

Analiza dla Inżynierii Nanostruktur oraz Energetyki i Chemii Jądrowej 2015

spisał i uzupełnił Adam Bednorz na podstawie notatek prof. Jana Kalinowskiego i prof. Witolda Bardyszewskiego

Przypomnienie i oznaczenia

Notatki prof. Kamińskiego z poprzedniego semestru

Oznaczenia: \pm i \mp oznacza dwie możliwości $+$ lub $-$, na zasadzie albo znaki górne albo dolne. Suma i iloczyn wielokrotny

$$\sum_j x_j = x_1 + x_2 + \dots + x_j + \dots, \quad \prod_j x_j = x_1 x_2 \cdots x_j \cdots$$

sumujemy bądź mnożymy wszystkie x_j których j (zwykle liczba naturalna) spełnia określone warunki (dopisywane przy znaku sumy/iloczynu).

Granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie dla każdego $n > N$ mamy $|x_n - x| < \epsilon$. Zapisujemy skrótowo $x_n \rightarrow x$. Przedział domknięty jest zbiorem zwartym, tj. każdy ciąg ma podciąg o granicy w tym zbiorze (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa). Granica nieskończona

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

jeśli dla każdego R istnieje N takie dla każdego $n > N$ mamy $x_n > R$. ($-\infty$: $x_n < R$)

Granica funkcji

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = y$$

jeśli (A) dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ także że jeśli $|x - z| < \delta$ to $|f(x) - y| < \epsilon$ lub (B) dla każdego ciągu $x_n \rightarrow z$ $f(x_n) \rightarrow y$. Uwaga, przeważnie zakłada się $x_n \neq z$, bo np. funkcja może nie być zdefiniowana dla z . Piszemy $f(x \rightarrow z) \rightarrow y$. Funkcja jest ciągła w z jeśli $f(x \rightarrow z) = f(z)$, rosnąca, jeśli dla $x < y$ mamy $f(x) < f(y)$ (malejąca odwrotnie). Może być ograniczona $f(x) < C$, różnowartościowa, jeśli dla $x \neq y$ mamy $f(x) \neq f(y)$. Na przedziale domkniętym funkcja ciągła osiąga wartość maksymalną M (tj. zawsze $f(x) \leq M$) i minimalną m ($f(x) \geq m$) i cały przedział wartości $[m, M]$.

Granica nieskończona

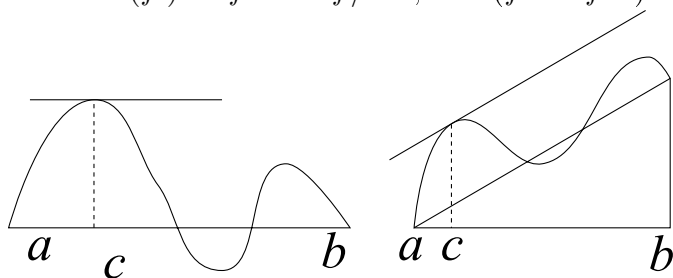
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$$

jeśli (A) dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje R także że jeśli $x > R$ to $|f(x) - y| < \epsilon$ lub (B) dla każdego ciągu $x_n \rightarrow \infty$, $f(x_n) \rightarrow y$ (dla $-\infty$: $x < R$ lub $x_n \rightarrow -\infty$)

Pochodna (różniczkowanie):

$$f' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Bardzo często pomocniczo ułamek df/dx formalnie rozdzielamy na df i dx na których prowadzimy działania arytmetyczne. Twierdzenie o wartości średniej: Jeśli $f(a) = f(b)$ i f to istnieje pochodna w $]a, b[$ to istnieje $c \in]a, b[$ że $f'(c) = 0$ (c odpowiada punktowi maksimum albo minimum funkcji). Ważne uogólnienie: $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ (rysunek). Pochodne wielokrotne $(f')' = f'' = d^2f/dx^2$, itd. ($f''' = f^{(3)}$)



Jeśli funkcja ma pochodną (jest różniczkowalna) to jest ciągła. Jeśli $f' > 0$ to funkcja jest rosnąca (< malejąca), $f'' > 0$ wypukła (< wklęsła, „wypukła do góry”)

Całka nieoznaczona – funkcja pierwotna:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

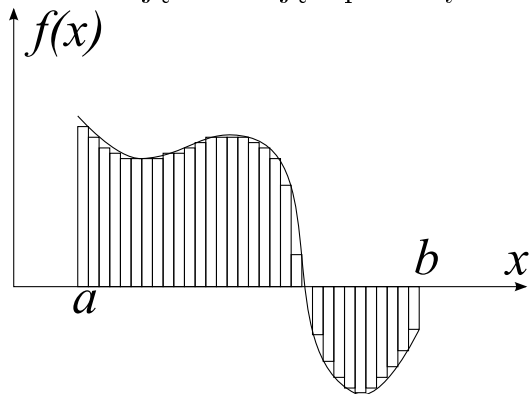
jeśli $F'(x) = f(x)$ (funkcja pierwotna F jest określona z dokładnością do stałej tj. $F(x) + C$ jest funkcją pierwotną dla każdej stałej C , tj. C jest takie samo dla każdego x). Uwaga: dx trzeba zwyczajowo wpisywać (wyjątki: zapis przez formy różniczkowe), ale można traktować jak dowolną stałą która mnoży f byle pod całką.

Całka oznaczona, Riemanna:

dla funkcji ciągłej $f(x)$ dla $x \in [a, b]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{P \rightarrow \infty} \sum_j \Delta x_j f(x_j) = F(b) - F(a)$$

gdzie P oznaczają drobniejące podziały odcinka $[a, b]$ (rysunek), a $F(x)$ jest funkcją pierwotną



od f .

Wiele wymiarów: pary liczb rzeczywistych oznaczamy $\vec{r} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, n -tki $\vec{r} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Odległość

$$d(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = \sqrt{\sum_j (x_{aj} - x_{bj})^2}$$

Granica wielowymiarowa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{r}_n = \vec{R}$$

jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N że dla wszystkich $n > N$, $d(\vec{r}, \vec{R}) < \epsilon$

Funkcje wielu zmiennych, np. $f(x, y) = z$ to trójka (x, y, z) (także jednoznacznie, tj. nie ma par (x, y, z_1) i (x, y, z_2) dla różnych z_1 i z_2 , podobnie dla więcej zmiennych. Granica funkcji wielu zmiennych

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{R}} f(\vec{r}) = w$$

jeśli (A) dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ że jeśli $d(\vec{r}, \vec{R}) < \delta$ to $|f(\vec{r}) - w| < \epsilon$ (B) dla każdego ciągu $\vec{r}_n \rightarrow \vec{R}$ mamy $f(\vec{r}_n) \rightarrow w$.

Pochodna cząstkowa (zapis zależy od kontekstu)

$$\partial_x f = \partial_x f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_y$$

jest to pochodna zwykła df/dx przy założeniu że y jest stałą (dla więcej zmiennych inne także). Przy następnych pochodnych możliwe są różniczkowania po wszystkich kombinacjach zmiennych (liczba możliwości rośnie potęgowo). Figury/bryły/obszary: spójna – znajdziemy ciąg punktów pomiędzy dwoma wyznaczonymi, tak że utworzą zbiór dowolnie bliskich punktów (w sensie małej odległości); ograniczona, jeśli mieści się w jakimś kole/kuli; brzeg – punkty dowolnie blisko punktów należących i nie należących do figury), często utożsamiany brzeg z figurą (np. koło/kulę z okręgiem/sferą, kwadrat, prostokąt, itp.).

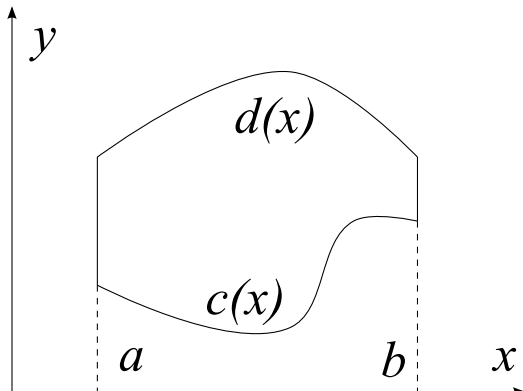
Całkowanie dla wielu zmiennych: Całka iteracyjna (Riemanna/Darboux): jeśli f ciągła

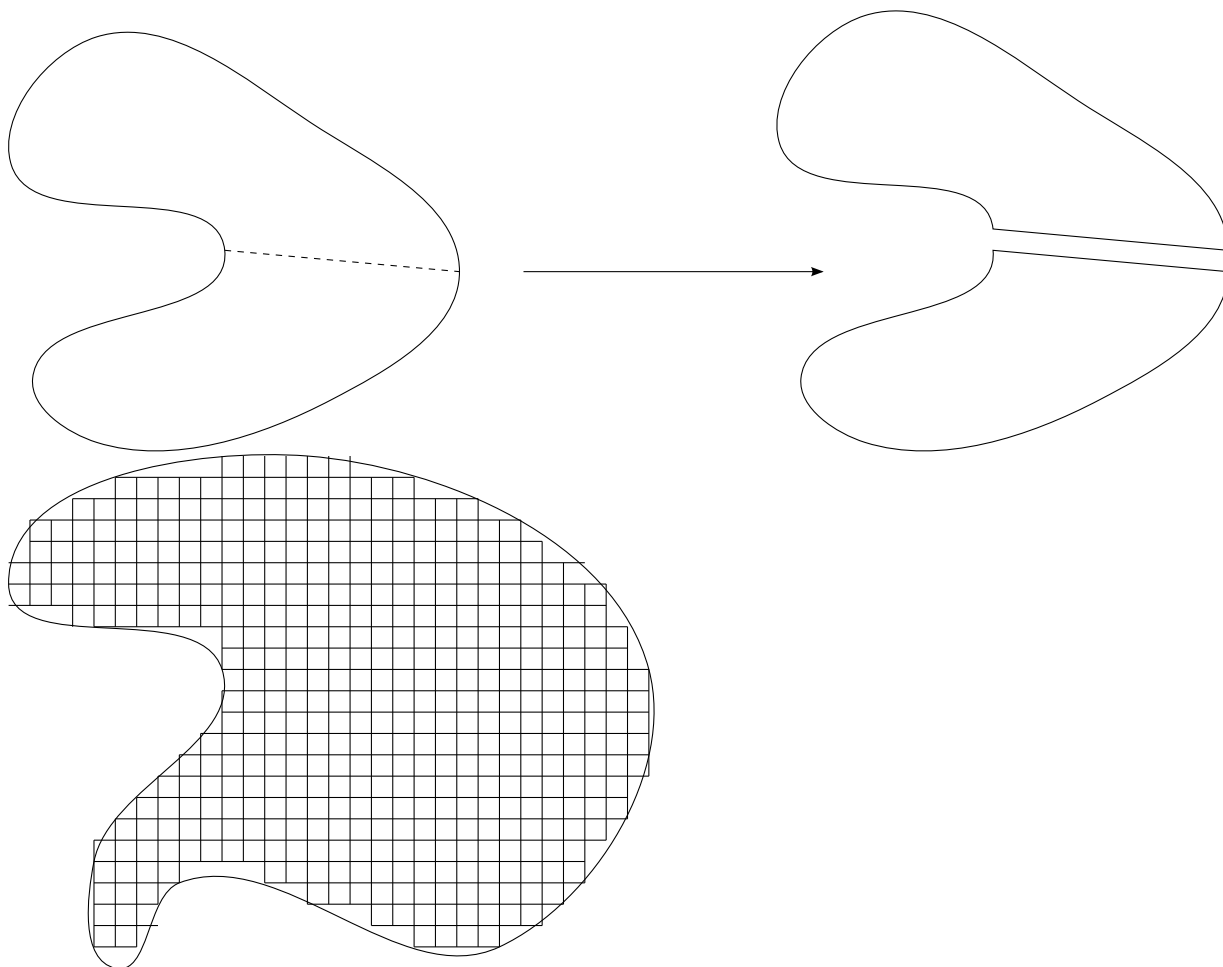
$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

Obliczamy kolejno całki pojedyncze. Twierdzenie Fubniego (o zamianie kolejności)

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Całki wielu zmiennych można rozszerzać na dowolny obszar (rysunki poniżej), w razie potrzeby do celów obliczeniowych dzieląc na kawałki (rysunki), lub definiując przez podział obszaru wielowymiarowego (o ciągłych granicach), piszemy skrótowo $\int_D f(x, y) dx dy$, itp.





Minimum/maksimum (ekstremum) $f(x, y)$ wymaga aby $\partial_x f = \partial_y f = 0$ (itd.). Uwaga: czasem dla ostatecznego rozstrzygnięcia trzeba sprawdzać dodatniość/ujemność macierzy drugich pochodnych (Hesjan), jest to zadanie częściowo z algebry. Jeśli jednak mamy pewność że to minimum/maksimum na mocy innych argumentów, to nie musimy sprawdzać.

Minimum/maksimum warunkowe. Jeśli szukamy ekstremum przy warunku $g(x, y) = 0$ to $f_1 = f - \lambda g$ dla stałej λ (mnożnik Lagrange'a) i $\partial f_1 = 0$. Przy dwóch warunkach $g = h = 0$, $f_1 = f - \lambda g - \mu h$ dla stałych λ, μ , itd. (Z Hesjanem trochę inaczej)

Wymagana wiedza z algebry: wektory, macierze, wyznaczniki, dodatniość macierzy.

Całkowa reguła Leibniza – całki z parametrem

Funkcje definiowane przez całki, np.

$$\phi(x) = \int_c^d f(x, t) dt$$

Czy możemy ją zróżniczkować wchodząc z pochodną pod całkę?

$$\phi'(x) \stackrel{?}{=} \int_c^d \partial_x f(x, t) dt$$

($\partial_x f = \partial f / \partial x$ pochodna cząstkowa dla ustalonego t)

Przykład 1:

$$\phi(x) = \int_0^1 t^x dt = (x+1)^{-1}, \text{ dla } x > -1, \phi'(x) = -(x+1)^{-2}$$

Tymczasem

$$\int_0^1 \partial_x t^x dt = \int_0^1 t^x \ln t dt = (x+1)^{-1} t^{x+1} \ln t \Big|_0^1 - (x+1)^{-1} \int_0^1 t^x dt = -(x+1)^{-2}$$

bo $t^{x+1} \ln t$ ma wartość 0 dla $t = 0, 1$ (po uciążeniu w $t = 0$). Zatem zgadza się.

Twierdzenie 1 (całkowa reguła Leibniza):

Jeśli $f(x, t)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną $\partial_x f(x, t)$ w prostokącie $[a, b] \times [c, d]$, to dla $g(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ i $h(x) = \int_c^d \partial_x f(x, t) dt$ istnieje $g'(x)$ dla $x \in (a, b)$ i $g'(x) = h(x)$.

Dowód: Tezę pokażemy dla $x = 0$ (bez straty ogólności). Weźmy dowolny ciąg (niezerowy) $x_n \rightarrow 0$. Dla ustalonego n dokonujemy podziału przedziału $[c, d]$ na k_n rozłącznych części (jak w definicji całki Riemanna), z punktami podziału t_{jn} , $j = 0, 1, \dots, k_n$ (dla ułatwienia niech te podziały będą zwiększane ze wzrostem n poprzez dodawanie nowych punktów) tak aby

$$\left| \sum_j \Delta t_{jn} (f(x_n, t_{jn}) - f(0, t_{jn})) - g(x_n) + g(0) \right| < |x_n| \epsilon$$

dla dowolnego $\epsilon > 0$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika że istnieje y_{jn} pomiędzy 0 i x_n (rysunek) takie że

$$f(x_n, t_{jn}) - f(0, t_{jn}) = x_n \partial_x f(y_{jn}, t_{jn})$$

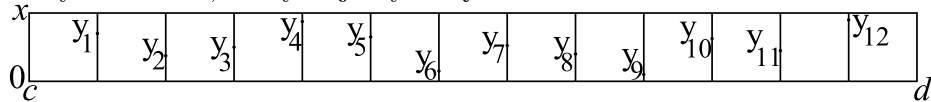
Z drugiej strony

$$\sum_k \Delta t_{jn} (\partial_x f(y_{jn}, t_{jn}) - \partial_x f(0, t_{jn}))$$

zbiega do 0 ze wzrostem podziałów. Wynika to z oszacowania przez maksimum $(d-c)|\partial_x f(y_{jn}, t_{jn}) - \partial_x f(0, t_{jn})|$ a takie maksimum musi zbiegać do zera z ciągłości $\partial_x f$ i zwartości $[c, d]$ (twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: każdy ciąg w przedziale domkniętym ma podciąg zbieżny i jego granicę w tym przedziale). Tymczasem

$$\sum_k \Delta t_{jn} \partial_x f(0, t_{jn}) \rightarrow h(x)$$

a zatem $|(g(x_n) - g(0))/x_n - h(0)|$ jest, dla dostatecznie dużych n , mniejsze od ϵ . Jako że ϵ może być dowolne, otrzymujemy tezę.



Przykład 2:

$$f(x, t) = \begin{cases} \sin(xt)/t & \text{dla } t \neq 0 \\ x & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

oraz $\phi(x) = \int_0^{\pi/2} f(x, t)dt$ (nie da się scałkować elementarnie). Ciągłość (w $t = 0$) wynika z granicy $\sin s/s \rightarrow 1$ dla $s \rightarrow 0$ po podstawieniu $s = xt$. Pochodna $\partial_x f = \cos(xt)$ dla $t \neq 0$. Dla $t = 0$ można przejść do granicy, korzystając z twierdzenia o wartości średniej, czyli 1 dla $t = 0$. Zatem $\partial_x f$ jest ciągła. Z reguły Leibniza

$$\phi'(x) = \int_0^{\pi/2} \partial_x f(x, t)dt = \int_0^{\pi/2} \cos(xt)dt = x^{-1} \sin(xt)|_0^{\pi/2} = \sin(x\pi/2)/x$$

Przykład 3:

Upraszczanie obliczeń całek, np.

$$I = \int_0^1 \frac{du}{(u^2 + 1)^2}$$

Weźmy

$$\phi(x) = \int_0^1 \frac{du}{u^2 + x^2}$$

Z jednej strony po podstawieniu $u = xs$

$$\phi(x) = x^{-1} \int_0^{1/x} \frac{ds}{s^2 + 1} = x^{-1} \arctan(1/x)$$

a z drugiej

$$\phi'(x) = \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{u^2 + x^2} = -2x \int_0^1 \frac{du}{(u^2 + x^2)^2}$$

czyli $I = -\phi'(1)/2 = (\arctan 1 + (1 + 1)^{-1})/2 = \pi/8 + 1/4$.

Przykład 4:

Obliczanie całek nieoznaczonych (powołujemy się na podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)

$$F(a, x) = \int \cos(ax)dx = \sin(ax)/a + C(a)$$

ma pochodną $\partial_a F(a, x) = x \cos(ax)/a - \sin(ax)/a^2 + C'(a)$ a drugiej strony

$$\partial_a F(a, x) = \int \partial_a \cos(ax)dx = \int x \sin(ax)dx$$

Twierdzenie 1a (rozszerzenie reguły Leibniza): Przy założeniach twierdzenia 1, Funkcja

$$g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, t)dt$$

ma pochodną

$$g'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} \partial_x f(x, t) dt + d'(x)f(x, d) - c'(x)f(x, c)$$

o ile pochodne $c'(x)$ i $d'(x)$ istnieją.

Dowód: Większość dowodu przebiega jak dla Twierdzenia 1. Tak samo bierzemy $x = 0$. Dla ciągu $x_n \rightarrow 0$ mamy

$$\begin{aligned} g(x_n) - g(0) &= \int_{c(x_n)}^{d(x_n)} f(x, t) dt - \int_{c(0)}^{d(0)} f(0, t) dt = \\ &= \int_{d(0)}^{d(x_n)} f(x_n, t) dt - \int_{c(0)}^{c(x_n)} f(x_n, t) dt + \int_{c(0)}^{d(0)} (f(x_n, t) - f(0, t)) dt \end{aligned}$$

Do ostatniej całki stosujemy identyczne rozważanie jak w Twierdzeniu 1. Do pierwszych całek stosujemy twierdzenie o wartości średniej

$$\int_{d(0)}^{d(x_n)} f(x_n, t) dt = (d(x_n) - d(0))f(x_n, t_n)$$

gdzie $t_n \in (d(0), d(x_n))$. Z ciągłości wynika że $f(x_n, t_n) \rightarrow f(0, d(0))$ a z definicji pochodnej $(d(x_n) - d(0))/x_n \rightarrow d'(0)$. Tak samo dla c . Stąd teza.

Przykład 5:

$$\phi(x) = \int_0^{x^2} \arctan(t/x^2) dt \text{ dla } x > 0$$

$$\phi'(x) = 2x \arctan(x^2/x^2) + \int_0^{x^2} \partial_x \arctan(t/x^2) dt = \pi x/2 + \int_0^{x^2} (-2t/x^3)(1 + t^2/x^4)^{-1} dt$$

Zamieniając zmienne $u = t^2/x^4$, $du = 2tdt/x^4$

$$= x\pi/2 - x \int_0^1 \frac{du}{1+u} = x(\pi/2 - \ln 2)$$

Definicja 1: Całkę niewłaściwą definiujemy jako

$$\int_c^d f(t) dt := \lim_{s \rightarrow d} \int_c^s f(t) dt$$

Tutaj d może być nieskończonością, $f(d)$ może nie istnieć (np. biec do nieskończoności). Także c można definiować jako granicę.

Przypomnienie: zbieżność bezwzględna. Jeśli f i g ciągłe na $[c, d[$, $0 \leq |f(t)| \leq g(t)$ i $\int_c^d g(t) dt$ zbieżna, wtedy $\int_c^d f(t) dt$ jest zbieżna i

$$\left| \int_c^d f(t) dt \right| \leq \int_c^d g(t) dt$$

Przykład 6:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{3/2}} dt$$

Skoro $|\sin t/t^{3/2}| \leq t^{-3/2}$ i $\int_1^{\infty} dx/x^{3/2} = 2$ (zbieżna) to pierwsza całka także jest zbieżna

Definicja 2: Zbieżność jednostajną funkcji $F(x, t)$ na zbiorze $x \in [a, b]$ oraz $t \in T = [c, d]$ definiujemy: Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że dla $|t - d| < \delta$ zachodzi

$$|F(x, t) - F(x, d)| < \epsilon$$

dla wszystkich x (rysunek).



Przykład 7: $F(x, t) = x^t$ na $[0, 1] \times [1, \infty[$ zbiega do 0 dla $t \rightarrow \infty$ poza $x = 1$ gdzie zbiega do 1. Nie jest jednostajnie zbieżna, bo dowolnie blisko $x \rightarrow$ ma wartości np. $> 1/2$. Granica także nie jest ciągła.

Twierdzenie 2: Uogólnienie tw. 1 na całki niewłaściwe. Jeśli $\phi(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ oraz $\psi(x) = \int_c^d \partial_x f(x, t) dt$ są jednostajnie zbieżne (ze względu na d) i $f(x, t)$ oraz $\partial_x f(x, t)$ są ciągłe w $[a, b] \times [c, d[$ to $\phi'(x)$ istnieje i jest równe $\psi(x)$ (a $\phi(x)$ jest ciągłe).

Antydowód: Dowodu nie można przeprowadzić tak jak w twierdzeniu 1, bo d nie należy do obszaru ciągłości f i $\partial_x f$. Nie działa zatem argument o zwartości i twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Dla funkcji ciągłych, zbieżnych, ale nie jednostajnie, kontrprzykładem są np. diabelskie schody – funkcja Cantora jako ϕ .

Dowód: Ze twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$\phi(x) - \phi(0) = x\phi'(y)$$

gdzie y jest między 0 i x . Z twierdzenia 1 wynika że $\phi'(y) = \psi(y)$, a ze zbieżności jednostajnej wynika że ta równość (i ciągłość) przeżywa w jednoczesnej granicy d i $y \rightarrow 0$. Trzeba wtedy zbiegać tak aby

$$|\phi_e(x) - \phi_d(x)| \leq |x|\epsilon$$

dla $e \rightarrow d$ i tak samo dla $x = 0$ dla dowolnie małego ϵ .

Przykład 8:

$$\phi(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} dt$$

Niech

$$F(x, s) = \int_0^s = \int_0^s e^{-xt} dt = (1 - e^{-xs})/x$$

wtedy

$$\partial_x F = (xse^{-xs} + e^{-xs} - 1)/x^2$$

dla $t \rightarrow \infty$ mamy $F(x, s) \rightarrow 1/x$, $\partial_x F \rightarrow -1/x^2$. Sprawdzenie zbieżności jednostajnej

$$|F(x, s) - 1/x| = e^{-xs}/x \leq e^{-As}/A \text{ dla } x \geq A$$

$$|\partial_x F + 1/x^2| = e^{-xs}(1 + xs)/x^2 \leq e^{-As}(1 + As)/A^2 \text{ dla } x \geq A$$

zatem $\phi'(x) = \int_0^\infty t e^{-tx} dt = -1/x^2$

Zastosowanie: Funkcja Gamma Eulera

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \text{ dla } x > 0$$

Własności, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ czyli $\Gamma(n+1) = n!$ (silnia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$). Całka jest dobrze określona, zbieżna (punktowo) i skończona dla każdego x (np. dlatego że jest funkcja podcałkowa jest dodatnia ograniczona przez t^{x-1} dla małych t i $e^{-t/2}$ dla dostatecznie dużych t z zachowania w nieskończoności funkcji wykładniczych i potęgowych). Aby wykazać ciągłość i różniczkowalność musimy skorzystać właśnie ze zbieżności jednostajnej. Faktycznie $t^{x-1}e^{-t}$ zbiega do 0 dla $t \rightarrow \infty$, z górnym oszacowaniem odchylenia przez największą wartość x , dla $x > 1$ i najmniejszą dla $x < 1$. Podobnie jest dla pochodnej, $t^{x-1}e^{-t} \ln t$, (tu trzeba także przedyskutować dolną granicę, ale mimo występującego $\ln t$ całka jest zbieżna jednostajnie, co łatwo pokazujemy z własności logarytmu dla $t \rightarrow 0$). Reguła Leibniza dla pochodnej daje

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \ln t dt = \Gamma(x)\psi(x)$$

gdzie $\psi(x)$ to tzw. *funkcja digamma*.

Kryterium zbieżności jednostajnej:

Jeśli $|f(x, t)| \leq g(t)$ dla g ciągłej na $[c, d]$ i istnieje $\int_c^d g(t) dt$.

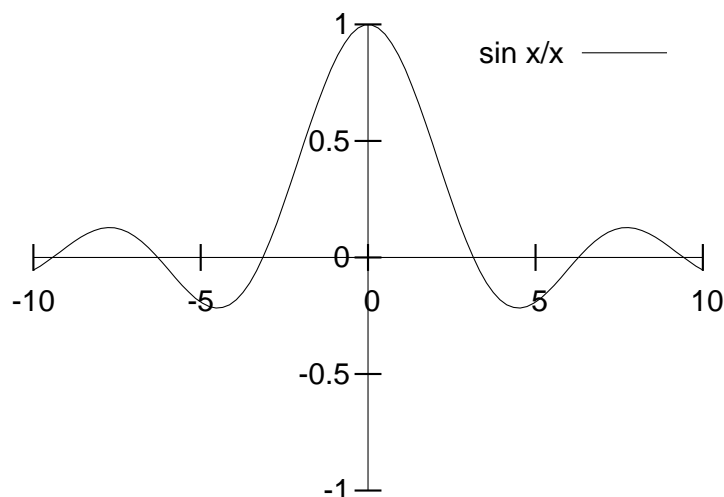
Przykład 9:

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{-t} \sin(xt) dt$$

jest jednostajnie zbieżna bo $e^{-t} |\sin(xt)| \leq e^{-t}$ a $\int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Tak samo

$$|\partial_x (e^{-t} \sin(xt))| = |t \cos(xt) e^{-t}| \leq t e^{-t}$$

ale $\int_0^\infty t e^{-t} dt = 2$. Całkując przez części można pokazać że $\phi(x) = x/(1+x^2)$.



Zastosowanie: Całka Dirichleta

Spróbujmy zastosować regułę Leibniza do całki

$$D(a) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(at)}{t} dt$$

(w zerze funkcja podcałkowa dla ciągłości jest równa a patrz rysunek).

Spróbujmy policzyć pochodną po a z reguły Leibniza

$$D'(a) = \int_0^{\infty} \cos(at) dt$$

Taka nie jest zbieżna całka, reguła nie działa. Nawiasem mówiąc, z prostej zamiany zmiennych $y = at$ wynika, że $D(a > 0) = D(1) = -D(-1) = D(a < 0)$ oraz $D(0) = 0$. Zamiast tego rozpatrzmy inną całkę

$$D(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-bt} \sin(at) dt/t$$

Widać że $D(a) = D(a, b \rightarrow 0)$ i jest to przejście ciągle (łatwo to pokazać, analizując zachowanie funkcji podcałkowych dla $t \rightarrow \infty$). Z zamiany zmiennych można też wywnioskować że $D(a, b) = f(a/b)$ gdzie f jest (pewną) funkcją jednej zmiennej. Dla $b > 0$ reguła Leibniza już działa i

$$\partial_a D(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-bt} \cos(at) dt = b/(b^2 + a^2)$$

Ostatnią całkę można policzyć np. przez części. Z kolei

$$\int \frac{b da}{b^2 + a^2} = \arctan(a/b) + C(b)$$

po podstawieniu $a = sb$. Jednak dla $a = 0$ mamy $D(a, b) = 0$ czyli $C = 0$ i $D(a, b) = \arctan(a/b)$. Przechodząc do granicy $b \rightarrow 0$ otrzymujemy wynik

$$D(a) = \begin{cases} \pi/2 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -\pi/2 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Komentarz: Regułę Leibniza uogólnia się oczywiście na wiele zmiennych $\int f(x, y, z, \dots, t) dt$

Elementy analizy wektorowej

Przypomnienie: Dla wektorów trójwymiarowych $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ definiujemy iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ (ogólniej dla $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots)$ jest $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i$), długość wektora $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ i wektorowy $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$,

$$\vec{C} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$$

dla wektorów jednostkowych (wersorów) $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$, zawsze \vec{e} oznacza wektor taki że $|\vec{e}| = 1$). Iloczyn mieszany (skalarno-wektorowy)

$$\begin{aligned} [\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = [\vec{B}, \vec{C}, \vec{A}] = -[\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}] \\ &= \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ jest polem równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{A} i \vec{B} (lub 2-krotnym polem trójkąta). Wektory \vec{A} i \vec{B} są prostopadłe ($\vec{A} \perp \vec{B}$) gdy iloczyn skalarny znika, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, a równoległe ($\vec{A} \parallel \vec{B}$) gdy wektorowy znika, $\vec{A} \times \vec{B} = 0$.

Przypomnienie: współrzędne biegunowe na płaszczyźnie $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $r \geq 0$, $\phi \in [0, 2\pi]$, walcowe $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$, $\rho \geq 0$, sferyczne $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Przeliczanie miary całkowania $dx dy = r dr d\phi$, $dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, wynika to z jakobianów (o tym za chwilę).

Przypomnienie: Funkcje wielu zmiennych, np. $f(x_1, x_2, \dots)$, mają pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

oznaczające pochodną (zwykłą) po x_i przy ustalonych x_j dla $j \neq i$ (pełnią rolę parametrów). Jeśli x są funkcjami kolejnych zmiennych, np. $x_1(y_1, y_2, \dots)$, $x_2(y_1, y_2, \dots)$ itd. to można zdefiniować $f(y_1, y_2, \dots) = f(x_1(y_1, y_2, \dots), x_2(y_1, y_2, \dots), \dots)$ to mamy uogólnienie pochodnej funkcji złożonej, regułę łańcuchową

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

Wzór ten pozwala na używanie formalizmu macierzowego, bo macierze (Jacobiego) o elementach i, j , $\partial x_i / \partial y_j$ można, przechodząc do kolejnego zestawu zmiennych, np. z_k mnożyć macierzowo tj.

