Matematyka I

Zad. 1. Rozstrzygnąć, czy podane zdania logiczne są prawdziwe, czy fałszywe.
a. $((2+2=4) \wedge (7-5=4)) \Rightarrow ((2+2=4) \Rightarrow (7-5=4))$
b. Nieprawda, że jeżeli Warszawa jest stolicą Polski, to Londyn jest stolicą Francji.

Zad. 2. Rozstrzygnąć, czy podane formuły logiczne są tautologiami.
a. $(p \wedge \neg p) \Rightarrow \neg p$
b. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q))$
c. $((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$

Zad. 3. Prawdziwe jest zdanie: "Nieprawda, że jeżeli Platon założył Akademię, to jeżeli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii". Czy informacja ta wystarcza, by udzielić odpowiedzi na podane pytania? Jeśli tak, to jakie są te odpowiedzi?
a. Czy Platon był założycielem Akademii?
b. Czy Arystoteles był uczniem Platona?
c. Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?

Zad. 4. Stefan zawsze kłamie w poniedziałki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Marcin zawsze kłamie w czwartki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Pewnego dnia jeden z nich (nie wiadomo który) powiedział "Jutro będzie wtorek", a drugi odpowiedział "Jutro będę kłamał". Czy można stwierdzić, jakiego dnia tygodnia to się wydarzyło, a jeśli tak, to jaki to dzień?

Zad. 5. Stefan zawsze kłamie w poniedziałki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Marcin zawsze kłamie w czwartki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Pewnego dnia jeden z nich (nie wiadomo który) powiedział "Jutro będzie wtorek", po czym dodał "Jutro będę kłamał". Czy można stwierdzić, jakiego dnia tygodnia to się wydarzyło, a jeśli tak, to jaki to dzień?

Zad. 6. Zapisać za pomocą notacji matematycznej zdania:
a. Wszystkie liczby całkowite są liczbami wymiernymi.
b. Istnieje liczba wymierna nie będąca liczbą całkowitą.
c. Dla każdej liczby wymiernej istnieją liczby całkowite takie, że ta liczba wymierna jest ich ilorazem.
d. Dla każdych dwóch różnych liczb wymiernych istnieje liczba niewymierna większa od jednej z nich i mniejsza od drugiej z nich.

Zad. 7. Zapisać za pomocą notacji matematycznej zbiory:
a. Zbiór wszystkich liczb naturalnych niepodzielnych ani przez 3, ani przez 4.
b. Część wspólna zbioru wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich ze zbiorem wszystkich liczb wymiernych, których kwadrat jest większy od 2.
c. Zbiór wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych zawierających liczbę 0.

d. Zbiór wszystkich podzbiorów liczb rzeczywistych zawierających przynajmniej jedną liczbę całkowitą.
e. Zbiór wszystkich par liczb naturalnych dla których pierwsza z nich jest nie większa od drugiej.

Zad. 8. Niech A będzie zbiorem punktów na płaszczyźnie z ustalonym układem współrzędnych kartezjańskich, których współrzędne (x, y) spełniają warunek $x^2 + y^2 < 1$. Niech B będzie zbiorem punktów dla których $x \leq 2$. Niech C będzie zbiorem punktów dla których $(x-1)^2 + y^2 > 1$. Znaleźć i naszkicować zbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $A \cap B \cap C$, $(B \setminus A) \cup C$.

Zad. 9. Korzystając z definicji relacji zawierania się zbiorów oraz definicji działań na zbiorach, udowodnić, że:
a. $\big((B \subset A_1) \vee (B \subset A_2)\big) \Rightarrow (B \subset A_1 \cup A_2)$
b. $\big((B \subset A_1) \wedge (B \subset A_2)\big) \Leftrightarrow (B \subset A_1 \cap A_2)$
c. $A \setminus (B_1 \cap B_2) = (A \setminus B_1) \cup (A \setminus B_2)$
d. $A \setminus (B_1 \cup B_2) = (A \setminus B_1) \cap (A \setminus B_2)$

Zad. 10. Udowodnić, że
a. $\big([1,3] \times [-2,2]\big) \cup \big([3,4] \times [-2,0]\big) = \big([1,3] \times [0,2]\big) \cup \big([1,4] \times [-2,0]\big) = \big([1,4] \times [-2,2]\big) \setminus \big(]3,4]\times]0,2]\big)$
b. $\bigcup_{y\in\mathbb{R}} [|y|, \infty[\times \{y\} = \bigcup_{x\in[0,\infty[} \{x\} \times [-x, x]$

Zad. 11. Niech $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = f(\frac{x-2}{3})$. Uprościć $g(x)$ i znaleźć największy podzbiór $\mathbb{R}$ który może być dziedziną funkcji g.

