1. Obliczyć pole figury ograniczonej krzywymi:

   a) $(y-x)^2+y^2=1$,

   b) $y^2-10x-25=0$ i $y^2+6x-9=0$.

2. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej płyty o gęstości powierzchniowej ρ ograniczonej krzywymi $y=x^2$ i $y=x+2$ względem osi $y=4$.

3. Obliczyć $f'(x)$ jeśli:

$$f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t,$$

4. Za pomocą różniczkowania względem parametru obliczyć całkę:

$$\int_0^\infty t^2e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \qquad (p>0).$$

5. Obliczyć nieskierowaną całkę krzywoliniową:
   $\int_C \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, gdzie C-odcinek łączący punkty $O(0,0)$ i $A(1,2)$,

6. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną:
   $\int_C (2R-y)\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y$, gdzie C jest łukiem cykloidy

$$\begin{cases} x=R(t-\sin t)\\ y=R(1-\cos t)\end{cases}$$

   dla $t\in[0,2\pi]$.

7. Korzystając ze wzoru Greena obliczyć całki po dodatnio skierowanych krzywych:

   a) $\oint_C (y-x^2)\,\mathrm{d}y+(x+y^2)\,\mathrm{d}x$,
   gdzie C jest brzegiem obszaru $D=\{(x,y): x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$.
   Odp.:$-\frac{4}{3}a^3$

   b) $\oint_C xy^2\,\mathrm{d}x-y^2\,\mathrm{d}y$,
   gdzie C jest krzywą zamkniętą złożoną z wykresu funkcji $y=\ln x$, $y=0$ oraz linii prostej $x=e$.
   Odp.:$(1-e^2)/4$.

8. Obliczyć całkę niezależną od drogi całkowania:

$$\int_{(1,0)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y$$

   (w obszarze $x\neq 0$).
   Odp.: $1+\pi$.

9. Wyznaczyć Φ jeśli:

   a) $d\Phi = (1 - e^{x-y} + \cos x)\,\mathrm{d}x + (e^{x-y} + \cos y)\,\mathrm{d}y$,

   Odp.: $\Phi = x - e^{x-y} + \sin x + \sin y + C$.

   b) $d\Phi = (\mathrm{sh}x + \mathrm{ch}y)\,\mathrm{d}x + (x\mathrm{sh}y + 1)\,\mathrm{d}y$,
   Odp.: $\Phi = \mathrm{ch}x + x\mathrm{ch}y + y + C$.

10. Obliczyć pole powierzchni części płaszczyzny $x + y + z = a$ zawartej we wnętrzu walca $x^2 + y^2 = R^2$.

    Odp.: $\sqrt{3}\pi R^2$.

11. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną:

$$\int_D (4y^2 + 4x - 5z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

    gdzie S – wewnętrzna strona powierzchni $y^2 = 4x$ odcięta płaszczyznami $x = 4$, $z = 0$ i $z = 3$.

    Odp.: 280.

12. Korzystając z twierdzenia Gaussa obliczyć strumień pola $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, -2y, z)$ przez dodatnio zorientowany brzeg obszaru ograniczonego powierzchniami: $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ oraz $x + y + z = 3$.

    Odp.: 24π.

13. Obliczyć całkę

$$\int_D (z^4 - y^4)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (x^4 - z^4)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (y^4 - x^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

    po powierzchni półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ zorientowanej na zewnątrz.

    Wsk.: Skorzystać z twierdzenia Gaussa.

    Odp.: 0.

14. Dane są pola wektorowe $\vec{A}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ oraz $\vec{R}(x, y, z) = (x, y, z)$. Obliczyć

$$P = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{R}).$$

    Odp.: $P = 2z$.

15. Niech $\vec{A}$ i $\vec{B}$ - stałe wektory w $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{A}),$$
jeśli wiadomo, że $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{B}$.

Odp.: $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

16. Obliczyć
$$\oint_C (x+y)\,\mathrm{d}x + (2x-z)\,\mathrm{d}y + (y+z)\,\mathrm{d}z,$$
gdzie C - obwód trójkąta o wierzchołkach w $(2,0,0)$,$(0,3,0)$,$(0,0,6)$ zorientowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara z punktu widzenia początku układu.

Odp.: 21.

17. Korzystając z tw. Stokesa obliczyć
$$\oint_{\partial S+} e^x \sin y\,\mathrm{d}x + (e^x \cos y - z)\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z,$$
gdzie S jest częścią powierzchni stożka $z^2 = x^2 + y^2$, dla której $1 \le z \le 2$, zorientowaną dodatnio.

Odp.:0.

18. Dane jest pole wektorowe $\vec{F} = \dfrac{y}{\sqrt{z}}\vec{e}_x + \dfrac{x}{\sqrt{z}}\vec{e}_y + \sqrt{xy}\vec{e}_z$. Obliczyć rotację $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ tego pola. Czy jest to pole potencjalne?

Odp: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \dfrac{x}{z\sqrt{z}}\right)\vec{e}_x - \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{z\sqrt{z}}\right)\vec{e}_y - \dfrac{2}{\sqrt{z}}\vec{e}_z.$, nie

19. Wykazać, że pole wektorowe
$$\vec{F} = zy(2x+y+z)\vec{e}_x + xz(x+2y+z)\vec{e}_y + xy(x+y+2z)\vec{e}_z.$$
jest potencjalne i podać jego potencjał.

