

3. seria domowa z Analizy

Zad. 1

Rozwiń w szereg Fouriera funkcje $f(x)$, zdefiniowane na obszarze $x \in [-\pi, \pi[$ poniższymi wzorami i rozszerzone na całą oś rzeczywistą przez 2π -periodyczność:

1. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)\theta(-|x| + \frac{\pi}{2})$,
3. $f(x) = x \sin(x)$,
2. $f(x) = |x^3|$,
4. $f(x) = |\sin^3(x)|$.

Policz sumę poniższych szeregów:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$, używając $x \sin(x)$,
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-9)(1-4n^2)}$, używając $|\sin^3(x)|$.

Korzystając ze wzoru Parsewała oraz $\operatorname{sgn}(x)\theta(-|x| + \frac{\pi}{2})$, policz sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^4\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Zad. 2

Policz transformatę Fouriera poniższych funkcji $f(x)$:

1. $f(x) = \exp(-x^2 + ax)$, $a \in \mathbb{R}_+$,
3. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi^2}$.
2. $f(x) = \exp(-|x|) \sin(x)$,

Zad. 3

Wyznacz postać poniższych dystrybucji T i policz ich transformatę Fouriera:

1. $\langle T, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \phi(x) dx$,
3. $\langle T, \phi \rangle := \int_0^1 x^2 \phi(x) dx$,
2. $\langle T, \phi \rangle := \frac{1}{2b} [\phi(b) + \phi(-b)]$, $b \in \mathbb{R}_+$,
4. $\langle T, \phi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \phi(x) dx$.

Zad. 4

Rozważmy przestrzeń Hilberta $L^2(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $\langle f|g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) \exp(-x^2) dx$.

Dla poniższych operatorów $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ znajdź ich sprzężenie hermitowskie:

1. $A : f(x) \mapsto x^3 \frac{d^2 f}{dx^2}(x+a) - x f(x+a)$, $a \in \mathbb{R}_+$,
2. $A : f(x) \mapsto i \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$,
3. $A : f(x) \mapsto f(|ax|)$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Zad. 5

Rozważmy przestrzeń Hilberta $L^2([-1, 1])$ z iloczynem skalarnym $\langle f|g \rangle := \int_{-1}^1 f^*(x)g(x) \sqrt{1-x^2} dx$

oraz jej podprzestrzeń $W \subset L^2([-1, 1])$, składającą się z parzystych wielomianów stopnia nie większego niż 2. Znajdź bazę ortonormalną podprzestrzeni W oraz wyznacz rzut ortogonalny na podprzestrzeń W funkcji $f(x) = \sin(x)$ oraz $f(x) = x^2$.