić $a \to a - b, a + b \to a$.

$$|ab| = |a||b| \tag{7}$$

Dow. Dla $a, b \geqslant 0$, mamy $a = |a|, b = |b|$ i $|ab| = ab = |a||b|$. Dla $a > 0, b < 0$ jest: $a = |a|, b = -|b|$ i $ab = |a|(-|b|) = -|a||b| < 0$, skąd $|ab| = (-)(-)|a||b| = |a||b|$. Dla $a < 0, b < 0$: $a = -|a|, b = -|b|$ i $ab = |ab| = (-|a|)(-|b|) = |a||b|$.

$$\text{z nierówności} \quad |a| \leqslant c \quad \text{i} \quad |b| \leqslant d \quad \text{wynika, że} \quad |a + b| \leqslant c + d \tag{8}$$

Ten wzór można nazwać wzorem na "dodawanie pod znakiem wartości bezwzględnej".

Dow. Wynika on z (5), ponieważ: $|a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant c + d$.

Mamy też równoważność trzech nierówności:

$$|a| < b \quad \Longleftrightarrow \quad -b < a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a < b \text{ i } -a < b. \tag{9}$$

1.4 Zbiory ograniczone. Kres górny i dolny zbioru

Niech $Z \subset \mathbb{R}$. Przypomnijmy definicję zbioru ograniczonego z góry:

Def. Mówimy, że $Z \subset \mathbb{R}$ jest *ograniczony z góry* [2], jeśli

$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall z \in Z : \quad M \geqslant z. \tag{10}$$

[2] Analogicznie definiujemy zbiór ograniczony z dołu

Każde M, spełniające (10), nazywamy *ograniczeniem górnym.* Jeśli M – ograniczenie górne, to $M+m$, gdzie $m>0$, również jest ograniczeniem górnym. Mamy więc cały zbiór ograniczeń górnych; oznaczmy go $\mathcal{M}$.

Zachodzi

Tw. Niech $Z \subset Rdb$ – zbiór ograniczony z góry. Wtedy w zbiorze $\mathcal{M}$ ograniczeń górnych zbioru Z istnieje liczba najmniejsza. Nazywamy ją *kresem górnym* zbioru Z i oznaczamy $\sup Z$ (a czytamy: *supremum* Z).

Dow. W dowodzie posłużymy się *zasadą ciągłości Dedekinda.*

Podzielmy wszystkie liczby rzeczywiste na dwie klasy (podzbiory $\mathbb{R}$):

- Do drugiej klasy II zaliczamy liczby M, spełniające: $\forall z \in Z: \; M \geqslant z$. Tak więc II to zbiór ograniczeń górnych zbioru Z. Ponieważ zbiór Z jest ograniczony z dołu, to II jest niepusty i różny od $\mathbb{R}$.
- Do pierwszej klasy zaliczmy wszystkie pozostałe liczby, tzn. $I = \mathbb{R} \setminus II$. (Zbiór I również jest niepusty.) Zapiszmy równoważną definicję I:
  Do I należą elementy M' takie, że $\sim (\forall z \in Z: \; M' \geqslant z)$, tzn. $\exists z \in Z: \; M' < z$.

Z zasady ciągłości wynika, że:

i) albo w klasie I istnieje element największy,

ii) albo w klasie II istnieje element najmniejszy.

Pokażemy, że możliwość *i) nie zachodzi.* Przyjmijmy, że jest przeciwnie, tzn. że w klasie I istnieje element największy; nazwijmy go a. Ale wtedy, z definicji klasy I: $\exists z \in Z : z > a$. Weźmy teraz $a' = \frac{1}{2}(z+a)$. Wtedy $a' < z$, więc znów $a' \in I$, oraz $a' > a$, co znaczy, że a NIE JEST elementem największym w klasie I – wbrew założeniu.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi, że zachodzi możliwość *ii)*, tzn. w klasie II istnieje element najmniejszy.

Mamy bliźniacze twierdzenie:

Tw. Jeśli zbiór $Z \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, to wśród ograniczeń dolnych zbioru Z istnieje liczba największa, zwana *kresem dolnym* zbioru Z i oznaczamy $\inf Z$ (a czytamy: *infimum* Z).

Dow. jest również bliźniaczy.

Uwaga. Kresy zbioru nie muszą do niego należeć. Np. kresami przedziału otwartego $]a,b[$: $a < x < b$ są liczby a (kres dolny) i b (kres górny), nie należące do $]a,b[$.

1.5 Aksjomatyka liczb rzeczywistych

Podsumujmy znane własności liczb rzeczywistych. Można je też uznać za *aksjomaty*, które definiują liczby rzeczywiste; wszystkie znane nam własności liczb rzeczywistych można z nich wyprowadzić.

1. W $\mathbb{R}$ mamy działanie *dodawania* " + ". Jest ono *przemienne*: $x+y=y+x$ oraz *łączne*: $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.
2. Istnieje element neutralny 0 dla dodawania, tzn. $\forall x \in Rdb$: $x+0=x$.
3. Dla każdego elementu x istnieje element przeciwny $-x$: $x+(-x)=0$.

4. W $\mathbb{R}$ mamy działanie *mnożenia* "$+$". Jest ono *przemienne*: $x \cdot y = y \cdot x$ oraz *łączne*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

5. Istnieje element neutralny 1 dla mnożenia, tzn. $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \cdot 1 = x$.

6. Dla każdego elementu $x \neq 0$ istnieje element przeciwny $\frac{1}{x}$: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
   Uwaga. Zbiór z tak określonymi działaniami nazywa się *ciałem*. Zatem $\mathbb{R}$ jest ciałem.

