

# 1 Pochodne wyższych rzędów

## 1.1 Definicja i przykłady

**Def.** Drugą pochodną funkcji  $f$  nazywamy pochodną pochodnej tej funkcji. Trzecia pochodna jest pochodną drugiej pochodnej; itd. Ogólnie,  $n$ -ta pochodna funkcji jest pochodną  $n - 1$ -wszej pochodnej.

Pochodne wyższych rzędów oznaczamy

$$f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots \quad \text{lub} \quad \frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \frac{d^3f}{dx^3}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}, \dots$$

Mamy więc

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right).$$

*Uwaga.* Dogodnie jest przy tym zdefiniować pochodną rzędu zerowego jako *samą funkcję*:  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

*Przykł.* Dla  $f(x) = x^3$  mamy:  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ ,  $f'''(x) = 6$ , a wszystkie wyższe pochodne są równe zeru.

*Przykł.* Ogólnie:  $k$ -ta pochodna funkcji  $f(x) = x^n$  jest

$$f^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)x^{n-k} \quad \text{dla } k < n \quad f^{(n)}(x) = n!, \quad (1)$$

a wyższe pochodne są równe zeru.

*Przykł.*  $k$ -ta pochodna funkcji  $f(x) = x^a$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$  oraz  $x > 0$ , jest równa

$$f^{(k)}(x) = a(a-1) \dots (a-k+1)x^{a-k}; \quad (2)$$

zwróćmy uwagę, że tutaj pochodna dowolnego rzędu jest różna od zera!

*Przykł.*  $(e^x)' = e^x$ , co daje, że wszystkie wyższe pochodne funkcji  $e^x$  są równe  $e^x$ .

*Przykł.* Dla funkcji  $f(x) = \sin x$  mamy

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x; \quad f^{(4)}(x) = \sin x; \quad (3)$$

to było dla pierwszych czterech pochodnych, a dowolną pochodną można obliczyć wykorzystując tożsamość zawartą wyżej:  $f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x)$ .

*Przykł.* Wzór (1) pozwala policzyć dowolną pochodną dowolnego wielomianu  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Nie będziemy tego wypisywać *in extenso*, (wzór ten jest dość skomplikowany i nie mamy tu potrzeby wypisywać go), a weźmy jego szczególny przypadek, tzn. wypiszmy pochodne od 0 do  $n$  w punkcie  $x = 0$ . Mamy:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}f''(0), \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0). \quad (4)$$

Stąd wynika wzór:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \quad (5)$$

Wzór ten daje się znacząco uogólnić na *dowolne* funkcje, dając tym samym sposób na przybliżenie dowolnej funkcji przez wielomian; zrobimy to już niedługo.

*Przykł.* Wzór na pochodne funkcji odwrotnej.

## 1.2 $n$ -ta pochodna iloczynu funkcji – wzór Leibniza

Na  $n$ -tą pochodną sumy i różnicy sumy dwóch funkcji mamy proste wzory

$$(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x) \quad (6)$$

(natychmiastowy dowód indukcyjny: W pierwszym kroku:  $(f(x) + g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ ; dalej:  $(f(x) + g(x))^{(n)} = ((f(x) + g(x))^{(n-1)})' = (f^{(n-1)}(x) \pm g^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$ ; i na mocy zasady indukcji wzór (6) jest prawdziwy dla każdego  $n$ .)

Dla  $n$ -tej pochodnej iloczynu funkcji wzór jest bardziej skomplikowany, ale dający się ogarnąć:

**Tw.** (wzór Leibniza).  $n$ -ta pochodna iloczynu dwóch funkcji dana jest wzorem

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)} &= f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}g'' + \dots + f \cdot g^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} \end{aligned} \quad (7)$$

(dla prostoty nie pisaliśmy jawnej zależności od  $x$ ; wszędzie wyżej należy pamiętać, że  $f \equiv f(x)$ ,  $f^{(k)} \equiv f^{(k)}(x)$  itd.)

**Dow.** będzie indukcyjny. Dla  $n = 1$  otrzymujemy znany już wzór na pochodną iloczynu. Załóżmy, że wzór (7) zachodzi dla  $n$  i obliczmy pochodną obu jego stron. Z twierdzenia o pochodnej iloczynu mamy

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k+1)} \right] \\ f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=0}^n \left\{ \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] f^{(n-k+1)}g^{(k)} \right\} + f \cdot g^{(n+1)} &= \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)}; \end{aligned}$$

ostatnia równość wynika z faktu, iż mamy dla współczynników Newtona

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

(wzór ten był pokazywany przy dowodzie wzoru dwumiennego Newtona).

