

Analiza

Zadania domowe, seria 2

1. Podać obszar, w którym istnieje pochodna zespolona funkcji i podać wyrażenie na pochodną:

$$\text{a) } f(z) = z^3, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}, \quad \text{c) } f(z) = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}.$$

2. Znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u + iv$ (jeśli istnieje) dla $z \in \mathbb{C}$, gdzie

$$u = x^2 - y^2 + 2x, \quad \text{z warunkiem } f(i) = -1 + 2i.$$

3. Znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u + iv$ na obszarze $\mathbb{C}$ jeśli

$$\text{a) } u = xy + 1,$$

$$\text{b) } v = -\frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

4. Obliczyć $\oint_C \frac{z^*}{z} dz$, gdzie C jest brzegiem górnej połowy pierścienia $1 < |z| < 2$.

5. Obliczyć całkę wzdłuż zadanej krzywej zamkniętej zorientowanej dodatnio:

$$\oint_C \frac{1}{z^3} dz, \quad C = \{z : |z - 1| + |z| = 10\}.$$

6. Obliczyć całkę $\int_C z^* dz$ od punktu $(0, 0)$ do $(1, 1)$

a) po paraboli $y = x^2$ łączącej te punkty,

b) po odcinku prostej przechodzącej przez te punkty.

Porównaj wyniki a) i b).

7. Obliczyć

$$\oint_C \frac{e^{z^3 + 2z}}{z^2 - 1} dz,$$

gdzie C jest dodatnio zorientowaną krzywą daną:

$$\text{a) } |z - 1| = 1, \quad \text{b) } |z + 1| = 1.$$

8. Wyznaczyć obszar zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1 + i)^n}{(3 + 4(-1)^n)^n}, \quad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \sin(in) \cdot z^n, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 + in)}.$$

9. Rozwinąć następujące funkcje w szereg Taylora wokół $z_0 = 1$ i obliczyć promień zbieżności

$$\text{a) } e^{z^2 - 2z}, \quad \text{b) } \arcsin(1 - z).$$

10. Określić typ osobliwości w punkcie $z = 0$ następujących funkcji:

$$\text{a) } \frac{z + 3z^3}{\ln(1 - 2z)}, \quad \text{b) } (e^z - 1 - z)\operatorname{ctg}^3 z.$$

11. Podać rozwinięcie w szereg Laurenta względem z_0 we wszystkich możliwych pierścieniach następujących funkcji

$$\text{a) } \frac{1}{(z^3 + z)}, \quad z_0 = i, \quad \text{b) } \frac{\sin z}{(z - \frac{1}{4}\pi)^3}, \quad z_0 = \frac{1}{4}\pi,$$

12. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego obliczyć całki z następujących funkcji wzdłuż brzegu koła $K(0, 1)$ (zorientowanego dodatnio):

$$\text{a) } \frac{z^3}{2z - i}, \quad \text{b) } \frac{\cosh z}{z},$$

13. Obliczyć bezpośrednim rachunkiem całkę

$$\oint_C \frac{dz}{(z - a)^n},$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$, gdzie C jest zamkniętym konturem obiegającym punkt $z = a$.

14. Dla dowolnego a , ale nie leżącego na konturze C , obliczyć całkę

$$\oint_C \frac{e^z - 1}{z - a} dz,$$

gdzie kontur C dany jest wzorem $|z| = 4$.

15. Obliczyć całkę

$$\oint_C \frac{\sin^4 z}{(z - \pi/3)^3} dz,$$

gdzie kontur c dany jest wzorem $|z| = 2$.

16. Obliczyć całkę

$$\oint_C \frac{e^z}{z^3 + 2z^2} dz,$$

gdzie dodatnio zorientowany kontur C dany jest wzorem $|z| = 1$.

17. Obliczyć $f(i)$, $f(3i)$, $f(4)$, i $f(5i)$, gdzie

$$f(a) = \oint_C \frac{(2z - a)e^{z\pi}}{(z - a)^2} dz,$$

a dodatnio zorientowany kontur C jest elipsą daną wzorem $4x^2 + y^2 = 16$.