Zad. 12. Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, $g : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. Znaleźć wzory na $f(g(x))$, $g(f(x))$ oraz znaleźć dziedzinę i zbiór wartości obu tych funkcji złożonych.

Zad. 13. Znaleźć zbiór wartości funkcji f. Czy funkcja f jest injekcją/surjekcją/bijekcją? Jeśli jest bijekcją, znaleźć wzór na funkcję odwrotną.
a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
b. $f : \mathbb{R}_+ \to]-1, 1[$, $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
c. $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $f(x) = (x^2 - 1)^2$

Zad. 14. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x+1| + |y+2| < 4\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - x| \leq |y + 2|\}$

Zad. 15. Rozwiązać równania/nierówności:
a. $|x + 1| + |x + 2| = 7$
b. $||||x + 1| - 2| + 3| + 4| \geq 8$
c. $x^2 - |5x + 6| = 0$
d. $\left|\frac{1}{x+2}\right| < \left|\frac{2}{x-1}\right|$

Zad. 16. Rozwiązać układy równań:

a. $\begin{cases} |x| - |y| = 1 \\ |x-1| + |y+2| = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y = |x^2 - 4| \\ |y-3| = 5 - x \end{cases}$

Zad. 17. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory

a. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x-2}{x+1} \leq y \leq 2 - x\}$

b. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x(y-1) > 3) \wedge (y \geq x(x+3))\}$

c. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \leq x+1) \wedge (x \geq y^2 + 2y - 3)\}$

Zad. 18. Niech x_1 i x_2 vędą pierwiastkiami równania $3x^2 + 8x - 7 = 0$. Korzystając ze wzorów Viète'a i nie obliczajac tych pierwiastków jawnie znaleźć

a. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b. $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$

c. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Zad. 19. Rozwiązać równania:

a. $\cos x = 1$

b. $\cos x = 0$

c. $\sin x = \frac{1}{2}$

d. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

e. $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zad. 20. Rozwiązać nierówności:

a. $2\cos x < 1$

b. $\operatorname{ctg}^2 x \geq 3$

Zad. 21. Uprościć wyrażenia do postaci w której argumentem funkcji trygonometrycznej jest po prostu x: a. $\cos(\pi - x)$

b. $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$

c. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$

d. $\operatorname{tg}(\frac{5\pi}{2} + x)$

Zad. 22. Rozwiązać równanie

$$\sin(x+\pi)\cos(x+\frac{\pi}{2})\operatorname{ctg}(x-\pi) = \frac{1}{2}$$

Zad. 23. Znaleźć wartości $\cos\frac{\pi}{8}$ i $\sin\frac{\pi}{8}$.

Zad 24. Wyprowadzić wzory

a. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

b. $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

b. $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

b. $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

Zad 25. Rozstrzygnąć, dla jakich x zachodzi
a. $\sin(\arcsin x) = x$
b. $\arcsin(\sin x) = x$

Zad. 26. Niech $f_k(x) = x^2 + (2-k)x + 1$. Znaleźć $\{k \in \mathbb{R} | \forall x \in \mathbb{R} : f_k(x) > 0\}$ oraz $\{k \in \mathbb{R} | \forall x > 0 : f_k(x) > 0\}$.

Zad 27. Rozwiązać nierówność

$$\frac{(x-1)^5(x^2-x+1)(x^2-2)(x+1)^6}{x^2-2x-1} \geq 0$$

Zad. 28. Znaleźć wynik dzielenia i resztę z dzielenia wielomianu $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$ przez wielomian $x^3 + 1$.

Zad. 29. Znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{2020} + x^8 + x + 1$ przez wielomian $x^2 - 1$.

Zad. 30. Rozstrzygnąć, czy $\log_{\sqrt{3}}(729^{\log_{27} 81})$ jest liczbą całkowitą.

Zad. 31. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie $9^x - 3^{x+1} + a = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Zad. 32. Rozwiązać nierówności
a. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{4}} x) \geq 1$
b. $\log_2(x-2) + 2\log_4(x+2) > 5$
c. $\frac{1}{1+\log_2 x} > \frac{1}{-2+2\log_2 x}$

Zad. 33. Udowodnić, że dla dowolnego naturalnego n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Wskazówka: rozważyć wielomian $(1+x)^n$.