Odp. $\Phi = xyz(x+y+z) + C$.

20. Zweryfikować tw. Stokesa dla pola $\vec{F} = yz\vec{e}_x$ dla części powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2=4$ znajdującej się na zewnątrz cylindra $x^2+y^2=1$ zorientowanej dodatnio.

21. a) Dla jakich wartości z funkcja e^z przyjmuje wartości rzeczywiste ?
b) Pokazać, że: $\sin z = -i\,\mathrm{sh}\, iz$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

22. Podać obszar, w którym istnieje pochodna zespolona funkcji i podać wyrażenie na pochodną:
$$\text{a)}\quad f(z) = z^3, \quad \text{b)}\quad f(z) = \frac{z^2+1}{z-1}.$$

23. Znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u + iv$ na dla $z \in \mathbb{C}$ jeśli

$$u = x^2 - y^2 + 2x, \quad \text{z warunkiem} \quad f(i) = -1 + 2i.$$

24. Obliczyć

$$\oint \frac{e^{z^3+2z}}{z^2-1} dz,$$

gdzie C jest dodatnio zorienotwaną krzywą daną równaniem $|z-1| = 1$.

25. Obliczyć całki wzdłuż dodatnio zorientowanych krzywych:

$$a) \oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz, \qquad b) \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(2z-i)} dz.$$

26. Określić typ osobliwości w punkcie $z = 0$ następujących funkcji:

$$\text{a)} \quad \frac{z+3z^3}{\ln(1-2z)}, \qquad \text{b)} \quad (e^z - 1 - z)\text{ctg}^3 z.$$

27. Podać rozwinięcie w szereg Laurenta względem z_0 i określić obszar zbieżności tego szeregu dla następujących funkcji:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{(z^3+z)}, \quad z_0 = i, \qquad \text{b)} \quad \frac{\sin z}{(z - \frac{1}{4}\pi)^3}, \quad z_0 = \frac{1}{4}\pi,$$

28. Na podstawie twierdzenia o residuach obliczyć całki wzdłuż dodatnio zorientowanego okręgu jednostkowego:

$$\text{a)} \quad \oint_{|z|=1} \frac{(4z^3+8)\, dz}{\pi + 4z}, \qquad \text{b)} \quad \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin z},$$

29. Obliczyć następujące całki za pomocą całki konturowej:

$$\text{a)} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)} dx, \qquad \text{b)} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x\, dx}{\sin x + 2}, \qquad \text{c)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

30. Rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Fouriera w przedziale $(-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{dla} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

31. Znaleźć szereg Fouriera funkcji okresowej, która w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ zadana jest przez

$$f(x) = \begin{cases} 2x & dla \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & dla \quad x = 0 \\ 6x & dla \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

32. Znaleźć szereg Fouriera funkcji okresowej, która w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ zadana jest przez

$$f(x) = x\cos(x)$$

33. Znaleźć szereg Fouriera funkcji okresowej, która w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ zadana jest przez

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h} & dla \quad 0 < x \leq 2h \\ 0 \quad dla & 2h < x < \pi \end{cases}$$

34. Na podstawie tożsamości Parsevala dla funkcji $f(x) = L^2 - x^2$ określonej na przedziale $(-L, L)$ wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

35. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \frac{xe^{ax}}{1+e^x}, \quad 0 < a < 1,$$

całkując odpowiednią funkcję po prostokącie, którego dolną podstawą jest odcinek $(-R, R)$ osi x, a górną taki sam odcinek na odpowiedniej wysokości osi urojonej.

Odp:

$$\mathcal{F}f(k) = i\frac{d}{dk}\frac{\pi}{\sin(\pi(a - ik))}$$

36. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji

$$i) \quad f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}, \tag{1}$$

$$ii) \quad f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}, \tag{2}$$

$$iii) \quad f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a, b > 0, \tag{3}$$

$$iv) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2+x^4}. \tag{4}$$

37. Obliczyć odwrotną transformatę Fouriera do:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{k^2+4k+8}.$$

38. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji

$$f(t) = e^{2it}e^{-|t|}.$$

39. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

$$a)\ f(x) = \begin{cases} a - |x| & \text{dla}\ |x| < a, \\ 0 & \text{dla}\ |x| > a \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

i sprawdzić wzór Parsevala.

40. Pokazać, że

$$\int dx\, f^*(x) \frac{d^2}{dx^2}\, f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} k^2\, \tilde{f}^*(k)\, \tilde{f}(k),$$

gdzie $\tilde{f}(k)$ jest transformatą Fouriera funkcji $f(x)$.

41. Znaleźć funkcje własne i odpowiadające im wartości własne następujących operatorów

$$i) \quad A = (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}, \tag{5}$$

$$ii) \quad A = \frac{d^2}{dx^2}, \tag{6}$$

$$iii) \quad A = x\frac{d}{dx}, \tag{7}$$

$$iv) \quad A = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}. \tag{8}$$