**CBDO**

*Przykł.* Obliczmy drugą pochodną funkcji odwrotnej. Najsamprzód wyprowadźmy raz jeszcze wzór na tę pochodną, korzystając z wzoru na pochodną funkcji złożonej. Jeśli  $f(x)$  – funkcja, a  $f^{-1}(x)$  – funkcja do niej odwrotna, to mamy:  $f^{-1}(f(x)) = x$ , skąd po zróżniczkowaniu otrzymamy

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1,$$

co daje

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Obustronnie różniczkując, otrzymujemy

$$[(f^{-1})'(f(x))]' = f'(x) \cdot (f^{-1})''(f(x)) = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^2},$$

co daje

$$(f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}. \quad (8)$$

Różniczkując ten wzór, można uzyskać dowolną wyższą pochodną.

### 1.3 Wzór Taylora

**Tw.** (Wzór Taylora). Załóżmy, że funkcja  $f$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna w przedziale  $[a, b]$ . Oznaczmy  $h = b - a$ . Wtedy zachodzi

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \quad (9)$$

gdzie wyraz  $R_n$ , zwany *resztą  $n$ -tego rzędu*, można przedstawić w jednej z postaci

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \quad \text{dla pewnego } \theta \in ]0, 1[, \quad (10)$$

(reszta w postaci Lagrange'a), lub

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta' h) \quad \text{dla pewnego } \theta' \in ]0, 1[ \quad (11)$$

(reszta w postaci Cauchy'ego).

Przed dowodem:

*Uwaga 1* Wzór Taylora można uważać za uogólnienie wzoru Lagrange'a: Ten ostatni to szczególny przypadek wzoru Taylora dla  $n = 1$ .

**Dow.** Wypiszmy z wzoru (9) resztę:

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \quad (12)$$

Oznaczmy przez  $g_n(x)$  funkcję pomocniczą zdefiniowaną w ten sposób, że w  $R_n$  zastępujemy  $a$  przez  $x$ :

$$g_n(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \quad (13)$$

Pochodna funkcji  $g_n(x)$  jest równa:

$$g'_n(x) = -f'(x) - \left[ -\frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) \right] - \left[ -2\frac{f''(x)}{2!}(b-x) + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x) \right] \\ - \left[ -3\frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^2 + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3 \right] + \dots - \left[ -(n-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \right].$$

W powyższej sumie kasują się więc wszystkie człony oprócz ostatniego i mamy

$$g'_n(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}. \quad (14)$$

Zarazem:  $g_n(b) = 0$ ,  $g_n(a) = R_n$ .

Stosując do funkcji  $g_n(x)$  twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b - a} = g'(a + \theta'h) \quad \text{dla pewnego } \theta' \in ]0, 1[,$$

więc

$$\begin{aligned} \frac{-R_n}{h} &= g'(a + \theta'h) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(n-1)!(b-x)^{n-1} \Big|_{x=a+\theta'h} \\ &= -\frac{f^{(n)}(a + \theta'h)}{(n-1)!}(b-a-\theta'h)^{n-1} = -\frac{f^{(n)}(a + \theta'h)}{(n-1)!}h^{n-1}(1-\theta')^{n-1} \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a + \theta'h)$$

czyli resztę w postaci Cauchy'ego (11).

Pozostaje pokazać, że równoważną postacią reszty jest postać Lagrange'a (10). W dowodzie używa się wzoru Cauchy'ego o wartości średniej z funkcjami:  $g_n(x)$  i  $u_n(x) = (b-x)^n$ . Otrzymujemy:

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{g'_n(a + \theta h)}{u'_n(a + \theta h)} \quad \text{dla pewnego } \theta \in ]0, 1[.$$

Mamy:  $u_n(b) = 0$ ,  $u_n(a) = h^n$ ,  $u'_n(x) = -n(b-x)^{n-1}$ , skąd wynika, uwzględniając (14)

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{-R_n}{-h^n} = -\frac{(b-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a + \theta h) \frac{1}{-n(b-a-\theta h)^{n-1}}$$

czyli otrzymujemy

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta h),$$

tzn. postać reszty Lagrange'a (10).

