

Matematyka III 2019/20Z
Zadania domowe , seria 3

Zad. 1. Znaleźć szereg Fouriera funkcji

$$f(x) = x \text{ dla } x \in (-\pi, \pi)$$

(poza tym okresowej z okresem 2π) i wykorzystując go znaleźć wartości szeregów

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Odpowiedzi: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin(nx), \frac{\pi}{4}, \frac{\pi^2}{6}$

Zad. 2. Znaleźć szereg Fouriera funkcji

$$f(x) = |x| \text{ dla } x \in [-\pi, \pi]$$

(poza tym okresowej z okresem 2π) i wykorzystując go znaleźć wartości szeregów

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Odpowiedzi: $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x),$
 $\frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^4}{96}$

Zad. 3. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Odpowiedź: $\tilde{f}(k) = \pi e^{-|k|}$

Zad. 4. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \min\left\{\frac{1}{e}, e^{-|x|}\right\}$$

Odpowiedź: $\tilde{f}(k) = \frac{2}{e(1+k^2)} \left(\cos k + \frac{\sin k}{k}\right)$

Zad. 5. Obliczyć całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^3 - x) e^{-ikx} dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x^3 - x) e^{-|x|} dx$$

Odpowiedzi: $1 + \cos k, 1$

Zad. 6. Obliczyć całkę

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(xy - 1) \frac{1}{|x + y|} dx dy$$

Odpowiedź: π

Zad. 7. Obliczyć całkę

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) x^2 dx dy dz \quad R > 0$$

Odpowiedź: $\frac{2\pi}{3} R^3$