Matematyka III 2019/20Z
Zadania domowe , seria 2

Zad. 1. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

w szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = 0$, we wszystkich możliwych pierścieniach.
Odpowiedź: Dla $|z| < 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n(1+(-1)^n)}{2} z^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}$; dla $|z| > 1$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{i}^{-n}(-1-(-1)^n)}{2} z^n = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1} z^{2k}$.

Zad. 2. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1}$$

w szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = 1$, we wszystkich możliwych pierścieniach.
Odpowiedź: Dla $0 < |z-1| < 2$, $f(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z-1)^n$; dla $|z-1| > 2$, $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n$.

Zad. 3. Znaleźć rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2-z}$$

w szereg Laurenta wokół punktu $z_0 = -1$, we wszystkich możliwych pierścieniach.
Odpowiedź: Dla $|z+1| < 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-n})(z+1)^n$; dla $1 < |z+1| < 2$, $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}(z+1)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}(z+1)^n$; dla $|z+1| > 2$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(2^{-n}-1)(z+1)^n$.

Zad. 4. Znaleźć residua funkcji $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$ we wszystkich izolowanych punktach osobliwych oraz w nieskończoności.
Odpowiedź: $\mathrm{Res}_1 f = \frac{1}{4}$, $\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} f = -\frac{\mathrm{i}}{4}$, $\mathrm{Res}_{-1} f = -\frac{1}{4}$, $\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}} f = \frac{\mathrm{i}}{4}$, $\mathrm{Res}_{\infty} f = 0$

Zad. 5. Znaleźć residua funkcji $f(z) = \frac{z^3}{z^2+1}$ we wszystkich izolowanych punktach osobliwych oraz w nieskończoności.
Odpowiedź: $\mathrm{Res}_{\mathrm{i}} f = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}} f = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{\infty} f = 1$

Zad. 6. Znaleźć residua funkcji $f(z) = \frac{z^3}{(z^2-1)^2}$ we wszystkich izolowanych punktach osobliwych oraz w nieskończoności.
Odpowiedź: $\mathrm{Res}_1 f = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{-1} f = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Res}_{\infty} f = -1$

Zad. 7. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3+\cos\varphi)^2} \mathrm{d}\varphi$

Odpowiedź: $\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}$.

Zad. 8. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{2-\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$
Odpowiedź: $(4-2\sqrt{3})\pi$.

Zad. 9. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Zad. 10. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{2}$.

Zad. 11. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{\mathrm{e}}$.

Zad. 12. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{4\mathrm{e}^2}$.

Zad. 13. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{8}}$.

Zad 14. Wykorzystując całkowanie po konturze na płaszczyźnie zespolonej, obliczyć $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$
Odpowiedź: $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.