7. Istnieje w $\mathbb{R}$ relacja *mniejszości* "$<$", tzn. każde dwie różne liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają: albo $x < y$, albo $y < x$. Relacja ta jest *przechodnia*, tzn. jeżeli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$. Zachodzi też:

   $$\text{jeśli } x < y, \text{ to } x + z < y + z \text{ i, jeśli też } z > 0, \text{ to } xz < yz.$$

   Uwaga. Wszystkie powyższe aksjomaty są też spełnione przez liczby *wymierne*. Zakładamy więc, prócz wszystkich powyższych, jeszcze

8. aksjomat ciągłości Dedekinda.

2 Ciągi

2.1 Podstawowe definicje

Def. *Ciągiem* nazywamy funkcję na zbiorze liczb naturalnych, tzn. przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej jakiejś liczby rzeczywistej. (Mówimy wtedy o ciągu o wyrazach *rzeczywistych*; analogicznie możemy mówić o ciągu o wyrazach naturalnych, całkowitych, wymiernych,...)

Zazwyczaj ciąg zapisujemy w postaci: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ lub $\{a_n\}$.

Przykładami ciągów, które Czytelnik dobrze zna (a jełi nie, to niniejszym poznaje), jest ciąg *arytmetyczny*:

$$a_n = A + Bn, \tag{11}$$

(tu A, B są pewnymi liczbami rzeczywistymi) oraz ciąg *geometryczny*:

$$a_n = aq^n \tag{12}$$

(tu $q \neq 0, a$ – liczby rzeczywiste).

Najczęściej definiujemy ciąg przez jawnie, wzorem $a_n = f(n)$ dla pewnej funkcji f (w ten sposób jest zdefiniowane są ciągi powyżej, np. ciąg (11): tu $f(n) = A + Bn$). Drugim często spotykanym sposobem jest definicja *rekurencyjna*, w której zadaje się pierwszy wyraz ciągu oraz formułę: $a_n = F(a_{n-1})$, gdzie F jest pewną funkcją. Np. ciąg (12) można równoważnie zadać jako: $a_1 = a, a_n = qa_{n-1}$. Tutaj łatwo jest przejść od postaci rekurencyjnej do postaci jawnej; na ogół jest to jednak znacznie trudniejsze (p. zadanie o ciągu Fibonacciego).

Dla wielu ciągów nie potrafimy podać jawnego wzoru na $n-$ty wyraz; np. jest tak z ciągiem liczb pierwszych (wiemy, że jest ich nieskończenie wiele; stanowią podzbiór $\mathbb{N}$, więc można je ustawić w ciąg. Ale jawnej postaci takiego ciągu nie potrafimy podać).

Def. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *rosnącym* (odpowiednio: *niemalejącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$ (odpowiednio, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant a_{n+1}$).

Analogicznie

Def. Ciąg $\{a_n\}$ nazywamy *malejącym* (odpowiednio: *nierosnącym*, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$ (odpowiednio, jeśli $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant a_{n+1}$).

Ciągi rosnące i malejące obejmujemy wspólną nazwą ciągów *monotonicznych*.

Przykł. Ciąg liczb nieparzystych jest rosnący; ciąg $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, ...\}$ nie jest rosnący, ale jest niemalejący; ciąg $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ nie jest ani niemalejący ani nierosnący.

2.2 Granica ciągu

Def. Liczbę g nazywamy granicą ciągu nieskończonego $\{a_n\}$, jeśli

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M \in \mathbb{N}} : \forall_{n>M} : |a_n - g| < \epsilon. \tag{13}$$

Uwaga. Ostatni warunek można też tak wypowiedzieć, że począwszy od liczby M, wszystkie następnie wyrazy ciągu mieszczą się między $g - \epsilon$ a $g + \epsilon$.

Jeżeli g jest granicą ciągu $\{a_n\}$, to oznaczamy to: $g = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Przykł. Pokażemy, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest $g = 0$.

Niech będzie dana jakaś liczba $\epsilon > 0$. Musimy tak dobrać M, aby dla $n > M$ zachodziła nierówność

$$|a_n - g| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

Za M weźmy liczbę naturalną większą niż $\frac{1}{\epsilon}$. Mamy więc: $\frac{1}{M} < \epsilon$, a to znaczy, że dla dowolnego $n > M$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{M} < \epsilon, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{n} < \epsilon,$$

co należało pokazać.

Przykł. Granicą *ciągu stałego:* $\forall_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$ jest liczba a:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \tag{14}$$

bo dla każdego n mamy $|a_n - a| = 0$ i nierówność (13) zachodzi dla każdego wskaźnika n oraz dla każdego $\epsilon > 0$. *Przykł.*

Ciąg posiadający granicę nazywany jest *zbieżnym.* Ciąg *rozbieżny* to taki, który granicy nie posiada.

Przykł. Ciąg $a_n = n$ nie posiada granicy, tzn. jest rozbieżny. Załóżmy bowiem, że posiada granicę g. Weźmy $\epsilon = 1$. (W definicji zbieżności ciągu jest warunek, że $|a_n - g| < \epsilon$ *dla każdego* ϵ; jeśli pokażemy, że warunek ten nie jest spełniony dla *jakiegokolwiek* ϵ, to tym samym pokażemy, że ciąg jest rozbieżny). Dla dostatecznie dużych n musi więc być spełniony warunek: $|a_n - g| = |n - g| < 1$, co jest niemożliwe, bo warunek ten może być spełniony co najwyżej dla trzech wartości n (dla liczby naturalnej n_g, najbliższej g, oraz $n_g \pm 1$. Doszliśmy do sprzeczności – tzn. pokazaliśmy, że ciąg $a_n = n$ *nie posiada* granicy, jest więc rozbieżny.

Przykł. ciąg oscylujący: $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny. Wystarczy wziąć $\epsilon = \frac{1}{4}$ i warunek (13) nie będzie spełniony dla żadnego g.

Można zadać pytanie, czy jeśli ciąg jest zbieżny, to czy posiada tylko jedną granicę, czy może posiadać ich wiele? Okazuje się, że zachodzi ta pierwsza możliwość:

Tw. Ciąg zbieżny posiada tylko jedną granicę.