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_k} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial z_k}$$

Przydatny jest także **wyznacznik Jacobiego** – **jakobian** $J(x \rightarrow y) = \det(\partial x_i / \partial x_j)$ (tj. wyznacznik macierzy pochodnych), pomocnych przy całkach wielokrotnych, bo $dx_1 dx_2 \dots = J(x \rightarrow y) dy_1 dy_2 \dots$. Uwaga: reguła łańcuchowa wymaga albo istnienia pochodnej zupełnej, tj.

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{r}) - \sum_i x_i \partial_i f'(0)|}{|\vec{r}|} = 0$$

dla $\vec{r} = (x_1, x_2, \dots)$. Granica oznacza że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że prawa strona jest $< \epsilon$ dla dowolnego \vec{r} takiego, że $|\vec{r}| < \delta$. Pochodna zupełna istnieje jeśli pochodne cząstkowe są ciągłe.

Drugie pochodne:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Środkowa równość oznacza że **kolejność różniczkowania jest dowolna** (albo najpierw po x_j a potem po x_i albo odwrotnie). Ten fakt będziemy często wykorzystywać, wymaga on założenia ciągłości 2. pochodnych lub istnienia drugiej pochodnej zupełnej (analogicznie jak 1. tylko dokładamy wyrazy $x_i x_j \partial_{ij}^2$ i dzielimy przez $|\vec{r}'|^2$) // Uwaga: ciągłość jest konieczna, np. $xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ dla x lub $y \neq 0$ i 0 w $x = y = 0$ jest ciągła i ma ciągle pochodne, ale już nie drugie w zerze (nie ma też 2. pochodnej zupełnej) i równości nie ma.

Często będziemy skrótowo oznaczać pochodne, np.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f$$

także drugie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{xy}^2 f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_{ij}^2 f$$

jeśli jest to jednoznaczne. Często nie piszemy f (tj. piszemy tylko np. ∂_x jeśli konkretna postać f nie jest istotna). Inne uproszczenia, $\partial_{xx}^2 = \partial_x^2$ lub $\partial_{ii}^2 = \partial_i^2$. Wszystko prosto uogólnia się na wyższe pochodne np. ∂_{xyz}^4 oznacza 4. pochodną dwukrotnie po x , raz po y i po z , ale praktycznie nie będziemy tego potrzebować.

Całki krzywoliniowe w $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$.

Definicja 3: Krzywa - ciągła funkcja $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\vec{r}(u) \equiv (x(u), y(u), z(u))$ (parametryzacja przez u) dla $u \in [a, b]$, $A = \vec{r}(a)$ - początek, $B = \vec{r}(b)$ - koniec. Krzywa zorientowana: jeśli zamienimy $A \leftrightarrow B$ to mamy przeciwną orientację (są tylko 2 możliwe). Krzywa może mieć wiele parametryzacji. Krzywa zamknięta - pętla, jeśli $A = B$. Łuk: $u \rightarrow \vec{r}$ jednoznaczne, gładki, gdy $\vec{r}(u)$ różniczkowalne (na razie przynajmniej ciągła pochodna). Często krzywe są gładkie, ale odcinkami, tj. możemy podzielić $[a, b]$ na mniejsze rozłączne przedziały tak aby w każdym był łuk gładki. Wektor styczny $\vec{t} = d\vec{r}/du$. Jeśli

$$|\vec{t}| = \sqrt{\vec{t} \cdot \vec{t}} = \sqrt{(dx/du)^2 + (dy/du)^2 + (dz/du)^2} \neq 0$$

to parametryzacja jest regularna. Długość krzywej

$$L = \int_a^b |\vec{t}| du$$

lub dla $x = u, y(x), z(x)$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx$$

Przykład 10:

$$\vec{r}(u) = (\cos u, \sin u, 0) \text{ dla } u \in [0, \pi]$$

Definicja 4:

Całka krzywoliniowa skierowana. Dla krzywej K sparametryzowanej $u \in [a, b]$ oraz ciągłe $P(\vec{r})$, $Q(\vec{r})$, $R(\vec{r})$ (R jest niepotrzebne w 2 wymiarach)

$$\int_K P dx + Q dy + R dz := \int_a^b (P(\vec{r}(u))x'(u) + Q(\vec{r}(u))y'(u) + R(\vec{r}(u))z'(u)) du$$

lub równoważnie dla $\vec{F} = (P, Q, R)$

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b du \vec{F}(u) \cdot d\vec{r}(u)/du$$

Interpretacja: praca siły wzdłuż drogi $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

Przykład 11:

Praca siły $\vec{F} = (x - y, x + y)$ wzdłuż półelipsy K , $x = a \cos u$, $y = b \sin u$, $u \in [0, \pi]$. Wtedy $\vec{t} = (-a \sin u, b \cos u)$ i

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi [(a \cos u - b \sin u)(-a \sin u) + (a \cos u + b \sin u)b \cos u] du \\ &= \int_0^\pi [ab - (a^2 - b^2) \sin 2u/2] du = \pi ab \end{aligned}$$

Definicja 5:

Całka krzywoliniowa niezorientowana. Założenia jak dla całki skierowanej, tym razem mamy ciągłe $f(\vec{r})$

$$\int_K f ds = \int_a^b f(\vec{r}) |\vec{t}(u)| du$$

co wynika z przyjęcia elementu długości $ds = |\vec{t}| du$.

Całkę zorientowaną można wyrazić przez niezorientowaną

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (\vec{F} \cdot \vec{e}_t) ds$$

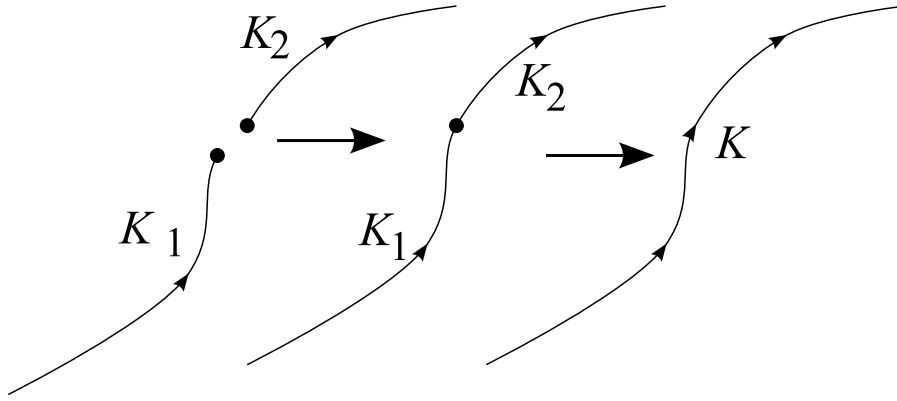
gdzie $\vec{e}_t = \vec{t}/|\vec{t}|$ (albo $\vec{t} = |\vec{t}| \vec{e}_t$) jest wektorem kierunku stycznego, niezależnym od parametryzacji, ale od orientacji.

Przykład 12:

$\int_K xy^3 ds$ dla K – odcinek $A = (-1, 2)$, $B = (1, 2)$. Parametryzacja $x = u$, $y = 2u$, $u \in [-1, 1]$

$$\int_K xy^3 ds = \int_{-1}^1 u \cdot 8u^3 \sqrt{1+4} du = \sqrt{5} \int_{-1}^1 8u^4 du = 16/\sqrt{5}$$

Właściwości całek skierowanych i niezorientowanych. Całki są **liniowe**, tj. dla kombinacji liniowej \vec{F} lub f całka jest także kombinacją liniową, i nie zależą od parametryzacji tylko od samej krzywej. Jeśli \tilde{K} jest krzywą K o przeciwnej orientacji to $\int_{\tilde{K}} = -\int_K$ dla całek zorientowanych oraz $\int_K = \int_{\tilde{K}}$ dla niezorientowanych. Jeśli $K = K_1 + K_2$ (składanie krzywych, jak na rysunku), to $\int_K = \int_{K_1} + \int_{K_2}$. Jeśli K leży w płaszczyźnie xy to $R = F_z$ możemy pominąć.



Pole wektorowe: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\vec{F}(\vec{r})$

Przykłady: elektryczne, magnetyczne, grawitacyjne. Dla odróżnienia $\phi(\vec{r}) \in \mathbf{R}$ to pole **skalarne**.

Definicja 6:

Gradient, ∇ jest operatorem tworzącym (zwyczajowo) pole wektorowe s pola skalarne

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad}\phi := \nabla\phi(\vec{r}) := (\partial_x\phi(\vec{r}), \partial_y\phi(\vec{r}), \partial_z\phi(\vec{r}))$$

Związek z pochodną kierunkową: $\nabla_{\vec{t}}\phi = \vec{t} \cdot \nabla\phi$.

UWAGA: Gradient uogólnia się jako abstrakcyjną operację wektorową, może działać nie tylko na pola skalarne, ale dowolne, zachowując reguły notacji wektorowej, z tym że na ogół używamy wtedy innej nazwy np. dywergencja, rotacja, itp. o czym będzie później.

Definicja 7:

Pole wektorowe (ciągłe) \vec{F} jest potencjalne jeśli istnieje pole skalarne ϕ , takie że $\vec{F} = \nabla\phi$. Najczęściej jest to statyczne pole elektryczne albo grawitacyjne, czasem magnetyczne.

Przykład 13:

Siła przyciągania ładunków

$$\vec{F} = \frac{kQq\vec{r}}{r^3} = \nabla\phi$$

dla $r = |\vec{r}|$ i $\phi = -kQq/r$ (kQq – stałe).

Twierdzenie 3:

Dla pola potencjalnego \vec{F} całka skierowana

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

zależy tylko od punktów początkowych A i końcowych B i jest równa $\phi(B) - \phi(A)$ dla $\nabla\phi = \vec{F}$

Dowód:

Przy parametryzacji $a \rightarrow A$ i $b \rightarrow B$

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\phi \cdot (d\vec{r}/du)du = \int_a^b (d\phi/du)du = \phi(b) - \phi(a)$$

Tutaj ϕ traktujemy jako funkcję złożoną $\phi(\vec{r}(u))$ i stosujemy wzór na pochodną funkcji złożonej wielu zmiennych. Jeśli K jest pętlą, to $A = B$ i całka jest zerem.

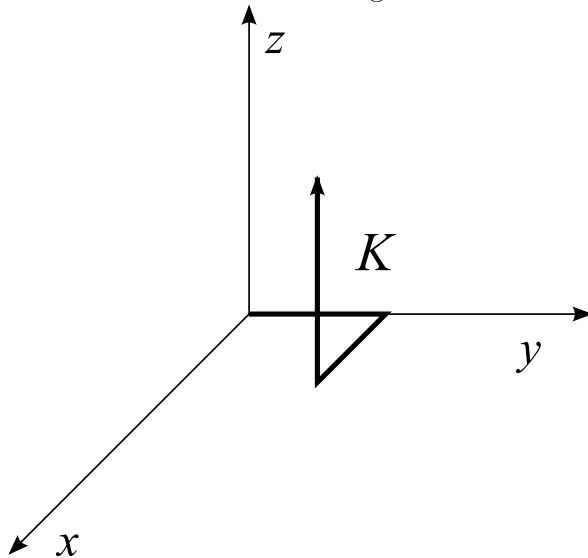
Twierdzenie 3a: (odwrotne do 3) Jeśli całka z twierdzenia 3 zależy tylko od punktów końcowych to pole (ciągłe) jest potencjalne.

Dowód:

Przez konstrukcję. Weźmy np. $\phi(0) = 0$ oraz

$$\phi(\vec{w}) = \int_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

gdzie K ma punkt początkowy w 0 a końcowy w \vec{w} . Fakt, że $\nabla\phi = \vec{F}$ wynika ze specjalnego wyboru drogi, kawałkami równoległej do osi (rysunek). Korzystamy wtedy wprost z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego dla określonego kierunku.



Forma różniczkowa Pole wektorowe \vec{F} często zapisuje się jako (jedno-)formę różniczkową (Pfaffa)

$$\omega = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

i wtedy całkę skierowaną zapisujemy $\int_K \omega$. (Zero-)formami są pola skalarne i warunek potencjalności zapisujemy

$$\omega = d\phi := \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Tu ϕ jest tzw. formą pierwotną.

Przykład 14: Czy $\omega = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$ jest formą zupełną i ewentualnie znaleźć formę pierwotną.

Szukamy ϕ takiego że

$$\partial_x\phi = 2x + 3y \Rightarrow \phi = x^2 + 3yx + c(y)$$

bo funkcji $c(y)$ nie możemy jeszcze wyznaczyć. Z drugiej strony

$$\partial_y\phi = 3x + c'(y) = 3x - 2y$$

czyli $c'(y) = -2y$ i $c(y) = -y^2 + C$. Ostatecznie jest więc forma zupełna o pierwotnej $\phi(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 + C$

UWAGA: ϕ zawsze jest określone z dokładnością do stałej C tak jak całki nieoznaczone.

Warunek konieczny potencjalności

Z równości pochodnych krzyżowych (przy założeniu że są ciągłe lub przynajmniej zupełne)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

wynika że $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, $\partial_y F_z = \partial_z F_y$, $\partial_z F_x = \partial_x F_z$.

Nie jest to warunek dostateczny. Np.

$$\vec{F} = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}$$

poza $(x, y) = (0, 0)$ spełnia

$$\partial_x F_y = \partial_y F_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

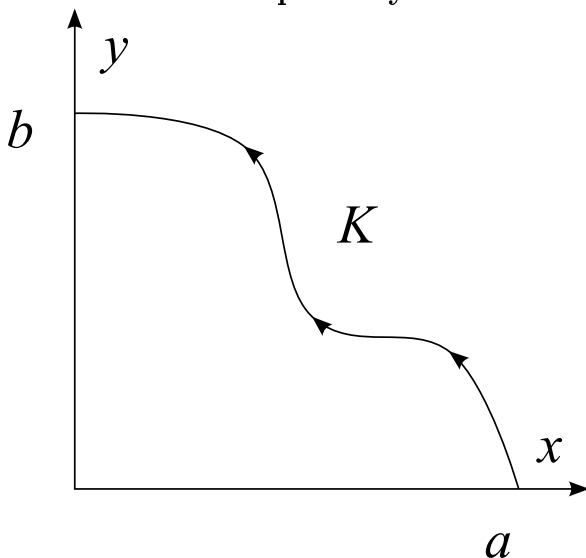
a tymczasem całka po pętli wokół $(0, 0)$, sparametryzowana kątem ϕ , tj. $x = r(\phi) \cos \phi$, $y = r(\phi) \sin \phi$ daje

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \neq 0$$

Problemem jest punkt $(0, 0)$ tam pole nie istnieje. Obszar istnienia pola bez tego punktu nie jest jednospójny. Warunek dostateczny zastrzega jednospójność czyli brak dziur w obszarze istnienia, ściślej, że każdą pętlę w zbiorze można deformować w sposób ciągły aby zmniejszyć ją do punktu. Innym sposobem na obejście tego warunku jest przyjęcie *wieloznaczności* ϕ (nie jest to już tradycyjna funkcja, bo ma wiele wartości), np. w przykładzie występują skoki o 2π i można je dopuścić w tym sensie.

Poziomice, powierzchnie ekwipotencjalne są zadane warunkiem stałego ϕ . Np. siła potencjalna na takiej powierzchni nie wykonuje pracy. $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ czyli $\vec{F} \perp d\vec{r}$ (\vec{F} jest prostopadłe do $d\vec{r}$). W przykładzie 14 jest to rodzina krzywych $x^2 + 3xy - y^2 = C$.

Wzór Greena na płaszczyźnie



George Green (1793-1841, Anglia) esej o zastosowaniu analizy do elektryczności i magnetyzmu (funkcje Greena). Weźmy krzywą skierowaną K do $A = (a, 0)$ do $B = (0, b)$ jak na

rysunku i pole wektorowe (2-wymiarowe) \vec{F} . Całka skierowana może być parametryzowana zarówno przez $y(x)$ jak i $x(y)$ (tutaj monotoniczne). Z liniowości wynika

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^b F_y(x(y), y) dy - \int_0^a F_x(x, y(x)) dx$$

(minus ze względu na przeciwną orientację). Z kolei

$$F_y(x(y), y) = \int_0^{x(y)} \partial_x F_y(x, y) dx + F_y(0, y), \quad F_x(x, y(x)) = \int_0^{y(x)} \partial_y F_x(x, y) dy + F_x(x, 0)$$

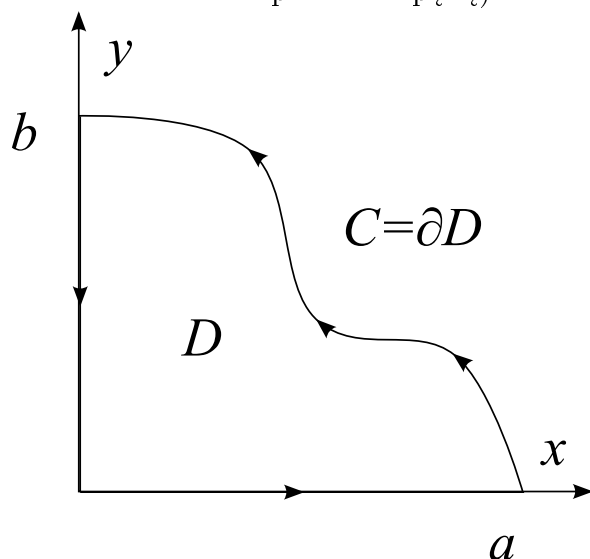
Zatem

$$\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_0^b dy F_y(0, y) - \int_0^a dx F_x(x, 0) = \int_0^b dy \int_0^{x(y)} dx \partial_x F_y(x, y) - \int_0^a dx \int_0^{y(x)} dy \partial_y F_x(x, y)$$

Całki po prawej stronie są w istocie po tym samym obszarze – powierzchni między krzywymi i osiami, natomiast dodatkowe człony po lewej stronie można włączyć do całki skierowanej definiując krzywą jako pętlę, dołączając fragmenty osi (rysunek). Oznaczając ten obszar przez D a pętlę przez C ($C = \partial D$ – oznaczenie brzegu obszaru, o orientacji przeciwnej do wskazówek zegara), możemy napisać

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D dx dy (\partial_x F_y - \partial_y F_x)$$

(kółko na znaku całki podkreśla pętlę)

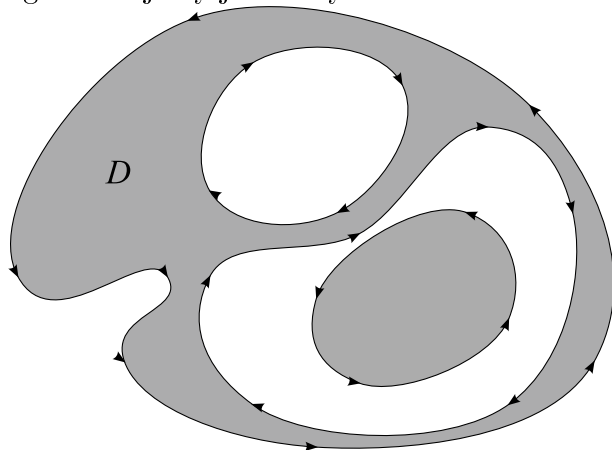


Twierdzenie 4 (wzór Greena):

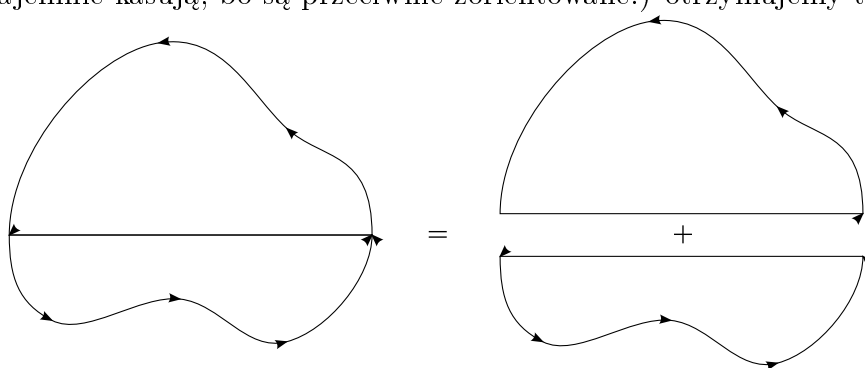
Niech D – dowolny obszar w płaszczyźnie xy o brzegu kawałkami gładkim (liczba kawałków powinna być skończona, a przynajmniej przeliczalna tj. numerowana liczbami naturalnymi) a \vec{F} pole wektorowe o ciągłych pochodnych to

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_D dx dy (\partial_x F_y - \partial_y F_x)$$

Brzeg orientujemy jak na rysunku



Dowód: Dzielimy obszar na mniejsze kawałki (rysunek), na których możemy zastosować omówione wcześniej rozumowanie. Z liniowości i sumowalności (ważne: wkłady od linii cięć się wzajemnie kasują, bo są przeciwnie zorientowane!) otrzymujemy tezę.



Przykład 15:

Pole powierzchni figury D .

$$A = \int_D dx dy = \oint_{\partial D} x dy = - \oint_{\partial D} y dx = \oint_{\partial D} (x dy - y dx) / 2$$

We współrzędnych biegunowych $x = r(\phi) \cos \phi$, $y = r(\phi) \sin \phi$, $x dy - y dx = r^2(\phi) d\phi$ czyli $A = \oint_{\partial D} r^2 d\phi / 2$ a ogólniej $A = \oint_{\partial D} \vec{r} \times d\vec{r} / 2$ (zakładając umowny tylko kierunek z dla iloczynu wektorowego)

Zastosowanie: Planimetr (biegunowy) składa się z dwóch sztywnych ramion (w płaszczyźnie xy), połączonych przegubem. Koniec jednego ramienia jest unieruchomiony (biegun) a na drugim jest kółko, które obraca się prostopadle do ramienia. Kółko ślizga się przy ruchu poprzecznym (tj. wzdłuż ramienia) a obraca bez poślizgu poprzecznie do ramienia. Końcem drugiego ramienia jedziemy po krzywej ograniczającej szukany obszar (rysunek). Ramiona mają długości R i L a kółko ma promień r i znajduje się na ramieniu L w odległościach a i b od końców ($L = a + b$). Położenie wodzika oznaczmy przez \vec{r} a przegubu przez \vec{r}' . Przy ruchu wodzika o $d\vec{r}$ i jednoczesnym ruchu przegubu (wymuszonym!) o $d\vec{r}'$ kółko obraca się o

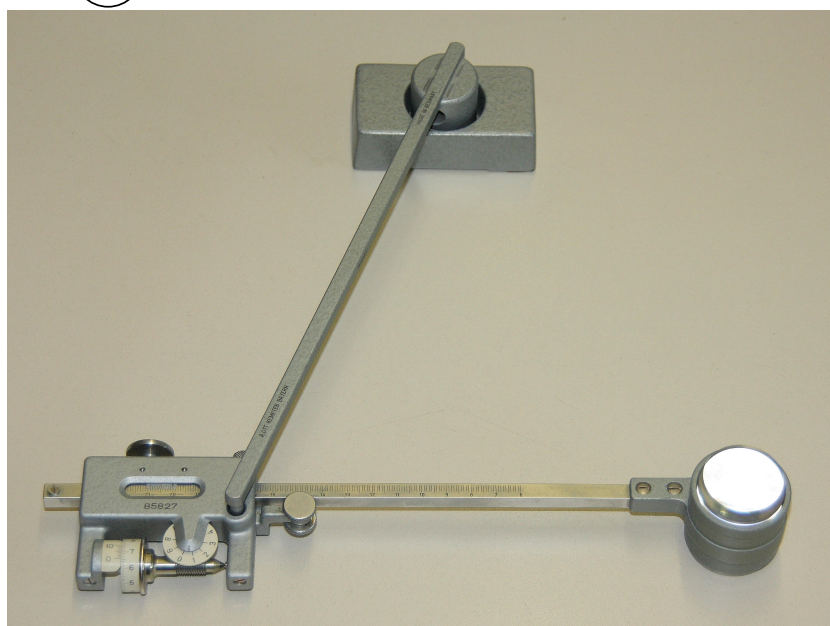
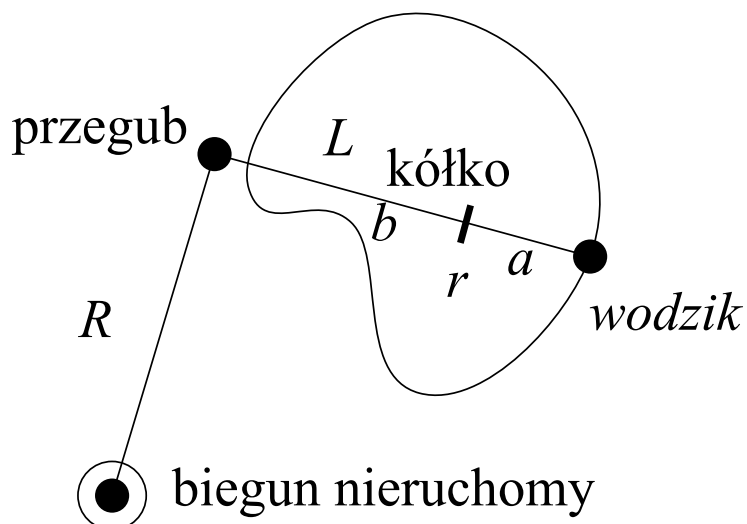
$$dN = (\vec{b} \times d\vec{r} - \vec{a} \times d\vec{r}') / 2\pi r L = \vec{L} \times (b d\vec{r} + a d\vec{r}') / 2\pi r L^2$$

obrotów. Z kolei $\vec{L} = \vec{r} - \vec{r}'$. Całkowita liczba obrotów kółka to N . Mamy więc związek

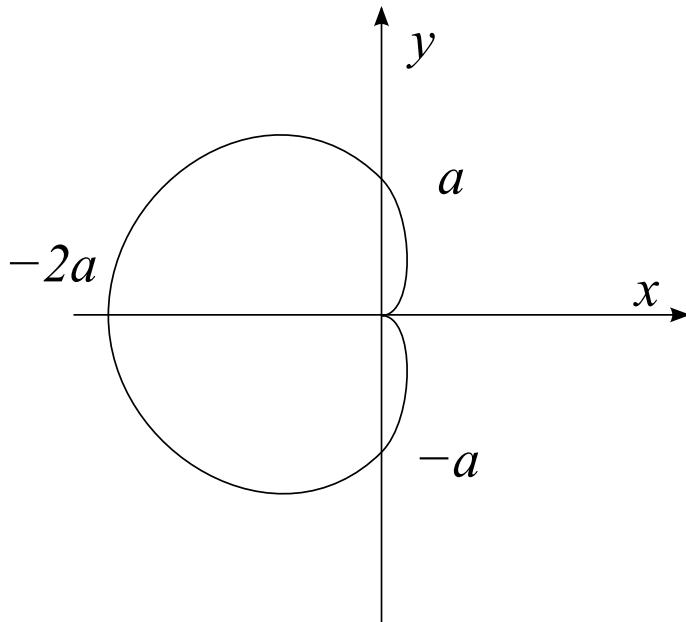
$$2\pi r L^2 N = L \oint \vec{r} \times d\vec{r} / 2 - L \oint \vec{r}' \times d\vec{r}' / 2 + (b - a) \oint \vec{L} \times d\vec{L} / 2 + L \oint (\vec{r} \times d\vec{r}' - \vec{r}' \times d\vec{r}) / 2$$

Ostatnia całka zawiera formę $\vec{r} \times d\vec{r}' - \vec{r}' \times d\vec{r} = d(\vec{r} \times \vec{r}')$ i jeśli (co zwykle się zakłada) wozzik i przegub wracają do swoich punktów początkowych to ta całka znika. Całka z L liczy pole zakreślone przez samo ramię z wozikiem. Musi to być naturalna wielokrotność πL^2 , a przeważnie też jest zerem. Z kolei całka z r' jest polem zakreślonym przez przegub czyli wielokrotnością πR^2 także zwykle zero, wtedy otrzymujemy pole A , tj.

$$2\pi r L N = A$$



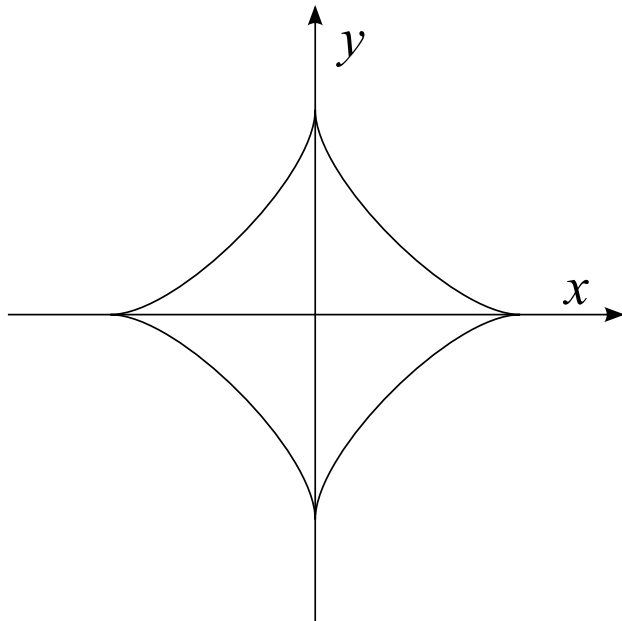
en.wikipedia.org/wiki/Planimeter



Przykłady liczenia pól ograniczonych krzywymi:

Kardioida (rysunek) $r = a(1 - \cos \phi)$ dla $\phi \in [0, 2\pi]$ lub równoważnie $(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$
 Przecina osie w punktach $(0, 0)$, $(0, \pm a)$ i $(-2a, 0)$.

$$A = \int_0^{2\pi} r^2 d\phi / 2 = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \phi)^2 d\phi / 2 = 3\pi a^2 / 2$$



Krzywa $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$ (rysunek). Parametryzacja $x = \cos^3 \phi$, $y = \sin^3 \phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$

$$A = \int_0^{2\pi} 3 \cos^2 \phi \sin^2 \phi d\phi / 2 = 3\pi / 8$$

Związek z kryterium potencjalności:

Z twierdzenia Greena wynika, że gdy $\partial_x F_y = \partial_y F_x$ na obszarze D to całka $\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ znika.

Skoro całka po pętłach znika to ogólniej nie zależy od drogi, tylko punktów początkowych. W drugą stronę oczywiście gdy $\vec{F} = \nabla\phi$ to

$$\partial_x F_y = \partial_{xy}^2 \phi = \partial_{yx}^2 \phi = \partial_y F_x$$

Dywergencja i rotacja:

Operację ∇ , która pierwotnie jest gradientem, można rozszerzyć na działanie na pola wektorowe. Chcąc zachować naturalną strukturę wektorową, robi się to posilując się iloczynem skalarnym i wektorowym. Wszędzie tu zakładamy, że \vec{F} ma ciągle pochodne.

Definicja 8: Dywergencja:

$$\phi = \text{div}\vec{F} := \nabla \cdot \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

Definicja 9: Rotacja:

$$\vec{E} = \text{rot}\vec{F} := \nabla \times \vec{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)$$

Definicja 10: Operator Laplace'a, laplasjan:

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

(tu np. $\partial_x^2 = \partial_{xx}^2 = \partial_x \partial_x$). Laplasjan może działać na pole skalarne $\psi = \text{div grad}\phi = \Delta\phi$ (wynikiem jest też pole skalarne) lub na wektorowe $\vec{E} = \Delta\vec{F}$ (wynik też wektorowe).

