

1 Funkcje i ich granice

Było: Zbiór argumentów; zbiór wartości; monotoniczność; funkcja odwrotna; funkcja liniowa; kwadratowa; wielomiany; funkcje wymierne; funkcje trygonometryczne i ich odwrotności; funkcja wykładnicza i logarytmiczna.

1.1 Funkcja wykładnicza – kilka odpowiedzi

1.1.1 Wartość funkcji wykładniczej dla argumentów niewymiernych

Mówiąc o funkcji wykładniczej a^x , wykładowca prześlizgnął się nad problemem definicji tejże dla x niewymiernych (było konsekwentnie powiedziane jedynie, jak się liczy wartość a^x dla $x \in \mathbb{Q}$). Teraz będzie o tym dopowiedzenie. "Szkolny" sposób wprowadzenia potęgi a^x dla x niewymiernych polegał zazwyczaj na zdefiniowaniu a^x jako granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$, gdzie $\{r_n\}$ był jakimś ciągiem monotonicznym liczb wymiernych zbieżnym do x (np. ciągiem przybliżeń dziesiętnych x). W wykładzie szkolnym zazwyczaj nie dowodziło się istnienia granicy tego ciągu, poprzestając na argumentach intuicyjnych. Uzbrojeni w twierdzenia o granicach ciągów, możemy łatwo pokazać istnienie granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$: Otóż jeśli $\{r_n\}$ jest ciągiem monotonicznym, to taki jest też ciąg a^{r_n} ; jest to ponadto ciąg *ograniczony*, więc *zbieżny*.

1.1.2 Funkcja wykładnicza o podstawie e

Okazuje się dogodne (z przyczyn, które staną się jasne niedługo) wziąć w definicji funkcji wykładniczej $a = e$. Funkcja odwrotna do e^x , tzn. $\log_e x$, nazywa się *logarytmem naturalnym*¹.

1.2 Granica funkcji w punkcie

Def. definicja Heinego Liczbę g nazywamy *granica funkcji f w punkcie a* (co oznaczamy: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$) jeżeli dla każdego ciągu $\{x_n\}$ zbieżnego do a i o wyrazach różnych od a zachodzi równość:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Przykł. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$. Weźmy bowiem dowolny ciąg $\{x_n\}$ zbieżny do zera; mamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 = 0.$$

Przykł. Rozważmy funkcję $\operatorname{sgn}(x)$, definiowaną jako

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Funkcja $\operatorname{sgn}(x)$ nie posiada granicy w punkcie $x = 0$. Weźmy bowiem: $x_n = \frac{1}{n}$; mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(x_n) = 1$. Weźmy teraz drugi ciąg $x'_n = -\frac{1}{n}$; mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(x'_n) = -1$, tak więc $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ nie istnieje.

¹Wprowadzono je w XVII w., a pierwsi zrobili to Napier i Bernoulli.

Można jednak mówić tu o *granicy jednostronnej* w punkcie 0.

Def. Liczbę g nazywamy granicą *lewostronną* (*prawostronną*) funkcji f w punkcie a , jeśli warunki: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ i $x_n < a$ (odpowiednio $x_n > a$) implikują $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$. Sytuacje te oznaczamy symbolami:

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = g \quad - \text{ granica lewostronna i } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = g \quad - \text{ granica prawostronna.} \quad (2)$$

W ten sposób, mamy

Przykł. (c.d.)

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = +1.$$

Symbolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ używamy również na oznaczenie *granicy niewłaściwej*:

Przykł. Mamy: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$;

natomiast

Przykł. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ *nie istnieje*; natomiast:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Przykł. Podobnie: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)$ *nie istnieje*; natomiast:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})-} \operatorname{tg}(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})+} \operatorname{tg}(x) = +\infty.$$

Istnieją jednak funkcje, które nie posiadają nawet jednostronnych granic (właściwych, ani niewłaściwych). Należy do nich np. funkcja:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \neq 0.$$

W punkcie $x = 0$ nie posiada ona jednostronnej granicy (ani lewo-, ani prawostronnej). Aby pokazać nieistnienie granicy prawostronnej, weźmy dwa ciągi o wyrazach dodatnich: $\{x_n\} = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $\{x'_n\} = \frac{2}{(4n+3)\pi}$. Oba ciągi są zbieżne do zera. Mamy

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = +1$$

i podobnie

$$f(x'_n) = \sin\left(\frac{1}{x'_n}\right) = \sin\left(2\pi n + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Widzimy, że nie istnieje granica prawostronna w zerze (podobnie przekonujemy się, że nie istnieje też granica lewostronna).