*Uwaga.* Wzoru Taylora zazwyczaj używa się w postaci:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n \quad (15)$$

Można na ten wzór patrzeć jako na *przybliżenie funkcji w otoczeniu punktu  $x$  przez wielomian* ( $n$ -tego stopnia). Jeśli umiemy oszacować resztę, to daje nam ona dokładność tego przybliżenia.

Dla  $x = 0$ , powyższa wersja wzoru Taylora nazywana jest *wzorem Maclaurina*

*Uwaga.* Gdy funkcja jest różniczkowalna dowolną ilość razy, to reszta może być dowolnie wysokiego rzędu. Okazuje się, że można "odsunąć ją do nieskończoności" – zapisać rozwinięcie Taylora jako *nieskończony* szereg. Aby to precyzyjnie wyrazić, potrzebne jest pojęcie zbieżności szeregu i jakieś kryteria zbieżności; zajmiemy się tym niedługo.

*Przykł.* Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji  $f(x) = e^x$  w otoczeniu punktu  $x = 0$  z dokładnością do drugiego rzędu. Mamy:  $f'(x) = f''(x) = e^x$ ,  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ , tak więc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\theta x}, \quad \text{gdzie } \theta \in ]0, 1[.$$

Stąd wynika, że dla każdego  $x$  zachodzi równość

$$e^x \geq 1 + x, \tag{16}$$

bo reszta jest dodatnia (jako że  $x^2 > 0$  i  $e^{\theta x} > 0$ ).

Nierówność ta posiada wyrazisty sens geometryczny – see **wykres**.

*Przykł.* Wzór Taylora pozwala w następujący sposób zwiększyć moc reguły de l'Hospitala:

**Tw.** Jeśli funkcje  $f$  i  $g$  posiadają  $n$ -te pochodne ciągłe i jeśli

$$\begin{aligned} f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \dots \quad f^{(n-1)}(a) = 0, \\ g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \quad \dots \quad g^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{oraz} \quad g^{(n)} \neq 0, \end{aligned}$$

to

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{17}$$

**Dow.** We wzorze Taylora (9)  $b$  zastąpmy przez  $x$ . Z uwagi na znikanie pierwszych  $n - 1$  pochodnych zostaje tylko sama reszta:

$$f(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(x - a)) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} g^{(n)}(x + \theta'(x - a)).$$

Tak więc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x - a))}{g^{(n)}(a + \theta'(x - a))}.$$

Przechodząc do granicy  $\lim_{x \rightarrow a}$  i biorąc pod uwagę ciągłość funkcji  $f^{(n)}$  i  $g^{(n)}$  (podobnie jak to było przy dowodzie zwykłego tw. de l'Hospitala), otrzymujemy wzór (17).

**CBDO**

*Przykł.*  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)}$

## 1.4 Kryteria na ekstrema

Niedawno pokazaliśmy, że jeśli funkcja (różniczkowalna)  $f$  posiada w punkcie  $x_0$  ekstremum, to  $f'(x_0) = 0$ . Pamiętamy też, że na odwrót nie jest: Jeśli  $f'(x) = 0$ , to nie znaczy, że w  $x_0$  znajduje się ekstremum (np. dla  $f(x) = x^3$ ). Równość  $f'(x) = 0$  jest więc warunkiem *koniecznym*, ale *niedostatecznym* na istnienie tam ekstremum. Okazuje się, że badanie wyższych pochodnych daje ogólniejsze kryterium na istnienie ekstremum:

**Tw.** Załóżmy, że funkcja  $f$  jest różniczkowalna  $n$ -krotnie i  $n$ -ta pochodna jest ciągła. Niech również

$$f'(c) = 0 = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c), \quad \text{natomiast} \quad f^{(n)} \neq 0.$$

Wówczas, jeśli  $n$  jest parzyste, to w punkcie  $c$  funkcja  $f$  ma ekstremum właściwe: maksimum, jeśli  $f^{(n)} < 0$ , minimum, jeśli  $f^{(n)} > 0$ . Jeśli natomiast  $n$  jest liczbą nieparzystą, to  $f$  nie posiada ekstremum w punkcie  $c$ .