Dla uproszczenia zapisów wprowadzimy kilka konwencji notacyjnych. $\partial_x \phi \equiv \phi_{,x}$, $\partial_x F_x \equiv F_{x,x}$, $\partial_x F_y = F_{y,x}$ itd. $r_1 \equiv x$, $r_2 \equiv y$, $r_3 \equiv z$, $F_{r_i} \equiv F_i$, $\partial_i \equiv \partial/\partial r_i$, $i = 1, 2, 3$, $\partial_i \phi \equiv \phi_{,i}$, $\partial_i F_i \equiv F_{i,i}$, $\partial_i F_j \equiv F_{i,j}$. $\partial_i \phi_{,j} = \phi_{,ji} = \phi_{,ij} = \partial_j \phi_{,i}$, $\partial_i F_{k,j} = F_{k,ji} = F_{k,ij} = \partial_j F_{k,i}$, itd. Przecinek oddziela indeks składowej pola od kierunków pochodnych.

Ponadto wprowadzimy deltę Kroneckera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

symetryczny, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ oraz tensor całkowicie antysymetryczny Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{dla } ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{dla } ijk = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{dla } ijk = aab, aba, baa, aaa \end{cases}$$

gdzie $a, b = 1, 2, 3$. Tensor jest całkowicie antysymetryczny, tj. $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$, co zresztą zastępuje jego definicje (uzupełniając o warunek $\epsilon_{123} = +1$). Mamy także $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$. Inną ważną własnością jest

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \det \begin{pmatrix} \delta_{il} & \delta_{jl} & \delta_{kl} \\ \delta_{im} & \delta_{jm} & \delta_{km} \\ \delta_{in} & \delta_{jn} & \delta_{kn} \end{pmatrix}$$

Oprócz tego wygodna jest konwencja sumacyjna (Einsteina)

$$\sum_i A_i B_i \equiv A_i B_i$$

Po prostu nie piszemy znaku sumowania (ale musimy wiedzieć np. że $i = 1, 2, 3$). Umawiamy się, że sumujemy zawsze po wskaźniku występującym dwukrotnie (aby ustrzec się kolizji oznaczeń trzeba unikać wielokrotnych powtórzeń wskaźników). Ważne przykłady:

$$\delta_{ij}A_j = A_i, \delta_{ii} = 3, \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$$

iloczyn skalarny $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$, wektorowy $(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$ i bardzo przydatny wzór

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

a nawet $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$, $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

Wtedy można zapisać gradient, dywergencję i rotację w zwarty sposób

$$(\nabla\phi)_i = \phi_{,i}, \nabla \cdot \vec{F} = \partial_i F_i = F_{i,i}, (\nabla \times \vec{F})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j F_k = \epsilon_{ijk} F_{k,j}$$

Ważne własności:

$$\text{div rot } \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \epsilon_{ijk} F_{k,ji} = 0$$

wynika to z antysymetrii $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ i symetrii $F_{k,ij} = F_{k,ji}$

$$(\text{rot grad } \phi)_i = (\nabla \times \nabla \phi)_i = \epsilon_{ijk} \phi_{,ij} = 0$$

analogicznie. Z kolei

$$(\text{rot rot } \vec{F})_i = (\nabla \times (\nabla \times \vec{F}))_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} F_{m,lj} = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) F_{m,lj} = F_{j,ij} - F_{i,jj}$$

Zatem

$$\text{rot rot } \vec{F} = (\nabla \times (\nabla \times \vec{F})) = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

(ewentualnie zapisując $\nabla(\nabla \cdot \vec{F}) = \text{grad div } \vec{F}$). Zwróćmy jeszcze uwagę, że warunek potencjalności pola wektorowego w istocie sprowadza się do $\text{rot } \vec{F} = 0$ (patrz także tożsamość $\text{rot grad } \phi = 0$).

Potencjał wektorowy:

Wiemy już że jeśli $\vec{F} = \nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A}$ to $\nabla \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = 0$. Czy jest zatem odwrotnie, podobnie jak przy potencjale skalarnym, jeśli $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ to istnieje \vec{A} , takie, że $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$? Jest to prawdą, ale dla obszarów typu kula, sześcian (wszelkie ciągle deformacje kuli, tzw. zbiór ściągalny, nie wystarczy jednorodny). Najprostsza konstrukcja \vec{A} to przyjęcie $A_z = 0$, a wtedy $\partial_z A_x = F_y$ całkujemy po x ,

$$A_x = \int dz F_y + C(x, y)$$

ze stałą zależną od $C(x, y)$ a $-\partial_z A_y = F_x$ po y ,

$$A_y = - \int dz F_x$$

Po podstawieniu $\partial_x A_y - \partial_y A_x = F_z$ otrzymamy równanie pochodną $\partial_y C$, którą ostatecznie odcałkowujemy, bo nie zależy od z . Niezależność od z wynika z $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ bo

$$\partial_z(F_z - \partial_x A_y + \partial_y A_x) = \partial_z F_z - \partial_x(\partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x) = \partial_z F_z + \partial_x F_x + \partial_y F_y$$

Nie jest to jedyny sposób znalezienia \vec{A} (jeszcze do tego wrócimy), które zresztą nie jest jednoznaczne, bo działa każde rozwiązanie $\vec{A} + \nabla\phi$ (czyli dodanie dowolnego gradientu) i każde dwa rozwiązania różnią się o $\nabla\phi$ dla pewnego ϕ .

Przykład:

$$\vec{F} = (-3x^2z^2 - y^2 - 2xyz, 2xz + 3yz^2 + xy, 3x^2 + yz^2 + 2xz^3 - 2xy - y - xz - z^3)$$

Sprawdzamy że $\nabla \cdot \vec{F} = 0$. Teraz

$$F_y = 2xz + 3yz^2 + xy = \partial_z A_x, \quad A_x = xz^2 + yz^3 + xyz$$

$$F_x = -3x^2z^2 - y^2 - 2xyz = -\partial_z A_y, \quad A_y = x^2z^3 + y^2z + xyz^2 + C(x, y)$$

z $\partial_x A_y - \partial_y A_x = F_z$ dostajemy

$$2xz^3 + yz^2 + \partial_x C - z^3 - xz = 3x^2 + yz^2 + 2xz^3 - 2xy - y - xz - z^3$$

czyli

$$\partial_x C = 3x^2 - 2xy - y, \quad C = x^3 - x^2y - yx$$

Twierdzenie Helmholtza:

Każde pole wektorowe \vec{F} w całym \mathbf{R}^3 , ale zanikającym szybciej niż $1/r$, można przedstawić jako sumę gradientu i rotacji

$$\vec{F} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

gdzie

$$\phi(\vec{r}) = - \int \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}') dV'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}') dV'}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

gdzie dV' jest elementem objętości dla wektorów \vec{r}' (podobnie ∇'). Najbardziej przejrzysty dowód opiera się na transformacji Fouriera, do której wrócimy.

Związek z formami różniczkowymi:

Formalnie można zapisywać

$$d\phi = \text{grad}\phi \cdot d\vec{r}$$

a także dla

$$d(\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\text{rot}\vec{F})_x dy \wedge dz + (\text{rot}\vec{F})_y dz \wedge dx + (\text{rot}\vec{F})_z dx \wedge dy$$

Tutaj $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ jest antysymetryczną 2-formą (czytamy tak jak $dx dy$ ale pilnujemy kolejności całkowania, np. $\int_0^a dx \int_0^b dy = \int dx \wedge dy = - \int dy \wedge dx = \int_b^0 dy \int_0^a dx$). Z kolei

$$d(F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy) = \text{div}\vec{F} dx \wedge dy \wedge dz$$

gdzie $dx \wedge dy \wedge dz$ jest 3-formą (także antysymetryczną). Jest to część bardzo ogólnej teorii form różniczkowych, gdzie można szeroko uogólnić program całek i pochodnych pól wektorowych.

Całki krzywoliniowe wektorowe

Do tej pory rozważyliśmy całki krzywoliniowe skalarne tj. niezorientowane

$$\int_K \phi(\vec{r}) ds = \int_K \phi(\vec{t}) |d\vec{r}/du| du$$

np. długość $\phi = 1$ lub masa (ϕ gęstość liniowa) i zorientowane

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

np. praca siły. Można także wprowadzić całki których wynik jest wektorem (parą w \mathbf{R}^2 i trójką liczb w \mathbf{R}^3)

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) ds = \int_K \vec{F}(\vec{r}) |d\vec{r}/du| du$$

oraz

$$\int_K \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r}$$

Pamiętajmy też, że $d\vec{r}/du = \vec{t} = |\dot{t}|\vec{e}_t$, wektor styczny. Obie całki są w istocie parami lub trójkami całek skalarnych, ale wyróżniamy, ponieważ struktura wektorowa, symetrie (np. niezmienniczość przy obrotach wektorów) odgrywają istotną rolę w fizyce. Zauważmy, że druga całka w 2 wymiarach (\vec{F} i \vec{r}) jest faktycznie skalarną z 3 kierunkiem tylko umownie (aby zdefiniować iloczyn wektorowy).

Całki powierzchniowe:

Opis powierzchni w \mathbf{R}^3

1. wykresy funkcji $z = f(x, y)$, także w formie równania $z - f(x, y) = 0$, np. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
2. rozwiązania równania $f(x, y, z) = 0$, np. $x^2 + y^2 + z^2 - 1$ to sfera o promieniu 1
3. powierzchnia zadana parametrycznie D obszar (jednoznaczny, tj. bez dziur) o brzegu (kawałkami) gładkim w \mathbf{R}^2 ,

$$D \ni (u, v) \rightarrow P = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbf{R}^3$$

klasy $C^2(D)$ (ciągłe 2. pochodne w D – to że aż 2. okaże się ważne)

Komentarz: Najogólniej powierzchnie definiują równania $f(x, y, z) = 0$ ale często są niewygodne w użyciu. Opis parametryczny jest wygodny, ale często trafiamy na niejednoznaczności, np. sfera $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \theta$ reprezentuje punkt $(0, 0, 1)$ przez $\theta = 0$ i dowolne ϕ . Można oczywiście wybierać sobie dość dowolnie parametryzację, ale wymaga to ostrożności.

Przypomnienie: Jakobian definiujemy dla przekształcenia $(a, b, c, \dots, d) \rightarrow (x, y, \dots, t)$ o tej samej liczbie zmiennych

$$\frac{\partial(x, y, z, \dots, t)}{\partial(a, b, c, \dots, d)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} & \dots & \frac{\partial x}{\partial d} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} & \dots & \frac{\partial y}{\partial d} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} & \dots & \frac{\partial z}{\partial d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial t}{\partial a} & \frac{\partial t}{\partial b} & \frac{\partial t}{\partial c} & \dots & \frac{\partial t}{\partial d} \end{pmatrix}$$

W dwóch wymiarach

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b}$$

Jakobiany można "skracać", tj.

$$\frac{\partial(x, y, z, \dots, t)}{\partial(a, b, c, \dots, d)} \frac{\partial(a, b, c, \dots, d)}{\partial(p, q, r, \dots, s)} = \frac{\partial(x, y, z, \dots, t)}{\partial(p, q, r, \dots, s)}$$

wynika to z macierzowego składania pochodnych dla funkcji wielu zmiennych i własności wyznaczników $\det AB = \det A \det B$. Jakobiany wykorzystuje się np. przy zamianie zmiennych w całkowaniu wielokrotnym

$$dx dy dz \dots dt = \frac{\partial(x, y, z, \dots, t)}{\partial(a, b, c, \dots, d)} da db dc \dots dd$$

Dla współrzędnych biegunowych $\partial(x, y)/\partial(r, \phi) = r$, sferycznych $\partial(x, y, z)/\partial(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta$.

Jeśli dla powierzchni zadanej parametrycznie jakobiany

$$J_z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, J_x = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, J_y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$$

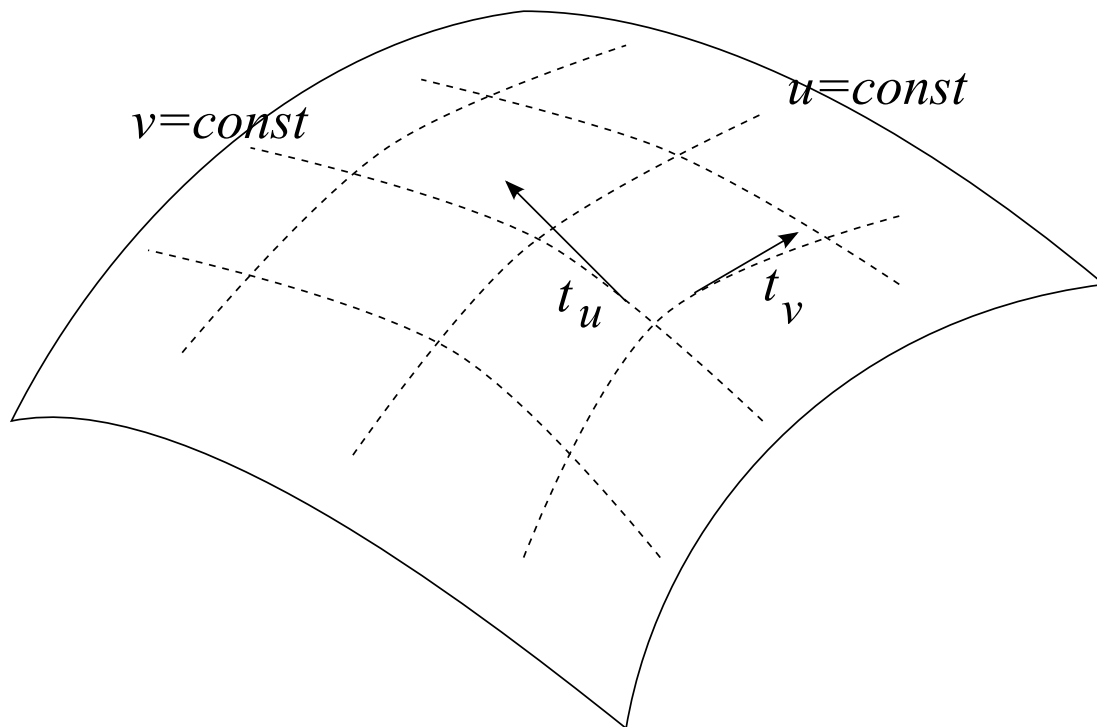
są niezerowe to $P(D)$ nazywamy *płatem regularnym* w \mathbf{R}^3 .

Przykład: Półsfery

$$x = \sin \theta \cos \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \theta$$

dla $\phi \in [0, 2\pi]$ i $\theta \in [0, \pi/2]$.

Na płacie można wykreślić linie stałego u i v (jak południki i równoleżniki), i określić wzdłuż nich wektory styczne $\vec{t}_u = \partial\vec{r}/\partial u = (\partial x/\partial u, \partial y/\partial u, \partial z/\partial u)$, $\vec{t}_v = \partial\vec{r}/\partial v$ (rysunek). Często wygodnie jest używać tych wektorów jako kierunkowych $\vec{e}_u = \vec{t}_u/|\vec{t}_u$



Element powierzchni niezorientowany (umownie du, dv dodatnie)

$$dS = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| dudv$$

i zorientowany

$$d\vec{S} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v dudv = \vec{N} dudv$$

prostopadły do powierzchni. Zauważmy też że

$$\vec{N} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v = (J_x, J_y, J_z)$$

wektor $\vec{e}_N = \vec{n} = \vec{N}/|\vec{N}|$ ma długość 1 (jednostkowy) i jest normalny (tj. prostopadły) do powierzchni.

Pole powierzchni płyta $S(D)$ (całka niezorientowana)

$$A = \int_S dS = \int_D |\vec{N}| dudv = \int_D \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2} dudv$$

Inne całki, skalarna (np. masa dla gęstości powierzchniowej ϕ)

$$\int_S \phi(\vec{r}) dS = \int_D \phi(\vec{r}) |\vec{N}| dudv$$

i wektorowa (np. wypadkowa siła)

$$\int_S \vec{F}(\vec{r}) dS = \int_D \vec{F}(\vec{r}) |\vec{N}| dudv$$

Wartości takich całek *nie zależą* od parametryzacji co wynika z własności Jakobianów, np.

$$J_x dudv = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} dudv = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(a, b)} dadb = \frac{\partial(y, z)}{\partial(a, b)} dadb = J'_x dadb$$

Przykład 16a:

D koło $x^2 + y^2 \leq R^2$. Parametryzacja półsfery

$$\vec{r} = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$$

Wektory styczne

$$\vec{t}_x = (1, 0, -x/z), \quad \vec{t}_y = (0, 1, -y/z)$$

normalny

$$\vec{N} = \vec{t}_x \times \vec{t}_y = (x/z, y/z, 1)$$

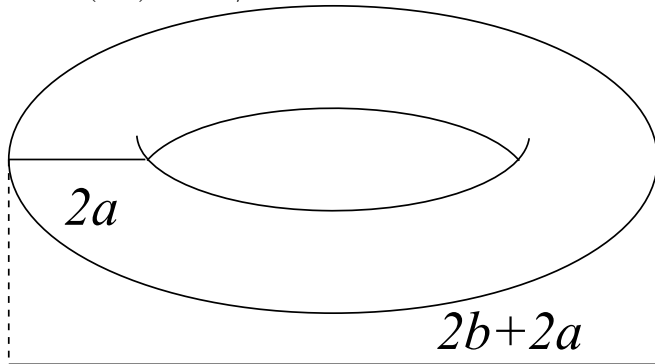
i $|\vec{N}| = R/z$. Powierzchnia

$$A = \int_D |\vec{N}| dx dy = \int_D R dx dy / z = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

podstawiając $t = y/\sqrt{R^2-x^2}$ dostajemy

$$\int_{-R}^R dx \int_{-1}^1 \frac{R dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2R^2 \arcsin t \Big|_{-1}^1 = 2\pi R^2$$

bo $\arcsin(\pm 1) = \pm \pi/2$

**Przykład 16b:**

Torus (rysunek), powstaje z koła o promieniu a i w płaszczyźnie xz i środku w $(b, 0, 0)$ obracającego się wokół osi z . W takiej naturalnej parametryzacji

$$x = (a + b \cos v) \cos u, \quad y = (a + b \cos v) \sin u, \quad z = b \sin v$$

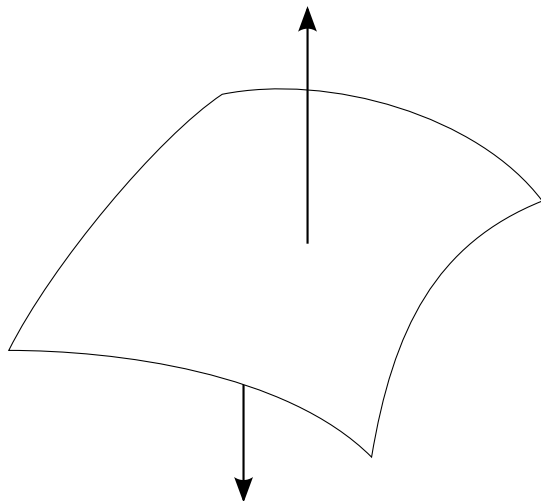
Wektory styczne

$$\vec{t}_u = (-(a + b \cos v) \sin u, (a + b \cos v) \cos u, b \cos v)$$

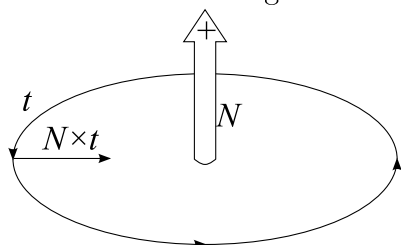
$$\vec{t}_v = (-b \sin v \cos u, -b \sin v \sin u, b \cos v)$$

normalny $|\vec{N}| = (a + b \cos v)b$ i powierzchnia

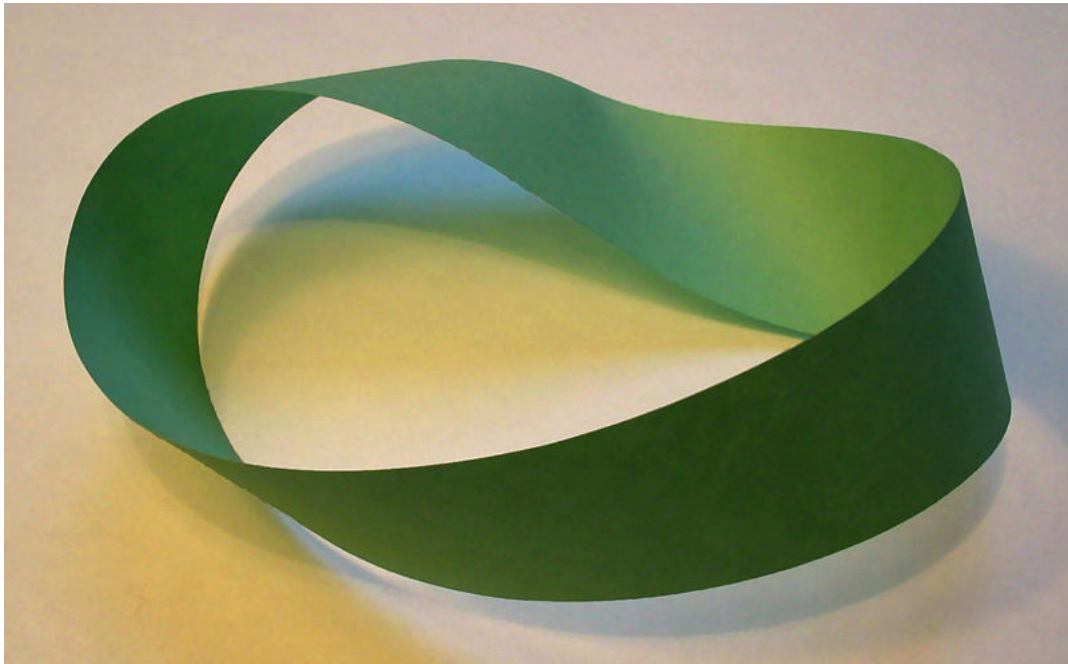
$$A = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv (a + \cos v)b = 4\pi ab$$



Powierzchnie orientowalne: Jeśli można tak wybrać wektor normalny do powierzchni \vec{N} , aby nigdzie nie był zerowy a jednocześnie był wszędzie ciągły i jednoznaczny (przesuwając po powierzchni), to powierzchnia jest orientowalna, np. płat regularny. Powierzchnię orientowalną można w sposób ciągły pomalować dwoma różnymi kolorami po obu stronach. Są zawsze możliwe dwie orientacje (rysunek). Orientacja powierzchni indukuje orientację jej brzegu na mocy *umowy*: orientacja brzegu płata jest dodatnia jeśli dla wektora stycznego do brzegu \vec{t} i wektora \vec{N} blisko brzegu $\vec{N} \times \vec{t}$ wskazuje wewnątrz powierzchni (rysunek).



Przykłady powierzchni nieorientowalnych: wstęga Möbiusa i butelka Kleina (uwaga: zamknięte, tj. bez brzegu, powierzchnie nieprzecinające się są w \mathbf{R}^3 zawsze orientowalne, bo decyduje o tym podział przestrzeni dokonany przez powierzchnię)



pl.wikipedia.org/wiki/wstęga_Möbiusa



pl.wikipedia.org/wiki/Butelka_Kleina

Całka powierzchniowa zorientowana:

Zorientowany element powierzchni $d\vec{S} = \vec{e}_N dS = \vec{N} du dv$. Strumień pola wektorowego

(ciągłego) \vec{F} przez płat P (równoważnie skalarnego $F_{\perp} = \vec{F} \cdot \vec{e}_N$)

$$\int_P \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_P \vec{F} \cdot \vec{N} dudv = \int_P (F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdz)$$

gdzie wykorzystaliśmy własność transformacji elementu powierzchni $dxdy = J_z dudv$. UWAGA: W ostatniej całce trzeba zachować zgodność granic całkowania z orientacją. Ścisłe rzecz biorąc zamiast $dxdy$ trzeba użyć 2-formy $dx \wedge dy$ która pamięta o orientacji.

Przykład 17:

Strumień pola $\vec{F} = (0, 0, z^2)$ przez górną półelipsoidę

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, z > 0$$

Mamy

$$\int_P z^2 dxdy, z = \sqrt{c^2(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)}, x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$$

oraz

$$\vec{t}_x = (1, 0, -c^2x/za^2), \vec{t}_y = (0, 1, -c^2y/zb^2), \vec{N} = (c^2x/za^2, c^2y/zb^2, 1)$$

Wprowadzając współrzędne $x = ar \cos \phi$, $y = br \sin \phi$, $r \in [0, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ dostajemy $\partial(x, y)/\partial(r, \phi) = abr$ czyli $dxdy = abrd\phi$ i ostatecznie

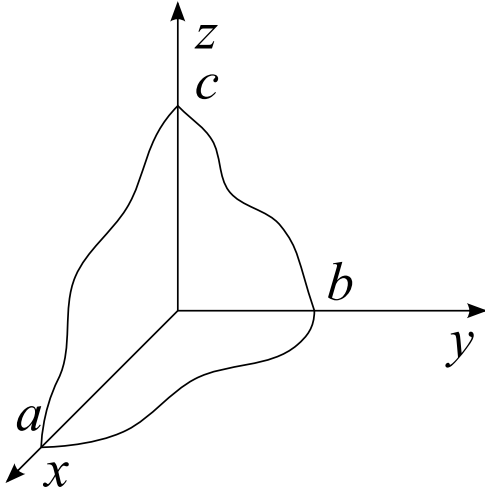
$$\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r dr abc^2(1 - r^2) = \pi abc^2/2$$

Wzór/twierdzenie 5: Gaussa

Rozpatrzmy bryłę w $W \subset \mathbf{R}^3$ ograniczoną powierzchnią (zawsze jest orientowalna) ∂W , (kawałkami) gładką i pole wektorowe \vec{F} klasy C^1 (ciągłe pochodne). Bryłę najczęściej definiuje się pewną nierównością $f(x, y, z) \leq 0$ a jej powierzchnię $f(x, y, z) = 0$, niemniej f może być bardzo skomplikowana. Wtedy

$$\int_W \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_W \operatorname{div} \vec{F} dxdydz = \oint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

przy czym orientacja całki powierzchniowej jest taka, że $d\vec{S}$ (i \vec{N}) wskazuje *na zewnątrz* bryły, a miara objętości bryły jest $dV = dxdydz$ (w tej kolejności!). Kółko na całce oznacza się powierzchnia jest zamknięta – nie ma brzegu. Zakładamy też ciągłość pochodnych \vec{F} .



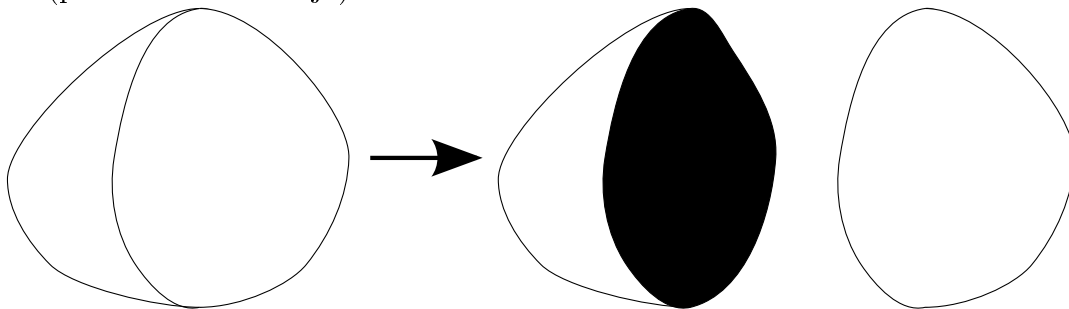
Dowód: Najpierw przeprowadzimy dowód dla obszaru jak na rysunku, tj. w "narożniku", tak że W jest ograniczone płaszczyznami xy , yz , zx , punktami $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ i właściwą powierzchnią, którą możemy określać na trzy sposoby, $z(x, y)$, $x(y, z)$, $y(z, x)$ (zakładamy, że wszystkie pochodne cząstkowe mają stałe znaki). Dzielimy całkę powierzchniową na kierunki

$$\int_{\partial W} F_x dS_x + \int_{\partial W} F_y dS_y + \int_{\partial W} F_z dS_z$$

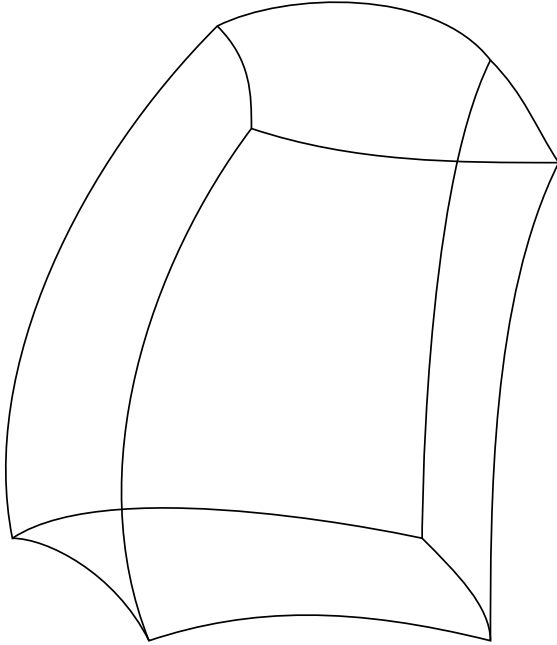
W każdym kierunku wybieramy inną parametryzację, dla dS_x , dS_y , dS_z wybieramy odpowiednio yz , zx i xy , czyli mamy

$$\begin{aligned} & \int_{\partial W} F_x dydz + \int_{\partial W} F_y dzdx + \int_{\partial W} F_z dxdy = \\ & \int_W \partial_x F_x dxdydz + \int_W F_y dydzdx + \int_W F_z dzdxdy + \\ & \int_{\partial W} F(0, y, z) dydz + \int_{\partial W} F(x, 0, z) dzdx + \int_{\partial W} F(x, y, 0) dxdy \end{aligned}$$

Korzystamy tu z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, np. $F(x, y, z) - F(0, y, z) = \int_0^x F(x', y, z) dx'$. Ostatnie całki uwzględniamy w twierdzeniu jako wkłady do powierzchni w płaszczyznach yz , zx i xy . Zauważmy, że te części wchodzi z przeciwnym znakiem, bo są "od dołu" (przeciwna orientacja).



Następnie tnijemy dowolną już bryłę na kawałki, tak aby zastosować powyższe rozumowanie dla każdego kawałka (rysunek). Sumujemy, pamiętając że wkłady od płaszczyzn cięcia się wzajemnie kasują, bo są przeciwnie zorientowane.



Inny sposób dowodzenia polega na pocięciu na kawałki typu prostopadłościan (równoległościan), ale nie muszą być idealne (mogą być powyginane, rysunek). Wtedy parametryzujemy kawałek dokładnym prostopadłościanem, tj. $\vec{r}(t, u, v)$ tak że $t \in [0, a]$, $u \in [0, b]$, $v \in [0, c]$. Zawsze jest to możliwe (dla gładkich brył). Każdą ścianę parametryzujemy przez odpowiednią parę zmiennych, np. uv tam gdzie t jest stałe. Różnicę wkładów od ścian ze stałym t (równym a lub 0) zapisujemy

$$\int [(F_x J_x + F_y J_y + F_z J_z)_{t=c} - (F_x J_x + F_y J_y + F_z J_z)_{t=0}] dudv = \int \partial_t (F_x J_x + F_y J_y + F_z J_z) dt dudv$$

Zauważmy też, że z reguły Leibniza $\partial_t F_x J_x = J_x \partial_t F_x + F_x \partial_t J_x$ a z pochodnej funkcji złożonej (wielu zmiennych)

$$\partial_t = \partial_t x \partial_x + \partial_t y \partial_y + \partial_t z \partial_z$$

Zauważmy także, że

$$\partial_t J_x = \partial_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \partial_{ut}^2 y \partial_v z + \partial_{vt}^2 z \partial_u y - \partial_{ut}^2 z \partial_v y - \partial_{vt}^2 y \partial_u z$$

Pamiętajmy, że zostały nam jeszcze wkłady od pozostałych 2 par ścian (stałe u lub v). Wkłady od nich wyglądają analogicznie, wystarczy dokonać cyklicznego przesunięcie $t \rightarrow u \rightarrow v \rightarrow t$. Łatwo zobaczyć, że wtedy

$$\partial_t \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \partial_u \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, t)} + \partial_v \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, u)} = 0$$

bo rozkładając tę sumę na 12 składników, kasują się w parach. Z kolei

$$\partial_t x \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \partial_u x \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, t)} + \partial_v x \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, u)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)}$$

ale np.

$$\partial_t y \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \partial_u y \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, t)} + \partial_v y \frac{\partial(y, z)}{\partial(t, u)} = \frac{\partial(y, y, z)}{\partial(t, u, v)} = 0$$

Zatem ostatecznie zostają tylko pochodne typu $\partial_x F_x$ i mamy

$$\oint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_W (\nabla \cdot \vec{F}) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} dt du dv = \int_W (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

bo jacobian włącza się automatycznie do miary objętości.