Prócz granicy funkcji dla skończonego a , rozważamy też granicę *w nieskończoności*.

Def. Mówimy, że granicą funkcji $f(x)$ w nieskończoności jest liczba g (ozn. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$), jeżeli dla *każdego* ciągu $\{x_n\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ zachodzi: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Przykł. Mamy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \quad (3)$$

Przykł. Funkcje trygonometryczne: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ *nie posiadają* granic w $\pm\infty$.

1.3 Działania na granicach

Tw. Przy założeniu, że granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ istnieją i są skończone, zachodzą wzory:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{jeżeli } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0. \quad (7)$$

Wzory te pozostają też prawdziwe, jeśli a jest $\pm\infty$, jak też są prawdziwe dla granic jednostronnych.

Dow. Dowody są takie same jak dla granic ciągów z poprzedniego rozdziału.

Mamy też analogony innych twierdzeń dla granic ciągów:

Tw. Jeśli granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ istnieją, to

$$\text{nierówność } f(x) \leq g(x) \text{ implikuje } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (8)$$

nierówności $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ wraz z równością $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

$$\text{implikują } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x). \quad (9)$$

Jak poprzednio, wzory te są też prawdziwe dla $a = \pm\infty$ oraz dla granic jednostronnych.

Dowody są analogiczne jak w przypadku granic ciągów.

CBDO

1.4 Kilka warunków dostatecznych istnienia granicy

Najsamprzód przeniesmy definicję ciągu ograniczonego na funkcje:

Def. Mówimy, że funkcja $f(x)$ jest *ograniczona z góry (dołu)*, jeżeli istnieje taka stała M , że dla każdego x z dziedziny zachodzi: $f(x) < M$ (odpowiednio $f(x) > M$). Wśród różnych analogonów na istnienie granic ciągów i funkcji, mamy następujący odpowiednik twierdzenia o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych:

Tw. Jeśli funkcja jest niemalejąca i ograniczona z góry, to istnieje granica $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ dla dowolnego a .

Uwaga. Niezbędne jest tu założenie o *monotoniczności* funkcji. Dla funkcji niemonotonicznych twierdzenie to *nie zachodzi* – przypomnijmy sobie przykład funkcji $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Ciąg $\left\{a - \frac{1}{n}\right\}$ jest rosnący, a stąd ciąg $\left\{\left(a - \frac{1}{n}\right)\right\}$ jest niemalejący; a ponieważ jest też ograniczony, to jest zbieżny. Niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a - \frac{1}{n}\right) = g.$$

Pozostaje pokazać, że przy narzuceniu warunków: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oraz $x_n < a$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

Weźmy jakieś $\epsilon > 0$. Istnieje wówczas N takie, że $g - f\left(a - \frac{1}{N}\right) < \epsilon$. Mając to N bierzemy takie k , żeby dla $n > k$ zachodziła nierówność $a - \frac{1}{N} < x_n$. Stąd

$$f\left(a - \frac{1}{N}\right) < f(x_n),$$

skąd

$$g - f(x_n) < g - f\left(a - \frac{1}{N}\right) < \epsilon. \quad (10)$$

Jednocześnie: Ponieważ $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, to dla każdego n istnieje r_n takie, że $x_n < a - \frac{1}{r_n}$. Mamy stąd

$$f(x_n) < f\left(a - \frac{1}{r_n}\right) \leq g \implies g - f(x_n) > 0. \quad (11)$$

Z obu nierówności: (10) i (11) mamy:

$$-\epsilon < 0 < g - f(x_n) < \epsilon \implies |g - f(x_n)| < \epsilon \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g.$$

CBDO

W analogiczny sposób dowodzi się twierdzeń dla funkcji nierosnących oraz dla granic prawostronnych. Można to podsumować jako

Tw. Jeśli funkcja jest nierosnąca lub niemalejąca i ograniczona, to granice $\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} f(x)$ istnieją w każdym punkcie a . Dla $a = \pm\infty$, istnieje granica $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

CBDO

Zachodzi też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne:

Tw. XX Jeśli funkcja f nie posiada granicy skończonej w punkcie a , to istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że $x_n \neq a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oraz ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny.

Bez dowodu. **jednak TRZEBA dowodu! Ale wtedy trzeba jeszcze odpowiedniego dowodu dla analogonu z ciągów. A dla cd. – jeszcze o superpozycji w granicy.**

Prócz definicji Heinego, jest jeszcze jedna, inna ale równoważna, i równie ważna, *definicja Cauchy'ego*.