Zad. 34. Korzystając z indukcji matematycznej, udowodnić, że dla dowolnego naturalnego n
a. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
b. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$
c. $4^n + 15n - 1$ jest podzielne przez 9
d. $n^7 - n$ jest podzielne przez 7
e. wielomian $(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$ jest podzielny przez $x^2 - 2x + 1$
f. (ciąg Fibonnacciego) Jeśli $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n})$$

Zad. 35. Udowodnić, że kresami górnym i dolnym zbioru liczb postaci $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ są odpowiednio $\sqrt{2}-1$ oraz 0.

Zad. 36. Udowodnić, że $\frac{1}{2}$ jest kresem górnym zbioru $\{\frac{x^2}{1+x^4} : x \in \mathbb{R}\}$.

Zad. 37. Pokazać z definicji że ciąg $a_n = q^n$ jest zbieżny do 0 dla $|q| < 1$, zbieżny do 1 dla $q = 1$ i nie zbieżny dla $q = -1$ lub $|q| > 1$.

Zad. 38. Pokazać z definicji, że $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n+1} = \infty$

Zad. 39. Pokazać, że ciąg $a_n = \frac{n+1}{n+3} \cos \frac{2\pi n}{3}$ nie jest zbieżny. (Wystarczy pokazać istnienie podciągów zbieżnych do różnych granic.)

Zad. 40. Wyznaczyć granice ciągów: **a.** $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{n^2+2}$, **b.** $a_n = \frac{4n^3-3n}{2n^2+4}$, **c.** $a_n = \left(\frac{2n-5}{3n+7}\right)^2$, **d.** $a_n = \frac{4n^2+3n}{3n^3-1}$, **e.** $a_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$, **f.** $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n^2}}$, **g.** $a_n = n^2(n-\sqrt{n^2+1})$, **h.** $a_n = \sqrt{3n^2+2n+5} - n\sqrt{3}$, **i.** $a_n = \sqrt{n^4+n^3} - n^2 - \sqrt{n^2+n}$, **j.** $a_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} - n$, **k.** $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1})$, **l.** $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$

. **Zad. 41.** Wyznaczyć granice ciągów: **a.** $a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$, **b.** $a_n = \log_2(n^2+4n+1) - \log_2(8n^2+3n+4)$, **c.** $a_n = \frac{\log_3(n^2)}{\log_9 n}$, **d.** $a_n = \sin\left(\frac{3\pi n}{2n+1}\right)$, **e.** $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, **f.** $a_n = \operatorname{arctg} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}}$, **g.** $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$, **h.** $a_n = \frac{10-3\cdot 2^{2n+2}}{5\cdot 4^n+3}$, **i.** $a_n = \frac{3^{n+2}-4^{n+1}}{3^{n+1}+4^{n+2}}$, **j.** $a_n = \frac{\sqrt{2^n+1}}{\sqrt[3]{3^n+1}}$

Zad. 42. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, wyznaczyć granice ciągów: **a.** $a_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$, **b.** $a_n = \frac{2n^2+\sin(n!)}{4n^2+\cos^{\log n}}$, **c.** $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+5^n}{2^n+7^n}}$

Zad. 43. W zależności od wartości parametru $k \in \mathbb{R}$ znaleźć granicę ciągu **a.** $a_n = \frac{kn^2}{(k-1)n^2+n}$, **b.** $a_n = \frac{(k-2)^{n+1}}{(k^2-2k-3)^{n-2}}$.

Zad. 44. Pokazać, że cią

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3}{+}\frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

jest zbieżny i znaleźć jego granicę.

Zad. 45. Przez porównanie z ciągiem z poprzedniego zadania, pokazać, że ciąg

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)}$$

jest zbieżny.

Zad. 46. Niech $a_n = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Pokazać że ten ciąg jest zbieżny (przez pokazanie, że jest rosnący i ograniczony), oraz znaleźć jego granicę.

Zad. 47. Niech $c > 0$, $a_n = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Pokazać że ten ciąg jest zbieżny, oraz znaleźć jego granicę. (Wskazówka: rozważyć osobno podciągi złożone z wyrazów o indeksach parzystych i nieparzystych.)