Najbardziej elegancki dowód wynika z twierdzenia Stokesa i opiera się na formach różniczkowych, odsyłam do wykładu Katarzyny Grabowskiej z KMMF

Przykład 18:

Dla $\vec{F} = \vec{r}/r^3$, mamy $\nabla \cdot \vec{F} = 0$, a jednak całka po sferze jednostkowej $r = 1$ daje we współrzędnych sferycznych $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \theta$,

$$\vec{t}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta),$$

$$\vec{t}_\phi = (-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$$

$$\vec{N} = (\sin^2 \theta \cos \phi, \sin^2 \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \theta)$$

wtedy

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi$$

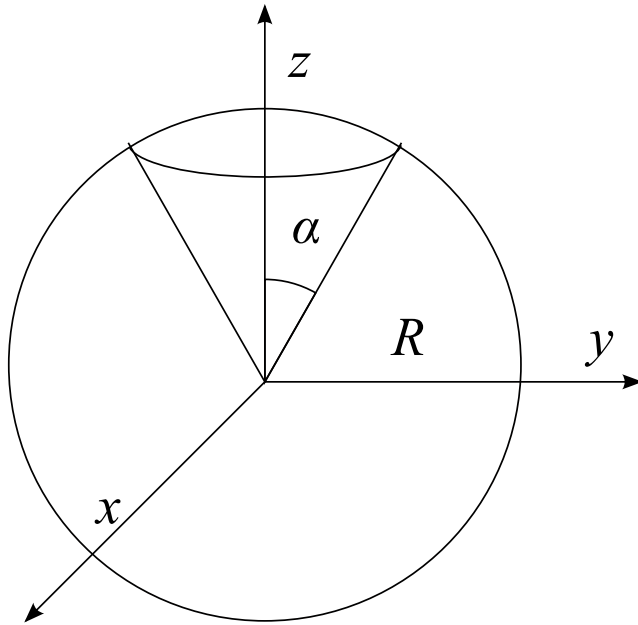
Nie wyszło więc zero, wbrew twierdzeniu Gaussa. Wynika to z faktu, że \vec{F} jest nieskończone w zerze ("źródło" pola). Tak naprawdę dywergencja jest właśnie w zerze niezerowa, a nawet nieskończona, tak że daje odpowiednią wartość w całce. Jednak do uwzględnienia tego trzeba wprowadzić pojęcie dystrybucji (lub poprawić \vec{F} aby był zawsze skończony). Do tego jeszcze wrócimy.

Jeśli bryła jest bardzo mała, to wykorzystując twierdzenie o wartości średniej można zapisać dywergencję w formie całkowej

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \oint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S} / V$$

gdzie $W = |W|$ jest objętością bryły. Oczywiście W musi mieć regularny kształt, można np. zażądać, aby mieściło się w dowolnie małej kuli bądź sześcianie.

Ważna konsekwencja twierdzenia Gaussa: Jeśli \vec{F} jest ma ciągle pochodne i całka ze strumienia znika po dowolnej powierzchni zamkniętej to $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ (i na odwrót). W przykładzie 18 oczywiście \vec{F} nie jest ciągle w zerze.



Przykład 19: Obliczanie objętości, Biorąc $\vec{F} = \vec{r}$ mamy $\text{div}\vec{r} = 3$ czyli

$$\int_{\partial W} \vec{r} \cdot d\vec{S} = 3V(W)$$

($V(W)$ objętość bryły W). Np. wycinek kuli (rysunek), $0 \leq r \leq R$, $\theta \in [0, \alpha]$ (we współrzędnych sferycznych). $d\vec{S} = \vec{e}_r R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ dla czaszy, $\vec{r} = \vec{e}_r r$ prostopadły do powierzchni bocznej ($\vec{r} \perp d\vec{S}_{\text{boczna}}$), więc wkład jest tylko od czaszy a nie powierzchni bocznej stożka. Stąd

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \sin\theta d\theta R^3 / 3 = 2\pi(1 - \cos\alpha)R^3$$

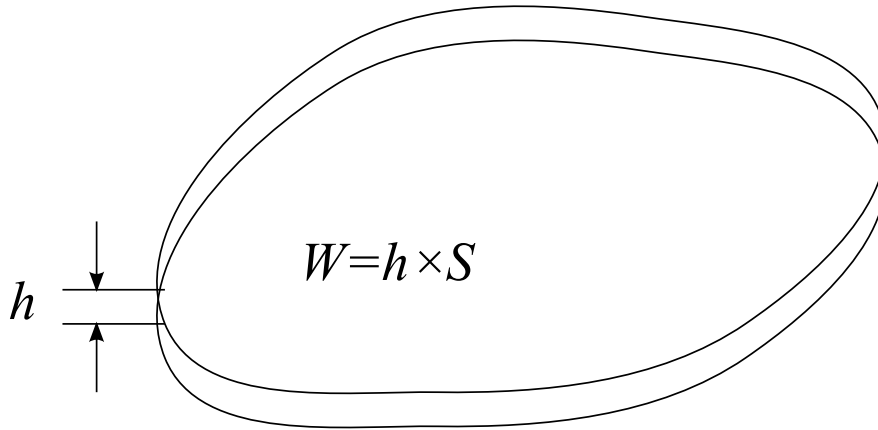
Twierdzenie Gaussa można wykorzystywać także dla nieco innych całek (pochodząc bardziej abstrakcyjnie do struktury wektorowej)

$$\int_W \nabla\phi dV = \oint_{\partial W} \phi \cdot d\vec{S}$$

$$\int_W \nabla \times \vec{A} dV = \int_W \text{rot}\vec{A} dV = \oint_{\partial W} d\vec{S} \times \vec{A}$$

wystarczy podstawić $\vec{F}_x = (\phi, 0, 0)$, $\vec{F}_y = (0, \phi, 0)$, $\vec{F}_z = (0, 0, \phi)$ (to nie są składowe \vec{F} ale trzy osobne pola, łącznie mają 9 składowych!) albo $\vec{F}_x = (0, A_y, -A_z)$, $\vec{F}_y = (-A_x, 0, A_z)$, $\vec{F}_z = (A_x, -A_y, 0)$.

Twierdzenie 6: Stokesa



W ostatnim przypadku warto przyjrzeć się interesującej granicy. Jeśli spłaszczy my W tak, aby stało się cienie, ale miało np. stałą niewielką grubość h (rysunek, grubość odmierzymy prostopadle do głównej powierzchni S , $W \sim h \times S$). Jeśli wektor normalny ma (prawie) stały kierunek do głównej powierzchni to możemy napisać

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \oint [d\vec{S}, \vec{A}, \vec{n}] / h|S| = \lim_{S \rightarrow 0} \vec{A} \cdot (\vec{n} \times d\vec{S}) / h|S|$$

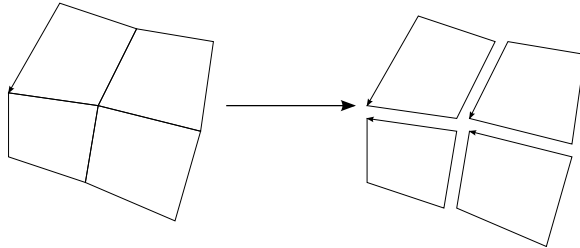
Gdzie $|S|$ jest miarą powierzchni S i wykorzystaliśmy iloczyn mieszany $[\cdot, \cdot, \cdot]$. Na głównej powierzchni \vec{N} jest równoległe do $d\vec{S}$ więc ta część prawej strony znika. Niezerowy wkład pochodzi od paska bocznego a tam z kolei $\vec{e}_N \times d\vec{S} = d\vec{r}dh$ gdzie idziemy po pasku zgodnie z wprowadzonymi konwencjami dotyczącymi orientacji. Ponieważ na małej grubości nic się zmienia, otrzymujemy (pasek redukuje się do brzegu powierzchni)

$$(\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{e}_N = \lim_{S \rightarrow 0} \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} / |S|$$

Jeśli mamy powierzchnię, którą możemy podzielić na *płaskie* kawałki, to daje nam to ogólniejszy wzór

$$\int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ponieważ linie zszycia kasują się, mając przeciwne orientacje (rysunek).



Z kolei każdą gładką powierzchnię możemy przybliżyć powierzchnią kawałkami płaską, stąd wzór rozciąga się na dowolną (kawałkami gładką) powierzchnię.

Można też uciec się wprost do parametryzacji, zakładając jednak ciągłość 2. pochodnych powierzchni po parametrach i 1. pochodnych \vec{A} . Potnijmy powierzchnię na kawałki zbliżone do prostokąta (równoległoboku), podobnie jak to zrobiliśmy w twierdzeniu Gaussa (rysunek). Jeden kawałek parametryzujemy prawdziwym prostokątem $u \in [0, a]$, $v \in [0, b]$. Zapiszmy

całkę powierzchniową wykorzystując symbol Levi-Civita i konwencję sumacyjną. Zauważmy, że z własności jacobianów

$$dS_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial r_j}{\partial u} \frac{\partial r_k}{\partial v} dudv$$

Zatem

$$\begin{aligned} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \epsilon_{ilm} (\partial_l A_m) \epsilon_{ijk} \frac{\partial r_j}{\partial u} \frac{\partial r_k}{\partial v} dudv = \\ &(\partial_j A_k - \partial_k A_j) \frac{\partial r_j}{\partial u} \frac{\partial r_k}{\partial v} dudv = (\partial_u A_k \partial_v r_k - \partial_v A_k \partial_u r_k) dudv \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z reguły łańcuchowej (pochodna funkcji złożonej) $(\partial_u r_i) \partial_i = \partial_u$ a w ostatnim członie zamieniliśmy $j \rightarrow k$.

Zauważmy, że

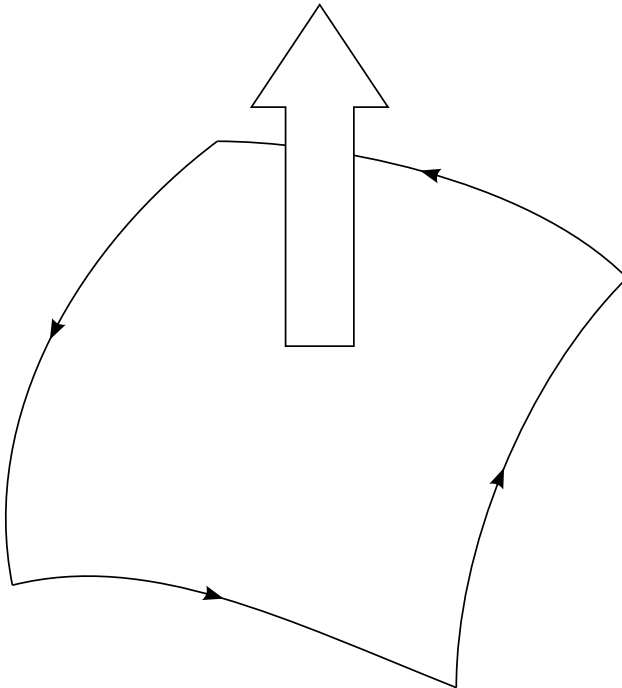
$$\partial_u A_k \partial_v r_k - \partial_v A_k \partial_u r_k = \partial_u (A_k \partial_v r_k) - \partial_v (A_k \partial_u r_k)$$

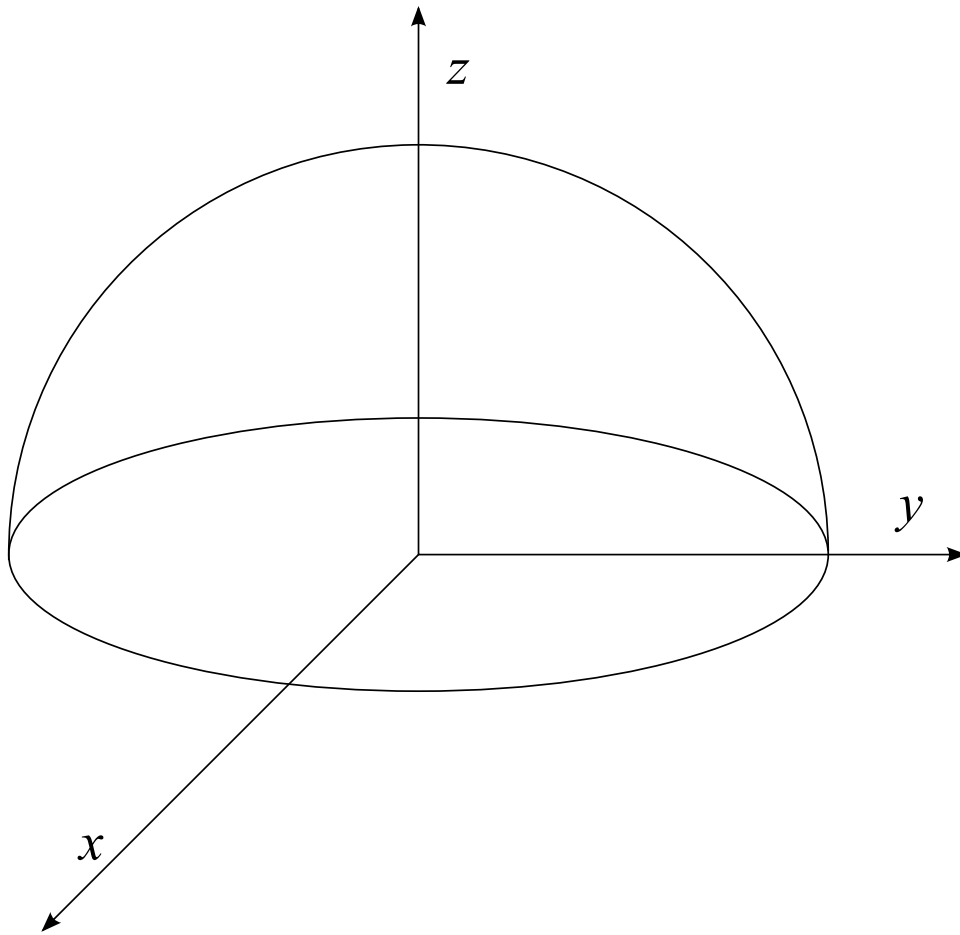
gdyż wyrazy z pochodnej iloczynu, $A_k \partial_{uv}^2 r_k$ wzajemnie się kasują. Teraz można wykonać całkę pierwszego wyrazu po u a drugiego po v , korzystając z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego. Otrzymujemy

$$\int_0^b A_k \partial_v r_k \Big|_{u=0}^{u=a} dv - \int_0^a A_k \partial_u r_k \Big|_{v=0}^{v=b} du = \int_{\partial S} A_k dr_k$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że wynik jest właśnie sumą czterech wkładów od boków prostokąta, z odpowiednimi znakami, zgodnie z naszą umową co do orientacji. To kończy dowód (całą powierzchnia to suma kawałków). UWAGA: W dowodzie wykorzystywaliśmy *drugą* pochodną cząstkową, czyli fakt że powierzchnia ma ciągle 2. pochodne w postaci parametrycznej.

Zauważmy też, że w 2 wymiarach twierdzenie Stokesa redukuje się do twierdzenia Greena.





Przykład 20:

Sprawdzenie twierdzenia Stokesa na półsferyze S (rysunek) o promieniu 2, tj. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ dla $\vec{A} = (-y, x, 1)$. Wtedy ∂S jest okręgiem w płaszczyźnie xy o promieniu 2. Mamy $\text{rot}\vec{A} = (0, 0, 2)$, $\vec{t}_x = (1, 0, -x/z)$, $\vec{t}_y = (0, 1, -y/z)$,

$$\vec{N} = (x/z, y/z, 1) = \vec{r}/z$$

Zatem

$$\int_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S 2(z/z) dx dy = 2 \int_S dx dy = 8\pi$$

Z kolei dla ∂S mamy $\vec{r} = 2(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ i $d\vec{r} = 2(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ a więc

$$\int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \phi + 4 \cos^2 \phi) = 8\pi$$

Równania Maxwella:

Twierdzenia Gaussa i Stokesa mają ogromne znaczenie w elektrodynamice, dla równań pola elektrycznego i magnetycznego.

Prawo Gaussa $\nabla \cdot \vec{E} = \rho(\vec{r})/\epsilon_0$ (zakładamy próżnię) albo równoważnie

$$\oint_{\partial W} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_W \rho(\vec{r}) dV / \epsilon_0 = Q_W / \epsilon_0$$

gdzie Q_W jest całkowitym ładunkiem elektrycznym w W , ρ jego gęstością, \vec{E} pole elektryczne, ϵ_0 przenikalność (elektryczna) próżni. Dla ładunku punktowego Q w zerze, pole \vec{E} musi być sferycznie symetryczne tj. $\vec{E} = f(r)\vec{r}$. Z prawa Gaussa wynika, że całka z \vec{E} po ∂W jako sferze o promieniu r i środku w zerze

$$\oint_{\partial W} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi f(r)r^3$$

czyli $\vec{E} = Q\vec{r}/4\pi\epsilon_0 r^3$ (prawo Coulomba).

Uwaga: W 2 wymiarach sferę zamieniamy na okrąg i dostajemy $\vec{E} = Q\vec{r}/2\pi\epsilon_0 r^2$.

Prawo Ampere'a

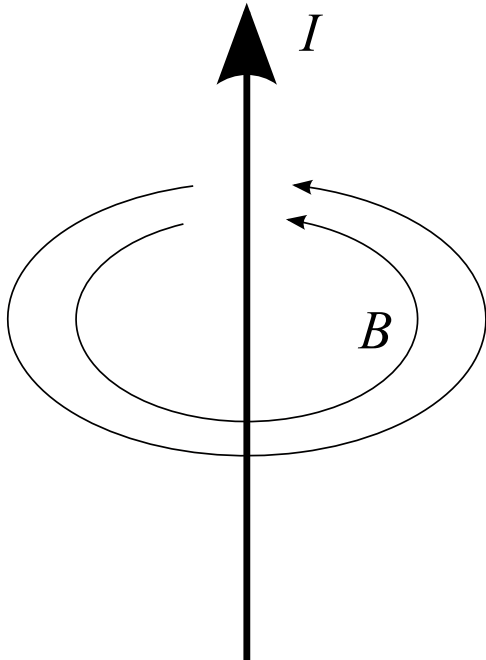
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

lub

$$\int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_S$$

gdzie I_S jest całkowitym prądem elektrycznym płynącym przez S , \vec{j} jego gęstością, \vec{B} polem magnetycznym, a μ_0 przenikalnością (magnetyczną).

Dla przewodnika prostoliniowego na osi z (rysunek) mamy z symetrii osiowej $\vec{B} = f(\varrho)\vec{e}_\phi$, a więc $2\pi\varrho f = \mu_0 I$ czyli $\vec{B} = \mu_0 I \vec{e}_\phi / 2\pi\varrho$



Gradient, dywergencja i rotacja z użyciem tensora metrycznego
Uogólniona konwencja sumacyjna (Einsteina), rozróżnienie indeksów górnych i dolnych

$$A^i B_i \equiv \sum_i A^i B_i.$$

Standardowy wektor ma indeksy górne $\vec{A} = (A^1, A^2, \dots)$. Delta Kroneckera musi jedynie uwzględ-

nić różne poziomy wskaźników.

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ 0 & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Własności $\delta_j^i A^j = A^i$, $\delta_j^i A_i = A_j$.

Punkty w przestrzeni są opisywane przez zmienne r_i lub u_i . Pierwsze mogą być kartezjańskie, a drugie sferyczne lub inne krzywoliniowe. Można też traktować oba zestawy zmiennych jako krzywoliniowe. Tak robi się zwłaszcza w ogólnej teorii względności. Pochodne:

$$\frac{\partial}{\partial r^i} \equiv \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial u^i} \equiv \bar{\partial}_i.$$

Uwaga, pochodne mają standardowo indeks dolny, np. $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots)$. Własności: $\partial_i r^j = \delta_i^j$.

Tensor metryczny $G = g_{ij} dr^i \otimes dr^j \equiv \bar{g}_{ij} du^i \otimes du^j$.

Symetryczny $g_{ij} = g_{ji}$,

$$\bar{g}_{ij} = t^l{}_i g_{lk} t^k{}_j,$$

gdzie macierz wektorów kierunkowych

$$t^i{}_j = \frac{\partial r^i}{\partial u^j}, \quad (t^{-1})^i{}_j = \frac{\partial u^i}{\partial r^j},$$

ponieważ $dr^i = t^i{}_j du^j$ (t^{-1} jest macierzą odwrotną do t). Uwaga: przesunięcie wskaźników jest celowe, aby tu górny był przed dolnym. Wtedy także z symetrii g wynika symetria \bar{g} .

Skrócony zapis $\bar{g}_{ij} = (t^T g t)_{ij}$ (T – transpozycja). Tensor odwrotny $G^{-1} = g^{ij} \partial_j \otimes \partial_i \equiv \bar{g}^{ij} \bar{\partial}_j \otimes \bar{\partial}_i$.

Z definicji

$$g^{ij} g_{jk} = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i \text{ (macierze wzajemnie odwrotne) }.$$

Transformacja

$$\bar{g}^{ij} = (t^{-1})^i{}_k g^{kl} (t^{-1})^j{}_l.$$

Stąd wynika, że \bar{g} zachowuje się tak samo jak g . Opuszczanie (podnoszenie) wskaźnika oraz iloczyn skalarny

$$A_i = g_{ij} A^j, \quad A^i = g^{ij} A_j, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = A^i B_i = A_i B^i = A^i g_{ij} B^j = A_i g^{ij} B_j.$$

Transformacja pomiędzy układami współrzędnych

$$A^i = t^i{}_j \bar{A}^j, \quad \bar{A}_i = t^j{}_i A_j \text{ (ważna kolejność wskaźników!)}$$

Jest to zgodne z różniczkową transformacją dla dr^i oraz ∂_i . Stąd wynika także $A^i B_i = \bar{A}^i \bar{B}_i$.

Gradient, dywergencję i rotację chcemy tak zdefiniować, aby sam wzór był niezależny od współrzędnych. Wtedy możemy swobodnie zamieniać zmienne $r \leftrightarrow u$. Oczywiście zmianie ulegnie tensor metryczny, ale zwykle łatwo to obliczyć.

Gradient: operacja różniczkowa $f \rightarrow A^i$. Nie może to być $\partial_i f$ ponieważ wskaźnik ma być u góry. Jedyny wybór

$$(\nabla f)^i := \partial^i f = g^{ij} \partial_j f.$$

Wzór ten jest niezależny od układu współrzędnych, co wynika z wyżej podanych wzorów.

Dywergencja: operacja różniczkowa $A^i \rightarrow f$. Właściwie wydawałoby się $\partial_i A^i$ ale A transformuje się pod pochodną co komplikuje wzór:

$$\nabla \cdot A := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} A^i).$$

Tutaj występuje wyznacznik $\det g$ macierzy g_{ij} (a nie g^{ij} !). Jeśli jest ujemny można dopisać minus. Wykażemy, że podana forma dywergencji nie zależy od współrzędnych. W tym celu potrzebujemy kilka faktów:

$$\bar{\partial}_i t_k^j = \bar{\partial}_{ik}^2 r^j = \bar{\partial}_k t_i^j$$

co wynika z równości 2. pochodnych krzyżowych $\partial_{ik}^2 = \partial_{ki}^2$ i analogicznie $\partial_i (t^{-1})_k^j = \partial_k (t^{-1})_i^j$. Ponadto różniczkowanie wyznacznika ułatwia wzór Jacobiego

$$\partial \det t = \det t \text{Tr} t^{-1} \partial t = \det t (t^{-1})_j^i \partial t_i^j.$$

(śląd macierzy $\text{Tr} A = A^i_i$). Wynika on wprost ze definicji wyznacznika przez rozwinięcie Laplace'a i wzoru na macierz odwrotną z użyciem minorów. Zauważmy, że skoro $\bar{g} = t^T g t$ to $\det \bar{g} = \det g (\det t)^2$. Dywergencja w nowych zmiennych ma więc postać

$$\begin{aligned} & \frac{\det t}{\sqrt{\bar{g}}} (t^{-1})_i^j \bar{\partial}_j (\sqrt{\det \bar{g}} t_k^i \bar{A}^k / \det t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} (t^{-1})_i^j t_k^i \bar{\partial}_j (\sqrt{\det \bar{g}} \bar{A}^k) + \det t \bar{A}^k (t^{-1})_i^j \bar{\partial}_j (t_k^i / \det t). \end{aligned}$$

Pierwszy człon jest szukanym wynikiem, bo $(t^{-1})_i^j t_k^i = \delta_k^j$. Pokażemy, że drugi się zeruje. Rozpiszemy ten drugi człon

$$\begin{aligned} & \bar{A}^k (t^{-1})_i^j \bar{\partial}_j t_k^i - \frac{\bar{A}^k}{\det t} (t^{-1})_i^j t_k^i \bar{\partial}_j \det t \\ &= \bar{A}^k (t^{-1})_i^j \bar{\partial}_k t_j^i - \frac{\bar{A}^k}{\det t} \delta_k^j \bar{\partial}_j \det t \\ &= \bar{A}^k (t^{-1})_i^j \bar{\partial}_k t_j^i - \frac{\bar{A}^k}{\det t} \bar{\partial}_k \det t. \end{aligned}$$

W środkowej części skorzystaliśmy z wyprowadzonej wcześniej tożsamości na bazie pochodnych krzyżowych. Ostatnie wyrażenia kasują się na mocy wzoru Jacobiego, co kończy dowód.

Alternatywny dowód polega na zapisaniu całki objętościowej. Forma objętości $\bigwedge dr = dr^1 \wedge dr^2 \wedge \dots \wedge dr^n$ nie jest niezmiennicza, gdyż $\bigwedge dr = \det t \bigwedge du$. Stąd niezmienniczą formą jest $\sqrt{\det g} \bigwedge dr$. Całka niezmiennicza z kombinacji gradientu i pola wektorowego ma więc postać

$$\int \bigwedge dr \sqrt{\det g} A^i \partial_i f = - \int \bigwedge dr f \partial_i (\sqrt{\det g} A^i),$$

gdzie wykorzystaliśmy całkowanie przez części zakładając znikanie funkcji podcałkowych na granicy obszaru. To uzasadnia wzór na dywergencję (musimy jeszcze "odzyskać" $\sqrt{\det g}$).

Laplasjan: Złożenie dywergencji i gradientu

$$\Delta f := \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i (\sqrt{\det g} g^{ij} \partial_j f).$$

Podobnie objętościowo

$$\int \bigwedge dr \sqrt{\det g} \partial_i f \partial^i h = - \int \bigwedge dr h \partial^i (\sqrt{\det g} \partial_i f).$$

Rotacja: Ograniczamy się teraz do **trzech wymiarów**. Wykorzystujemy symbol Levi-Civita ϵ (standardowo ma wskaźniki górne, a opuszczane za pomocą g) oraz $\varepsilon = \epsilon/\sqrt{g}$. Właśność niezmienniczość

$$(t^{-1})^n_i (t^{-1})^m_k (t^{-1})^p_j \varepsilon^{ijk} = \varepsilon^{npm} \det(t^{-1}) = \bar{\varepsilon}^{npm}$$

Wynika to wprost z permutacyjnej definicji wyznacznika i faktu, że ε^{ijk} jest w istocie znakiem permutacji $123 \rightarrow ijk$, a przypadku gdy 2 wskaźniki spośród npm się powtarzają można użyć argumentu antysymetrii ϵ . Rotacja to operacja różniczkowa $A^i \rightarrow B^i$. Nie może to być $\partial_j A^i$ ani $\partial^j A^i$, bo chcemy wrócić do jednowskaźnikowego pola, nie korzystając z pola "pomocniczego". Z pomocą ε moglibyśmy zapisać $\varepsilon^{ijk} \partial_j (g_{kl} A^l)$, ale znów transformujemy pod pochodną:

$$B^i = (\nabla \times A)^i := \varepsilon^{ijk} \partial_j (g_{kl} A^l).$$

Wykażemy, że wynik jednak nie zależy od współrzędnych. Uwaga: tym razem zastrzegamy **zgodność orientacji** czyli $\det t > 0$. Tak jak dla dywergencji mamy

$$\bar{B}^n = \det t (t^{-1})^n_i \bar{\varepsilon}^{ijk} \partial_j ((t^{-1})^m_k \bar{g}_{ml} \bar{A}^l).$$

Przy różniczkowaniu pojawia się wyraz proporcjonalny do

$$\bar{\varepsilon}^{ijk} \partial_j (t^{-1})^m_k = \bar{\varepsilon}^{ijk} \partial_k (t^{-1})^m_j = \bar{\varepsilon}^{ikj} \partial_j (t^{-1})^m_k.$$

Jednak z antysymetrii ε skrajne wyrażenia miałyby przeciwne znaki, a więc muszą się zerować. Możemy zatem wyciągnąć $(t^{-1})^m_k$ przed pochodną

$$\begin{aligned} \bar{B}^n &= \det t (t^{-1})^n_i (t^{-1})^m_k \bar{\varepsilon}^{ijk} \partial_j (\bar{g}_{ml} \bar{A}^l) \\ &= \det t (t^{-1})^n_i (t^{-1})^m_k (t^{-1})^p_j \bar{\varepsilon}^{ijk} \bar{\partial}_p (\bar{g}_{ml} \bar{A}^l), \end{aligned}$$

co daje żądany wynik na mocy niezmienniczości ε .

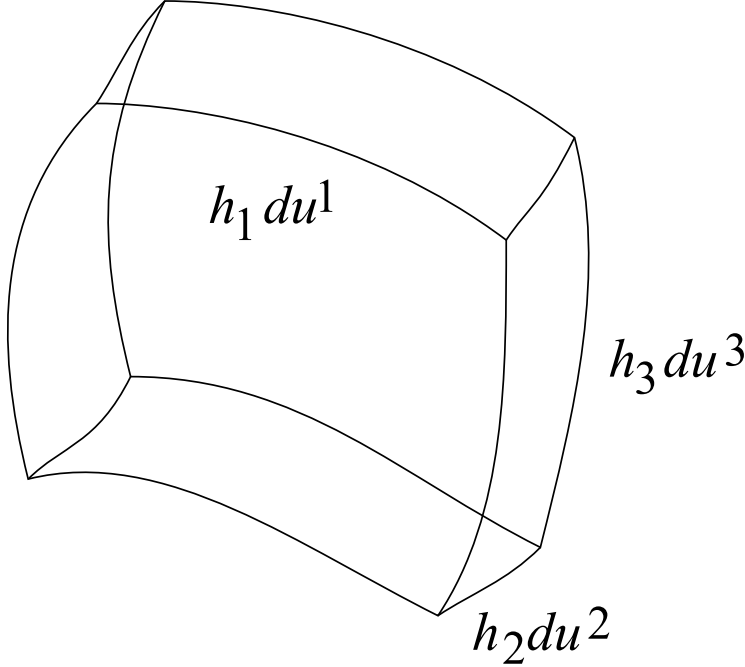
Podobnie jak dywergencję, rotację można także uzasadnić wzorem całkowym. Całka niezmiennicza ma postać

$$\int \bigwedge dx \sqrt{\det g} \varepsilon^{ijk} C_i \partial_j A_k,$$

jednak niezmienniczość wymaga powołania się również na antysymetryczność.