Def. Mówimy, że funkcja f posiada w punkcie a granicę g , jeżeli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - g| < \epsilon.$$

A oto obiecana równoważność:

Tw. XXX Obie definicje granicy funkcji w punkcie: Cauchy'ego i Heinego są równoważne.

tzn. jeśli funkcja w jakimś punkcie ma granicę w myśl def. Cauchy'ego, to ma ją też zgodnie z def. Heinego i na odwrót; a jeśli nie ma w myśl def. Cauchy'ego to nie ma też z def. Heinego i na odwrót.

Dow. Przypuśćmy najspierw, że warunek Cauchy'ego *nie jest* spełniony, tzn.

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x: 0 < |x - a| < \delta : |f(x) - g| \geq \epsilon.$$

W szczególności, biorąc $\delta = \frac{1}{n}$, wnioskujemy, że istnieje ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad (12)$$

oraz

$$|f(x_n) - g| \geq \epsilon. \quad (13)$$

Warunek (12) mówi, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Gdyby więc przypuścić, że $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, to musiałaby być spełniona równość $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$; ale ta równość jest sprzeczna z (13).

Pokazaliśmy w ten sposób, że warunek Cauchy'ego jest *konieczny*, aby funkcja posiadała granicę w myśl definicji Heinego.

Teraz pokażemy, że jest on również warunkiem *wystarczającym*.

Niech będzie dane $\epsilon > 0$ i niech $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ oraz $x_n \neq a$. Ponieważ z założenia warunek Cauchy'ego jest spełniony, to istnieje $\delta > 0$ takie, że nierówność: $0 < |x_n - a| < \delta$ implikuje $|f(x_n) - g| < \epsilon$. Ponieważ spełniona jest równość $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, to nierówność $|x_n - a| < \delta$ zachodzi dla wszystkich dostatecznie dużych n (tzn. począwszy od pewnego $M \in \mathbb{N}$). Dla tych n mamy więc nierówność $|f(x_n) - g| < \epsilon$, a to znaczy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$ – czyli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$.

W teorii ciągów mieliśmy warunek Cauchy'ego dla ciągów, którego spełnienie gwarantowało zbieżność ciągu. Przy granicy funkcji mamy analogiczne twierdzenie.

Tw. XXXX Warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie (skończonej) granicy funkcji f w punkcie a jest, aby dla dowolnego $\epsilon > 0$ istniało takie $\delta > 0$, że dla x, x' spełniających:

$$0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |x' - a| < \delta \quad (14)$$

zachodzi: $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Dow. Pokażemy najsamprzód *konieczność* tego warunku. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$, to dla dowolnego zadanego $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że warunek: $0 < |x - a| < \delta$ implikuje $|f(x) - g| < \frac{1}{2}\epsilon$. Jeśli więc warunki (14) są spełnione, to zachodzą nierówności:

$$|f(x) - g| < \frac{1}{2}\epsilon \quad i \quad |f(x') - g| < \frac{1}{2}\epsilon,$$

i po dodaniu tychże pod znakiem wartości bezwzględnej otrzymujemy $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Jeśli chodzi o *dostateczność* warunku, to przypuśćmy, że granica funkcji f w punkcie a *nie istnieje*, mimo iż są spełnione założenia tw. XXXX. Istnieje wówczas na mocy tw. XX taki ciąg $\{x_n\}$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ oraz że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest rozbieżny. Z równości $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ wynika, że istnieje takie k , że dla $n \geq k$ można w nierównościach (14) podstawić $x = x_n$ i $x' = x_k$. To implikuje, że $|f(x_n) - f(x_k)| < \epsilon$. Z twierdzenia Cauchy'ego dla ciągów wnioskujemy stąd, że ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny – wbrew naszemu przypuszczeniu.

CBDO

Powyższe twierdzenia XXX i XXXX dają się rozszerzyć na przypadek $a = \infty$. Brzmiały one wtedy następująco:

Tw. XXX' Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby zachodziła równość $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$ jest, aby

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_r \forall_{x > r} : |f(x) - g| < \epsilon.$$

Tw. XXXX' Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby istniała granica (skończona) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, jest, aby

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_r \forall_{x, x' > r} : |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Dow. Dowody są analogiczne jak twierdzeń XXX i XXXX.

