Zadania domowe z przedmiotu "Analiza"

3 kwietnia 2019

Zadanie 1. Korzystając z reguły Leibniza obliczyć $f'(x)$, jeśli

$$f(x) = \int_{x^2}^{x} e^{-xt} dt, \quad \text{dla} \ \ 0 < x < 1.$$

Uzasadnić, dlaczego można skorzystać z tej reguły.

Zadanie 2. Korzystając z wzoru Greena obliczyć całke krzywoliniową skierowaną

$$\oint_C x^2 y dy - x^2 dx,$$

gdzie C jest krzywą zamkniętą złożoną z wykresu funkcji $x = \ln y$, $x = 0$ oraz linii prostej $y = e$ zorientowaną zgodnie do ruchu wskazówek zegara.

Zadanie 3. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{A}(x, y, z) = (x, 0, z)$ przez powierzchnię trójkąta wyciętego płaszczyznami układu współrzędnych w płaszczyźnie $x + y + z = 1$. Wektor normalny do powierzchni trójkąta ma dodatnią wartość składowej y.

Zadanie 4.* Obliczyć długość spirali Nielsena zadanej parametrycznie jako

$$R_{>0} \to R^2 : t \mapsto \left(\alpha \lim_{M \to \infty} \int_M^t ds \frac{\cos s}{s}, \ \ \alpha \lim_{M \to \infty} \int_M^t ds \frac{\sin s}{s} \right), \quad \alpha \in R_{>0}$$

pomiędzy punktami odpowiadającymi wartościom parametru $t = 1$ i $t = t_0 > 1$

Zadanie 5. Obliczyć moment bezwładności względem osi O_z jednorodnej bryły, której punkty są ograniczone powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $(a > 0)$ oraz spełniają warunek $x^2 + y^2 \leq z^2$.

Zadanie 6. Sprawdzić twierdzenie Gaussa w R^3 dla pola wektorowego

$$\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$$

i obszaru $s = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Zadanie 7.

a) Obliczyć strumień pola wektorowego

$$\vec{F} = (xy^2, \ yz^2, \ zx^2)$$

po powierzchni walca $x^2 + y^2 = 4$ dla $z \in [-2, 2]$ za pomocą całki powierzchniowej.

b) Zrobić to samo, używając twierdzenia Gaussa.

Odp. $\frac{160}{3}\pi$

Zadanie 8. Obliczyć pole powierzchni stożka $x^2 + y^2 = z^2$ zawartej w pierwszym oktancie (tzn. $\{(x, y, z) : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$ i ograniczonej płaszczyzną $y + z = a$.

Zadanie 9. Sprawdzić czy dane pole na R^3 posiada potencjał skalarny lub wektorowy oraz znaleźć ten potencjał.

a)

$$\vec{F} = yz(2x + y + z)\vec{e}_x + xz(x + 2y + z)\vec{e}_y + xy(x + y + 2z)\vec{e}_z$$

b)

$$\vec{F} = (25x^4 y - 3y^2)\vec{e}_x + (5x^5 - 6xy - 5)\vec{e}_y$$