Zad. 48. Niech $c > 0$, $a_n = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$. Pokazać że ten ciąg jest zbieżny, oraz znaleźć jego granicę.

Zad. 49. Znaleźć granice ciągów **a.** $(1 - \frac{3}{n})^n$, **b.** $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, **c.** $\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$, **d.** $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}$, **e.** $\left(\frac{n^3}{n^3+n^2+n+1}\right)^{n^2+n+1}$, **f.** $n\left(\log_2(n+2) - \log_2 n\right)$, **g.** $\frac{2n+1}{n^3(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2))}$, **h.** $\frac{\ln n}{n}$, **i.** $\frac{n}{2^n}$, **j.** $\frac{n!}{n^n}$, **k.** $\frac{10^n}{n!}$

Zad. 50. Korzystając z definicji Heine'go (ciągowej) granicy funkcji zbadać istnienie granicy $\lim_{x\to 0} \sin^2 \frac{\pi}{x}$.

Zad. 51. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji zbadać istnienie granicy $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Zad. 52. Niech

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Rozstrzygnąć, dla jakiej wartości a funkcja f jest ciągła w $x = 0$.

Zad 53. Korzystajac z definicji ciagłości jednostajnej pokazać, ze funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.

Zad 54. Korzystajac z definicji ciagłości jednostajnej pokazać, ze funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, \infty[$.

Zad 55. Obliczyć granice **a.** $\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, **b.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, **c.** $\lim_{x\to 0} x\mathrm{ctg}x$, **d.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **e.** $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$, **f.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$, **g.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

Zad 56. Obliczyć (jeśli istnieją) granice lewo- i prawostronne **a.** $\lim_{x\to 0_\pm} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$, **b.** $\lim_{x\to 1_\pm} \frac{x^2-x+|x-1|}{x-1}$, **c.** $\lim_{x\to 1_\pm} \mathrm{arctg}\frac{1}{1-x}$, **d.** $\lim_{x\to 0_\pm}(x \sin \frac{1}{x} - \cos x)$, **e.** $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{|x-\frac{\pi}{2}|}$

Zad 57. Obliczyć z definicji pochodne funkcji po zmiennej x: **a.** ax^2+bx+c, **b.** $\sqrt{x^2+1}$, **c.** $\frac{1}{x^2}$

Zad 58. Obliczyć pochodne funkcji po zmiennej x: **a.** $(x^2-1)^5$, **b.** $\sin(ax+b)$, **c.** $\ln\sin x$, **d.** $x^2\mathrm{e}^x$, **e.** $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$, **f.** $\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$, **g.** x^x, **h.** $\ln \mathrm{tg} x$, **i.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, **j.** $\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, **k.** $\arccos\sqrt{1-x^2}$, **l.** $\mathrm{arctg}\frac{x}{1-x^2}$, **m.** $(x^2+1)^{x+\frac{1}{x}}$, **n.** $\frac{\sinh x}{x}$, **o.** $\mathrm{arctg}(\mathrm{tgh} x)$

Zad 59. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

Zad 60. Znaleźć wzory ogólne na n-te pochodne funkcji **a.** a^x, **b.** $\ln(1+x)$, **c.** $(1+x)^a$, **d.** $x\ln x$

Zad 61. Dobrać parametry a,b,c tak aby funkcja f była różniczkowalna na $\mathbb{R}$:
a.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2} & \text{dla } x\le 0\\ ax^2+bx+c & \text{dla } x>0\end{cases}$$

b.

$$f(x)=\begin{cases}ax+1 & \text{dla } x\le \pi\\ \sin x+b & \text{dla } x>\pi\end{cases}$$

Zad 62. Niech $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2-4x+6$. Pokazać że wykresy tych funkcji mają tylko jeden punkt przecięcia. Znaleźć równania prostych stycznych do tych wykresów w punkcie ich przecięcia. Znaleźć równanie prostej stycznej do obu wykresów.

Zad 63. Znaleźć pole powierzchni trójkąta odciętego z pierwszej ćwiartki płaszczyzny przez prostą styczną do wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{x}$ w punkcie $x=2$.

Zad 64. Znaleźć równanie prostej prostopadłej do wykresu funkcji $f(x)=x^3-3x^2+2x-1$ w punkcie w którym $f''(x)=0$.

