

Zad. 1 Znaleźć bieguny funkcji $f(z)$ a następnie scharakteryzować je:

a) $f(z) = (z + 1)^2(z^4 + z^{-1})^{-1}$

b) $f(z) = \cos^2(z) \sin^{-1}(2z)$

c) $f(z) = (z^3 + 1)^2(z - 1)^{-4}$

d) $f(z) = \frac{(e^{z^{-2}} - 1)}{z^2 - 3z + 2}$

e) $f(z) = z^{-30} \sin^{-1}(\pi z^2)$

f) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$

Zad. 2 Obliczyć residua funkcji w podanych punktach:

a) $f(z) = (z \sin(z))^{-1}$ w punkcie $z = 0$

b) $f(z) = (z^4 + 1)^{-1}$ w punkcie $z = \sqrt[4]{-1}$

c) $f(z) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{z}\right)$ w punkcie $z = \frac{1}{8\pi}$

d) $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$ w punkcie $z = i$

e) $f(z) = z^{-2}e^{(z-2)^{-1}}$ w punkcie $z = 0$

Zad. 3 Obliczyć całki rzeczywiste

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2 + 1} dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4 + b^4} dx \quad (a \geq 0, b > 0)$

e) $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Odpowiedzi:

Zad 1.

- a) $z_1 = \sqrt[5]{-1}$ (biegun 1. rzędu), $z_2 = -(-1)^{\frac{2}{5}}$ (biegun 1. rzędu),
 $z_3 = (-1)^{\frac{3}{5}}$ (biegun 1. rzędu), $z_4 = -(-1)^{\frac{4}{5}}$ (biegun 1. rzędu)
- b) $z_1 = 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$ (k biegunów 1. rzędu),
 $z_2 = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ (k biegunów 1. rzędu)
- c) $z_1 = i$ (biegun 4. rzędu)
- d) $z_1 = 1$ (biegun 1. rzędu),
 $z_2 = 2$ (biegun 1. rzędu)
- e) $z_1 = 0$ (biegun 32. rzędu)
- f) $z_1 = \frac{1}{2}(i\pi + 2ik\pi); k \in \mathbb{Z}$ (k biegunów 1. rzędu)

Zad 2.

- a) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 0$
- b) $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = -\frac{\sqrt[4]{-1}}{4} \quad (a = \sqrt[4]{-1})$
- c) $\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = -\frac{1}{64\pi^2} \quad (a = \frac{1}{8\pi})$
- d) $\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -i\frac{1}{2e}$
- e) $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{4\sqrt{e}}$

Zad 3.

- a) $\frac{\pi}{e}$
- b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
- c) $\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2})$
- d) $\frac{\pi}{b^3\sqrt{2}}(\cos\frac{ab}{\sqrt{2}} + \sin\frac{ab}{\sqrt{2}})\exp(-\frac{ab}{\sqrt{2}})$
- e) "half of a pi" ($\frac{\pi}{2}$)