Dow. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i że ciąg a_n posiada dwie granice g i g', przy czym $g \neq g'$, czyli $|g - g'| > 0$. Weźmy $\epsilon = \frac{1}{4}|g - g'|$. Z definicji granicy istnieją takie dwie liczby M, M', że dla $n > M$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g| < \epsilon, \tag{15}$$

a dla $n > M'$ zachodzi nierówność

$$|a_n - g'| < \epsilon. \tag{16}$$

Oznaczmy przez $\tilde{M}$ większą z liczb M, M' (zapisujemy to jako: $\tilde{M} = \max(M, M')$). Wtedy dla każdego $n > \tilde{M}$ będą spełnione jednocześnie *obie* nierówności (15) i (16). Dodajmy je stronami, wykorzystując "dodawanie pod znakiem wartości bezwzględnej" (8), zmieniając uprzednio znak w nierówności (15). Otrzymujemy: $|g - g'| < 2\epsilon$; ale uprzednio wzięliśmy $|g - g'| = 4\epsilon$, czyli $4\epsilon < 2\epsilon$ – doszliśmy więc do sprzeczności.

Uwaga. W definicji granicy można zastąpić $>$ przez $\geqslant$, a $<$ przez $\leqslant$; ani istnienie granicy, ani jej wartość (jeśli istnieje) się nie zmienią przy takiej zamianie.

2.3 Ciągi ograniczone

Def.

1. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *ograniczonym z góry*, jeśli istnieje taka liczba M, że $\forall_{n\in\mathbb{N}} : a_n < M$.

2. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *ograniczonym z dołu*, jeśli istnieje taka liczba M', że $\forall_{n\in\mathbb{N}} : a_n > M'$.

3. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *ograniczonym*, jeśli jest jednocześnie ograniczony z góry i z dołu. Równoważnie można powiedzieć, że dla ciągu ograniczonego zachodzi:
$$\exists_{\tilde{M}>0} : \forall_{n\in\mathbb{N}} : |a_n| < \tilde{M}.$$

Sytuacje te można zilustrować graficznie: W pierwszym przypadku, wszystkie wyrazy ciągu leżą poniżej prostej $y = M$; w drugim – powyżej prostej $y = M'$; i w trzecim – wszystkie wyrazy ciągu leżą pomiędzy prostymi $y = \tilde{M}$ a $y = -\tilde{M}$.

Przykłady.

- Ciąg $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony.
- Ciąg liczb naturalnych jest ograniczony z dołu.
- Ciąg $a_n = (-1)^n n$ nie jest ograniczony z góry ani z dołu.

Tw. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Dow. Ciąg $\{a_n\}$ z założenia jest zbieżny (jego granicę nazwijmy g), więc warunek (13) definiujący zbieżność ciągu zachodzi dla każdego ϵ, w szczególności dla $\epsilon = 1$. Istnieje więc taka liczba M, że dla $n > M$ mamy: $|a_n - g| < 1$. Korzystając z pierwszej z nierówności (6) mamy: $|a_n| - |g| \leqslant |a_n - g| < 1$, z czego wynika $|a_n| < 1 + g$. Oznaczmy przez C największą spośród $M+1$ liczb: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_M|, g+1$. Pamiętając, że $g+1$ jest większe od $a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots$, mamy: $\forall_{n\in\mathbb{N}}$: $C > |a_n|$. Ciąg $\{a_n\}$ jest więc ograniczony.

2.4 Działania algebraiczne na ciągach i ich granicach

Tw. Zakładamy, że ciągi $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ są zbieżne. Zachodzą wtedy następujące wzory:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{17}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{18}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{19}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \tag{20}$$

(ta ostatnia równość ma miejsce przy założeniu, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$).

Dow. (17). Oznaczmy: $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $h = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Weźmy jakieś $\epsilon > 0$. Istnieje więc taka liczba M, że

$$\forall_{n>M} \quad |a_n - h| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{oraz} |b_n - h| < \frac{\epsilon}{2}$$

Dodając do siebie te dwie nierówności pod znakiem wartości bezwzględnej, otrzymamy

$$\forall_{n>M} \quad |(a_n + b_n) - (g + h)| < \epsilon.$$

A to znaczy, że ciąg $a_n + b_n$ jest zbieżny do granicy $g + h$.

CBDO

Wniosek. W szczególności, jeśli b_n jest ciągiem stałym: $b_n = c$ dla każdego n, to mamy, z wzorów (14) i (17)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + c) = c + \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{21}$$

Dow. (19). Oszacujmy najsampierw różnicę $|a_n b_n - gh|$. Mamy:

$$a_n b_n - gh = a_n b_n - a_n h + a_n h - gh = a_n(b_n - h) + h(a_n - g).$$

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest *ograniczony* jako ciąg zbieżny, to istnieje taka liczba A, że $|a_n| < A$ dla każdego n. Stosując wzory na wartość bezwzględną sumy i iloczynu, mamy

$$|a_n b_n - gh| \leqslant |a_n(b_n - h)| + |h(a_n - g)| \leqslant A(b_n - h) + |h||a_n - g|$$

Teraz: weźmy drugą liczbę (pełniącą analogiczną rolę jak ϵ) $\eta > 0$. Dla niej dobieramy takie M, że dla $n > M$ mamy: $|a_n - g| < \eta$ oraz $|b_n - h| < \eta$. Mamy więc

$$|a_n b_n - gh| < A\eta + |h|\eta| = (A + |h|)\eta.$$

Na razie nic nie zakładaliśmy o liczbie η. Uczynimy to teraz, biorąc: $\eta = \frac{\epsilon}{A+|h|}$. W ten sposób mamy:

$$\forall_{n>M} : |a_n b_n - gh| < \epsilon$$

Tak więc!!! Udowodniliśmy wzór (19).

