

1

Korzystając z reguły Leibniza obliczyć $f'(x)$, jeśli

$$f(x) = \int_{x^2}^x e^{-xt} dt, \text{ dla } 0 < x < 1.$$

Uzasadnić, dlaczego można skorzystać z tej reguły.

2

Korzystając z wzoru Greena obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną

$$\oint_C x^2 y dy - x^2 dx,$$

gdzie C jest krzywą zamkniętą złożoną z wykresu funkcji $x = \ln y$, $x = 0$ oraz linii prostej $y = e$ zorientowaną zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

3

Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{A}(x, y, z) = (x, 0, z)$ przez powierzchnię trójkąta wyciętego płaszczyznami układu współrzędnych w płaszczyźnie $x + y + z = 1$. Wektor normalny do powierzchni trójkąta ma dodatnią wartość składowej y .

4

Obliczyć długość spirali Nielsena zadanej parametrycznie jako

$$R_{>0} \rightarrow R^2 : t \mapsto \left(\alpha \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^t ds \frac{\cos s}{s}, \alpha \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^t ds \frac{\sin s}{s} \right), \quad \alpha \in R_{>0}$$

między punktami odpowiadającymi wartościom parametru $t = 1$ i $t = t_0 > 1$

5

Obliczyć moment bezwładności względem osi O_z jednorodnej bryły, której punkty są ograniczone powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, ($a > 0$) oraz spełniają warunek $x^2 + y^2 \leq z^2$.

6

Sprawdzić twierdzenie Stokesa w R^3 na przykładzie 2-formy

$$\omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dx \wedge dz + z^2 dx \wedge dy$$

i obszaru $s = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

7

- a) Obliczyć strumień pola wektorowego

$$\vec{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$$

po powierzchni walca $x^2 + y^2 = 4$ dla $z \in [-2, 2]$ za pomocą całki powierzchniowej.

- b) Zrobić to samo, używając twierdzenia Gaussa.

8

Obliczyć pole powierzchni stożka $x^2 + y^2 = z^2$ zawartej w pierwszym oktancie (tzn. $\{(x, y, z) : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\}$) i ograniczonej płaszczyzną $y + z = a$.

9

Znaleźć wzory na gradient, rotację, dywergencję i laplasjan w układach współrzędnych

- a) $x = \sinh u \cos t \cos \phi$, $y = \sinh u \cos t \sin \phi$, $z = \cosh u \sin t$, $u \in (0, \infty)$,
 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in (0, 2\pi)$
- b) $x = \cosh u \cos t \cos \phi$, $y = \cosh u \cos t \sin \phi$, $z = \sinh u \sin t$, $u \in (0, \infty)$,
 $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in (0, 2\pi)$

10

Przy odwzorowaniu $C \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \in C$ znaleźć obrazy:

- a) okręgów $C_R(0) := \{z \in C : |z| = R\}$,
- b) półprostych $L_a := \{(x, ax) : x > 0\}$, (aR) .

11

Sprawdzić, że w podanym obszarze $\Omega = \{R^2\}$ funkcja $u(x, y)$ jest harmoniczna i znaleźć funkcje harmonicznie sprzężone:

- a) $\Omega = R^2$, $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$
- b) $\Omega = R^2$, $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$
- c) $\Omega = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$