Przykłady tensorów metrycznych:

- skalarny (kartezjański) $g_{ij} = 1$ dla $i = j$, pozostałe elementy 0
- relatywistyczny (Minkowskiego, płaski) $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, pozostałe 0
- walcowy $x = \varrho \cos \phi, y = \varrho \sin \phi, g_{\varrho\varrho} = 1, g_{\phi\phi} = \varrho^2 (g_{zz} = 1)$, pozostałe 0
- sferyczny $\varrho = r \sin \theta (x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi), z = r \cos \theta, g_{rr} = 1, g_{\theta\theta} = r^2, g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$, pozostałe 0



Jeśli tensor jest diagonalny, mówimy że współrzędne są ortogonalne i definiujemy **współczynniki metryczne** $h_i = \sqrt{g_{ii}}$. Mają one sens skalowania długości wzdłuż współrzędnych krzywoliniowych o h_i , np. element długości (rysunek)

$$(ds)^2 = |d\vec{r}|^2 = \sum_i g_{ii}(du^i)^2 = \sum_i h_i^2(du^i)^2$$

Wtedy (zwykle sumowanie zamiast konwencji Einsteina!)

$$\nabla f = \sum_i h_i^{-2} \partial_i f, \quad \nabla \cdot A = J^{-1} \partial_i (JA^i),$$

$$\Delta f = \sum_i J^{-1} \partial_i (J h_i^{-2} \partial_i f), \quad (\nabla \times A)^i = \sum_{jk} J^{-1} \epsilon^{ijk} \partial_j (h_k^2 A^k),$$

gdzie $J = \sqrt{\det g} = \prod_i h_i$ (jakobian) a pochodne $\partial_i = \partial/\partial u^i$. We współrzędnych kartezjańskich $J = 1$, walcowych $J = \varrho$, sferycznych $J = r^2 \sin \theta$ (relatywistycznie definiuje się $J = \sqrt{-\det g}$ bo g ma ujemny wyznacznik, i wtedy $J = 1$, w płaskiej czasoprzestrzeni). Uwaga: W fizyce częściej piszemy pola w bazie ortonormalnej $\vec{A} = \sum_j \vec{e}_j a^j$ gdzie $\vec{e}_j = \vec{t}_j/|\vec{t}_j|$ a $(\vec{t}_j)^i = t_j^i$, czyli $a^i = h_i A^i$. Wtedy

$$\nabla f = \sum_i h_i^{-1} \partial_i f, \quad \nabla \cdot a = J^{-1} \partial_i (J a^i / h_i),$$

$$(\nabla \times a)^i = J^{-1} h_i \sum_{jk} \epsilon^{ijk} \partial_j (h_k a^k).$$

Laplasjan we współrzędnych walcowych i sferycznych

$$\varrho^{-1} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho) + \varrho^{-2} \partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{zz}^2$$

$$r^{-2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2$$

Przykład:

Stałe pole wektorowe $\vec{F} = (0, 0, F)$ we współrzędnych sferycznych rozkłada się

$$\vec{F} = F^r \partial_r \vec{r} + F^\theta \partial_\theta \vec{r} + F^\phi \partial_\phi \vec{r}$$

skąd dostajemy $F^\phi = 0$, $F^r = F \cos \theta$, $F^\theta = -F \sin \theta / r$. Ma to znaczenie np. w konstrukcji \vec{A} takiego, że $\nabla \times \vec{A} = \vec{F}$ jeśli $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ we współrzędnych sferycznych. Wybierzmy bowiem tak oś z aby pokrywała się z $\vec{F}(0)$ (dla uproszczenia, bo nie jest to konieczne), i załóżmy, że $A_r = 0$. Wtedy rotacja daje równania

$$r^2 \sin \theta F^\phi = \partial_r (r^2 A^\theta), \quad r^2 \sin \theta F^\theta = -\partial_r (r^2 \sin^2 \theta A^\phi)$$

oraz

$$r^2 \sin \theta F^r = \partial_\theta (r^2 \sin^2 \theta A^\phi) - \partial_\phi (r^2 A^\theta)$$

Dwa pierwsze równania całkujemy od zera po r i dla małych r , $A^\theta \sim r$ a A^ϕ dąży do stałej. Zatem $|\vec{A}| \sim r$ a więc będzie ciągle w zerze. Pomimo, że równania dopuszczają stałe $C(\theta, \phi)$ to dawałyby one dodatek $1/r^2$ a wtedy stracilibyśmy ciągłość, więc ich nie może być, co zresztą można pokazać, biorąc trzecie równanie bez A^θ a ze stałym A^ϕ i dodając C/r^2 bądź $D/r^2 \sin^2 \theta$, bo wtedy

$$r^2 \sin \theta \cos \theta F = \partial_\theta D + 2 \sin \theta \cos \theta r^2 - \partial_\phi C$$

co daje $\partial_\theta D = \partial_\phi C$, którego naturalnym rozwiązaniem jest $C = D = 0$. W ten sposób znajdujemy potencjał wektorowy na dowolnym zbiorze gwiazdzistym (tj. całkując po promieniu). Jeśli będziemy „wyginać śmiało” i ortogonalnie współrzędne sferyczne, konstrukcja przechodzi na dowolny zbiór ściągalny.

Funkcje zespolone

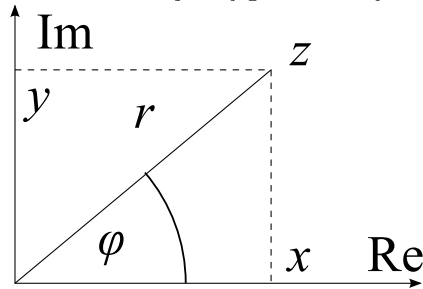
Przypomnienie:

Liczby zespolone \mathbf{C} to uporządkowane pary liczb rzeczywistych $z = (x, y) \equiv x + iy$, które można dodawać $(x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b)$ i mnożyć $(x + iy)(a + ib) = (xa - yb) + i(xb + ya)$, łącznie, przemiennie i rozdzielnie (i wyznaczać odwrotności względem dodawania i mnożenia), tak że tworzą matematycznie ciało (zero $(0, 0) = 0 + i0 = 0$ i jedynka $(1, 0) = 1 + i0 = 1$). W praktyce wystarczy pamiętać, że $i^2 = -1$. Podzbiór właściwych liczb rzeczywistych to liczby $(x, 0) = x + i0 = x$ (w oznaczeniu maksymalnie upraszczamy, jeśli jest to jednoznaczne) a urojonych $(0, y) = 0 + iy = iy$. Część rzeczywista $x = \operatorname{Re} z$ i urojona (ale także reprezentowana przez liczbę rzeczywistą!) $y = \operatorname{Im} z$. Sprzężenie (kreska lub gwiazdka!) $\bar{z} = z^* = x - iy$, moduł $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$ jednocześnie odległość od zera, rzeczywista nieujemna. Mamy własności $(z^*)^* = z$, $|z^*| = |z|$ i $|zw| = |z||w|$, $|z/w| = |z|/|w|$, $||z|| = |z|$, $|1| = 1$, $|0| = 0$, a także $(z + w)^* = z^* + w^*$, $(zw)^* = z^*w^*$, $2\operatorname{Re} z = z + z^*$, $2i\operatorname{Im} z = z - z^*$. Nierówność trójkąta $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Liczby zespolone bardzo często przedstawia się na płaszczyźnie zespolonej $z = re^{i\phi}$, gdzie $r = |z|$, $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ (rysunek), argument $\phi = \arg z$. Uwaga: Albo zapis $e^{i\phi}$ albo funkcje \sin i \cos i ich własności trzeba uprzednio zdefiniować. Ściśle zrobimy to później, już korzystając z funkcji zespolonych. Wtedy także $((r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\phi_1 + \phi_2)})$ oraz $z^* = r e^{-i\phi}$, co wynika z własności trygonometrycznych

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

Argument ϕ nie jest określony jednoznacznie, $\phi + 2\pi$ jest równoważny. Uwaga: do ścisłych własności funkcji trygonometrycznych i definicji liczby π wrócimy później.



Ponieważ liczba zespolona jest w istocie parą liczb rzeczywistych, obrazujemy ją na płaszczyźnie, przenosząc wszystkie pojęcia znane dla płaszczyzny, takie jak krzywa (także zorientowane), obszar, brzeg obszaru, spójność, jednospójność (brak dziur) przenoszą się na \mathbf{C} , np. krzywa $(x(t), y(t)) \equiv x(t) + iy(t)$ dla rzeczywistego t ,

Motywacja funkcji zespolonych:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

jest określona dla dowolnego x rzeczywistego, ale rozwijając wokół $x = 0$, np. korzystając z szeregu geometrycznego

$$f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

Szereg jest zbieżny ma gdy $|a_{n+1}/a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q < 1$, czyli $q = x^2 < 1$ (a nie jest zbieżny dla $x^2 \geq 1$). Dlaczego? Gdyby zastąpić $x \rightarrow z$, to $(1 + z^2)^{-1}$ nie istnieje dla $z = \pm i$ a więc w odległości 1 od zera.

Okazuje się, że analiza funkcji zmiennej zespolonej jest jedną z najbogatszych dziedzin matematyki stosowanej. Mają szczególne własności

- Jeśli $f(z)$ ma w pewnym obszarze pierwszą pochodną to ma ich nieskończenie wiele
- Jeśli $f(z)$ ma pochodną na krzywej zamkniętej (pętli) to wartości $f(z)$ wewnątrz pętli wyrażają się przez $f(z)$ na tej krzywej.

Krzywa/kontur może się przecinać. Jeśli się nie przecina to jest *kontur prosty* lub *krzywa Jordana*. Kontur jest gładki jeśli $x(t)$ oraz $y(t)$ (czyli $z(t)$) są mają ciągle pochodne.

Definicja Funkcja zmiennej zespolonej, $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, ewentualnie $f : D \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$. Uwaga: czasem dopuszczamy kilka a nawet wiele wartości $f(z)$, tzw. funkcja wieloznaczna (n -znaczna dla n wartości), w odróżnieniu od tradycyjnego jednowartościowego rozumienia funkcji – jednoznacznych. Zwyczajowo zapisujemy $f = u + iv$ gdzie $u(z) = u(x, y)$ i $v(z)$ są rzeczywiste, czyli $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Często dla funkcji wieloznacznych zmieniamy topologię płaszczyzny zespolonej wprowadzając trzeci wymiar oprócz $z = x + iy$, który rozróżnia wartości. Wtedy mówimy o *powierzchni Riemanna*, a jej gładkie kawałki to *pląty Riemanna*

Przykłady:

z^2 jest jednoznaczna, ale \sqrt{z} jest dwuznaczna, np. 2 i -2 dla $z = 4$ a ogólniej

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = r^{1/2}e^{i\phi/2} \text{ albo } -r^{1/2}e^{i\phi/2}$$

Definicja:

$f(z)$ jest odwracalna w sposób jednoznaczny tak jak każda funkcja czyli każda wartość jest przypisana tylko jednemu z . Wtedy, jeśli $w = f(z)$ to $z = f^{-1}(w)$. Analogicznie definiujemy odwracalność n - i wieloznaczną.

Przykład:

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

Spróbujmy odwrócić tę funkcję. Niech $f(z) = u + iv$. Zatem $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Jeśli $v \neq 0$ to $x \neq 0$ i $y = v/2x$ i $u = x^2 - v^2/4x^2$ co daje równanie kwadratowe

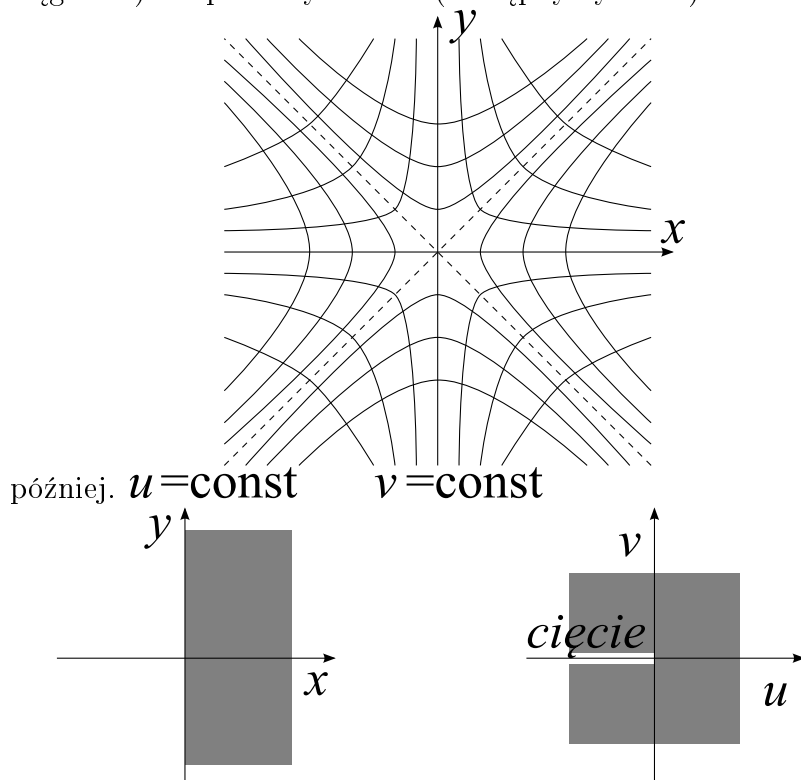
$$x^4 - ux^2 - v^2/4$$

na x^2 , czyli $2x^2 = u \pm \sqrt{u^2 + v^2}$. Znak musi być dodatni bo lewa strona jest dodatnia czyli

$$x = \pm \sqrt{u/2 + \sqrt{u^2 + v^2}/2}$$

I mamy dwa rozwiązania. Jeśli $v = 0$ to dla $u \geq 0$, $x = \pm\sqrt{u}$, $y = 0$ a dla $u < 0$ mamy $x = 0$, $y = \pm\sqrt{-u}$. Linie stałego u i v pokazane są na rysunku. Istnienie dwóch rozwiązań (pierwiastków) oznacza że f odwraca się do funkcji dwuwartościowej. Chcąc wrócić do tradycyjnej funkcji jednoznacznej musimy nałożyć ograniczenie np. $\operatorname{Re} z = x \geq 0$ co skutkuje cięciem (tam brak

ciągłości!) w płaszczyźnie uv (następny rysunek). Podobnie będzie przy logarytmie, o tym



Możemy jeszcze inaczej spojrzeć na funkcję \sqrt{z} . Jeśli $z = re^{i\phi}$, $r = |z|$, $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ (ψ rzeczywiste) to $\sqrt{z} = z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\phi/2}$. Można jednak wybrać $\phi + 2\pi$ (bo \cos i \sin taki mają okres, wtedy $z^{1/2} = |z| e^{i\phi/2 + i\pi} = -|z| e^{i\phi/2}$). Są więc możliwe dwie wartości o przeciwnych znakach. Np. $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$ lub $(i-1)/\sqrt{2}$. Aby funkcję ujednoznaczyć trzeba ograniczyć zakres ϕ . Dla $\phi \in [-\pi, \pi]$ cięcie jest jak na rysunku (ujemna półoś rzeczywista), a dla $\phi \in [0, 2\pi[$ dodatnia półoś rzeczywista.

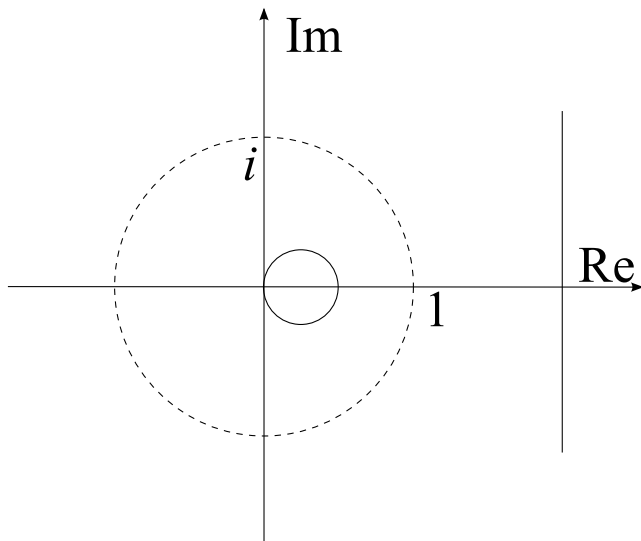
Rozważając funkcje zespolone, przydatny często jest obraz krzywej tj. jeśli znamy $K = \{z(t) : t \in [a, b]\}$ to czym jest $K' = \{f(z(t)) : t \in [a, b]\}$

Homografia, funkcja homograficzna, funkcja Möbiusa i sfera Riemanna:

Przyjrzyjmy się funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Jest sama dla siebie funkcja odwrotną, często nazywa się ją *inwersją*. Zobaczymy, że taka funkcja przekształca okręgi i proste na okręgi i proste (ale może np. okrąg przekształcić na prostą i na odwrót). Przykład na rysunku: okrąg jednostkowy (kreska przerywana) $|z| = 1$ o środku w zerze i promieniu 1 nie zmienia się, natomiast prosta $\text{Re } z = x = C$ (stała) przechodzi na okrąg o środku w $(1/2C, 0)$ i promieniu $1/2C$ (np. C daje środek w $(1/4, 0)$ i promień $1/4$).



Równanie prostej i okręgu na płaszczyźnie można łącznie napisać

$$\alpha(x^2 + y^2) + 2\beta x + 2\gamma y + \delta = 0$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i oczywiście x, y są rzeczywiste i nakładamy warunek $\beta^2 + \gamma^2 \geq \delta\alpha$. Prosta mamy dla $\alpha = 0$ a okrąg dla $\alpha \neq 0$ z przekształcenia

$$\alpha[(x + \beta/\alpha)^2 + (y + \gamma/\alpha)^2] + \delta - (\beta^2 + \gamma^2)/\alpha = 0$$

Środek $(-\beta/\alpha, -\gamma/\alpha)$, promień $r = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)/\alpha^2 - \delta/\alpha}$. Można to równoważnie zapisać już w liczbach zespolonych

$$\alpha|z|^2 + zq^* + z^*q + \delta = \alpha(|z - z_0|^2 - r^2) = 0$$

dla $q = \beta + i\gamma$ a $z_0 = -q/\alpha$.

Dla naszej funkcji $w = f = u + iv$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

i na odwrót

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

Wstawiając do równania $z = 1/w$ (albo równoważnie wyrażając x i y przez u i v mamy

$$\alpha/|w|^2 + q^*/w + q/w^* + \delta = 0$$

Mnożąc równanie stronami przez $|w|^2$ dostajemy

$$\alpha + qw + q^*w^* + \delta|w|^2 = 0$$

Jest to znów równanie okręgu/prostej, ale z zamianą $\alpha \leftrightarrow \delta$ i $q \rightarrow q^*$.

Zauważmy także że $f(z) = e^{i\phi}z$ obraca całą płaszczyznę, $f(z) = qz$ dla rzeczywistego q ją skaluje (jednokładność) a $f(z) = z + z_0$ przesuwa o z_0 . Wszystkie te funkcje oczywiście

pozostawiają kształt okręgów i prostych (nie zamieniają nawet okręgów na proste). Można to potwierdzić wstawiając $z = aw + b$ ($w = z/a - b/a$) dla liczb zespolonych $a \neq 0, b$ do równania okręgu/prostej

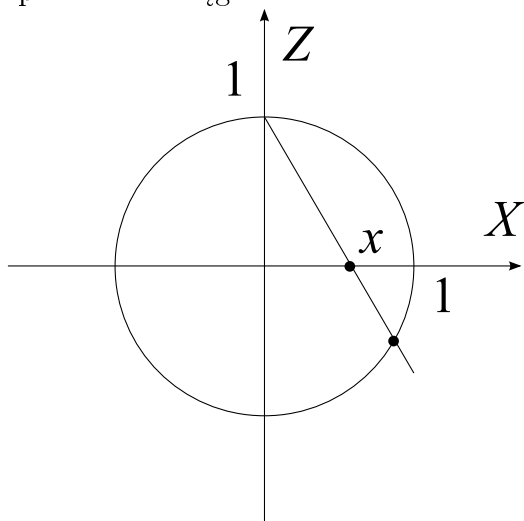
$$\alpha|az + b|^2 + q^*(az + b) + q(a^*z^* + b^*) + \delta = \\ \alpha|a|^2|w|^2 + z(aq^* + a\alpha b^*) + z^*(a^*q + a^*\alpha b) + \delta + \alpha|b|^2 + q^*b + qb^* = 0$$

Wracamy do równania prostej/okręgu przy $\alpha \rightarrow \alpha|a|^2, q \rightarrow qa^* + a^*\alpha b, \delta \rightarrow \delta + \alpha|b|^2 + 2\text{Re}(q^*b)$.

Dodatkowo, wygodnie jest zdefiniować **sferę Riemanna**, uwzględniając i uzwarzając (**kompaktyfikując**) płaszczyznę (zespoloną). Chodzi o to, aby nieskończoność była konkretnym punktem a nie granicą (nieskończoność zawsze można umownie określić jako jakiś punkt, ale nam chodzi to spójność z intuicją odległości). Punkty na płaszczyźnie odwzorowujemy jednoznacznie na sferze w \mathbf{R}^3 o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu 1 czyli $\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3 : X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$. Jest to oczywiście zbiór zwarty, biorąc definicję odległości $|\vec{r}|$ w \mathbf{R}^3 (po przeniesieniu na płaszczyznę nazywamy metryką Riemanna). Punkt na sferze o współrzędnych (X, Y, Z) odpowiada liczbie zespolonej

$$z = x + iy = \frac{X + iY}{1 - Z} = e^{i\phi} \cot(\theta/2)$$

(używając kątów sferycznych θ, ϕ). przy czym punkt $z = \infty = \infty^*$ (oznaczenie punktu nieskończoność!) odpowiada $(0, 0, 1)$ na sferze Riemanna. Geometrycznie otrzymujemy to odwzorowanie, biorąc przecięcie prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0, 1)$ i identyfikując punkty, w których ta prosta przecina sferę (poza $Z = 1$, z wyjątkiem ∞) i płaszczyznę xy ($Z = 0$), patrz rysunek. Takie odwzorowanie jest koforemnym, tj. zachowuje kąty pomiędzy krzywymi, przeprowadza okręgi na sferze Riemanna na proste i okręgi na płaszczyźnie zespolonej



Wiele funkcji zespolonych można uzupełnić, wykorzystując punkt ∞ , np. dla $f(z) = z^2$ mamy $f(\infty) = \infty$ natomiast dla $f(z) = 1/z$ mamy $f(0) = \infty$ i $f(\infty) = 0$ zachowują wtedy ciągłość w sensie odległości na sferze Riemanna. Stosujemy oznaczenie $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$. Arytmetyka nieskończoności, zakładamy $z \neq \infty$ a $w \neq 0, \infty$

$$z + \infty = \infty + z = \infty + \infty = \infty, w/0 = w\infty = \infty w = \infty\infty = \infty, z/\infty = 0, \infty/z = \infty$$

Z kolei działania $0/0, \infty/\infty$ i $\infty - \infty$ nadal pozostają nieoznaczone.

Ogólniej homografie definiujemy jako odwzorowania

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)}, \quad f(-d/c) = \infty, \quad f(\infty) = a/c$$

dla zespolonych a, b, c, d , z tym że jeśli $c = 0$ to zakładamy $d \neq 0$ i $f(\infty) = \infty$. Jeśli $ad = bc$ to homografia degeneruje się do stałej a/c , ewentualnie jest nieoznaczona dla $x = -c/d$. Dodatkowo do homografii można zaliczyć ich „bliźniaki” $f^*(z)$ (uwaga: $f(z) = z^*$ jest odbiciem względem osi x) Dla $a = c = 1, b = d = 0$ otrzymujemy $1/z$, a dla $c = 0$ obroty, przesunięcia (izometrii) i skalowanie/jednokładność. Złożenie dwóch homografii (a, b, c, d) i (a', b', c', d') jest też homografią

$$f(z) = \frac{a(a'z + b')/(c'z + d') + b}{c(a'z + b')/(c'z + d') + d} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}$$

jak również funkcja odwrotna (a więc homografia jest różnowartościowa), bo

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow w(cz + d) = az + b \Rightarrow z(wc - a) = b - dw \Rightarrow z = \frac{b - dw}{cw - a}$$

Każdą homografię można przedstawić jako złożenie inwersji, izometrii i skalowania, bo

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = a/c + \frac{b - da/c}{cz + d}$$

Składamy tu $cz + d, 1/z$ i $a/c + (b - da/c)z$ (dla $c = 0$ nic nie robimy). Zauważmy też że $(a, b, c, d) \rightarrow \lambda(a, b, c, d)$ nie zmienia homografii o ile $\lambda \neq 0$. Każda z tych funkcji zamienia okręgi i proste na okręgi i proste, więc ich złożenie także. Homografie tworzą grupę ze względu na składanie, element neutralny $f(z) = z$.

Lemat: Dla trzech różnych punktów z_1, z_2, z_3 a więc okręgu/prostej przez nie określonego/j istnieje dokładnie jedna homografia przekształcająca je na w_1, w_2, w_3 (różne, także określające okrąg/prostą). Homografia

$$Z(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

ma własność $Z(z_1) = 0, Z(z_2) = 1, Z(z_3) = \infty$ czyli przenosi $(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (0, 1, \infty)$. Jeśli któryś punkt jest ∞ to zawierający go stosunek zastępujemy 1. Szukana homografia to

$$W^{-1}(Z(z))$$

gdzie W^{-1} jest odwrotną do W . Z drugiej strony wystarczy pokazać, że jedyna homografia o własności $f(0) = 0, f(1), f(\infty) = \infty$ ma postać $f(z) = z$. Z kolejnych równości otrzymamy $b = 0, a + b = c + d, c = 0$, czyli $a = c$ i stąd teza.

Przykład: Odwzorowanie osi rzeczywistej $\text{Im } z = 0$ w koło jednostkowe $|w| = 1$. Weźmy $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ oraz $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$ Mamy zatem równanie

$$\frac{w + 1 - i - 1}{w - 1 - i + 1} = \frac{z + 1 - 1}{z - 1 \cdot 1}$$

Rozwiązując dostajemy

$$w = \frac{z - i}{1 - iz}, \quad z = \frac{i + w}{1 + iw}$$

można sprawdzić, że spełnia warunki. Ponadto sprawdzamy że półpłaszczyzna $\text{Im } z > 0$ przechodzi na wnętrze koła $|w| < 1$.

Można też wykazać, że *jedyną* klasą funkcji w \mathbf{C} z ∞ , zamieniających zawsze okręgi i proste na okręgi i proste są właśnie homografie. Uwaga: musimy założyć, że w obrazem f jest całe $\bar{\mathbf{C}}$ i f jest różnowartościowa, a więc odwracalna, a także, że funkcja odwrotna także zamienia okręgi i proste na okręgi i proste (inaczej są „zdegenerowane” kontrprzykłady). Wrócimy do tych założeń po definicji funkcji holomorficznej. Dowód na końcu skryptu

Metryka i granica:

W zbiorze liczb zespolonych zdefiniujemy odległość (metrykę):

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

co jest naturalnym przeniesieniem z płaszczyzny (odległość jest rzeczywista). Kula o promieniu rzeczywistym $k(z_0, R) = \{z : d(z, z_0) < R\}$ (domknięta gdy \leq).

Ciąg zbieżny i granica:

(z_n) zbiega do z_0 gdy dla każdego ϵ rzeczywistego dodatniego istnieje M takie że dla wszystkich $n > M$ zachodzi $d(z_n, z_0) = |z_n - z_0| < \epsilon$.

Punktem skupienia zbioru jest z_0 , jeśli dla każdego ϵ dodatniego rzeczywistego w zbiorze jest punkt z_n taki że $d(z_0, z_n) < \epsilon$. Przeważnie zakładamy także że $z_n \neq z_0$. Zbiór *domknięty* zawiera swoje wszystkie punkty skupienia. Punkt *wewnętrzny* zbioru D to takie z_0 , że istnieje $R > 0$ takie że $k(z_0, R) \subset D$.

Granica funkcji $f(z \rightarrow z_0) \rightarrow w$ (punktowa):

$$w = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

jeśli dla każdego ϵ rzeczywistego dodatniego istnieje δ rzeczywista dodatnia, takie że dla wszystkich $z \neq z_0$ takich, że $|z - z_0| < \delta$ mamy $|f(z) - w| < \epsilon$. Innymi słowy $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w| = 0$. Uwaga, $z \rightarrow z_0$ z dowolnego kierunku.

Funkcja jest ciągła z z_0 jeśli $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$

Przykład

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^*}{z} = \lim \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} +1 & \text{na osi } x \\ -1 & \text{na osi } y \end{cases}$$

granica nie istnieje.

Granica nieskończona, analogia do sfery Riemanna. Przyjmujemy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

jeśli dla każdego $R > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że dla wszystkich z takich że $|z - z_0| < \delta$ mamy $|f(z)| > R$. Przykład:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

ma granicę ∞ z z_0 . Możemy wtedy rozszerzyć pojęcie ciągłości, dopuszczając $f(z) = \infty$.

Odwrotnie, funkcja może mieć granicę w nieskończoności, tj.

$$w = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$$

jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $R > 0$ takie że dla wszystkich z takich że $|z| > R$ mamy $|f(z) - w| < \epsilon$.

Przykład

$$f(z) = \frac{az}{z - z_0}$$

ma granicę a dla $z \rightarrow \infty$ bo $f = a + az_0/(z - z_0)$ a nierówności trójkąta wynika że $|z - z_0| > |z| - |z_0| > R - |z_0|$ więc dobieramy $R = |z_0| + |az_0|/\epsilon$.

Można także uwzględnić

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

jeśli dla każdego $R > 0$ istnieje $P > 0$ takie że dla wszystkich z takich że $|z| > P$ mamy $|f(z)| > R$, np. $f(z) = z^2$.

W ten sposób można posługiwać się granicami i ciągłością na całej uzwarconej płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} lub równoważnie sferze Riemanna.

Granica funkcji zespolonej $u + iv = f(z = x + iy) = f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ to w istocie para granic dla u i v jak funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych.

Przykład: Czy istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + e^{1/x}} + iy^3 \right)$$

O y nie musimy się martwić, ale $e^{1/x}$ dąży do ∞ od strony dodatniej a do 0 od strony ujemnej x . Stąd $1/(1 + e^{1/x})$ dąży odpowiednio do 0 i 1, więc granicy nie ma.

Wnioski przechodzące z granic rzeczywistych. Jeśli $f(z) \rightarrow a$ a $g(z) \rightarrow b$ to

$$pf(z) + qg(z) \rightarrow pa + qb, f(z)g(z) \rightarrow ab, f(z)/g(z) \rightarrow a/b$$

Na końcu zakładamy albo $(a, b) \neq (0, 0), (\infty, \infty)$ (nieoznaczoności) Także jeśli $g(z \rightarrow z_0) \rightarrow w$ a $f(w \rightarrow w_0) \rightarrow s$ to $f(g(z \rightarrow z_0)) \rightarrow s$. Tak samo jest ciągłością kombinacji funkcji.

Przykład: e^{iz}

$$e^{iz} = e^{ix-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$$

Funkcje składowe są ciągłe więc funkcja jest ciągła. Uwaga, wrócimy jeszcze do ogólnej definicji funkcji trygonometrycznych i wykładniczych i ich własności.

Pochodna zespolona:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jeśli pochodna $f'(z_0)$ istnieje to f jest różniczkowalna w sensie zespolonym w z_0 .