CBDO

2 Funkcje ciągłe

Def. Mówimy, że funkcja f jest *ciągła w punkcie a* , jeśli spełniony jest warunek

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (15)$$

Przypominając sobie definicję granicy funkcji f w punkcie a można więc powiedzieć, że dla funkcji f ciągłej w punkcie a mamy: Dla *dowolnego* ciągu $\{x_n\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ zachodzi

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \quad (16)$$

Jeśli w równości (15) zastąpić granicę przez granicę jednostronną, to otrzymamy definicję *ciągłości jednostronnej*:

Def. Mówimy, że funkcja f jest *prawostronnie* (lewostronnie) *ciągła w punkcie a* , jeśli

$$\lim_{x \rightarrow a-0+} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-0-} f(x) = f(a) \right)$$

Jeśli funkcja f jest określona nie dla wszystkich x , dla których określona jest granica, to w powyższych definicjach ograniczamy zakres zmienności x do zbioru argumentów funkcji. I tak np. jeśli f jest określona na odcinku domkniętym $[a, b]$, to ciągłość f w punkcie a oznacza jedynie jej ciągłość *prawostronną*, ciągłość w punkcie b – ciągłość *lewostronną*.

Def. Funkcję ciągłą dla każdej wartości argumentu ze zbioru X nazywamy *funkcją ciągłą na X* .

I tak np. mówiąc, że funkcja f jest ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ mamy na myśli, że jest prawostronnie ciągła w punkcie a , lewostronnie ciągła w punkcie b oraz obustronnie ciągła w punktach wewnętrznych odcinka $[a, b]$.

Def. Mówimy, że funkcja f jest *przedziałami ciągła* na odcinku $[a, b]$, jeśli ten odcinek można podzielić za pomocą skończonego układu punktów $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ gdzie

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$$

na podprzedziały $[a_{k-1}, a_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) w taki sposób, że wewnątrz każdego przedziału funkcja f jest ciągła i istnieją granice jednostronne $\lim_{x \rightarrow a_{k-1},+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a_k,-} f(x)$.

Innymi słowy, funkcja posiadająca skończoną ilość punktów nieciągłości, w których istnieją obie granice jednostronne, jest funkcją przedziałami ciągłą.

Przykłady.

1. Pokazaliśmy niedawno, że $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Znaczy to, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła w punkcie $x = 0$ (jest też ciągła na całym zbiorze $\mathbb{R}$, co niedługo pokażemy).
2. Funkcja $f(x) = [x]$ (wykres) jest nieciągła w punktach całkowitych. Dokładniej, w tych punktach jest ciągła prawostronnie, lecz nie lewostronnie. Ponieważ jednak granice lewostronne istnieją, to jest przedziałami ciągła na dowolnym odcinku skończonym.

3. Funkcja $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ma nieokreśloną wartość w punkcie $x = 0$. Dookreślmy ją tam, *definiując*: $f(0) = 0$. Nawet tak dookreślona funkcja jest nieciągła w $x = 0$, ponieważ nie istnieją granice (lewo- ani prawostronne) w tym punkcie.
4. Funkcja Dirichleta jest nieciągła w *każdym* punkcie.

2.1 Warunek ciągłości Cauchy'ego

Twierdzenie poniżej może być przyjęte jako definicja ciągłości funkcji (*definicja Cauchy'ego*). Jest ona równoważna definicji Heinego. Ta równoważność jest konsekwencją twierdzenia o równoważności warunków istnienia granic funkcji: Cauchy'ego i Heinego.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja f była ciągła w punkcie a , jest, aby

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x-a| < \delta |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Można to wyrazić bardziej obrazowo mówiąc, że dostatecznie małym przyrostom zmiennej niezależnej odpowiadają tak małe, jak tylko się chce, przyrosty wartości funkcji. Można to zapisać następująco (po ostatnim kwantyfikatorze w wyrażeniu powyżej):

Warunek $|h| < \delta$ implikuje: $|f(a+h) - f(a)| < \epsilon$.

Rys.

Jeszcze inaczej: Funkcja f jest ciągła w punkcie a , jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0. \quad (17)$$

Uwaga. Ciągłość funkcji w punkcie jest własnością *lokalną*: Aby zbadać, czy funkcja jest ciągła w punkcie a , wystarczy znać tę funkcję w *dowolnie małym* otoczeniu a .

2.2 Ciągłość funkcji elementarnych

Z wzorów na działania na granicach funkcji wynika od razu, że *działania arytmetyczne wykonywane na funkcjach ciągłych dają w wyniku funkcje ciągłe*.