**Dow.** Z wzoru Taylora mamy:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{n!}h^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c+\theta h)h^n, \quad (18)$$

i, ponieważ na mocy założenia pierwszych  $n-1$  pochodnych  $f$  zeruje się w punkcie  $c$ , mamy

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c+\theta h)h^n. \quad (19)$$

Założmy, że  $n$  jest liczbą parzystą. Niech  $f^{(n)}(c) < 0$ . Ze względu na ciągłość funkcji  $f^{(n)}(x)$  w punkcie  $c$  istnieje takie  $\delta > 0$ , że nierówność:  $|x-c| < \delta$  implikuje  $f^{(n)}(x) < 0$ . Jeśli więc  $|h| < \delta$ , to i  $\theta h < \delta$ , zatem  $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$ . Patrząc teraz na (19) widzimy, że jeśli

$$0 < |h| < \delta, \quad \text{to} \quad f(c+h) - f(c) < 0$$

(pamiętajmy, że  $n$  jest parzyste, więc  $h^n > 0$ ). Powyższa nierówność oznacza, że w punkcie  $c$  funkcja  $f$  posiada *maksimum*.

Z analogicznego rozumowania wynika, że jeśli  $n$  jest liczbą parzystą i zachodzi:  $f^{(n)}(c) > 0$ , to  $f(c+h) - f(c) > 0$  (znowu dla  $h > 0$  i  $h < 0$ ), co znaczy, że w punkcie  $c$  funkcja  $f$  ma *minimum*.

Założmy teraz, że  $n$  jest liczbą *nieparzystą*. Niech  $f^{(n)}(c) < 0$  (w przypadku przeciwnym, tzn.  $f^{(n)}(c) > 0$ , rozumowanie jest analogiczne). Weźmy znów  $\delta$  takie, aby dla  $|h| < \delta$  było  $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$ . Mamy wówczas dla  $0 < h < \delta$  nierówność

$$f(c+h) - f(c) < 0, \quad \text{czyli} \quad f(c) > f(c+h),$$

a dla  $-\delta < h < 0$  zachodzi nierówność

$$f(c+h) - f(c) > 0, \quad \text{czyli} \quad f(c) < f(c+h);$$

tak więc w punkcie  $c$  nie ma ani maksimum, ani minimum.

*Przykł.* Funkcja  $f(x) = x^n$  posiada w  $x = 0$  minimum, jeśli  $n$  jest parzyste, i nie posiada minimum, jeśli  $n$  jest nieparzyste.

## 1.5 Interpretacja geometryczna drugiej pochodnej. Punkty przegięcia

Uprzednio widzieliśmy, że jeśli  $f'(c) > 0$ , to funkcja rośnie w otoczeniu  $c$ . Jeśli więc  $f''(c) > 0$ , to funkcja  $f'$  rośnie; a jeśli ponadto  $f'(c) > 0$ , to  $f$  rośnie jeszcze szybciej.

To była heurystyka, a teraz

**Tw.** Jeśli druga pochodna funkcji  $f$  jest ciągła i:

i) zachodzi  $f''(c) > 0$ , to krzywa  $y = f(x)$  jest dla pewnego otoczenia punktu  $c$  położona *powyżej* stycznej do tej krzywej w punkcie  $(c, f(c))$ ;

ii) zachodzi  $f''(c) < 0$ , to krzywa  $y = f(x)$  jest dla pewnego otoczenia punktu  $c$  położona *poniżej* stycznej do tej krzywej w punkcie  $(c, f(c))$ .

*Uwaga.* Patrząc na wykres funkcji  $f(x)$ , widzimy, że w pierwszym przypadku wykres jest skierowany wypukłością do dołu, a w drugim – do góry.

**Dow.** i) Oszacujmy różnicę między ilorzem różnicowym a pochodną:

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c).$$

Na mocy wzoru Taylora mamy:

$$f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{1}{2}h^2 f''(c + \theta h).$$

Ponieważ  $f''(c) > 0$ , to dla dostatecznie małego  $h$  mamy również

$$f''(c + \theta h) > 0, \implies f(c+h) - f(c) - hf'(c) > 0 \implies \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > f'(c).$$

Interpretując iloraz różnicowy jako tangens kąta nachylenia *siecznej* do osi  $OX$  wnioskujemy, że dla  $h > 0$  tangens ten jest większy niż  $f'(c)$ , tzn. większy niż tg kąta między *styczną* a osią  $OX$ . A to oznacza, że rozważana krzywa leży *nad* styczną. **rys.**

Dowód *ii*) jest analogiczny.