Zad 65. Zbadać przebieg i naszkicować wykresy funkcji: **a.** $\frac{x^3}{x^2-1}$, **b.** $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$, **c.** $\left(x-\frac{3}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}$, **d.** x^3-6x^2+4, **e.** $x^2\mathrm{e}^{-x}$, **f.** $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$, **g.** $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, **h.** $x\mathrm{arctg}x$

Zad 66. Dany jest okrąg o promieniu R. Rozważyć trójkąty równoramienne, których jeden wierzchołek znajduje się w środku okręgu, a dwa pozostałe leżą na okręgu. Rozstrzygnąć, które z nich mają największe pole powierzcni, i znaleźć to pole.

Zad 67. W zależności od wartości parametru a znaleźć punkt paraboli będącej wykresem funkcji $f(x)=x^2$ najbliższy punktowi o współrzędnych $(0,a)$.

Zad 69. Korzystając z reguły de l'Hospitala wyznaczyć granice **a.** $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$, **b.** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$, **c.** $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{1+\cos(\pi x)}$, **d.** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, **e.**

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\mathrm{tg}x}$, **f.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos(3x)}-\sqrt[4]{\cos(4x)}}{1-\cos(5x)}$, **g.** $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\sqrt{1+2x}}{\ln(\cos x)}$

Zad 70. Znaleźć punkty przegięcia funkcji $f(x)=(1+2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$ i równania prostych stycznych do jej wykresu w punktach przegięcia.

Zad 71. Obliczając kolejne pochodne, znaleźć rozwinięcia Taylora podanych funkcji wokół zera do czwartego nieznikającego wyrazu:
a. e^x, **b.** $\cos x$, **c.** $\sin x$ **d.** $\ln(1+x)$, **e.** $(1+x)^a$, $a\in\mathbb{R}$

Zad 72. Wykorzystując rozwinięcia Taylora z poprzedniego zadania, znaleźć rozwinięcia Taylora podanych funkcji wokół zera do czwartego nieznikającego wyrazu. Porównać z rozwinięciami otrzymanymi za pomocą liczenia pochodnych.
a. $\sin(2x)$, **b.** $\ln(1-x^2)$, **c.** $\mathrm{e}^x\sin x$, **d.** $\sqrt{1+x+x^2}$

Zad 73. Znaleźć rozwinięcie Taylora funkcji $f(x)=x\ln x$ wokół jej minimum do trzeciego nieznikającego wyrazu.

Zad 74. Wykorzystując rozwinięcie Taylora, znaleźć granice
a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x\sin x}$, **b.** $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos(x^2)-\cos(x^3)}{\log(1+x^4)}$, **c.** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin(x^2)}{(1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}-1}$

Zad 75. Sprawdzając warunek konieczny rozbieżności szeregu, pokazać, że podane szeregi są rozbieżne:
a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\sin\frac{1}{n})$, **c.** $\sum_{n=1}^{\infty}n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$

Zad 76. Stosując kryterium porównawcze, zbadać zbieżność szeregów:
a. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$, **c.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})$, **d.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$, **e.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{1}{n}$ w zależności od $\alpha\in\mathbb{R}$, **f.** $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{4^n}$, **g.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\log\frac{n^3+1}{n^3}}$, **h.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\right)$

Zad 77. Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego, zbadać zbieżność szeregów:
a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, **c.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, **d.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2-\frac{1}{n})^n}$, **e.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^n}$

Zad 78. Stosując kryterium zagęszczeniowe, zbadać zbieżność szeregów:
a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Zad 79. Zbadać zbieżność szeregów naprzemiennych:
a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+100}{3n+1}$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$, **c.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$

Zad 80. Stosując odpowiednie kryteria, rozstrzygnąć zbieżność szeregów
a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(2n+1)}$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2n+5}-2\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)$, **c.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$,
d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)\sqrt[3]{n^4+2}}{n^2+\sqrt[3]{n^7+n^2}}$, **e.** $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$, **f.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n^2+1}$,

g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n n!}{n^n}$, $q \in \mathbb{R}$, **h.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n+2)}{2\cdot 5\cdot\dots\cdot(3n-1)}$, **i.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$, **j.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, **k.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$, **l.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, **m.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Zad 81. Znaleźć obszary zbieżności szeregów
a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n x^{2n+1}}{n!}$, **b.** $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}(3x-4)^{2n+1}$, **c.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n-1}}{n^2+1}$, **d.** $\sum_{n=2}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$