Innymi słowy: *Jeśli funkcje f , g są ciągłe w punkcie a , to ich suma, różnica, iloczyn, iloraz (jeśli $g(a) \neq 0$) są również ciągłe w punkcie a .*

Zróbmy teraz mały katalog funkcji ciągłych:

- Funkcja stała $f(x) = \text{const.}$ i funkcja $f(x) = x$ są funkcjami ciągłymi, co widać od razu z definicji.
- Stąd oraz z twierdzenia o ciągłości iloczynu i sumy funkcji ciągłych wynika, że *wielomiany są funkcjami ciągłymi*.
- Stąd oraz z twierdzenia o ciągłości ilorazu funkcji ciągłych wynika, że *funkcje wymierne $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ są funkcjami ciągłymi w tych punktach, gdzie $Q(x) \neq 0$.*
- *Ciągłość funkcji wykładniczej a^x , $a > 0$.* Najsamprzód pokażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1.$$

Pamiętamy bowiem granicę dla ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Stąd wynika, że również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Dlatego też, dla dowolnego $\epsilon > 0$ można znaleźć wskaźnik N taki, że (dla $a > 1$)

$$1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \epsilon$$

Jeżeli teraz weźmiemy takie x , że $|x| < \frac{1}{N}$, (czyli $-\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$), to mamy

$$a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}}$$

skąd

$$1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon \implies |a^x - 1| < \epsilon$$

a to oznacza, że $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

Teraz! Weźmy dowolne x . Mamy: $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = 1$, skąd $\lim_{h \rightarrow 0} a^{x+h} - a^x = 0$, co zgodnie z wersją warunku ciągłości (17) oznacza, że funkcja a^x jest ciągła w dowolnym punkcie x .

• *Ciągłość funkcji trygonometrycznych.* Przypominając sobie definicję funkcji $\sin x$ (RYS) mamy nierówność (dla $x > 0$):

$$0 < \sin x < x$$

Stąd, na mocy twierdzenia o granicach trzech funkcji, wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \tag{18}$$

(ściśle rzecz biorąc, powyższa granica jest granicą prawostronną; ale z antysymetrii funkcji $\sin$ wynika również ta sama równość dla granicy lewostronnej). Nierówność (18) znaczy też, że funkcja $\sin x$ jest ciągła w $x = 0$.

Znając granicę (18) łatwo pokażemy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Mamy bowiem: $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x$, co – na mocy twierdzenia o granicach trzech funkcji – oznacza, że $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$. Mamy też w ten sposób ustanowioną ciągłość funkcji $\cos x$ w zerze.

Teraz pokażemy, że funkcje: $\sin x$ i $\cos x$ są wszędzie ciągłe, korzystając tu z warunku (17).

Mamy bowiem:

$$\sin(x+h) - \sin x = 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

i, korzystając z nierówności: $|\sin x| \leq |x|$ oraz $|\cos x| \leq 1$, mamy

$$|\sin(x+h) - \sin x| \leq |h| \implies \lim_{h \rightarrow 0} |\sin(x+h) - \sin x| = 0$$

czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x+h) - \sin x = 0.$$

Podobnie

$$|\cos(x+h) - \cos x| = 2 \left| \sin \frac{h}{2} \right| \cdot \left| \sin \left(x + \frac{h}{2} \right) \right| \leq |h|$$

co daje

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(x+h) - \cos x = 0.$$

Wniosek. Funkcja $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ jest ciągła dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a $\operatorname{ctg} x$ – dla $x \neq k\pi$ (tu $k \in \mathbb{Z}$).

• Do kompletu funkcji elementarnych trzeba by jeszcze pokazać ciągłość logarytmu oraz funkcji cyklometrycznych (odwrotnych do funkcji trygonometrycznych). Zrobimy to za chwilę, kiedy pokażemy ciągłość funkcji odwrotnych do ciągłych.

Na razie zaś będziemy potrzebować:

Tw. Jeśli $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ i $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$, to $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$.

Dow. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$; mamy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Weźmy $y_n = f(x_n)$. Mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))$, a to znaczy, że $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$.

CBDO

Korzystając z tego, pokażemy, że *superpozycja (złożenie) dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą*. Dokładniej:

Tw. Jeśli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = a$, zaś funkcja $z = g(y)$ jest ciągła w punkcie $y = f(a)$, to funkcja $g(f(x))$ jest ciągła w punkcie $x = a$.