*Przykł.* Parabola  $y = x^2$  w każdym punkcie leży nad styczną – nic dziwnego, bo druga pochodna wszędzie jest tu równa 2.

*Przykł.* Wykres funkcji wykładniczej  $y = e^x$  również leży wszędzie nad styczną – tak być musi, bo druga pochodna  $(e^x)'' = e^x > 0$ .

**Def.** Rozważmy sytuację, gdy krzywa  $y = f(x)$  posiada w punkcie  $c$  styczną i dla dostatecznie małych przyrostów dodatnich krzywa leży po jednej stronie stycznej (np. nad styczną), a dla dostatecznie małych przyrostów ujemnych leży po drugiej stronie krzywej (np. pod krzywą). Innymi słowy: Rozpatrzmy wyrażenie:

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c)$$

i dla dostatecznie małego  $\delta$  mamy:  $\forall_{0 < h < \delta}: \psi(h) > 0$  oraz  $\forall_{-\delta < h < 0}: \psi(h) < 0$ .

W takiej sytuacji mówimy, że krzywa  $y = f(x)$  ma punkcie  $c$  *punkt przegięcia*.

*Przykł.* Sinusoida  $y = \sin x$  ma punkt przegięcia dla  $x = 0$ . Mamy bowiem:  $\psi(h) = \sin h - \sin 0 - h \cos 0 = \sin h - h$ . Dla  $h > 0$  mamy  $\psi(h) < 0$ , dla  $h < 0$  jest  $\psi(h) > 0$ .

Z tw. powyżej wynika, że jeśli  $f''(c) \neq 0$ , to krzywa leży (lokalnie) po jednej stronie stycznej. W takiej sytuacji, punkt  $c$  nie jest punktem przegięcia. Możemy to sformułować jako

**Tw.** Jeśli punkt  $c$  jest punktem przegięcia krzywej  $y = f(x)$ , to  $f''(c) = 0$ .

Na odwrót to nie zachodzi (np. dla  $y = x^4$  w  $x = 0$ ).

## 1.6 Funkcje wypukłe/wklęsłe i ich własności

**Def.** Funkcję  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy *wypukłą* na  $]a, b[$ , jeśli dla dowolnych  $x, x' \in ]a, b[$  i  $\theta \in [0, 1]$  mamy **rys.**

$$f(\theta x + (1 - \theta)x') \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(x'), \quad (20)$$

zaś wklęsłą, jeśli

$$f(\theta x + (1 - \theta)x') \geq \theta f(x) + (1 - \theta)f(x'), \quad (21)$$

*Wniosek:* Funkcja  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja  $-f$  jest wklęsła. Wystarczy więc w dalszym ciągu zająć się tylko funkcjami wypukłymi.

**Tw.** Funkcja  $f$  jest wypukła na  $]a, b[$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego skończonego zbioru  $n$  punktów  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset ]a, b[$  i dla dowolnego zestawu  $n$  liczb  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , takich, że  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  i  $\sum_i \theta_i = 1$ , zachodzi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \theta_i f(x_i) \quad (22)$$

**Dow.** indukcyjny. Niech  $f$  będzie wypukła na  $]a, b[$  – wtedy nierówność (22) zachodzi dla  $n = 2$ .

Założmy, że teza jest prawdziwa dla  $n - 1$  (tzn. prawdziwa jest  $T_{n-1}$ ).

Niech  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset ]a, b[$  i  $0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, \dots, n$  będą takie, jak w sformułowaniu twierdzenia. Jeśli  $\theta_n = 1$ , to nierówność jest trywialna. Weźmy więc  $\theta_n \neq 1$ . Mamy:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n \theta_i x_i\right) &= f\left((1 - \theta_n) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} x_i\right) + \theta_n x_n\right) \\ &\leq (1 - \theta_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} x_i\right) + \theta_n f(\theta_n) \\ &\leq (1 - \theta_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} f(x_i) + \theta_n f(\theta_n). \end{aligned}$$

a to znaczy, że prawdziwa jest  $T_n$ . Udowodniliśmy więc implikację  $T_{n-1} \implies T_n$ , czyli teza jest prawdziwa dla każdego  $n \geq 2$ .