W szczególności, biorąc $b_n = c$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}(c a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n, \tag{22}$$

oraz, biorąc $c=-1$,

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim_{n\to\infty} a_n. \tag{23}$$

Stąd wynika wzór (18):

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}(-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dow. (20). Najsampierw udowodnimy następujący szczególny przypadek wzoru (20):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0) \tag{24}$$

Dow. (24). Najpierw zauważmy, że dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność $b_n \neq 0$, a nawet mocniejsza: Dla dostatecznie dużych n mamy: $|b_n| > \frac{|h|}{2}$. Weźmy bowiem $\frac{|h|}{2}$ za ϵ w definicji granicy ciągu. Wtedy istnieje takie M, że $\forall_{n>M}$ mamy $|b_n - h| < \frac{|h|}{2}$. Stąd

$$|h| - |b_n| \leqslant |h - b_n| < \frac{|h|}{2}, \quad \text{co daje} \quad |b_n| > \frac{|h|}{2}.$$

Aby udowodnić (24), oszacujmy teraz różnicę

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| = \left|\frac{h-b_n}{hb_n}\right| = \frac{|h-b_n|}{|h|\cdot|b_n|}.$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych n mamy

$$|h - b_n| < \eta \quad \text{oraz} \quad |b_n| > \frac{|h|}{2}, \quad \text{tzn.} \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|h|}.$$

Stąd

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \frac{2\eta}{h^2}.$$

Biorąc teraz $\eta = \frac{1}{2}\epsilon h^2$, otrzymamy, że dla dostatecznie dużych n

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{h}\right| < \epsilon,$$

skąd wynika już wzór (20).

Wzór (20) wynika z (19)(24):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

Uwagi.

1. W założeniach przy wyprowadzaniu powyższych wzorów zakładaliśmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne. Założenie to jest istotne; może się zdarzyć, że ciąg $\{a_n\} + \{b_n\}$ jest zbieżny, mimo że ciągi oddzielnie $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są rozbieżne (weźmy np. ciągi: $a_n = n$, $b_n = -n$).

2. W definicji ciągu zakładaliśmy, że numeracja elementów zaczyna się od 1. Definicję tę można bezkarnie zmienić, zakładając, że ciąg zaczyna się od dowolnej liczby naturalnej n_0.

3. Stąd wynika prosta do zobaczenia właściwość ciągów: *Odrzucenie skończonej ilości początkowych wyrazów ciągu nie ma wpływu na zbieżność ciągu ani na wartość jego granicy.* Analogicznie, można do ciągu *dołączyć* dowolną *skończoną* ilość wyrazów.

Przykł.

1. Ciąg $a_n = \frac{3n+2}{8n-5}$
2. Ciąg $b_n = \frac{n^2+n+2}{9n^2-5n-3}$
3. Ciąg $c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

2.5 Kolejne własności rachunkowe granicy

Stw. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie zbieżny. Wówczas zbieżny jest ciąg $\{|a_n|\}$ i zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}\{|a_n|\} = |\lim_{n\to\infty}\{a_n\}|. \tag{25}$$

Dow. Niech $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\} = g$. Mamy wtedy $|a_n - g < \epsilon$ dla dostatecznie dużych n. Zatem

$$|a_n| - |g| \leqslant |a_n - g| < \epsilon \quad \text{oraz} \quad |g| - |a_n| \leqslant |a_n - g| < \epsilon,$$

skąd wynika (p. wz. ...): $||a_n| - |g|| < \epsilon$. Czyli zachodzi (25).

CBDO

Stw. Załóżmy, że ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są zbieżne oraz $\forall_n a_n \leqslant b_n$.[3] Zachodzi wtedy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{26}$$

W szczególności, jeśli ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny, to

$$\text{warunek} \quad c_n \geqslant 0 \quad \text{pociąga za sobą} \quad \lim_{n\to\infty} c_n \geqslant 0. \tag{27}$$

Dow. Pokażemy najsampierw ostatni wzór. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = h$. Przypuśćmy, że $h < 0$, tzn. $-h > 0$. Wtedy, dla dostatecznie dużych n mamy: $|c_n - h| < -h$, a stąd $c_n - h < -h$, a stąd $c_n < 0$ – wbrew założeniu.

Teraz pokażemy, że z (27) wynika (26). Weźmy mianowicie $b_n - a_n = c_n$. Ponieważ $a_n \leqslant b_n$, to $c_n \geqslant 0$, a więc, po przejściu do granicy: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \geqslant 0$. A na mocy (18):

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n,$$

zatem

$$\lim_{n\to\infty} b_n \geqslant \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{czyli} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n.$$

CBDO

Uwaga. W nierówności (26) nie można zastąpić nierówności $\geqslant$ przez $>$, i analogicznie w

[3] Zgodnie z uwagą poczynioną niedawno, teza jest prawdziwa, jeśli warunek "dla każdego n" zastąpić przez "dla każdego $n > n_0$", $n_0 > 1$.

(27) nie można zastąpić $\leqslant$ przez $<$. Np. ciąg $\{c_n\} = \frac{1}{n}$ spełnia nierówność: $c_n > 0$, a mamy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Można tę sytuację obrazowo wyrazić mówiąc, że nierówności $\geqslant$ i $\leqslant$ "zachowują się przy przejściu do granicy", natomiast nierówności $>$ i $<$ nie mają tej własności.

Tw. (*o trzech ciągach*). Jeśli $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, to ciąg $\{c_n\}$ jest zbieżny i zachodzi: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Dow. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ i niech $\epsilon > 0$. Dla dostatecznie dużych n mamy więc

$$|a_n - g| < \epsilon \quad \text{oraz} \quad |b_n - g| < \epsilon.$$

Na mocy założenia

$$a_n - g \leqslant c_n - g \leqslant b_n - g, \quad \text{a że} \quad -\epsilon < a_n - g \quad i \quad b_n - g < \epsilon,$$

to

$$-\epsilon < c_n - g < \epsilon \quad \text{czyli} \quad |c_n - g| < \epsilon,$$

skąd $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$.