Przykłady:

$$f(z) = 1/z, f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1/z - 1/z_0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z_0 - z}{z z_0 (z - z_0)} = -\lim_{z \rightarrow z_0} 1/z z_0 = -1/z_0^2$$

$$f(z) = 2x + 5iy, f'(0) = \lim_{x+iy \rightarrow 0} \frac{2x + 5iy}{x + iy}$$

granica wychodzi 2 wzdłuż x a 5 wzdłuż y a więc nie istnieje.

$$f(z) = z^2, f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} z + z_0 = 2z_0$$

$$f(z) = z^* = x - iy, f' = \lim_{\Delta z} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta x + i\Delta y} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

dla $\Delta X = X - X_0$. Pochodna wychodziłaby +1 wzdłuż x a -1 wzdłuż y więc nie istnieje.

dla pochodnych zespolonych obowiązują analogiczne reguły do rzeczywistych

$$(pf + qg)' = pf' + qg', (fg)' = f'g + fg', (f/g)' = (f'g - fg')/g^2, (f(g))' = f'(g)g', (f^{-1})' = 1/f'(f^{-1})$$

dla funkcji odwrotnej $f^{-1}(z) = w$ jeśli $f(w) = z$. Funkcja różniczkowalna jest ciągła. Na mocy definicji można także przybliżać

$$f'(z) \simeq f'(z_0) + (z - z_0)f''(z_0)$$

z błędem mniejszym niż $|z - z_0|$.

Definicja: Funkcja holomorficzna

Funkcja zespolona jest holomorficzna w otoczeniu z_0 jeśli ma pochodną zespoloną w pewnym $k(z_0, \epsilon)$ dla pewnego $\epsilon > 0$. Często zamiennie nazywamy funkcją analityczną (ale analityczność można określać też szerzej, jako rozwijalność w szereg, wrócimy do tego powiązania).

Przykład: $f(z) = z^* = x - iy$ ma pochodne w sensie rzeczywistym ale nie zespolonym, więc nie jest holomorficzna.

Twierdzenie Cauchy-Riemanna:

Jeśli $f = u + iv$ ma pochodną zespoloną, wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i u, v mają pochodne zupełne, Istnienie pochodnych zupełnych u i v wynika np. z ciągłości pochodnych cząstkowych.

Dowód:

Dla uproszczenia założymy $z_0 = 0$ oraz $f(0) = 0$, ale nie tracimy ogólności

$$f'(0) = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{u(x,y) + iv(x,y)}{x + iy}$$

Biorąc $y = 0$ mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) + iv(x, 0)}{x} = \partial u / \partial x + i \partial v / \partial x$$

a biorąc $x = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-iu(0, y) + v(0, y)}{y} = \partial v / \partial y - i \partial u / \partial y$$

Obie granice muszą być równe (części rzeczywiste i urojone), stąd pierwsza część tezy. Mamy także $f'(0) = \partial_x u(0) - i \partial_y u(0) = \partial_y v(0) + i \partial_x v(0)$ Z kolei

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|u(x, y) - x \partial_x u(0) - y \partial_y u(0)|}{|z|} \\ & \leq \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{Re}(f(z) - z f'(0))|}{|z|} \leq \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z) - z f'(0)|}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)/z - f'(0)| = 0 \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|v(x, y) - x \partial_x v(0) - y \partial_y v(0)|}{|z|} \\ & \leq \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{Im}(f(z) - z f'(0))|}{|z|} \leq \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z) - z f'(0)|}{|z|} = \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)/z - f'(0)| = 0 \end{aligned}$$

czyli u i v mają pochodne zupełne i mamy tezę w jedną stronę.

W drugą stronę, jeśli z kolei istnieje pochodna zupełna to oznacza to że

$$u(x, y) = x \partial_x u(0, 0) + y \partial_y u(0, 0) + R_u(x, y)$$

o własności

$$\lim_{z \rightarrow 0} |R_u|/|z| = 0$$

i podobnie dla v . tę granicę należy rozumieć, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że dla wszystkich (x, y) takich że $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ mamy $|R|/\sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon$ Tak samo dla v . To wystarcza bo podstawiamy $f'(0) = \partial_x u(0) - i \partial_y u(0) = \partial_y v(0) + i \partial_x v(0)$ Teraz

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} |f(z)/z - f'(0)| &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|u - x \partial_x u(0) - y \partial_y u(0) + i(v(x, y) - x \partial_x v(0) - y \partial_y v(0))|}{|z|} \\ &\leq \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{|u - x \partial_x u(0) - y \partial_y u(0)|}{|z|} + \frac{|v - x \partial_x v(0) - y \partial_y v(0)|}{|z|} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{|R_u|}{|z|} + \frac{|R_v|}{|z|} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|R_u|}{|z|} + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|R_v|}{|z|} = 0 \end{aligned}$$

powołując się na sumę granic. Stąd teza w drugą stronę.

Jeśli pochodne cząstkowe są ciągłe to istnieje pochodna zupełna. Dowód: Ciągłe funkcje można bez problemu całkować więc jeśli $u(0, 0) = 0$ to

$$u(x, y) = \int_0^x dx' \partial_x u(x', 0) + \int_0^y dy' \partial_y u(x, y')$$

i na mocy twierdzenia o wartości średniej istnieją $x'' \in [0, x]$ oraz $y'' \in [0, y]$ takie że

$$u(x, y) = x\partial_x u(x'', 0) + y\partial_y u(x, y'')$$

Stąd

$$R_u = u(x, y) - x\partial_x u(0) - y\partial_y u(0) = x(\partial_x u(x'', 0) - \partial_x u(0)) + y(\partial_y u(x, y'') - \partial_y u(0))$$

Ponieważ $\partial_x u$ i $\partial_y u$ są ciągłe, więc dla $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka że gdy $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ to

$$|\partial_x u(x, y) - \partial_x u(0)| < \epsilon, \quad |\partial_y u(x, y) - \partial_y u(0)| < \epsilon$$

(bierzemy mniejszą z δ_x i δ_y) Wtedy

$$|R_u| \leq (|x| + |y|)\epsilon \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\epsilon$$

czyli $|R_u|/\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{2}\epsilon$, co kończy dowód.

Dla holomorficznego ważne jest aby pochodna istniała nie tylko w jednym punkcie ale także jego otoczeniu.

Przykład:

$f(z) = |z|^2$, mamy

$$f'(0) = \lim |z|^2/z = \lim z^* = 0$$

ale, dla $\Delta z \rightarrow 0$,

$$f'(z) = \lim \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim \frac{|\Delta z|^2 + z\Delta z^* + z^*\Delta z}{\Delta z} = \lim(\Delta z + z^* + z\Delta z^*/\Delta z)$$

Ponieważ $\Delta z^*/\Delta z$ dąży do 1 dla osi rzeczywistej, a do -1 dla urojonej to dla $z \neq 0$ granica nie istnieje.

Przykład:

$$f(z) = z^2$$

Mamy $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $\partial_x u = 2x = \partial_y v$, $\partial_y u = -2y = -\partial_x v$. Spełnione są warunki Cauchy-Riemanna.

Pochodne $\partial/\partial z = \partial_x + i\partial_y$ i $\partial/\partial z^* = \partial_x - i\partial_y$. Chcąc stosować regułę łańcuchową chcemy aby

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial z^*}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial z^*}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z^*} = i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial z^*}$$

rozwiązując układ równań otrzymujemy definicje pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Wtedy warunki Cauchy-Riemanna można zapisać

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0, \quad f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Przykład $f(z) = 2\operatorname{Re}z = z + z^* = x$, nie spełnia warunków Cauchy-Riemanna bo $\partial_x u = 1 \neq \partial_y v = 0$ ale także $\partial f/\partial z^* = 1 \neq 0$ czyli nie ma pochodnej zespolonej.

Komentarz: Dla funkcji holomorficznej $f = u + iv$ zdefiniujemy pola wektorowe

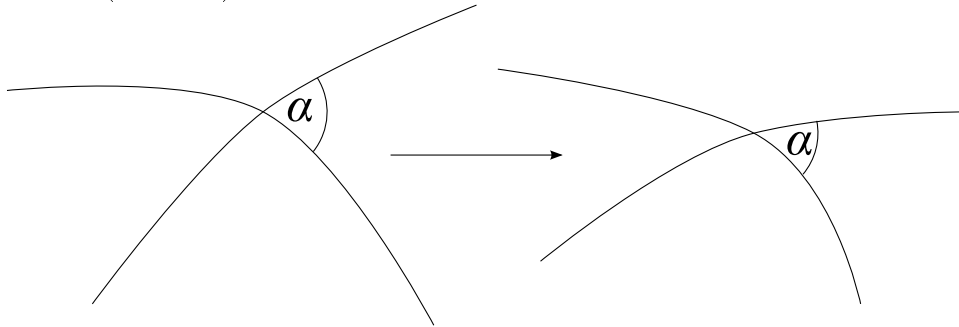
$$\vec{P} = \nabla u = (\partial_x u, \partial_y u), \quad \vec{Q} = \nabla v = (\partial_x v, \partial_y v)$$

Z warunków Cauchy-Riemanna wynika że $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ czyli linie stałego u i stałego v są zawsze do siebie prostopadłe (bo gradienty są prostopadłe do tych linii), np. dla $f = z^2$ są to linie stałego $x^2 - y^2$ i stałego xy (hiperbole).

Odwzorowania konforemne:

Weźmy krzywą na płaszczyźnie zespolonej, tj. funkcję $z(t)$ dla t rzeczywistego. Funkcja $f(z)$ przekształca tę krzywą na $w(t) = f(z(t))$ (na chwilę nie zakładamy że f jest holomorficzna). Wtedy wektor styczny do krzywej $z'(t)$ przechodzi na $f'(z(t)) = z' \partial_z f + z'^* \partial_{z^*} f$, pod warunkiem że f ma w z pochodną zupełną (a ma np. dla holomorficznej, co pokazaliśmy!).

Definicja: Przekształcenie $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ nazywamy konforemnym jeśli zachowuje kąty między krzywymi (rysunek)



Twierdzenie: Funkcje holomorficzne są przekształceniami konforemnymi.

Dowód:

Krzywe z_1 i z_2 przecinają się w punkcie z a ich obrazy w_1 i w_2 w $w = f(z)$. Zauważmy także, że możemy wyrażać iloczyn skalarny i wektorowy na płaszczyźnie przez operacje zespolone, $a \cdot b = x_a x_b + y_a y_b = \operatorname{Re}(ab^*)$ a wybierając umowną trzecią oś, $a \times b = x_b y_a - x_a y_b = \operatorname{Im}(ab^*)$. Z drugiej strony, iloczyn skalarny i wektorowy wyrażają się przez kąt α pomiędzy a i b , $a \cdot b = |a||b| \cos \alpha$, $a \times b = |a||b| \sin \alpha$, $\tan \alpha = (\vec{ab}) / (a \cdot b)$. Mamy więc

$$\tan \alpha = \frac{z'_1 \times z'_2}{z'_1 \cdot z'_2} = \frac{\operatorname{Im}(z'_1 z'_2^*)}{\operatorname{Re}(z'_1 z'_2^*)}$$

Z kolei

$$\frac{w'_1 \times w'_2}{w'_1 \cdot w'_2} = \frac{\operatorname{Im}(w'_1 w'_2^*)}{\operatorname{Re}(w'_1 w'_2^*)}$$

Zatem $z'_1 z'_2^* = r e^{i\alpha}$. Pokażemy, że $w'_1 w'_2^* = R e^{i\alpha} = (R/r) z'_1 z'_2^*$ czyli że kąt jest ten sam. Korzystając z $w' = f'(z) z'$ mamy

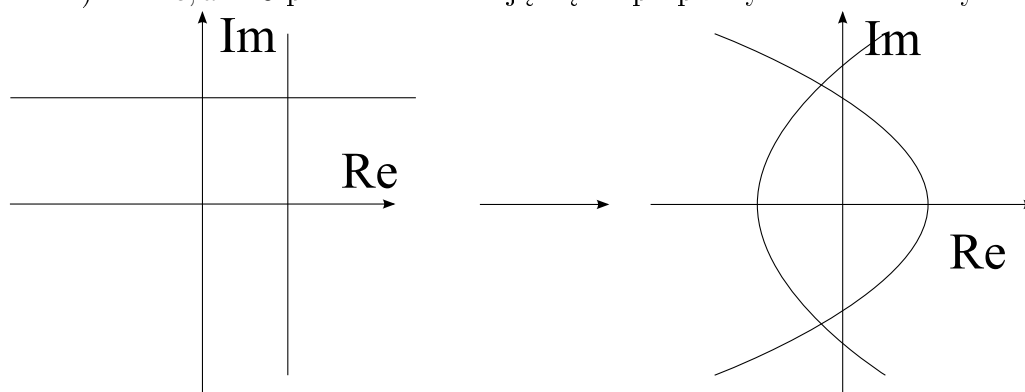
$$w'_1 w'_2^* = f'(z) z'_1 (f'(z) z'_2)^* = |f'(z)|^2 z'_1 z'_2^*$$

stąd teza bo $R/r = |f'(z)|^2$, oczywiście pod warunkiem $f'(z) \neq 0$.

W drugą stronę, dla funkcji niekoniecznie holomorficzej mamy $w' = z' \partial_z f + z'^* \partial_{z^*} f$. czyli $w'_1 w'^*_2 = (z'_1 \partial_z f + z'^*_1 \partial_{z^*} f)(z'_2 \partial_z f + z'^*_2 \partial_{z^*} f)^* = |\partial_z f|^2 z'_1 z'^*_2 + |\partial_{z^*} f|^2 z'_2 z'^*_1 + 2\text{Re} z'_1 z'^*_2 \partial_z f (\partial_{z^*} f)^*$

Jeśli $\partial_{z^*} f = 0$ to mamy funkcję holomorficzną, kąty zachowane. Jeśli $\partial_z f = 0$ to mamy sprzężenie funkcji holomorficzej tj $f^*(z)$ jest holomorficzną, kąty są odbite ($\alpha \rightarrow -\alpha$). Jeśli obie pochodne są niezerowe to kąty przeważnie będą różne, bo prawie zawsze niezerowy będzie ostatni, rzeczywisty składnik.

Przykład: $f(z) = z^2$. Weźmy proste równoległe do osi czyli $z_1 = t + ic$, $z_2 = d + it$, (c, d rzeczywiste niezerowe), przecinające się w (d, c) . Wtedy $w_1(t) = (t + ic)^2 = t^2 - c^2 + 2itc$, jest to rodzina parabol, $u = t^2 - c^2$, $v = 2tc$, $t = v/2c$, $u = (v/2c)^2 - c^2$. Także $w_2(t) = (d + it)^2 = d^2 - t^2 + 2itd$ daje parabolę, bo $u = d^2 - (v/2d)^2$. Parabole przecinają się pod kątem prostym (rysunek). Dla $c, d = 0$ parabole redukują się do półprostych na osi rzeczywistej.



Funkcje holomorficzne a homografie:

Wrócimy teraz do pytania o funkcje przekształcające okręgi i proste w okręgi i proste. Pokażaliśmy, że pod pewnymi warunkami są to homografie. Teraz już wiemy, że są holomorficzne (z dokładnością do sprzężenia, bo dla $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mamy

$$f'(z) = \frac{ad - cb}{(cz + d)^2}$$

Pokażemy już bez dodatkowych założeń, że jedyne funkcje holomorficzne w $\bar{\mathbb{C}}$ (różniczkowalne wszędzie gdzie są skończone, a ciągłe z ogólniejszym sensie tam gdzie $f = \infty$) o tej własności (okręgi i proste). Pokazuje to, że holomorficzność jest sama już dość silnym założeniem.

Dowód:

Przypuśćmy, że obraz f leży w jednej prostej bądź okręgu. Podobnie jak poprzednio, możemy ten okrąg/prostą sprowadzić do osi rzeczywistej składając f z homografiami (złożenie jest nadal holomorficzne). Jeśli obraz jest rzeczywisty i $v = 0$ tak jak i pochodne v , to z warunków Cauchy-Riemanna wynika, że także pochodne u będą zerowe. Stąd u musi być stała (choćby z twierdzenia o wartości średniej) czyli obrazem jest jeden punkt, $f(z) = b$ (stała). Możemy zatem założyć, że obraz f nie jest jedną prostą/okręgiem. Możemy znaleźć tak jak poprzednio 4 różne punkty w_1, w_2, w_3, w_4 , $w = f(z)$ odpowiadające co najmniej czterem różnym

punktom z_1, z_2, z_3, z_4 (być może także innym). Tak jak poprzednio, za pomocą homografii sprowadzamy te punkt na $0, 1, \infty$, czyli $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$ i $f(z_4) = w_4$. Teraz oś rzeczywista przechodzi na siebie. Na tej prostej musi być taki punkt, że $f'(z) \neq 0$. Jeśli by bowiem wszędzie (tam gdzie $f \neq \infty$) $f'(z) = 0$ obrazem nie byłaby prosta ale punkt (to wynika z twierdzenia o wartości średniej i ciągłości uwzględniającej ∞), a to niemożliwe bo są co najmniej 2 punkty. Niech $f'(z_5) \neq 0$. Jeśli $z_5 \neq 0$ to składamy z homografią $h(z) = z + z_5$ i $g(z) = z - f(z_5)$ tj. bierzemy $\tilde{f} = g(f(h(z)))$. Wtedy już $\tilde{f}'(0) = f'(z_5) \neq 0$, przy czym $\tilde{f}(0) = 0$ nadal zachowując fakt, że prosta rzeczywista przechodzi na siebie. Upraszczamy oznaczenia z powrotem do $\tilde{f} \rightarrow f$. Zauważmy, że proste przechodzące przez 0 muszą przechodzić też na proste przechodzące przez 0 bo inne proste i okręgi nie przechodzą przez 0 albo ∞ . Ale z własności konforemności i $f' \neq 0$ wynika że każda taka prosta przechodzi na siebie, bo musi być zachowany kąt z osią rzeczywistą. Zatem f jedynie skaluje liczby, tj. $f(z) = q(z)z$ gdzie q ma jedynie wartości rzeczywiste. Zatem $q(z) = f(z)/z$ i $q(0) = f'(0)$ (ciągła w 0) ma wartości jedynie rzeczywiste a jest holomorficzną (jako iloraz funkcji holomorficzych, ewentualnie poza 0) zatem $v = 0$ ale z warunków Cauchy-Riemanna wynika że q jest stała czyli $f(z) = qz$ dla stałego q i stąd teza.

Funkcje harmoniczne:

Pokażemy później że pochodna funkcji holomorficzej $f = u + iv$ jest także holomorficzną, co oznacza że ma pochodne dowolnego rzędu. Na razie po prostu założymy, że u i v są dwukrotnie różniczkowalne i te pochodne są ciągłe (albo zakładamy różniczkowalność zupełną). Wtedy

$$\partial_x u = \partial_y v \Rightarrow \partial_x^2 u = \partial_{xy}^2 v$$

$$\partial_x v = -\partial_y u \Rightarrow \partial_y^2 u = -\partial_{yx}^2 v$$

Dzięki równości pochodnych $\partial_{xy}^2 = \partial_{yx}^2$ (wymaga ciągłości bądź pochodnej zupełnej) mamy

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

Jest to równanie Laplace'a, a jego rozwiązania nazywamy funkcjami harmonicznymi. Dzięki temu możemy sprawdzić czy dane u (v) może być częścią rzeczywistą (urojoną), a z warunków Cauchy-Riemanna możemy znaleźć całą funkcję (z dokładnością do stałej).

Przykład:

$$v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$$

Sprawdzamy, że spełnia równanie Laplace'a. Teraz szukamy części rzeczywistej

$$\partial_x u = \partial_y v = 6x^2 - 6xy - 6y^2$$

skąd $u = 3x^3 - 3x^2y - 6y^2x + u_0(y)$ gdzie u_0 jest nieznaną funkcją. z kolei

$$\partial_y u = -3x^2 - 12yx + u_0'(y) = -3x^2 - 12yx + 3y^2$$

czyli $u_0'(y) = 3y^2$ a więc $u_0 = y^3 + C$. Ostatecznie $f(z) = (2 + i)z^3 + C$.

Przykład:

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

Sprawdzamy równanie Laplace'a, spełnia. Szukamy części urojonej

$$\partial_x v = -\partial_y u = e^x \sin y$$

czyli $v(x, y) = e^x \sin y + v_0(x)$. z kolei

$$\partial_y v = e^x \cos y + v_0'(x) = \partial_x u = e^x \cos y$$

czyli $v_0' = 0$ i v_0 jest stałą, czyli $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) + iC = e^z + iC$. Uwaga: do definicji i własności funkcji wykładniczej i trygonometrycznych za chwilę przejdziemy.

Funkcja wykładnicza zespolona:

Przypomnienie: rzeczywistą funkcję wykładniczą a^x dla $a \neq 0$ (a, x rzeczywiste) definiuje się kolejno dla $x = n$, n liczby naturalne, przez $a^0 = 1$, $a^1 = a$, i indukcyjnie $a^{n+1} = a^n a$. Z kolei $b = a^{1/n}$ jest dodatnim rozwiązaniem równania $b^n = a$ (rozwiązanie istnieje i jest jedno w liczbach rzeczywistych). Dla wymiernych dodatnich $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ dla naturalnych $p, q \neq 0$. Dla ujemnych $a^{-w} = 1/a^w$ dla wymiernego w . Ostatecznie dla dowolnego x

$$a^x = \lim_{w \rightarrow x} a^w$$

Można wykazać że granica zawsze istnieje, a potem że a^x jest ciągłą funkcją x (rosnącą dla $a > 1$ a malejącą dla $a < 1$, stała = 1 dla $a = 1$).

Przypomnienie: Liczba Eulera e jest definiowana na minimum dwa sposoby (a jest wiele)

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots \simeq 2,718$$

(silnia $0! = 1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $(n+1)! = (n+1)n!$). Jest niewymierna. Jeśli bowiem $e = p/q$ to prawy wzór mnożymy przez $q!$ i odejmujemy pierwsze q wyrazów. Reszta jest mniejsza od 1, sprzeczność. Można także wykazać że

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Funkcja e^x ma pochodną $(e^x)' = e^x$.

Analogicznie definiujemy jej wersję zespoloną (tu nie możemy już odwołać się do granicy wymiernej bo nie wiemy np. ile to e^i):

$$e^z \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

Wykażemy, że obie granice istnieją i są równe.

Dowód:

Podzielmy drugą sumę

$$\sum_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \leq N} \frac{z^n}{n!} + R_N(z)$$

Wtedy

$$|R_N(z)| = \left| \sum_{n>N} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n>N} \frac{|z|^n}{n!}$$

ostatnia suma będzie dowolnie mała dla dostatecznie dużego N bo $n!$ rośnie szybciej niż jakiegokolwiek q^n (można też się wesprzeć znanymi kryteriami zbieżności). Stąd zbieżność, w dodatku bezwzględna. Poza tym funkcja jest zawsze określona (skończona) dla $|z| < \infty$ (skończone z), co widać przy n dużo większym od $|z|$.

Z kolei

$$(1 + z/n)^n = \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k \leq n} \frac{n! z^k}{n^k k! (n-k)!}$$

Dla $n > N$ możemy pokonać podziału

$$\sum_{k \leq N} \frac{n! z^k}{n^k k! (n-k)!} + \sum_{N < k \leq n} \frac{n! z^k}{n^k k! (n-k)!}$$

Teraz zwiększamy n przy ustalonym N . Pierwsza suma jest zbieżna bo ma ustaloną liczbę składników i każdy zbiega do $z^k/k!$ bo

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = (1 - 1/n)(1 - 2/n) \cdots (1 - k - 1/n) \rightarrow 1$$

bo iloczyn ma określoną, liczbę czynników i każdy dąży do 1. Zatem pierwsza suma dąży do

$$\sum_{k \leq N} \frac{z^k}{k!}$$

Pozostaje pokazać, że druga część jeszcze szacowana z góry i zanika dla dużych N .

$$\left| \sum_{N < k \leq n} \frac{n! z^k}{n^k k! (n-k)!} \right| \leq \sum_{N < k \leq n} \frac{n! |z|^k}{n^k k! (n-k)!} \leq \sum_{N < k} \frac{|z|^k}{k!}$$

Ta część zanika, taka jak w poprzednim przypadku. Wystarczy więc wziąć tak duże N aby ta część była dowolnie mała a potem znaleźć $n > N$ takie aby pierwsza część była (dowolnie) blisko granicy (wyznaczonej poprzednio). Oczywiście $e^{z^*} = (e^z)^*$ bo jest tak dla każdego elementu ciągu/szeregu definiującego.

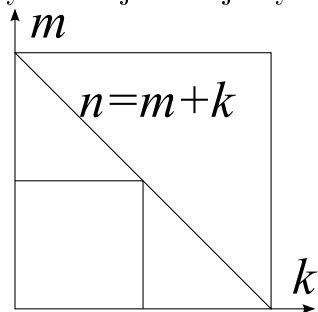
Pokażemy teraz ważną własność funkcji wykładniczej

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

Lewa strona jest równa

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{(z+w)^n}{n!} &= \sum_n \sum_k \binom{n}{k} \frac{w^{n-k} z^k}{n!} = \\ \sum_n \sum_k \frac{w^{n-k} z^k}{(n-k)! k!} &= \sum_m \sum_k \frac{w^m z^k}{m! k!} = \sum_m \frac{w^m}{m!} \sum_k \frac{z^k}{k!} = e^w e^z \end{aligned}$$

gdzie $m = n - k$. Wątpliwości można mieć do dość swobodnego żonglowania wskaźnikami. Na szczęście to nie jest problem, bo ogony funkcji wykładniczych są szybko duszone. Najlepiej to widać na rysunku poniżej, pokazującym obszary $k, n < N$ i $n - k < N$. Reszty (obszary odcięte przez proste), będą bezwzględnie zanikać przez znikające oszacowanie górne, tak jak przy definicji funkcji wykładniczej.



Funkcja wykładnicza jest ciągła w zerze $e^0 = 1$ bo

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n>0} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \sum_{n>0} |z|^n = \frac{|z|}{1 - |z|} \rightarrow 0$$

A ponieważ $e^{z+w} = e^z e^w$ to jest ciągła wszędzie.

W zerze ma też pochodną zespoloną równą 1, bo

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{n>1} \frac{z^{n-1}}{n!} \right| \leq \sum_{n>1} |z|^{n-1} \leq \frac{|z|}{1 - |z|} \rightarrow 0$$

a znowu z $e^{z+w} = e^z e^w$ wynika że pochodna e^w jest wszędzie równa e^w bo

$$\left| \frac{e^{w+z} - e^w}{z} - e^w \right| = |e^w| \left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \rightarrow 0$$

czyli jeszcze raz

$$(e^z)' = e^z$$

Jest to zatem funkcja wszędzie holomorficzna. Dla $z = x$ rzeczywistych e^x jest dodatnia i rosnąca. Nie ma miejsc zerowych bo inaczej $0 = e^z$ a jednocześnie e^{-z} istnieje i jest skończone czyli $0 = e^z e^{-z} = e^0 = 1$, sprzeczność.

Definicje funkcji hiperbolicznych i trygonometrycznych:

Funkcje hiperboliczne, cosinus hiperboliczny, sinus hiperboliczny, tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z} = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

(uwaga na zamienne oznaczenia $\text{ch}=\cosh$, $\text{sh}=\sinh$, $\text{tanh}=\text{tgh}=\text{th}$, $\text{coth}=\text{ctgh}=\text{cth}$).