Dow. Weźmy ciąg $\{x_n\}$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Mamy wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Biorąc $b = f(a)$ i $y_n = f(x_n)$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, skąd – wykorzystując z kolei ciągłość funkcji g :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(b), \text{ tzn. } \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a)).$$

CBDO

Przykł. Przywoływana tu kilkakrotnie funkcja $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ jest ciągła we wszystkich punktach poza $x = 0$.

2.3 Niektóre ogólne własności funkcji ciągłych

Def. *Ciągłość jednostajna* Mówimy, że funkcja f jest *ciągła jednostajnie* na zbiorze X , jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| < \epsilon. \quad (19)$$

Uwaga 1. Zauważmy, że definicja ciągłości zwykłej mówiła o ciągłości funkcji *w punkcie*, natomiast definicja ciągłości jednostajnej mówi o ciągłości funkcji *na zbiorze*.

Uwaga 2. Porównując to z definicją ciągłości funkcji f w punkcie x :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' : |x - x'| < \delta : |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

widać następujące różnice: W definicji ciągłości zwykłej, delta *można* zależeć od wybranego ϵ oraz x . W definicji ciągłości jednostajnej, delta może zależeć *tylko* od ϵ , musi zaś być *taka sama dla wszystkich* $x \in X$.

Przykł. Rozważmy funkcję $f(x) = x^2$ na zbiorze $X_1 = [0, 1]$ i na zbiorze $X_2 = [0, \infty[$. Na obu tych zbiorach jest oczywiście ciągła w zwykłym sensie. Co do ciągłości jednostajnej, to $f(x)$ jest ciągła jednostajnie na X_1 (wystarczy wziąć $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ przy sprawdzaniu warunku (19)), natomiast *nie jest* ciągła jednostajnie na X_2 . Weźmy bowiem np. $\epsilon = 1$ i

jakielkolwiek δ . Wtedy $x' = x + \frac{1}{2}\delta$ i mamy: $f(x) - f(x') = x\delta + \frac{1}{4}\delta^2$, co można uczynić *dowolnie dużym* przez odpowiedni dobór x – tu wystarczy wziąć $x = \frac{1}{\delta}$.

Przykł. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła na zbiorze $X =]0, 1]$, natomiast nie jest tam jednostajnie ciągła.

Następujące twierdzenie mówi o tym, że taka sytuacja nie może się zdarzyć dla funkcji ciągłych na odcinku *domkniętym*.

Tw. *o ciągłości jednostajnej* Funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ jest też na nim jednostajnie ciągła.

Dow. się będzie odbywał przez sprowadzenie do niedorzeczności (tzn. przyjmijmy, że prawdziwe jest zaprzeczenie tezy, i jako konsekwencję otrzymamy sprzeczność). Przyjmijmy więc, że istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje para argumentów x, x' takich że

$$|x - x'| < \delta \quad \text{ i } \quad |f(x) - f(x')| > \epsilon.$$

W szczególności, biorąc $\delta = \frac{1}{n}$, wnioskujemy, że istnieją takie dwa ciągi $\{x_n\}$ i $\{x'_n\}$, że

$$a \leq x_n \leq b, \quad a \leq x'_n \leq b, \quad |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon. \quad (20)$$

Ponieważ ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, zatem – na podstawie tw. Bolzano-Weierstrassa – zawiera podciąg zbieżny $\{x_{m_n}\}$. Oznaczmy jego granicę jako c : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n} = c$. Z pierwszej z nierówności (20) mamy: $a \leq c \leq b$. Funkcja f z założenia jest ciągła wszędzie na $[a, b]$, więc także w punkcie $c \in [a, b]$. Mamy więc: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{m_n}) = f(c)$. Ale teraz: Rozważmy podciąg ciągu $\{x'_n\}$ o tych samych numerach, co podciąg $\{x_{m_n}\}$, tzn. $\{x'_{m_n}\}$. Z trzeciej z nierówności (20) wynika, że również $\{x'_{m_n}\}$ dąży do tej samej granicy: $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_{m_n} = c$, bo $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_{m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{m_n}$. Ciągłość funkcji f jak poprzednio daje: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_{m_n}) = f(c)$. A zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x'_{m_n}) - f(x_{m_n})) = 0.$$

Ale to jest sprzeczne z ostatnią z nierówności (20).

CBDO

Tw. (Weierstrassa). Funkcja f ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ jest ograniczona, a ponadto osiąga tam swoje kresy: dolny $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ oraz górny $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Innymi słowy, istnieją w tym przedziale takie dwa punkty c i d , że $f(c) = m$ oraz $f(d) = M$.