CBDO

Przykłady

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 1$ i stąd też dla $0 < a \leqslant 1$.
2. Przykład na wykorzystanie jw.: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5 \cdot 7^n + 9 \cdot 3^n + 10}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Wniosek. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dow. Mamy:

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n| \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}(-|a_n|) = 0 = \lim |a_n|.$$

CBDO

2.6 Podciągi

Def. Niech będzie dany ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ oraz ciąg *rosnący* liczb naturalnych $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$. Ciąg

$$a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}, \ldots$$

nazywamy *podciągiem* ciągu $\{a_n\}$.

Przykł. Ciąg $a_2, a_4, \ldots, a_{2n}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Natomiast ciąg $a_2, a_1, a_4, a_3, \ldots$ nie jest podciągiem $\{a_n\}$, ponieważ wskaźniki nie tworzą tu ciągu rosnącego.

W myśl powyższej definicji, każdy ciąg jest swoim własnym podciągiem. Ponadto podciąg $\{a_{m_{k_n}}\}$ podciągu $\{a_{m_k}\}$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$.

Obrazowo można powiedzieć, że podciąg $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_k}, \ldots$ ciągu $\{a_n\}$ otrzymuje się przez skreślenie w ciągu $\{a_n\}$ pewnej ilości wyrazów, (skończonej lub nieskończonej), których wskaźniki są różne od $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$.

Stw. Zachodzi ogólny wzór dotyczący wskaźników dowolnego podciągu

$$m_k \geqslant k. \tag{28}$$

Dow. Jest tak dla $n = 1$, tzn. $m_1 \geqslant 1$ (bo m_1 jest liczbą naturalną). Stosując indukcję załóżmy, że dla jakiegoś n zachodzi wzór (28). Mamy wtedy: $m_{n+1} > m_n > n$, a zatem $m_{n+1} \geqslant n$, więc teza zachodzi też dla $n + 1$. W ten sposób mamy prawdziwość tezy dla dowolnego n.

CBDO

Tw. Podciąg ciągu zbieżnego $\{a_n\}$ jest zbieżny do tej samej granicy co $\{a_n\}$. Tzn.

$$\text{jeśli} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = g, \qquad \text{to również} \quad \lim_{n\to\infty} a_{m_n} = g.$$

Dow. Weźmy $\epsilon > 0$. Istnieje wtedy takie M, że dla $n > M$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \epsilon$. Ponieważ, na mocy (28) jest $m_n \geqslant n > M$, to również $|a_{m_n} - g| < \epsilon$, a to znaczy, że $\lim_{n\to\infty} a_{m_n} = g$.

CBDO

Tw. (*Bolzano – Weierstrassa*). Z każdego ciągu ograniczonego $\{x_n\}$ można wybrać podciąg zbieżny.

Dow. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie ograniczony. Istnieje więc taka liczba M, ż $\forall_{n\in\mathbb{N}} : -M < a_n < M$.

Oznaczmy teraz przez Z zbiór liczb x takich, że nierówność: $x < a_n$ jest spełniona dla nieskończenie wielu n. Zbiór Z jest niepusty, ponieważ liczba $-M \in Z$ (jako że nierówność $-M < a_n$ jest spełniona dla każdego n). Zbiór Z jest też ogranicznony z góry: Nie należy bowiem do Z żadna liczba większa od M (nierówność $M < a_n$ nie jest spełniona dla żadnego n i tym bardziej dla dowolnego $x > M$).

Zbiór Z jest niepusty i ograniczony z góry, więc istnieje kres górny tego zbioru. Oznaczmy go przez g. Z definicji kresu górnego wynika, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje nieskończenie wiele n takich, że

$$g - \epsilon \leqslant a_n \leqslant g + \epsilon,$$

ponieważ: liczba $g - \epsilon \in Z$, $g + \epsilon \notin Z$.

Wykażemy obecnie, że g jest granicą pewnego podciągu ciągu $\{a_n\}$. Musimy więc znaleźć ciąg liczb naturalnych $\{m_n\} : m_1 < m_2 < m_3 \ldots$ w taki sposób, aby $\lim_{n\to\infty} a_{m_n} = g$.

W tym celu, weźmy najpierw $\epsilon = 1$. Istnieje wtedy nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że

$$g - 1 < a_n < g + 1.$$

Oznaczmy przez m_1 którąkolwiek z tych liczb (niech to będzie np. *pierwsza* z tych liczb). Mamy w ten sposób

$$g - 1 < a_{m_1} < g + 1.$$

Weźmy teraz $\epsilon = \frac{1}{2}$. Tu znów istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że

$$g - \frac{1}{2} < a_n < g + \frac{1}{2}.$$

Skoro jest ich nieskończenie wiele, to są wśród nich liczby większe od m_1. Weźmy którąkolwiek spośród nich i oznaczmy przez m_2. Mamy więc

$$g - \frac{1}{2} < a_{m_2} < g + \frac{1}{2}, \qquad m_1 < m_2.$$

Trzeci krok jest analogiczny: Znajdujemy m_3 takie, że

$$g - \frac{1}{3} < a_{m_3} < g + \frac{1}{3}, \qquad m_2 < m_3$$

i dalej postępujemy rekurencyjnie: Mając m_k, znajdujemy w opisany wyżej sposób m_{k+1} takie, że

$$g - \frac{1}{k+1} < a_{m_k} < g + \frac{1}{k+1}, \qquad m_k < m_{k+1} \tag{29}$$

Z twierdzenia o trzech ciągach wynika teraz, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(g - \frac{1}{n}\right) = g = \lim_{n\to\infty}\left(g + \frac{1}{n}\right).$$

Ciąg $m_1, m_2, m_3, \ldots$ z konstrukcji jest rosnący, więc ciąg $a_{m_1}, a_{m_2}, a_{m_3}, \ldots$ jest podciągiem ciągu $\{a_n\}$. Ze wzoru (29) widać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = g$.