Zad 82. Znaleźć/odgadnąć funkcje pierwotne (czyli funkcje F takie, ze $F'(x) = f(x)$) do funkcji f:
a. $x^3 + 3x^2 - 7x + 1$, **b.** $\frac{3}{x^2} - x$, **c.** $\frac{1}{x+1}$, **d.** $\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{4-x}$, **e.** $\frac{1}{(2x+3)(4-x)}$, **f.** e^{2x+3}, **g.** $\sin(2x)$, **h.** $\frac{1}{\cos^2(2x+1)}$, **i.** $\frac{1}{(x-1)^2+1}$, **j.** $\frac{1}{\sqrt{2x}}$, **k.** $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$

Zad 83. Obliczyć całki nieoznaczone (w niektórych całkach należy użyć podstawienia):
a. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x-3}$, **b.** $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2}\mathrm{d}x$, **c.** $\int \frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}-3)}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$, **d.** $\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$, **e.** $\int \frac{x+1}{x^2-4}\mathrm{d}x$, **f.** $\int \frac{x+1}{x^2+4}\mathrm{d}x$, **g.** $\int \frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x$, **h.** $\int \frac{6x^3-7x^2+8x-2}{2x-3x^2}\mathrm{d}x$, **i.** $\int \frac{\sqrt{2\mathrm{arctg}x-2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$, **j.** $\int \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$, **k.** $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$, **l.** $\int \frac{\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^x+4}\mathrm{d}x$, **m.** $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$, **n.** $\int \frac{1}{\sin x}$, **o.** $\int \frac{1}{2-\cos x}\mathrm{d}x$, **p.** $\int \mathrm{tg}x\mathrm{d}x$, **r.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$

Zad 84. Obliczyć całki nieoznaczone (użyć całkowania przez części):
a. $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, **b.** $\int x^3\ln^x\mathrm{d}x$, **c.** $\int (x^2+3)\sin(2x)\mathrm{d}x$, **d.** $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$, **e.** $\int \sin(2x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, **f.** $\int \arcsin x\mathrm{d}x$ ($= \int 1\cdot\arcsin x\mathrm{d}x$), **g.** $\int x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x$, **h.** $\int \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$, **i.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$, **j.** $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$, **k.** $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$,

Do całek $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}})\mathrm{d}x$ stosuje się podstawienie $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Zad 85. Obliczyć całki
a. $\int \frac{1}{x+3}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\mathrm{d}x$, **b.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x(x+2)^3}} = \int \sqrt[4]{\frac{x+2}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{x+2}$

Podstawienia Eulera dla całek $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$:
pierwsze, gdy $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$
drugie, gdy $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$
trzecie, gdy $ax^2+bx+c = a(x-\lambda)(x-\mu)$: $\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$

Zad 86. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-5x+4}}$$

na trzy sposoby (używając każdego z podstawień Eulera) i pokazać, że wyniki są równoważne.

Zad 87. Licząc granicę sumy wypunktowanej, obliczyć całkę Riemanna

$\int_0^a \sin x \mathrm{d}x$. Skorzystać w tym celu z równości

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left((n+\frac{1}{2})\alpha\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Zad 88. Obliczyć pole powierzchni koła za pomocą całki $\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

Zad 89. Obliczyć pole figury płaskiej ograniczonej
a. krzywymi o równaniach $y^2 - x^2 = 4$ oraz $(y+1)^2 - 5x^2 = 1$
b. sinusoidą $y = \sin x$ oraz stycznymi do tej sinusoidy w punktach $A = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ i $B = (\frac{\pi}{2}, 1)$

Zad 90. Obliczyć długość łuku paraboli o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2$ zawartego pomiędzy prostymi $x = -1$ oraz $x = 2$.

Zad 91. Obliczyć całki oznaczone
a. $I_n = \int_0^1 x^n \ln x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$
b. $I_n = \int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$

Zad 92. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych
a. $\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$
b. $\int_1^\infty (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)\mathrm{d}x$
c. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+(\sin x)^\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
d. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x}\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Zad 93. Obliczyć całki

$$I_n = \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Twierdzienie o wartości średniej całki:
Jeśli f,g są ciągłe na $[a,b]$ i $g \geq 0$, to $\exists \xi \in [a,b]$ takie, ze

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Zad 94. Wykorzystując tw. o wartości średniej dla całki

$$\int_0^{\pi/6} \sin x \mathrm{d}x$$

z

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Pokazać, że

$$6\sqrt{2-\sqrt{3}} \leq \pi \leq 24 - 12\sqrt{3}$$