Funkcje trygonometryczne, cosinus, sinus, tangens, cotangens

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

(uwaga na zamienne oznaczenia $\tan = \text{tg}$, $\cot = \text{ctg}$). Funkcje \cosh , \sinh , \cos i \sin są holomorfczne wszędzie a \tanh , \coth , \tan , \cot , tam gdzie odpowiedni mianownik jest niezerowy, o tym będzie za chwilę.

$$\cosh z = \sum_n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots, \quad \sinh z = \sum_n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

$$\cos z = \sum_n (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots, \quad \sin z = \sum_n (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

Zauważmy parzystość $\cosh z = \cosh(-z)$, $\cos z = \cos(-z)$ i nieparzystość $\sinh z = -\sinh(-z)$, $\tanh z = -\tanh(-z)$, $\coth z = -\coth(-z)$, $\sin z = -\sin(-z)$, $\tan z = -\tan(-z)$, $\cot z = -\cot(-z)$. Ponadto hiperboliczne i trygonometryczne są powiązane, $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i \sin z$, $\tanh iz = i \tan z$. Z własności $e^{z^*} = (e^z)^*$ wynika każda funkcja hiperboliczna i trygonometryczna ma także tę własność, czyli $f(z^*) = f^*(z)$. Także $e^z = \cosh z + \sinh z$ oraz $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Szczególne wartości $\cosh 0 = \cos 0 = 1$, $\sinh 0 = \sin 0 = \tanh 0 = \tan 0 = 0$ ale $\coth 0 = \cot 0 = \infty$ (do tego jeszcze powrócimy)

Z e^{z+w} otrzymujemy także prawa składania

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w, \quad \sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \sinh w \cosh z$$

$$\tanh(z+w) = \frac{\tanh z + \tanh w}{1 + \tanh z \tanh w}, \quad \coth(z+w) = \frac{\coth z \coth w + 1}{\coth z + \coth w}$$

oraz

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

$$\tan(z+w) = \frac{\tan z + \tanh w}{1 - \tan z \tan w}, \quad \cot(z+w) = \frac{\cot z \cot w - 1}{\cot z + \cot w}$$

Stąd (dla $w = -z$) także

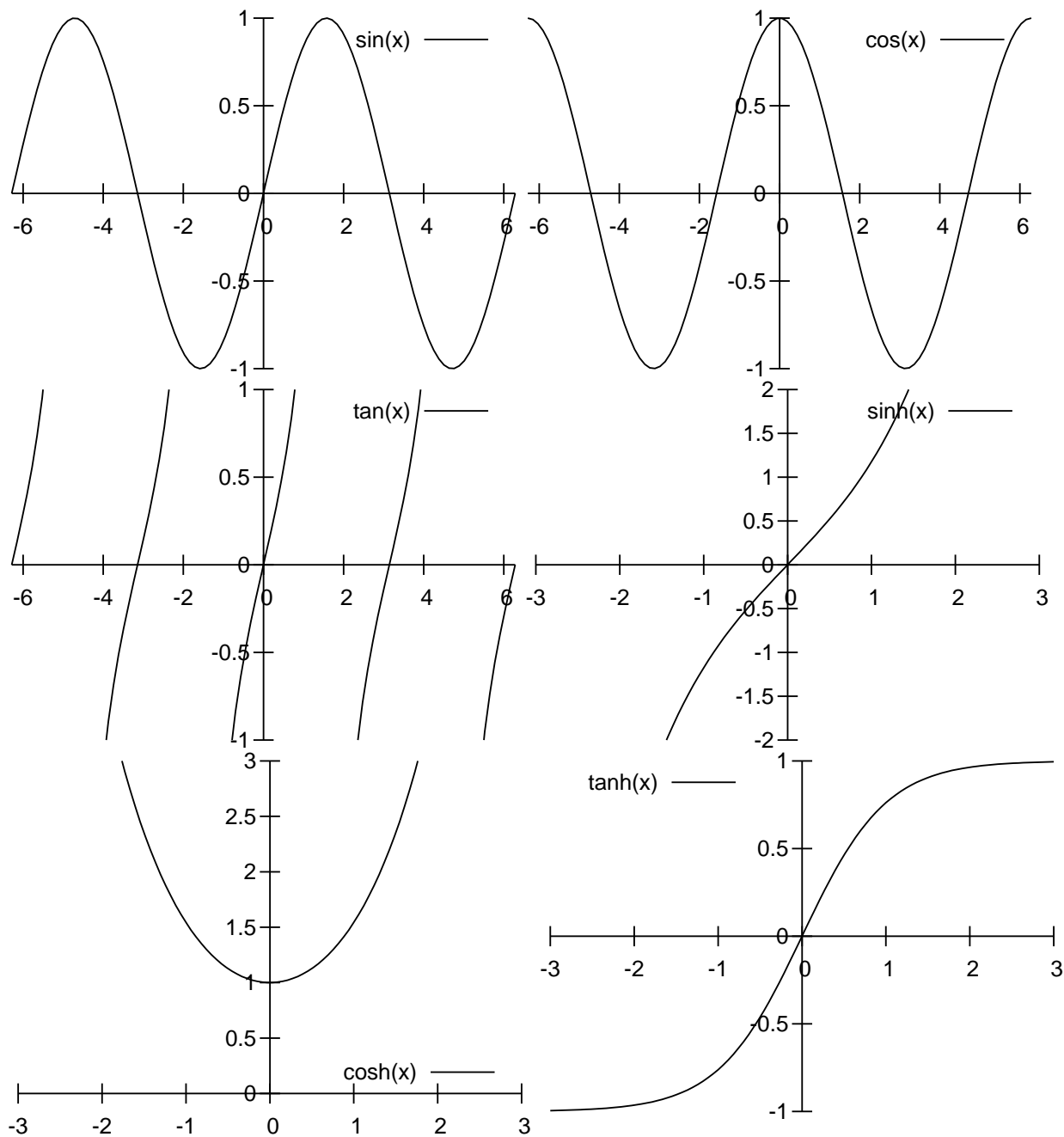
$$1 = \cosh^2 z - \sinh^2 z = \cos^2 z + \sin^2 z$$

czyli tzw. jedyńka trygonometryczna. Mamy także pochodne zespolone

$$\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh, \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2}, \quad \coth' = -\frac{1}{\sinh^2}$$

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos, \quad \tan' = \frac{1}{\cos^2}, \quad \cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

Weźmy teraz $z = x$ rzeczywiste, wtedy wszystkie funkcje hiperboliczne i trygonometryczne są także rzeczywiste, bo $z = z^*$ a $f(z^*) = f^*(z)$. Wtedy $\cosh x \geq 1$ a $\tanh x$ rośnie od -1 do 1 .
Wykresy:

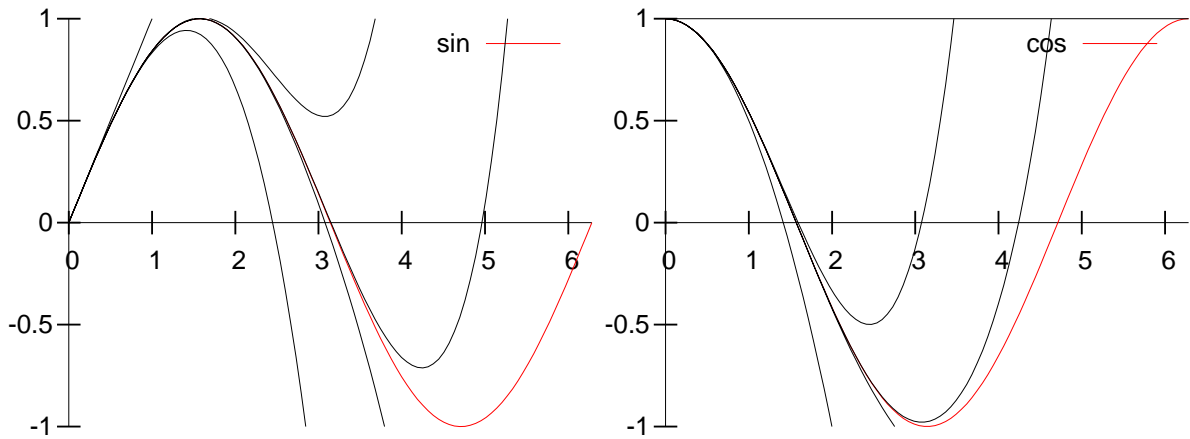


Definicja liczby π i okres funkcji trygonometrycznych :

Dla argumentów rzeczywistych funkcje \sin i \cos są rzeczywiste i z jedyńki trygonometrycznej są ograniczone do przedziału $[-1, 1]$, czyli $\cos x \leq 1$. Z twierdzenia o wartości średniej wynika więc, że $\sin x \leq x$ dla $x > 0$ i podobnie $\cos x \geq 1 - x^2/2$, $\sin x \geq x - x^3/6$ i $\cos x \leq 1 - x^2/2 + x^4/24$ itd. Stąd np. $\sin 2 \geq 2/3$ a $\cos 1 \geq 1/2$ ale $\cos 2 \leq -1/3$ przy malejącym \cos czyli istnieje dokładnie jedno miejsce zerowe $\pi/2 \in]1, 2[$, **definiujące** π , takie że $\cos(\pi/2) = 0$.

Zauważmy także że z jedyńki trygonometrycznej wynika wtedy że $\sin(\pi/2) = \pm 1$ ale dla $x < 2$ mamy $\sin x > 0$ więc $\sin(\pi/2) = 1$. Stąd też $\sin \pi = 2 \sin(\pi/2) \cos(\pi/2) = 0$ Zobaczmy, że π jest też najmniejszą liczbą dodatnią, dla której \sin jest zerem. Jeśli byłoby $0 < x < \pi$ takie że $\sin x = 0$ to $2 \sin(x/2) \cos(x/2) = 0$ ale dla $(x/2) < 2$ mamy $\sin(x/2) > 0$ a \cos

jako malejąc, nie ma innych miejsc zerowych przed $\pi/2$, sprzeczność. π jest niewymierna. W przybliżeniu $\pi = 3,141592\dots$ Funkcje \sin , \cos i π można przybliżyć biorąc kolejne wyrazy szeregu definiującego, szacując wielomianami na przemian z góry i z dołu (rysunek).



α można interpretować jako długość łuku (fragmentu okręgu na płaszczyźnie o środku w zerze i promieniu 1) czyli kąt w radianach i wartości $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ można powiązać geometrycznie ze współrzędnymi okręgu ($X = \cos x, Y = \sin x$) (rysunek), ponieważ

$$\int_{\alpha} ds = \int_0^{\alpha} \sqrt{(dX/dx)^2 + (dY/dx)^2} dx = \int_0^{\alpha} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\alpha} 1 dx = \alpha$$

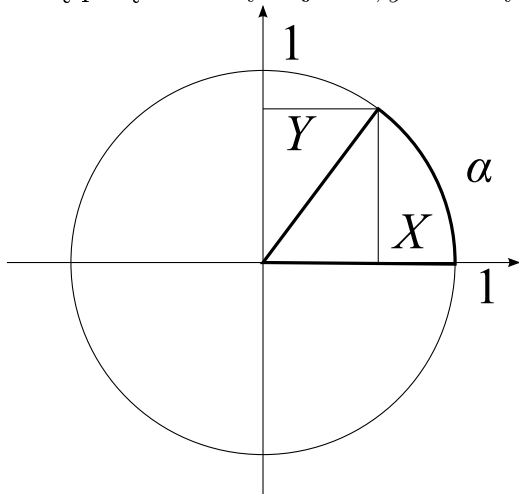
Stąd też π jest połową obwodu okręgu jednostkowego, a także polem koła jednostkowego.

Obrót:

Funkcja $f(z) = e^{i\phi}z$ dla ϕ rzeczywistego definiuje *obrót* współrzędnych $z = x + iy \rightarrow f = u + iv$

$$\begin{cases} u = x \cos \phi - y \sin \phi \\ v = x \sin \phi + y \cos \phi \end{cases}$$

wokół zera o kąt ϕ (w radianach). Obroty można uogólnić na wiele wymiarów, wybierając dowolną parę zmiennych jak x, y a reszty nie zmieniając, i składać.



Dalej już łatwo wyprowadzić wzory dla dowolnych liczb zespolonych $\cos \pi = -1$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\cos(z+\pi) = -\cos z$, i okresowość

$$\sin(2\pi + z) = \sin z, \cos(2\pi + z) = \cos z, \tan(z + \pi) = \tan z, \cot(\pi + z) = \cot z$$

czyli są to funkcje okresowe z okresem 2π (sin i cos) oraz π (tan i cot). Mniejszych okresów nie ma bo jeśli $\sin(z+T) = \sin z \cos T + \sin T \cos z = \sin z$, to $\cos T = 1$ i $\sin T = 0$ a to niemożliwe dla $T < 2\pi$ (patrz niżej).. Dalsze wzory

$$\sin(\pi/2 \mp z) = \cos z, \cos(\pi/2 \pm z) = \mp \sin z, \tan(\pi/2 - z) = \cot z$$

Z $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ także $e^{i\pi} = -1$, $e^{2\pi i} = 1$ oraz $|e^{ix}| = 1$. Ponadto jedynie $z = 2\pi in$ dla całkowitych n mają własność $e^z = 1$ bo jeśli $z = x + iy$ to $|e^z| = e^x |e^{iy}| = e^x$ a to jest 1 tylko dla $x = 0$. (bo e^x jest dodatnia i rosnąca). Zatem e^z ma okres $2\pi i$ podobnie jak cosh i sinh ($i\pi$ dla tanh) i jest to najmniejszy okres (bo dla $y < 2\pi$ tylko $\sin \pi = 0$ ale wtedy $\cos \pi = -1$). Punkty $2\pi n$, πn , $2\pi in$, $i\pi n$ to także te w których są nieskończone tan, cot, tanh lub coth.

Komentarz: Szkolne, geometryczne wzory na funkcje trygonometryczne i np. twierdzenie Pitagorasa wymagają postulatów Euklidesa. Postulaty te grzęzną w ilości potrzebnych założeń, które tak naprawdę opierają się na intuicjach fizycznych np. fakcie że przedmioty nie zmieniają się przy obrotach (a co to jest obrót?). We współczesnej matematyce redukuje się postulaty, a poza tym funkcje trygonometryczne stosuje się także poza geometrią (np. oscylator), dlatego przedstawiona tu konstrukcja funkcji trygonometrycznych jest dużo lepsza i poprawniejsza niż szkolna. Jedynie nazwy, trigon=trójkąt i hiperbola (coś za dużego), pozostały z historii.

Funkcja odwrotna do wykładniczej: logarytm (*proporcja liczb*)

$$w = \ln z = \log z = \ln r + i\phi$$

jeśli $z = |z|e^{i\phi} = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = e^w$, $\ln |z|$ jest tradycyjnym logarytmem tj. $q = \ln r$ (rzeczywiste) jeśli $r = e^q$ (jako funkcja monotoniczna jest odwracalna). Jest to oczywiście funkcja holomorficzna, jako odwrotna do holomorficznego i $\ln'(z) = 1/z$ (często piszemy zamiennie \ln i \log)

Ma jednak dwa istotne problemy. Po pierwsze nie istnieje $\ln 0$. Po drugie ϕ można wybrać niejednoznacznie np. $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ i ogólniej $\phi \rightarrow \phi + 2\pi n$ dla całkowitych n . jest to więc funkcja wieloznaczna. Usiłując ją zdefiniować w sposób ciągły zaczynając od dodatniej osi rzeczywistej, zakładając tam $\phi = 0$ napotykamy problem np. dochodząc do ujemnej osi rzeczywistej z obu stron. Od $\text{Im} > 0$ dochodzimy do $\phi = \pi$ a od $\text{Im} < 0$ do $\phi = -\pi$. Musimy wybrać: albo pozostawiamy funkcję jako nieciągłą dla $z = (x > 0, 0)$, $z = (x < 0, 0)$ lub dowolnej innej półprostej wychodzącej z zera (a nawet dowolnej krzywej od zera do nieskończoności, bez samoprzecięć) albo umożliwiamy jej wieloznaczność tj. dopuszczamy wartości różniące się o $2\pi in$ (n – całkowite), tworząc „śrubę” o skoku 2π dla części urojonej, jak na rysunkach. Obie wersje będziemy stosować, w zależności od problemu. Przyjmuje się argument główny ϕ i logarytm główny jeśli $z = |z|e^{i\phi}$ i $\ln z = \ln |z| + i\phi$ dla $\phi \in]-\pi, \pi]$.

Funkcje odwrotne do hiperbolicznych – area i trygonometrycznych – cyklometryczne

Dla funkcji hiperbolicznych cosh, sinh, tanh, coth definiuje się odpowiednio odwrotne funkcje area (powierzchnia) arcosh, arsinh, artanh, arcoth. Dla funkcji trygonometrycznych sin, cos,

tan, cot, definiuje się odpowiednio odwrotne funkcje cyklotometryczne arcus (łuk), arcsin, arccos, arctan, arccot. Są wieloznaczne, przeważnie można je powiązać z logarytmem, np.

$$\operatorname{arsinh} z = \ln(z + \sqrt{1 + z^2}), \operatorname{arcosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \operatorname{artanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}$$

Na mocy pochodnej funkcji odwrotnej mamy m.in.

$$\arctan' z = (1 + z^2)^{-1}, \operatorname{artanh}' z = (1 - z^2)^{-1}$$

które są jednoznaczne, ale także dwuznaczne

$$\operatorname{arcosh}' z = (z^2 - 1)^{-1/2}, \operatorname{arsinh}' z = (1 + z^2)^{-1/2}$$

Komentarz:

Konstrukcję funkcji wykładniczej, hiperbolicznych i trygonometrycznych można odwrócić, zaczynając np. od logarytmu jako $\ln z = \int dz/z$ oraz $\ln 1 = 0$ i przyjmując e^z jako funkcję odwrotną (albo równoważnie e^z jako rozwiązanie równania $f' = f$ z $f(0) = 1$ lub $f(z+w) = f(z)f(w)$ i $f(0) = f'(0) = 1$) Podobnie można zdefiniować dla x rzeczywistego

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}$$

i z niego wyprowadzić resztę, poprzez narzucenie relacji funkcyjnych, a także $\pi = 2 \arctan(+\infty)$ (i z szeregu całkowego $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$). Jest to jednak uciążliwe i mało eleganckie a przy tym wolno zbieżne. Poza tym funkcje area i cyklotometryczne są wieloznaczne, podobnie jak logarytm, z którym są powiązane.

Potęgowanie:

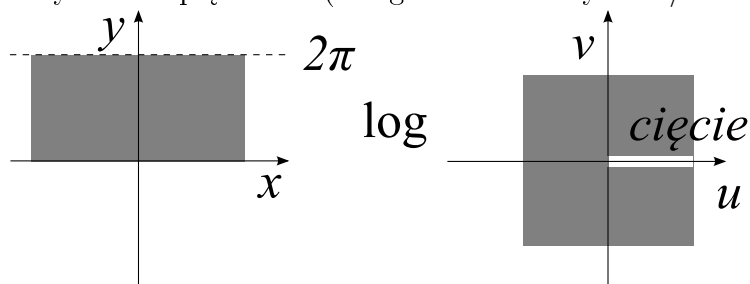
z^a dla dowolnej liczby zespolonej z nie zawsze jest określone jednoznacznie, np. i^i . Formalnie definiujemy

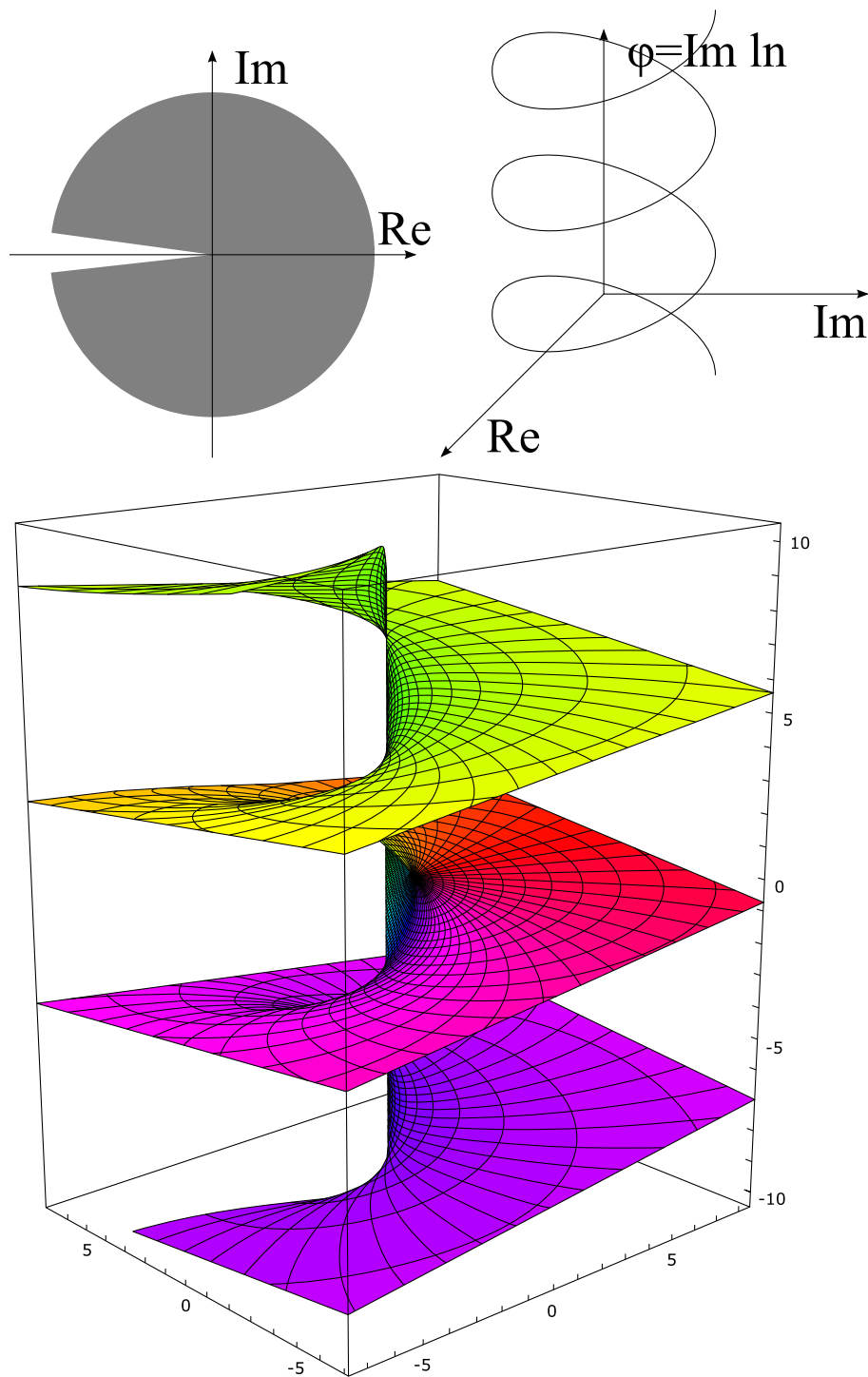
$$z^a = e^{a \ln z}$$

jednak logarytm jest wieloznaczny, a więc i potęga

$$z^a = e^{a \ln z} e^{2\pi k a i}$$

dla dowolnej liczby całkowitej k . Jeśli $a = p/q$ jest liczbą wymierną (p, q całkowite, najmniejsze możliwe q) to mamy q możliwych wartości). W przeciwnym razie nieskończenie wiele, np. $z^{1/3}$ ma trzy a $z^{2/15}$ piętnaście (uwaga $z^{2/6}$ ma trzy bo $2/6 = 1/3$).





pl.wikipedia.org/wiki/Powierzchnia_Riemanna

Całki konturowe i twierdzenie Cauchy'ego

$f = u + iv$, $dz = dx + idy$ (czasem także $dz^* = dx - idy$)

Całka zorientowana po krzywej C na płaszczyźnie zespolonej

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy)$$

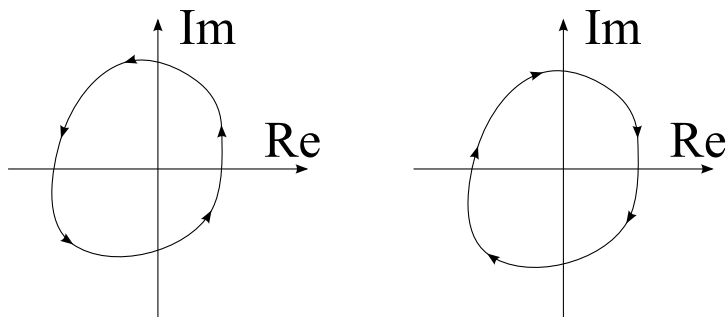
przy parametryzacji $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} \right) dt + i \int_a^b \left(v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt$$

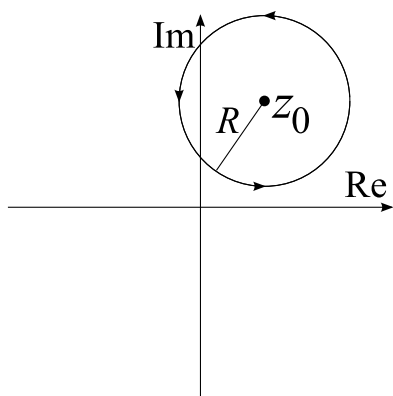
Zakładamy że kontur jest przynajmniej kawałkami gładki, tj. ma ciągłe pochodne (punkty załamania są bez znaczenia). Dla konturów zamkniętych są możliwe dwie orientacje *dające wynik o przeciwnym znaku*, jak na rysunku, oznaczane odpowiednio

$$\oint f(z)dz \text{ przeciwnie do ruchu wskazówek, standardowa}$$

$$= - \oint f(z)dz \text{ zgodnie z ruchem wskazówek}$$



Przykład:



$$\oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^m dz, \quad m \text{ całkowite}$$

Całka po okręgu o środku z_0 i promieniu R (rysunek). Parametryzujemy $z = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} e^{imt} i R e^{it} dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{dla } m = -1 \\ 0 & \text{dla } m \neq -1 \end{cases}$$

Jeśli istnieje funkcja pierwotna, tj. $F(z)$ taka że $f = dF/dz$ to

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dt} dt = \int_a^b \frac{dF}{dt} dt = F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_b) - F(z_a)$$

dla $z_a = z(a)$, $z_b = z(b)$.

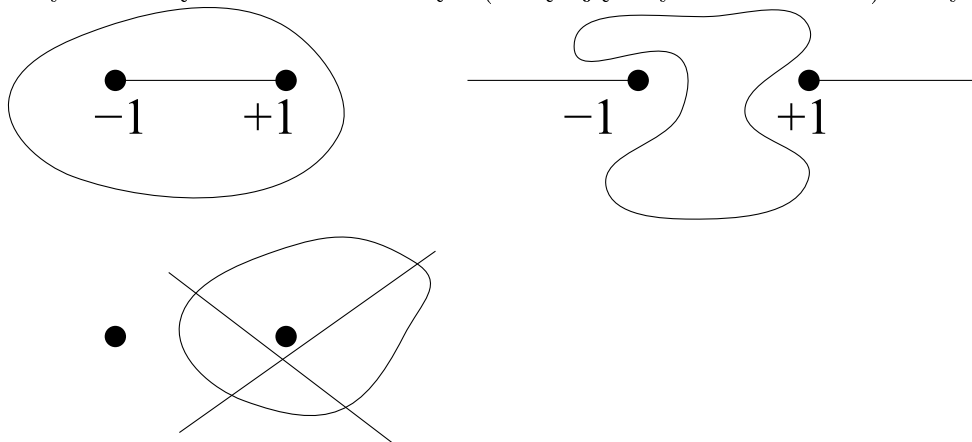
Czy dla konturu zamkniętego, skoro $z_a = z_b$ to $F(z_b) - F(z_a) = 0$? Wydaje się że tak, ale już zastrzegaliśmy, że funkcje zespolone czasem są wieloznaczne. Mając możliwe różne wartości w tym samym punkcie, różnica nie musi być zero, ale dzieje się to w sytuacjach szczególnych (niekoniecznie rzadkich), ale tylko przy wieloznaczności. Tak właśnie dzieje się w przykładzie dla $m = -1$. Wtedy bowiem $F(z) = \ln(z - z_0)$ a już wiemy że logarytmem nie daje się „okrążyć” zera w sposób jednoznaczny (wspinamy się na następną część powierzchni Riemanna). Gdybyśmy nie okrążali zera, to pozostałibyśmy w obszarze jednoznaczności i całka byłaby zero. W tym sensie, jeśli kontur jest zamknięty, ale na powierzchni Riemanna funkcji pierwotnej, to całka jest zero. Niestety nie da się z góry przewidzieć jak wygląda powierzchnia Riemanna dla funkcji pierwotnej (i w ogóle jeszcze nie wiemy czy taka funkcja zawsze istnieje). Całkowana funkcja jest holomorficzną na konturze i w jego otoczeniu, ale nie w całym wnętrzu koła, bo nie istnieje (jest nieskończona) w $z = z_0$. To jest powód dlaczego całka nie jest zero (choć nie zawsze tak jest, np. dla $m = -2$ jest zero mimo nieholomorficznego w $z = z_0$).

Przykład:

Dla funkcji \sqrt{z} okrąg jednostkowy nie jest zamknięty bo przecina cięcie. Można oczywiście to zignorować, ale wtedy wynik będzie od wyboru cięcia zależał, a tego nie chcemy. Można jednak okrąg podwoić i wtedy całka jest, bo odpowiednia powierzchnia Riemanna wraca na tę samą wartość (bo $(\phi + 4\pi)/2 = \phi/2 + 2\pi$ i \sqrt{z} jest taki sam. Ogólnie kontur musi okrążyć zero parzystą ilość razy, aby całka była jednoznaczna. Podobnie dla $z^{1/3}$ trzeba okrążyć 3 razy (lub wielokrotność). Dla $\ln z$ jedyna możliwość to powrót, żadna skończona liczba okrążeń nie pomoże. Natomiast dla

$$(z^2 - 1)^{1/2} = ((z - 1)(z + 1))^{1/2}$$

cięcia możemy dać albo pomiędzy -1 i $+1$ albo dla $(x < -1, 0)$ i $(x > +1, 0)$, obie wersje i kontury zamknięte oraz niezamknięte (okrążające tylko -1 lub $+1$) na rysunku.



Zamknięcie konturu zależy od powrotu f na tę samą wartość, co dla skomplikowanych funkcji może być trudne do sprawdzenia.

Twierdzenie Cauchy’ego-Goursata

Jeśli w ściągającym (jednospójnym, bez dziur) obszarze D funkcja $f(z)$ jest holomorficzną (w każdym punkcie D) To całka po konturze D (kawałkami gładkim), tj. brzegu $C = \partial D$ (tzw. kontur Jordana, nie przecina sam siebie), z f wynosi zero, czyli

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Dowód:

Cauchy odwołał się do twierdzenia Greena

$$\oint_C f(z)dz = \oint_c (u dx - v dy) + i \oint_c (v dx + u dy) = \int_D (-\partial_x v - \partial_y u) dx dy + i \int_D (\partial_x u - \partial_y v) dx dy$$

czyli zero z warunków Cauchy-Riemanna. Jednak w twierdzeniu Greena zakładaliśmy ciągłość pochodnych. Tu nie musimy tego zakładać. Okazuje się, że ciągłość będzie, ale to dopiero wynika z twierdzenia. Aby uniknąć błędnego koła, powinniśmy poradzić sobie bez Greena, tak zrobił Goursat, dowód na końcu skryptu.

Punkty osobliwe:

- Jeśli $f(z)$ i $f'(z)$ istnieje to z jest punktem regularnym, nie osobliwym. Uwaga: Punkt z jest osobliwy jeśli $f'(z)$ nie istnieje. Uwaga: często osobliwość jest tylko pozorna, np. $\sin z/z$ nie jest zdefiniowane w 0, ale można uzupełnić granicą czy wartością 1 dla $z = 0$, wtedy punkt jest nadal regularny.
- Jeśli $f(z)$ jest holomorficzną w kole o środku z_0 i jakimś promieniu, oprócz z_0 gdzie nie jest, to z_0 jest *punktem osobliwym izolowanym*, np. i dla $1/(z - i)$
- w przeciwnym razie z_0 jest punktem osobliwym nieizolowanym, np. $\sin(1/z)$ ma punkty osobliwe $1/\pi n$ a więc 0 jest osobliwe nieizolowane.
- z_0 biegun rzędu n (liczba naturalna), jeśli $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^n = a \neq 0$, np. $1/(z - 2i)$ ma biegun pierwszego rzędu (prosty) w $2i$, $1/(z - 3)^2$ ma biegun rzędu 2 w 3 a $z/[(z - 2i)(z + 2)^3]$ ma biegun pierwszego rzędu w $2i$ a trzeciego w -2
- punkt rozgałęzienia: punkt osobliwy dowolnie blisko którego funkcja nie może być określona w sposób ciągły i jednoznaczny, przeważnie stanowi koniec linii cięcia.

Wnioski z twierdzenia Cauchy'ego-Goursata:

Całka z funkcji holomorficzej nie zależy od drogi, tylko punktów końcowych, dla krzywej skierowanej ale nie zamkniętej. Stąd można zdefiniować jednoznacznie $F(z) = \int_{z_0}^z f(\tilde{z})d\tilde{z}$ i F jest holomorficzną.

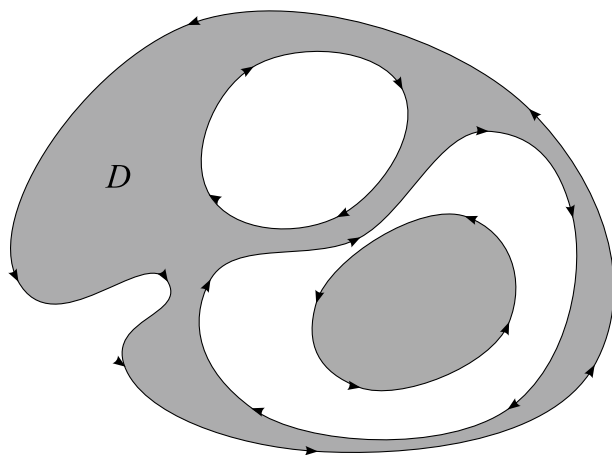
Dowód:

Łączymy punkty z i $z + h$ odcinkiem,

$$F(z + h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(\tilde{z})d\tilde{z} = f(z + \xi h)h$$

z twierdzenia o wartości średniej dla $\xi \in]0, 1[$, a f jest ciągła, czyli $f(z + \xi h) \rightarrow f(z)$.

Jeśli obszar nie jest jednospójny (rysunek - przypomnienie) ale nadal funkcja jest w nim holomorficzną (nie ma punktów osobliwych) to *suma* (odpowiednio zorientowanych!) całek jest zero. Możemy konturom dowolnie zmieniać kształt tak długo, dopóki pozostajemy w obszarze holomorficznosci (poza punktami osobliwymi)



Przykład:

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{zdz}{z^2 - 3z + 2}$$

Funkcja ma bieguny, ale możemy (a) rozbić na ułamki proste, (b) wybrać wygodniejsze kontury (rysunek). $z^2 - 3z + 2 = (z - 1)(z - 2)$ i

$$\frac{z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{2}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}$$

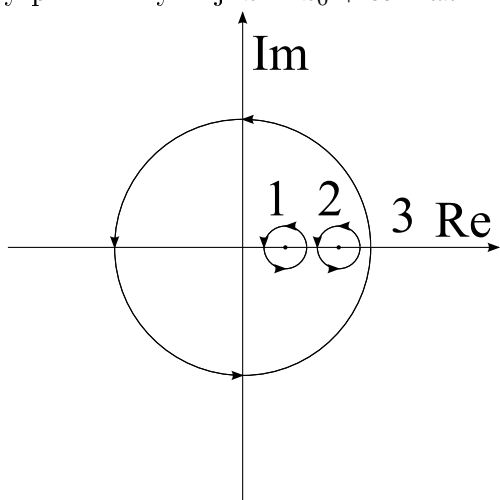
czyli

$$I = \oint_{|z|=3} \frac{2dz}{z - 2} - \oint_{|z|=3} \frac{dz}{z - 1} = \oint_{|z-2|=\epsilon} \frac{2dz}{z - 2} - \oint_{|z-1|=\epsilon} \frac{dz}{z - 1}$$

(rysunek). Tymczasem

$$\oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} i d\phi = 2\pi i$$

przy parametryzacji $z = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$ $dz = i\epsilon d\phi$. Stąd $I = 2\pi i(2 - 1) = 2\pi i$.