CBDO

Poniższe twierdzenie jest wnioskiem z tw. BW.

Tw. Każdy ciąg ograniczony: nierosnący lub niemalejący, jest zbieżny. Przy tym:
Dla ciągu niemalejącego: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ mamy: $\forall_{k\in\mathbb{N}} : a_k \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$;
Dla ciągu nierosnącego: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$ mamy: $\forall_{k\in\mathbb{N}} : a_k \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dow. Dla ustalenia uwagi rozpatrzmy $\{a_n\}$ – ciąg niemalejący. Oznaczmy przez Z – zbiór wartośći tego ciągu, a przez g – kres górny tego zbioru: $g = \sup Z$. Mamy więc

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} : g \geqslant a_n;$$

jednocześnie $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{k\in\mathbb{N}} : g - \epsilon < a_k$ (ponieważ nierówność, będąca zaprzeczeniem: $\forall_{k\in\mathbb{N}} : g - \epsilon \geqslant a_k$, *nie może* być spełniona – na podstawie definicji kresu górnego).

Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący, to nierówność: $n > M$ pociąga za sobą: $a_M \leqslant a_n$, a stąd $g - \epsilon < a_n$. A więc $\forall_{\epsilon>0}\exists M' : \forall_{n>M'}$ zachodzi

$$g - \epsilon < a_n \leqslant g, \qquad \text{skąd} \quad |a_n - g| < \epsilon;$$

ta ostatnia nierówność oznacza, że $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

To był dowód dla ciągów niemalejących. Dla nierosnących jest analogiczny.

CBDO

Przykł. (zastosowań powyższego twierdzenia)

1. Weźmy $c > 0$ i określmy ciąg $\{x_n\}$ następującym wzorem *rekurencyjnym*:

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_{n+1} = \sqrt{c + x_n},$$

tzn.

$$x_1 = \sqrt{c}, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \ldots$$

Nie jest łatwo podać wzór ogólny na n-ty wyraz ciągu, ale proste jest policzenie jego granicy. Aby to zrobić, żauważmy najsampierw, że ciąg $\{x_n\}$ jest *rosnący*. Jest on również *ograniczony z góry*. Pokażemy indukcyjnie, że takim ograniczeniem górnym jest liczba $\sqrt{c} + 1$. Istotnie, *i)* dla $n = 1$, mamy $x_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$. *ii)* Założmy, że nierówność $x_n < \sqrt{c} + 1$ jest spełniona dla jakiegoś n i sprawdźmy, czy jest spełniona dla $n + 1$. Mamy:

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + 1 + \sqrt{c}} < \sqrt{c + 1 + 2\sqrt{c}} = 1 + \sqrt{c}$$

zatem *iii)* nierówność $x_n < \sqrt{c} + 1$ jest spełniona dla dowolnego n.

Pokazaliśmy, że ciąg $\{x_n\}$ jest monotoniczny (rosnący) i ograniczony, zatem – zgodnie z Tw. powyżej – jest zbieżny do (skończonej) granicy g. Aby ją określić, napiszmy równość: $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ w postaci

$$x_{n+1}^2 = c + x_n$$

i przejdźmy w niej do granicy $\lim\limits_{n\to\infty}$. Mamy:

$$g^2 = c + g \quad \Longrightarrow g = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

g nie może być ujemne (jako granica ciągu o wyrazach dodatnich), więc $g = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

2. Niech Czytelnik (Czytelniczka) spróbuje pokazać, że w ogólniejszej sytacji:

$$y_1 = a > 0, \quad y_{n+1} = \sqrt{c + y_n},$$

ciąg $\{y_n\}$ jest również zbieżny i jego granica jest równa jak poprzednio: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ – niezależnie od tego, jak wybierzemy "punkt startowy" a.

3. *Przykład ciągu, który łatwo zdefiniować, ale niełatwo policzyć granicę.* Weźmy dwie liczby dodatnie a, b, przy czym $a > b$. Utwórzmy *średnią arytmetyczną* a_1 i *geometryczną* b_1 tych liczb:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a \cdot b}.$$

Zachodzi nierówność: $a_1 > b_1$[4] czyli mamy nierówności:

$$a > a_1 > b_1 > b$$

Dla liczb a_1, b_1 znowu tworzymy obie średnie:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_2 \cdot b_2}.$$

Mamy

$$a > a_1 > a_2 > b_2 > b_1 > b$$

itd. Tak więc tworzymy dwa ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ określone rekurencyjnie:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}.$$

Analogicznie jak poprzednio, mamy

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

czyli ciąg $\{a_n\}$ jest *malejący*, zaś ciąg $\{b_n\}$ – rosnący. Jednocześnie oba są ograniczone: Ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu przez b, a ciąg $\{b_n\}$ – z góry przez a. Oba ciągi są więc zbieżne i oba mają granice (skończone)

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Przejdźmy teraz w równości

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

do granicy $\lim\limits_{n\to\infty}$; otrzymamy

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta.$$

Ile wynosi ta (wspólna) granica? (granicę tę nazywa się też *średnią arytmetyczno-geometryczną* liczb a i b). Okazuje się, że granica ta wyraża się przez tzw. *całkę eliptyczną*.

[4]Mamy bowiem, dla $a > b$:

$$\frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a - 2\sqrt{ab} + b\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$$

2.7 Warunek i twierdzenie Cauchy'ego

Tw. Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{N}} :\ \forall_{n>M} :\quad |a_n - a_M| < \epsilon. \tag{30}$$

Uwaga. Warunek (30) nazywa się *warunkiem Cauchy'ego*; niedługo poznamy równoważną jego postać.