Dow. Pokażemy najsamprzód, że funkcja f jest ograniczona, tzn. $\exists A : \forall x \in [a, b] : |f(x)| < A$. Otóż z poprzedniego twierdzenia (o ciągłości jednostajnej) wnioskujemy, że: Wziąwszy np. $\epsilon = 1$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli punkty x, x' należą do przedziału o długości mniejszej o δ , to $f(x) - f(x') < 1$. Weźmy n takie, aby zachodziła nierówność: $\frac{b-a}{n} < \delta$. W ten sposób, jeśli podzielimy przedział $[a, b]$ na n części, to długość każdego z nich jest mniejsza od δ . Oznaczmy przez $a_0, a_1, \dots, a_n$ końce tych przedziałów, przy czym $a_0 = a$, $a_n = b$. W ten sposób mamy:

dla $a_0 \leq x \leq a_1$: $|f(x) - f(a_1)| < 1$, skąd $|f(x)| \leq 1 + |f(a_1)|$;

i ogólnie, w k -tym przedziale:

dla $a_{k-1} \leq x \leq a_k$: $|f(x) - f(a_k)| < 1$, skąd $|f(x)| \leq 1 + |f(a_k)|$.

Oznaczmy przez A największą z liczb ze zbioru $\{1 + |f(a_k)|\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mamy w ten sposób: $|f(x)| < A$ dla dowolnego $x \in [a, b]$.

W ten sposób pokazaliśmy, że funkcja f jest ograniczona (tzn. zbiór wartości tej funkcji jest ograniczony). Istnieją więc kresy: górny i dolny tego zbioru.

Pokażemy teraz – przez sprowadzenie do niedorzeczności – że M jest jedną z wartości funkcji, tzn. $M = f(d)$ dla pewnego $d \in [a, b]$. Przypuśćmy więc, że jest to *nieprawda*, tzn. $\forall x \in [a, b] : M - f(x) \neq 0$. Skoro tak, to funkcja

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

jest określona na całym przedziale $[a, b]$ i jest w tym przedziale ciągła. Jest to więc – zgodnie z tym co pokazaliśmy przed chwilą – funkcja ograniczona. Istnieje więc takie N , że $\forall x \in [a, b] : g(x) < N$, czyli $M - f(x) > \frac{1}{N}$, lub w innej formie: $f(x) < M - \frac{1}{N}$. Ale jest to sprzeczne z założeniem, że M jest kresem górnym zbioru wartości funkcji f na $[a, b]$.

Dla kresu dolnego dowód jest analogiczny.

CBDO

Tw. (Własność Darboux). Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje w tym przedziale wszystkie wartości pośrednie. Innymi słowy: Jeśli $f(a) < y < f(b)$ (lub $f(a) > y > f(b)$) to $\exists c \in [a, b] : f(c) = y$.

Dow. Załóżmy, że $f(a) < y < f(b)$ (gdy $f(b) < y < f(a)$, dowód jest analogiczny). Przypuśćmy, że twierdzenie jest fałszywe, a w/ec, że $\forall x \in [a, b] : y - f(x) \neq 0$. Zdefiniujmy funkcję $h(x) = \frac{1}{|y - f(x)|}$; jest ona określona na całym $[a, b]$, a ponadto – na mocy twierdzenia Weierstrassa – ograniczona. Niech $h(x) < M$, tzn.

$$|y - f(x)| > \frac{1}{M} \tag{21}$$

Podstawiając w twierdzeniu OCJ² $\epsilon = \frac{1}{M}$ wnioskujemy, że istnieje $\delta > 0$ takie, że dla dowolnych punktów x, x' należących do przedziału o długości mniejszej niż δ , zachodzi

$$|f(x) - f(x')| < \frac{1}{M}.$$

Niech n oznacza liczbę naturalną taką, że $\frac{b-a}{n} < \delta$. Podzielmy odcinek $[a, b]$ na n równych części. W oznaczeniach z poprzedniego twierdzenia mamy

$$|f(a_k) - f(a_{k-1})| < \frac{1}{M} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n. \tag{22}$$

Ponieważ $f(a_0) = f(a) < y < f(a_n) = f(b)$, więc wśród liczb $1, 2, \dots, n$ istnieje taka najmniejsza liczba m , że $y < f(a_m)$. Mamy więc $m > 0$ oraz

$$f(a_{m-1}) < y < f(a_m), \quad \text{skąd } 0 < y - f(a_{m-1}) < f(a_m) - f(a_{m-1}) < \frac{1}{M}$$

(ostatnia nierówność wynika z (22)), co jednak przeczy (21).