W drugą stronę, dla  $n = 2$  mamy definicję funkcji wypukłej.

**CBDO**

Istnieją też inne równoważne kryteria wypukłości; użyteczne okaże się zaraz następujące.

**Stw.**

1.  $f$  jest wypukła  $\iff$  dla dowolnych punktów  $x_1 < x_2 < x_3$  z przedziału  $]a, b[$  spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}. \quad (23)$$

2.  $f$  jest wypukła  $\iff$  dla dowolnych punktów  $x_1 < x_2 < x_3$  z przedziału  $]a, b[$  spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad (24)$$

3.  $f$  jest wypukła  $\iff$  dla dowolnych punktów  $x_1 < x_2 < x_3$  z przedziału  $]a, b[$  spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \quad (25)$$

**Dow.** Jeśli  $x_1 < x_2 < x_3$ , to  $x_2 = \theta x_1 + (1 - \theta)x_3$ , gdzie  $\theta = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$  i  $1 - \theta = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ .  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów  $x_1 < x_2 < x_3$  mamy nierówność

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_3) - f(x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_2)) + (1 - \theta)(f(x_3) - f(x_2)) \\ &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_1}(f(x_1) - f(x_2)) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(f(x_3) - f(x_2)). \end{aligned} \quad (26)$$



Ponieważ  $x_3 - x_1$ ,  $x_3 - x_2$  i  $x_2 - x_1$  są dodatnie, to nierówność (26) jest równoważna nierówności

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

czyli otrzymaliśmy (23).

Nierówność (26) można też zapisać w postaci

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_3) - f(x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_3)) + (f(x_3) - f(x_2)) \\ &= \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}(f(x_1) - f(x_3)) + (f(x_3) - f(x_2)), \end{aligned}$$

która jest równoważna nierówności

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

czyli otrzymaliśmy (24).

Wreszcie, gdy nierówność (26) zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_3) - f(x_2) = (1 - \theta)(f(x_3) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(x_2)) \\ &= \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(f(x_3) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(x_2)) \end{aligned}$$

czyli otrzymaliśmy (25).

**CBDO**

*Wniosek 1.* Jeśli  $f$  jest wypukła na  $]a, b[$ , to istnieją granice: lewo- i prawostronne pochodne:

$$f'_+ = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_- = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ponadto  $f'_+ \geq f'_-$ .

**Dow.** Zauważmy, że funkcja  $h \rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  jest monotoniczna i ograniczona (powyższe Stw.), a stąd wynika istnienie granicy (podobnie jak dla ciągów).

*Wniosek 2.* Funkcja wypukła na odcinku otwartym jest ciągła.

Założenie otwartości odcinka jest istotne: Funkcja wypukła na odcinku domkniętym może być nieciągła na jego brzegu. (**rys.**)

Dla funkcji różniczkowalnych, mamy proste kryterium wypukłości.

Tw *i*) Funkcja różniczkowalna na  $]a, b[$  jest wypukła  $\iff$  jej pochodna jest funkcją niemalejącą.

*ii*) Funkcja dwukrotnie różniczkowalna na  $]a, b[$  jest wypukła  $\iff$  jej druga pochodna jest nieujemna.

**Dow.** Widać, że drugi punkt wynika z pierwszego; wystarczy więc udowodnić pierwszy. Niech  $x_1 < x_2 < x_3$  będą punktami w  $]a, b[$ . Z tw. Lagrange'a istnieją  $\xi \in ]x_1, x_2[$  oraz  $\eta \in ]x_2, x_3[$  takie, że  $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$  oraz  $f(x_2) - f(x_3) = f'(\eta)(x_2 - x_3)$ . Nierówność  $f'(\eta) \leq f'(\xi)$  jest więc równoważna nierówności

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Stąd powyższa nierówność jest spełniona dla wszystkich  $x_1 < x_2 < x_3$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f'$  jest funkcją niemalejącą. Ze Stw. wyżej wynika teza.

**CBDO**

*Znaczenie wypukłości:*

Badanie funkcji: Kryteria na ekstremum, położenie stycznych do wykresu.

Termodynamika: Z wypukłości *energii swobodnej* wynika dodatniość takich (fizycznie oczywistych, ale trudnych bezpośrednio do udowodnienia) wielkości, jak ciepło właściwe: są to *drugie pochodne* en. sw. (tu: po temperaturze).