Dow. $1^o \Longrightarrow$ Ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny; oznaczmy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Niech dane będzie $\epsilon > 0$. Istnieje więc takie M, że dla $n \geqslant M$ zachodzi $|a_n - g| < \frac{1}{2}\epsilon$. Nierówność ta zachodzi w szczególności dla $n = M$, tzn. $|a_M - g| = |g - a_M| < \frac{1}{2}\epsilon$. Dodając obie te nierówności pod znakiem wartości bezwzględnej, otrzymujemy (30).

$2^o \Longleftarrow$ Załóżmy teraz, że warunek Cauchy'ego (30) jest spełniony. Należy stąd dowieść, że ciąg jest zbieżny. Najsampierw udowodnimy, że jest ograniczony. Będziemy to robić analogicznie jak kilka stron temu (przy dowodzie, że ciąg zbieżny jest ograniczony). Weźmy mianowicie $\epsilon = 1$. Istnieje więc takie M, że dla $n > M$ mamy $|a_n - a_M| < 1$. Stąd

$$|a_n| - |a_M| \leqslant |a_n - a_M| < 1,$$

a więc $|a_n| < |a_M| + 1$. Oznaczmy przez s liczbę większą od każdej spośród M następujących liczb: $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{M-1}|, |a_M| + 1$. Mamy więc $\forall_{n\in\mathbb{N}} :\ s > |a_n|$. To dowodzi, że ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony.

Skoro tak, to na mocy tw. Bolzano-Weierstrassa wynika, że ciąg ten zawiera podciąg zbieżny. Oznaczmy ten podciąg $\{a_{mn}\}$ i niech jego granica wynosi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = \gamma$. Udowodnimy, że $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Niech będzie dane $\epsilon > 0$. Ponieważ jest spełniony warunek Cauchy'ego, to istnieje takie M, że dla $n > M$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - a_M| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{31}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{m_n} = \gamma$, to istnieje takie M', że dla $n > M'$ mamy

$$|a_{m_n} - \gamma| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{32}$$

Można tu dobrać M' tak, by $M' > M$. W ten sposób, dla $n > M'$ obie nierówności (31) i (32) będą spełnione jednocześnie.

Ponadto, ponieważ $m_n > n > M$, to można w (31) zastąpić n przez m_n. W ten sposób mamy

$$|a_{m_n} - a_M| < \frac{1}{3}\epsilon. \tag{33}$$

Dodając do siebie nierówności (31),(32) i (33), i zmieniwszy uprzednio znak pod modułem w lewej części (33), otrzymujemy nierówność $|a_n - \gamma| < \epsilon$, która jest spełniona dla każdego $n > M$. A to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$.

CBDO

Uwagi.

1. W tw. Cauchy'ego można zastąpić znak "$>$" w nierówności $n > M$, oraz "$<$" w warunku Cauchy'ego (30), przez $\geqslant$ i $\leqslant$ odpowiednio.

2. Warunek Cauchy'ego (30) można sformułować równoważnie:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M\in\mathbb{N}} : \forall_{n,m>M} : |a_n - a_m| < \epsilon. \tag{34}$$

Dow. Z warunku Cauchy'ego (30) wynika bowiem, że istnieje takie M', że dla $n > M'$ i dla $m > M'$ zachodzą nierówności $|a_n - a_{M'}| < \frac{1}{2}\epsilon$ i $|a_m - a_{M'}| < \frac{1}{2}\epsilon$. Dodając je pod znakiem wartości bezwzględnej otrzymamy (34).

CBDO

2.8 Ciągi rozbieżne do ∞

Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *rozbieżny do* ∞, jeśli

$$\forall_{r>0}\exists_{M\in\mathbb{N}}\forall_{n>M} : a_n > r.$$

Zapisujemy to symbolicznie jako równość: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Mówimy też, że ciąg a_n posiada *granicę niewłaściwą* (równą nieskończoności).

Można obrazowo powiedzieć, że ciąg rozbieżny do ∞ to taki, którego dostatecznie dalekie wyrazy są dowolnie duże.

Analogicznie określamy rozbieżność do $-\infty$: Mówimy, że ciąg b_n jest rozbieżny do $-\infty$, jeśli ciąg $-b_n$ jest rozbieżny do ∞.

Przykł. $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} - n^2 = -\infty$.

Tw. Ciąg niemalejący $\{a_n\}$ nieograniczony z góry jest rozbieżny do ∞.

Dow. Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest nieograniczony z góry, więc $\forall_{r\in\mathbb{R}}\ \exists M\ :\ a_M > r$. Ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący, to dla $n > M$ mamy $a_n \geqslant a_M$, zatem $a_n > r$. Tak więc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

CBDO

Analogicznie dla ciągów nierosnących: jeśli ciąg $\{b_n\}$ jest nieograniczony z dołu, to ma granicę niewłaściwą $-\infty$.

Przyjmując powyższą terminologię, możemy przeformułować twierdzenie o tym, że każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny: Rozszerzamy to do postaci:

Każdy ciąg monotoniczny posiada granicę właściwą lub niewłaściwą (w zależności od tego, czy jest ograniczony, czy nieograniczony).

Tw. X Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Dow. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i niech $\epsilon > 0$. Biorąc $r = \frac{1}{\epsilon}$, widzimy, że istnieje takie M, że dla $n > M$ zachodzi $a_n > r = \frac{1}{\epsilon}$, tzn. $\frac{1}{a_n} < \epsilon$, a to oznacza, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$.

Uwaga. Twierdzenie odwrotnie *nie jest* prawdziwe: Jeśli ciąg $\{a_n\}$ dąży do 0, to ciąg $\{\frac{1}{a}n\}$ nie musi być rozbieżny do $+\infty$ lub $-\infty$. Jest tak np. z ciągiem $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, zbieżnym do zera: Ciąg $\frac{1}{a_n} = (-1, 2, -3, 4, \dots)$ nie jest rozbieżny do ∞ ani do $-\infty$.