CBDO

Zestawiając dwa poprzednie twierdzenia, możemy powiedzieć, że zachodzi następujące

Tw. Funkcja ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ przyjmuje wszystkie wartości od kresu dolnego m do kresu górnego M , włącznie z m i M . Innymi słowy, zbiorem wartości funkcji jest przedział $[m, M]$.

²O Ciągłości Jednostajnej

Uwaga. Własność Darboux wdzęcznie ilustruje się rysunkowo. Jednak ciągłość funkcji nie jest warunkiem koniecznym, aby ta własność miała miejsce; zachodzi ona również dla niektórych funkcji nieciągłych.

Przykł.

Przykł. Jak z wł. Darboux wynika istnienie pierwiastków rzeczywistych równania: $x^{2k+1} + a_{2k}x^{2k} + \dots + a_0 = 0$.

2.4 Ciągłość funkcji odwrotnych

Niech X, Y – zbiory. Wiadomo, że jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest bijekcją, to istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Pokażemy teraz, że *funkcja odwrotna do funkcji ciągłej jest ciągła*. Dokładniej, zachodzi następujące

Tw. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow [A, B]$ jest ciągłą bijekcją, to funkcja odwrotna $g \equiv f^{-1} : [A, B] \rightarrow [a, b]$ też jest ciągła.

Uwaga. Z tw. Weierstrassa wiemy, że $A = m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ oraz $B = M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Dow. Niech $m \leq c \leq M$. Na mocy ostatniego Twierdzenia, funkcja f jest określona w punkcie c . Niech $c = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, gdzie $\{y_n\}$ należy do przedziału $[m, M]$, tzn. jest postaci $y_n = f(x_n)$. Trzeba pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(c)$.

Przeformułujmy to w następujący sposób: Niech $c = f(d)$. Trzeba pokazać, że warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(d)$ pociąga za sobą $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = d$ (bo $g(y_n) = x_n, g(c) = d$). Ciąg $\{x_n\}$ jest ograniczony, jako leżący w przedziale $[a, b]$. Jeśli tak, to można wybrać z niego podciąg zbieżny $\{x_{k_n}\}$. Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = d'$. Wykażemy, że $d' = d$. Z ciągłości funkcji f wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(d')$. Ponieważ zaś

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(d),$$

(w drugiej równości korzystaliśmy z twierdzenia, że jeśli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i jeśli wszystkie jego podciągi zbieżne są zbieżne do tej samej granicy G , to również sam ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do G) więc $f(d') = f(d)$. Ponieważ zaś f jest wzajemnie jednoznaczna, to $d = d'$.

CBDO

Korzystając z powyższego twierdzenia, pokażemy, że

Tw. Każda funkcja f , ciągła na odcinku $[a, b]$, będąca bijekcją, jest ściśle monotoniczna (tzn. ściśle rosnąca bądź ściśle malejąca).

Dow. Z założenia $f(a) \neq f(b)$. Załóżmy, że $f(a) < f(b)$ (gdy jest na odwrót, rozumowanie jest analogiczne). Udowodnimy, że wtedy $f(x)$ jest w całym przedziale $[a, b]$ rosnąca. Niech $x < x'$. Trzeba pokazać, że $f(x) < f(x')$.

Zauważmy najspierw, że warunki $a \leq x \leq b$ i $f(a) < f(b)$ implikują $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Gdyby bowiem tak nie było, to mielibyśmy albo *i)* $f(x) < f(a)$, albo *ii)* $f(x) > f(b)$. W przypadku *i)* mielibyśmy nierówność: $f(x) < f(a) < f(b)$ i, na mocy własności Darboux, istniałby w przedziale $[x, b]$ punkt x'' taki, że $f(x'') = f(a)$; ale to przeczy założeniu, że $f(x)$ jest różnowartościowa (bo $x'' \neq a$). W przypadku *ii)* natomiast istniałby w przedziale $[a, x]$ punkt x''' taki, że $f(x''') = f(b)$, co z kolei jest sprzeczne z założeniem o różnowartościowości funkcji $f(x)$ (bo – podobnie jak uprzednio – $x''' \neq b$).

Pokazaliśmy więc, że $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Jednocześnie wnioskujemy, że warunki $x \leq x' \leq b$ i $f(x) < f(b)$ pociągają za sobą $f(x) \leq f(x') \leq f(b)$. Tak więc $f(x) < f(x')$.
CBDO