Naturalne jest oczekiwać, że *suma i iloczyn ciągów rozbieżnych do* ∞ *też są rozbieżne do* ∞. Tak też jest w istocie. Pokażemy tu nieco wzmocnione wersje tych stwierdzeń.

Tw. XX Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, a ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Dow. Niech M będzie stałą ograniczającą ciąg $\{b_n\}$ od dołu: $\forall_{n\in\mathbb{N}} M < b_n$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, to dla danego (dowolnego) r istnieje taka liczba k, że dla $n > k$ zachodzi $a_n > r - M$. Stąd $a_n + b_n > r$, a to znaczy, że $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Tw. XXX Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oraz ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z dołu przez *dodatnią* stałą c: $\forall_{n\in\mathbb{N}} b_n \geqslant c > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

Dow. Weźmy jakąś (dowolną) liczbę r. Z założenia (o rozbieżności $\{a_n\}$ do ∞) istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że dla $n > k$ mamy $a_n > \frac{r}{c}$. Mnożąc obie strony tej nierówności przez strony nierówności $b_n \geqslant c$, otrzymujemy $a_n b_n > r$, co znaczy, że $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Mamy też analogon nierówności (26):

Tw. XXXX Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oraz $\forall_{n\in\mathbb{N}} : a_n \leqslant b_n$, to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Dow. Jeśli $a_n > r$, to tym bardziej $b_n > r$.

2.9 Przykłady, w tym granice ważnych ciągów

Przykł. 1. Jeśli $c > 0$, to $\lim_{n\to\infty} cn = \infty$.

Wynika to natychmiast z tw. XXX.

Przykł. 2 Jeśli $a > 1$, to $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Weźmy $c = a - 1$; mamy: $c > 0$. Na mocy nierówności Bernoulliego mamy:

$$a^n = (1 + c)^n \geqslant 1 + cn,$$

i z Przykł. 1 oraz tw. XXXX mamy $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Przykł. 3 Jeśli $|q| < 1$, to $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Rozpatrzmy najsampierw przypadek $0 < q < 1$. Wówczas $\frac{1}{q} < 1$, a więc $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \infty$. Stąd na mocy Tw. X mamy $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Gdy zaś mamy $|q| < 1$, to wtedy $\lim_{n\to\infty} |q_n| = 0$, ale wtedy z Tw. ... wynika, że również $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Przykł. 4 Jeśli $|q| < 1$, to

$$\lim_{n\to\infty}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = \frac{1}{1-q}$$

Wynika to z równości: $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ oraz dopiero co pokazanego faktu, że $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

2.10 Liczba e

Wprowadzimy teraz ważną w analizie (i nie tylko) liczbę, zwaną e, wykorzystując przy tym poznane uprzednio twierdzenia dotyczące granic ciągów.

Rozważmy ciąg

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{35}$$

Stw. Ciąg $\{e_n\}$ jest rosnący.

Dow. Rozwińmy wyrażenie na e_n korzystając ze wzoru dwumiennego Newtona:

$$\begin{aligned} e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot k)}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{36}$$

Jeśli teraz przejdziemy od e_n do e_{n+1}, to w wyrażeniu powyżej przybędzie jeszcze jeden *dodatni* wyraz, a każdy z już istniejących się zwiększy, bo dowolny czynnik w nawiasach postaci: $\left(1-\frac{s}{n}\right)$ zmieni się na $\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$. Stąd wynika, że

$$e_{n+1} > e_n,$$

czyli ciąg $\{e_n\}$ jest ciągiem *rosnącym*.

CBDO

Pokażemy dalej, że zachodzi też

Stw. Ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony z góry.

Dow. Każdy z czynników w nawiasach w (36) jest mniejszy od 1, zatem zamieniając wszystkie czynniki w nawiasach na 1 *zwiększamy* to wyrażenie. Mamy więc:

$$e_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} \equiv E_n \tag{37}$$

a ciąg $\{E_n\}$ jest ograniczony z góry, bo jego dowolny wyraz jest mniejszy od 3, jak to wynika z następującego oszacowania:

$$E_n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2=3.$$

Ciąg $\{e_n\}$ jest zatem monotoniczny (rosnący) i ograniczony, a więc *zbieżny*. Granicę ciągu $\{e_n\}$ oznaczamy jako e:

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718281828459045... \tag{38}$$

2.10.1 Inna postać liczby e

Powróćmy do równości (36). Weźmy jakąś liczbę naturalną $k < n$ i pomińmy w równości (36) wszystkie wyrazy poza k pierwszymi. Pominięte wyrazy są *dodatnie*, mamy więc

$$e_n >= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Przejdźmy teraz do granicy $n\to\infty$[5] Każdy z nawiasów wtedy dąży do 1; mamy więc

$$e \geqslant 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!} = E_k.$$

Nierówność ta jest prawdziwa przy dowolnym $k \in \mathbb{N}$. W połączeniu z nierównością () mamy więc

$$e_n < E_n \leqslant e,$$

skąd wynika – na podstawie twierdzenia o trzech ciągach – że również

$$e = \lim_{n\to\infty} E_n = 1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \tag{39}$$

[5]Pamiętajmy, że k jest dowolne, ale *ustalone*, gdy przechodzimy do granicy $n\to\infty$.

Jest to inna, równoważna (38) a łatwiejsza do wyliczeń, postać liczby e.

Pokażemy jeszcze, że

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 = \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}. \tag{40}$$

Mamy bowiem:

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}},$$

a więc

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e},$$

bo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

To tyle na razie o ciągach i ich granicach. Do tematu będziemy – w miarę potrzeby – powracać; kilka ciekawych granic pojawi się, gdy będzie trochę więcej o funkcjach log i exp