Przykład:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos(2bx) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} (e^{2ibx} + e^{-2ibx}) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - 2ibx} dx / 2$$

$a > 0, b$ liczby rzeczywiste (wykorzystaliśmy od razu fakt że $2 \cos y = 2 \cos(-y) = e^{iy} + e^{-iy}$. e^{-az^2} jest wszędzie holomorficzna. Weźmy kontur C jak na rysunku i przejdźmy do granicy $R \rightarrow \infty$. Będziemy tu i wielu późniejszych przykładach korzystać z ważnej nierówności (uogólnienie nierówności trójkąta

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

dla rzeczywistego t i zespolonego f . Całka po konturze jest zero, ale jest też sumą czterech wkładów od kolejnych boków prostokąta

$$0 = \oint_C e^{-az^2} = I_A + I_B + I_C + I_D$$

gdzie

$$I_A = \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$$

Wykorzystaliśmy tu całkę Gaussa, jeszcze do niej wrócimy.

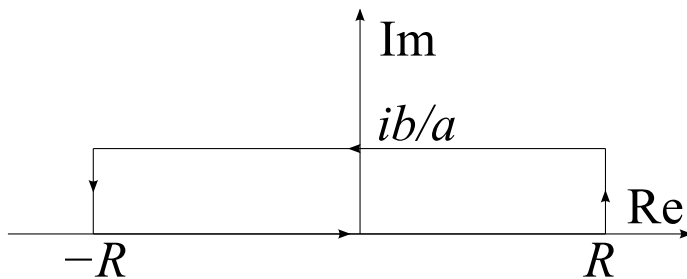
$$I_B = \int_0^{b/a} e^{-a(R^2 - y^2 + 2Ryi)} i dy$$

ale $|e^{ay^2 - 2Raiy}| \leq e^{b^2/a}$ czyli $|I_B| \leq e^{-aR^2} e^{b^2/a} \rightarrow 0$ (przy $R \rightarrow \infty$) Podobnie zanika I_D . Natomiast

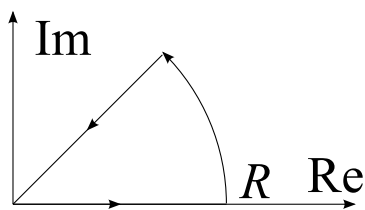
$$I_C = - \int_{-R}^R dx e^{-a(x+ib/a)^2} dy = - \int_{-R}^R e^{-ax^2 - 2ibax + b^2/a} \rightarrow -I e^{b^2/a}$$

Zatem z $I_A = -I_C$ mamy

$$I = e^{-b^2/a} \sqrt{\pi/a}$$



Przykład:



$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

Bierzemy $f(z) = e^{-z^2}$ i całkę po konturze na rysunku z $R \rightarrow \infty$. Funkcja jest holomorficzna wszędzie więc całka po konturze znika. Z drugiej strony jest sumą całek po półprostej rzeczywistej dodatniej, łuku okręgu i półprostej pod kątem $\pi/4$.

$$0 = I_A + I_B + I_C$$

gdzie

$$I_A = \int_0^R e^{-x^2} dx \rightarrow \sqrt{\pi}/2$$

(połowa całki Gaussa). Na łuku parametryzujemy kątem $z = Re^{i\phi}$, $dz = Rie^{i\phi}d\phi$

$$I_B = \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\phi}} Rie^{i\phi} d\phi$$

Szacujemy

$$|I_B| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\phi} d\phi$$

ale $\cos \phi \geq (1 - 2\phi/\pi)$ dla $\phi \in [0, \pi/2]$ bo tam \cos jest wklęsły (funkcja wklęsła jest większa niż wartości na prostej łączącej punkty końcowe, rysunek). Stąd

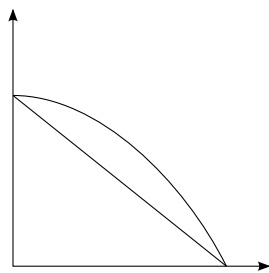
$$|I_B| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(1-4\phi/\pi)} d\phi = \frac{1 - e^{-R^2}}{4R} \pi \rightarrow 0$$

Ostatecznie na ostatniej prostej $z = e^{i\pi/4}t$, $z^2 = it^2$,

$$I_C = - \int_0^\infty e^{i\pi/4} e^{-it^2} dt \rightarrow -e^{i\pi/4} \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx$$

Z porównania z $I_A = -I_C$ i $e^{-i\pi/4} = (1 - i)/\sqrt{2}$

$$\int_0^\infty \cos x^2 = \int_0^\infty \sin x^2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$



Wzór Cauchy'ego:

Jeśli funkcja f jest holomorficzna i kontur C otacza punkt z_0 (rysunek) to

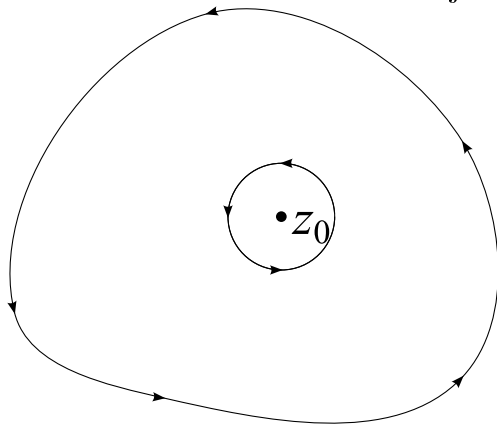
$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$$

Dowód:

Funkcja $f(z)/(z - z_0)$ jest holomorphyzna w całym obszarze ograniczonym C poza z_0 , możemy zatem kontur zastąpić małym okręgiem środka z_0 i promieniu $\epsilon \rightarrow 0$ i użyć parametryzacji $z = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$, $dz = i\epsilon e^{i\phi} d\phi$

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} i f(z_0 + \epsilon e^{i\phi}) d\phi \rightarrow 2\pi i f(z_0)$$

np. z twierdzenia o wartości średniej i ciągłości f .



Zastosowanie:

1.

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z - 2} dz$$

Jeśli C nie okrąży $z = 2$ o całka znika, jeśli obejmuje jest równa $2\pi i e^2$

2.

$$I = \oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz$$

Mianownik można zapisać $(z + 1)(z - 1)$ Wzór Cauchy'ego działa więc dla $z_0 = 1$ i -1 . Jeśli C nie okrąży 1 ani -1 to całka znika. Jeśli obejmuje tylko -1 to wyłączamy czynnik $z + 1$ z mianownika i wynik $2\pi i (z^2 + 1)/(z - 1)|_{z=-1} = -2\pi i$. Jeśli obejmuje tylko $+1$ to wynik jest $2\pi i (z^2 + 1)/(z + 1)|_{z=1} = 2\pi i$. Jeśli C obejmuje oba, to sumujemy i znów zero.

Wzór Cauchy'ego dla pochodnych:

Okazuje się że we wzorze Cauchy'ego możemy wejść z pochodną po z_0 pod znak całki, jeśli f jest holomorphyzna

$$2\pi i f'(z_0) = \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \oint_C f(z) dz \left(\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right) \\ &= \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} = \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2} + \oint_C \frac{f(z) h dz}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - h)} \end{aligned}$$

Jeśli weźmiemy tak małe h i C jako okrąg o środku w z_0 o promieniu $r > |h|$ to z nierówności trójkąta $|z - z_0 - h| \geq |z - z_0| - |h| = r - |h|$. Stąd oszacowanie

$$\left| \oint_C \frac{f(z)h dz}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{i\phi})h|}{r(r - |h|)} \rightarrow 0$$

dla $|h| \rightarrow 0$ bo $|f|$ jest ograniczone (na zbiorze zwartym).

Dowód łatwo uogólnia się na wyższe pochodne. Uwaga: to nie jest automatyczne, bo np. $f(z)/(z - z_0)$ nie jest holomorphyzna w z_0 , trzeba użyć wspólnego mianownika, rozbięcia licznika na wielomian względem h i przejść przez argument z nierównością trójkąta. W istocie jednak dowód jest analogiczny do całkowitej reguły Leibniza (o wejściu różniczkowania pod całkę)

$$2\pi i f^{(n)}(z_0) = n! \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Pozwala to na wykorzystanie biegunów dowolnego rzędu. Zatem **funkcja holomorphyzna ma wszystkie pochodne**, oczywiście w obszarze ograniczonym przez C .

Przypomnienie: dla funkcji rzeczywistych to nie musi być prawdą, np. $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ i $f(0) = 0$ ma pierwszą pochodną w zerze (zerową), ale nie drugą.

Przykład:

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{z^2(z - i)^3} dz$$

gdzie C jest okręgiem $|z| = 2$. Funkcja ma dwa izolowane bieguny w $z = 0$ drugiego rzędu i w $z = i$ trzeciego rzędu. Zamieniając kontur na dwa okrężające osobno bieguny $C \rightarrow C_0 + C_i$, mamy $I = I_0 + I_i$,

$$I_0 = \oint_{C_0} \frac{\cos z}{z^2(z - i)^3} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{\cos z}{(z - i)^3} \right)_{z=0} = -6\pi i$$

$$I_i = \oint_{C_i} \frac{\cos z}{z^2(z - i)^3} dz = \pi i \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\cos z}{z^2} \right)_{z=i} = \pi i (\cosh 1 - 4 \sinh 1)$$

Szereg Taylora i Laurenta

Przypomnienie:

Szereg jest zbieżny punktowo lub jednostajnie granica

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) \rightarrow f(x)$$

istnieje w sensie różna δ dla różnych x lub ta sama δ dla wszystkich x , w pewnego zakresu, zwanego obszarem zbieżności.

Kryteria zbieżności (zwykle punktowej): d'Alemberta

$$\left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right| \rightarrow g < 1$$

Cauchy'ego

$$\sqrt[k]{|f_k|} \rightarrow g < 1$$

Dla szeregów potęgowych $f_k = a_k(x - x_0)^k$ jest dla na odcinku $|z - z_0| < R$, gdzie $|a_{k+1}/a_k| \rightarrow 1/R$ (jednostajnie dla $r < R$)

Przenosimy te pojęcia na szeregi (zwłaszcza potęgowe) zespolone, np.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

zbieżny dla $|z| < 1$ (jednostajnie dla $|z| < q < 1$).

Jeśli szereg zbiega jednostajnie do ciągłej granicy na obszarze (niekoniecznie zwartym) D to zbiegają na nim także jednostajnie wszelkie całki po konturach (kawałkami gładkich).

Pierwsze kryterium Weierstrassa

Jeśli szereg funkcji holomorficzych w D zbiega do f jednostajnie, na każdym obszarze domkniętym $B \subset D$ (zbieżność niemal jednostajna), to: $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w D , a szereg dowolnych pochodnych zbiega jednostajnie w $B \subset D$. Oznacza to, że wtedy możemy różniczkować składniki szeregu.

Drugie kryterium Weierstrassa

Jeśli szereg funkcji holomorficzych na D i ciągłych na jego brzegu zbiega jednostajnie (lub ma ciągłą granicę), to jest zbieżny jednostajnie w całym D . Wynika to z twierdzenia i wzoru Cauchy'ego i zamiany sumy z całką przy zbieżności jednostajnej.

M-kryterium Weierstrassa

Jeśli $0 \leq |z| \leq R$, $|f_n(z)| \leq u_n$ w D (u nie zależy od z) i szereg $\sum_n u_n$ zbieżny, to $\sum_n f_n$ jednostajnie zbieżny w D (u majoryzuje f).

Dowód:

Skoro $\sum_n u_n$ zbieżny to $\sum_{n>N} u_n \rightarrow 0$ a więc i $\sum_{n>N} f_n \rightarrow 0$.

Dla szeregów potęgowych $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ można więc używać rzeczywistych kryteriów zbieżności (twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda). Szereg jest zbieżny w kole $|z - z_0| \leq r < R$, gdzie

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1/R \text{ Cauchy}, \quad |a_{n+1}/a_n| \rightarrow 1/R \text{ d'Alembert}$$

(ogólniejsze jest kryterium Cauchy, jeśli weźmiemy $1/R$ jako granicę górną czyli największą wartość wśród punktów skupienia). Granica jest ciągła. Promień zbieżności R jest także promieniem zbieżności wszystkich pochodnych. Funkcja ma jednoznaczny reprezentację przez szereg $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ dla ustalonego z_0 bo $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Twierdzenie Taylora:

Jeśli f jest holomorficzną w kole $|z - z_0| \leq R$ to można ją tam reprezentować zbieżnym jednostajnie szeregiem potęgowym $\sum_n a_n(z - z_0)^n$. Stąd też zwykle funkcje holomorficze utożsamiamy z analitycznymi.

Dowód:

Ze wzoru Cauchy'ego

$$2\pi i a_n = 2\pi f^{(n)}/n! = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Ponieważ

$$2\pi |a_n| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{i\phi})|}{R^n} d\phi \leq 2\pi M/R^n$$

gdzie M jest maksimum $f(z)$ dla $|z - z_0| = R$ (istnieje i jest dla funkcji ciągłej na zbiorze zwartym). Stąd $\sqrt[n]{|a_n|} \leq M^{1/n}/R \rightarrow 1/R$. Z kolei znów ze wzoru Cauchy'ego

$$2\pi i f(\xi) = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)dz}{z-\xi} = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)dz}{(z-z_0) - (\xi-z_0)} =$$

$$\oint_{|z-z_0|=R} \sum_{n \geq 0} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} (\xi-z_0)^n = \sum_{n \geq 0} (\xi-z_0)^n \oint_{|z-z_0|=R} \sum_{n \geq 0} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} a_n (\xi-z_0)^n$$

W ostatnich krokach zamiana kolejności sumy i całki wynika ze zbieżności jednostajnej na $|z - z_0| = R$, górną granicę R nazywamy promieniem zbieżności.

Zauważmy też że z nierówności

$$f^{(n)}(z_0) \leq n!M/R^n$$

dla M jako maksimum funkcji $|f(z)|$ dla $|z - z_0| = R$ wynika że jedyną funkcją wszędzie holomorficzną i ograniczoną jest funkcja stała – **twierdzenie Liouville'a**, bo $|f'(z_0)| \leq M/R$ skąd wynika dla $R \rightarrow \infty$ że $f' = 0$. Uwaga: ograniczoność można zawężyć do kół o rosnącym promieniu $R \rightarrow \infty$, a zamiast koła można też wziąć kwadrat (to się nam jeszcze przyda), środek koła/kwadratu, nie musi się pokrywać z z_0 , wystarczy że jest w stałej odległości, ale już prostokąt już nie działa (kontrprzykład $\sin z$ i $\cos z$).

Przykłady:

Funkcję $(1 - z)^{-1}$ możemy standardowo rozwinąć wokół $z_0 = 0$

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n$$

i promień zbieżności jest równy 1. Jednak możemy rozwijać też wokół i

$$(1 - i - (z - i))^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - i)^n}{(1 - i)^{n+1}}$$

i wtedy promień zbieżności wynosi $|1 - i| = \sqrt{2}$.

Funkcje e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\cosh z$, $\sinh z$ mają już bezpośredni zapis przez szereg i nieskończony promień zbieżności (są zbieżne jednostajnie dla dowolnego R chociaż nie jednostajnie wszędzie naraz)

Dla logarytmu mamy pochodną $\ln' z = 1/z$. Nie możemy więc rozwijać wokół 0 ale np. wokół 1, wtedy

$$1/z = \frac{1}{1 + (z - 1)} = 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (z - 1)^n$$

czyli

$$\ln z = \int \frac{dz}{z} = (z - 1) - \frac{(z - 1)^2}{2} + \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z - 1)^{n+1}}{n+1}$$

promień zbieżności $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (koło o środku 1i promieniu 1). Nie ma więc problemu z wieloznacznością logarytmu, bo nie dochodzimy do przymusowej linii cięcia.

Całki typu Cauchy'ego:

Niech ϕ będzie jakąkolwiek funkcją zespoloną (niekoniecznie holomorficzną), byle można było ją całkować po ustalonej krzywej zamkniętej C (kawałkami gładkiej) z dowolną funkcją ciągłą (czyli np. ϕ jest tam ciągła). Możemy wtedy zdefiniować funkcję holomorficzną $f(z)$ dla z w obszarze ograniczonym C .

$$f(z) = \oint_C \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

Funkcja jest holomorficzną, co wynika z zastosowania dowodu podobnie jak przy pochodnej we wzorze Cauchy'ego, ale nie zakładając holomorficznego ϕ . Uwaga: f nie musi być równa (w granicy) ϕ na C . Kontrprzykład: $\phi(z) = 1/z$ na $|z| = 1$ jako C daje $f = 0$. Równość/ciągłość na brzegu wymaga dodatkowych założeń.

Podstawowe twierdzenie algebry

Uwaga: w nazwie jest algebra, ale dowód wymaga analizy. Dany jest wielomian zespolony

$$W(Z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, a_n \neq 0$$

ma co najmniej jeden pierwiastek czyli istnieje z_0 takie że $W(z_0) = 0$

Dowód:

Przypuśćmy, że nie ma pierwiastka czyli $f(z) = 1/W(z)$ jest wszędzie holomorficzną. Jednak

$$W(z) = z^n(c_n + c_{n-1}/z + \dots + c_0/z^n)$$

a więc dla $|z| > R$ gdzie R jest maksimum z liczb $2\sqrt[k]{|c_{n-k}/c_n|}$ mamy $|W(z)| > |z|^n|c_n|/2$ czyli dla dużych $|z|$ mamy $f(z) \rightarrow 0$. Stąd z twierdzenia Liouville'a f musi być stała, sprzeczność.

Wniosek z twierdzenia: wielomian można rozłożyć na czynniki

$$W(z) = c_n(z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1})$$

przy czym z_k nie muszą być różne.

Przedłużenie analityczne:

Jeśli funkcja f jest holomorficzną w jakimś D i kołach wewnątrz (czyli analityczną) to miejsca zerowe muszą być izolowane, albo wszędzie $f = 0$. Jeśli bowiem tworzyłyby skupienie w z_0 , to wszystkie pochodne f w z_0 byłyby 0 a więc szereg dałby zero w całym kole zbieżności. Stąd wynika jednoznaczność funkcji czyli jeśli $g(z_n) = h(z_n)$ na ciągu z_n mającym punkt skupienia w D to $g = h$ w D (biorąc $f = g - h$).

Wniosek:

Funkcje holomorficzną wystarczy określić dla liczb rzeczywistych, np. $e^x \rightarrow e^z$, $\sin x \rightarrow \sin z$. Jednak nie gwarantuje to jednoznaczności poza osią rzeczywistą, np. $\ln(1 + z^2)$ lub $\ln \cosh z$.

Definicja:

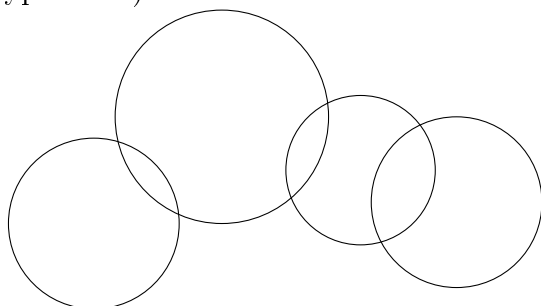
Jeśli $f(z)$ jest holomorficzną w D_0 a F w $D \supset D_0$ i $F(z) = f(z)$ w D_0 to F jest przedłużeniem analitycznym f na D . Wystarczy sprawdzić równość na ciągu z_n z punktem skupienia w D_0 skorzystać z jednoznaczności (czyli wystarczy że $D \cap D_0$ zawiera taki ciąg).

Przykład:

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots$$

jest szeregiem zbieżnym dla $|z| < 1$ a więc $F(z) = (1 - z)^{-1}$ jest jego (jedynym!) przedłużeniem analitycznym.

Przedłużenie analityczne można przeprowadzać nakładając na siebie kolejne koła zbieżności (rysunek), zwykle można pokryć, całą płaszczyznę, oprócz punktów osobliwych, a także osiągnąć wieloznaczność (chyba że dotrzemy do gęstej linii osobliwości, w bardzo złośliwych przypadkach).



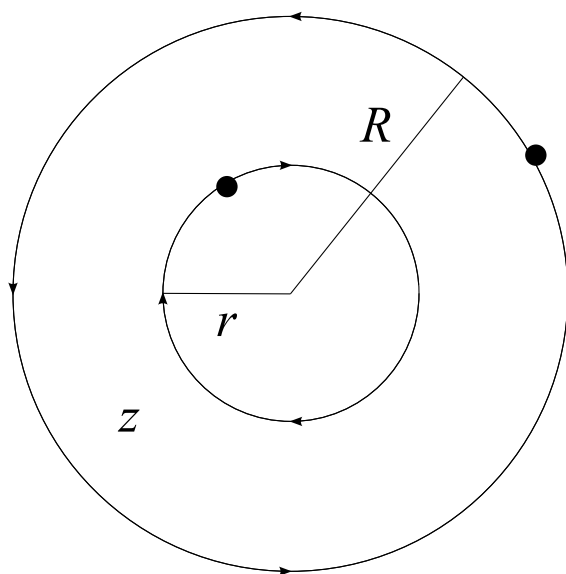
Szeregi potęgowe (zespolone, ale nie tylko) mają powszechne zastosowanie w fizyce, szczególnie w rachunku zaburzeń. Staramy się aby funkcja była analityczna/holomorficzna wszędzie oprócz pewnego (łatwo identyfikowanego) zbioru punktów.

Przykład:

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = z^{-1}(1+z+z^2+\dots) = z^{-1} + 1 + z + z^2 + \dots$$

Szereg jest zbieżny dla $0 < |z| < 1$ ale zawiera *ujemne potęgi* z .

Szereg Laurenta (Pierre Alphonse Laurent):



Jeśli obszarem holomorficzności f jest *pierścienie* tj. zbiór $r < |z - z_0| < R$ (rysunek) to można tam przedstawić f w postaci szeregu

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

czyli dopuszczamy także potęgi ujemne całkowite.

$$2\pi i a_n = \oint_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

gdzie C jest dowolną krzywą w pierścieniu okrążającą z_0 .

Dowód:

Stosujemy wzór Cauchy'ego, ale w nietypowy sposób. Kontur C jest sumą pierścienia zewnętrznego $|z| = R$ i wewnętrznego $|z| = r$ (o przeciwnych orientacjach!),

$$2\pi i f(z) = \oint_{|\xi|=R} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + \oint_{|\eta|=r} \frac{f(\eta) d\eta}{z - \eta}$$

W każdej całce dokonujemy innego rozwinięcia

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z - \eta} = \frac{1}{(z - z_0) - (\eta - z_0)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(\eta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

Oba rozwinięcia są zbieżne w pierścieniu $|\xi - z_0| = R > |z - z_0| > r = |\eta - z_0|$. Po wyciągnięciu sumy przed całki (ze zbieżności jednostajnej) otrzymujemy tezę dla C jako zewnętrznego i wewnętrznego okręgu, który na mocy twierdzenia Cauchy'ego możemy dowolnie modyfikować w pierścieniu. Promienie zbieżności obu części (dodatnie i ujemne n) będą odpowiadać R i r , jak potrzebujemy.

Przykład:

Rozwinąć $f(z) = (1 - z)^{-1}$ dla $|z| > 1$

$$\frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{z - 1} = -z^{-1} \frac{1}{1 - z^{-1}} = -z^{-1} - z^{-2} - \dots = -\sum_{n < 0} z^n$$

Przykład:

Rozwinąć wokół zera

$$f(z) = \frac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 3} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}$$

Dla $|z| < 1$

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} z^n$$

Dla $|z| > 1$

$$\frac{1}{1 - z} = -z^{-1} - z^{-2} + \dots = -\sum_{n < 0} z^n$$

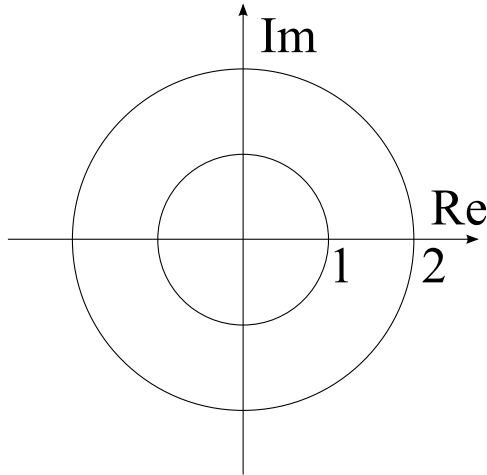
Dla $|z| < 2$

$$\frac{1}{2 - z} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z/2} = \frac{1}{2} (1 + z/2 + (z/2)^2 + \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Dla $|z| > 2$

$$\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-2/z} = -\frac{1}{z} (1 + 2/z + (2/z)^2 + \dots) = -\sum_{n<0} z^n 2^{-1-n}$$

czyli $a_n = 1 + 2^{-n-1}$, $n \geq 0$ dla $|z| < 1$ $a_n = -1$ dla $n \geq 0$ i $a_n = -2^{-n-1}$ dla $n < 0$ dla $1 < |z| < 2$; $a_n = -1 - 2^{-n-1}$, $n < 0$ dla $1 < |z| < 2$ (rysunek)



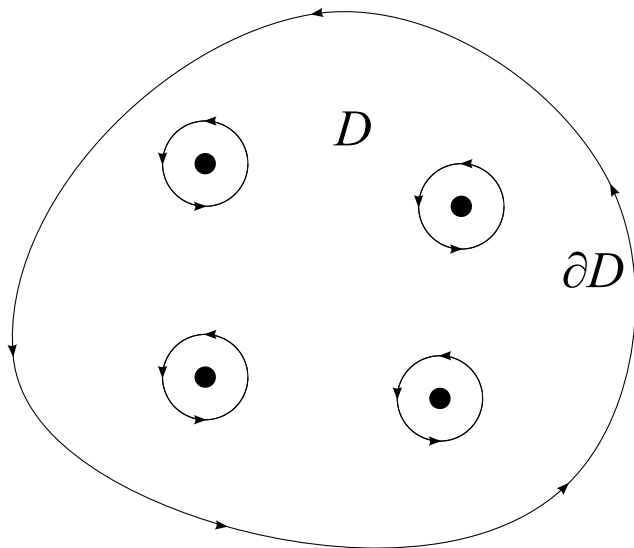
Wokół punktów regularnych (nieosobliwych) można rozwijać funkcję w szereg Taylora, a wokół osobliwych izolowanych w szereg Laurenta. Jeśli ostatnim niezerowym współczynnikiem przy ujemnej potęgze $(z - z_0)^{-n}$ jest a_{-n} , dla $n > 0$, to z_0 jest biegunem rzędu n . Równoważnie $g(z) = f(z)(z - z_0)^n$ staje się holomorficzną i niezerową w z_0 i otoczeniu lub $1/f = (z - z_0)^n/g$ ma zero rzędu n . Np. $2(z - z_0)^{-4} + (z - z_0)^{-2}$ ma w z_0 biegun rzędu 4. Jeśli $a_{-n} \neq 0$ dla dowolnie dużych n to punkt jest *istotnie osobliwy*, np. $e^{1/z}$ wokół zera. Charakter punktu ∞ można określić, zamieniając zmienne $\phi(z) = f(1/z)$ i sprawdzając $z = 0$ (łatwo to wykonać dla szeregu Laurenta dla dostatecznie dalekiego okręgu wewnętrznego r , zamieniając $n \rightarrow -n$). Dla biegunów $|f(z \rightarrow z_0)| \rightarrow \infty$ bo $1/f \rightarrow 0$ ale dla istotnie osobliwych granica $|f(z)|$ nie istnieje (gdyby istniała, musiałyby być równa ∞ a wtedy $1/f$ byłaby holomorficzną i miałyby zero skończonego rzędu, faktycznie blisko takiego punktu f przyjmuje prawie każdą wartość, oprócz jednej)

Przykład:

$$(1-z)^{-1} = -z^{-1}(1-z^{-1})^{-1} = -\sum_{n \geq 0} z^{-n-1}$$

dla $|z| > 1$ a więc $z = \infty$ jest punktem regularnym.

Residua funkcji zespolonej:



W praktyce f ma zwykle dobrze określone, najczęściej w skończonej liczbie, punkty osobliwe (z wyjątkiem złośliwych przykładów). Wtedy całkę po konturze można uprościć do sumy po małych konturach otaczających tylko punkty osobliwe (rysunek). Mając takie izolowane punkty definiujemy *residuum* („pozostałość”)

$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \oint_K f(z) dz / 2\pi i = a_{-1}$$

gdzie K jest konturem otaczającym punkt osobliwy z_0 i żaden inny a a_n są współczynnikami szeregu Laurenta wokół z_0 .

Twierdzenie:

$$\oint_{\partial D} = 2\pi i \sum_m \text{Res}_{z_m} f(z)$$

gdzie z_m są punktami osobliwymi z D (zakładamy skończony zbiór), ∂D brzegiem (kawałkami gładkim) D , a f jest holomorficzną w D poza tym punktami.

Dowód:

Całkując szereg Laurenta po okręgu wokół z_0 mamy

$$\oint_K (z - z_0)^n = \begin{cases} 2\pi i & \text{dla } n = -1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } n \end{cases}$$

Praktyczne obliczanie residuów. Jeśli mamy biegun prosty (pierwszego rzędu) to

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$$

Uwaga: można tu stosować regułę de l'Hospitala czyli $f/g \rightarrow f'/g'$. Dla bieguna drugiego rzędu

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d(f(z)(z - z_0)^2)}{dz}$$

a $n + 1$ -ego rzędu

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n(f(z)(z - z_0)^{n+1})}{n!dz^n}$$

Dla istotnie osobliwych nie ma prostej reguły.

Przykład:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}, \quad 0 < \text{Re} a < 1$$

Skorzystamy z okresowości $e^z = e^{z+2\pi i}$ i faktu że $e^{i\pi} = -1$. Wybieramy kontur jak na rysunku. Całka nie będzie zerowa bo

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

ma biegun prosty (residuum) w $z = i\pi$. Obliczamy

$$\frac{e^{az}}{1 + e^{i\pi} e^{z-i\pi}} = \frac{e^{az}}{1 - e^{z-i\pi}} = -\frac{e^{az}}{(z - i\pi) + (z - i\pi)/2 + \dots}$$

Po pomnożeniu przez $(z - i\pi)$ mianownik można zastąpić 1 czyli $\text{Res} = -e^{i\pi a}$. Równoważnie można zastosować regułę de l'Hospitala.

Z kolei całka po konturze składa się z czterech kolejnych części

$$\oint_C = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdzie

$$I_1 = \int_{-R}^R \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} \rightarrow I$$

$$I_3 = - \int_{-R}^R \frac{e^{ax} e^{2\pi ia} dx}{1 + e^x} \rightarrow -e^{2\pi ia} I$$

z własności $e^{z+2\pi i} = e^z$.

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR+iy a}}{1 + e^{R+iy}} i dy$$

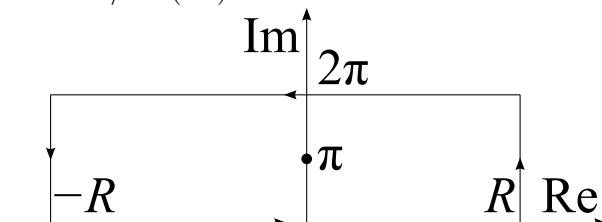
Tę całkę szacujemy $|1 + e^{R+iy}| > |e^R - 1|$ z nierówności trójkąta

$$|I_2| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{\text{Re} a R}}{|e^R - 1|} dy \rightarrow 2\pi e^{(\text{Re} a - 1)R} \rightarrow 0$$

i podobnie I_4 . Stąd ostatecznie

$$-2\pi i e^{i\pi a} = (1 - e^{2\pi ia}) I$$

czyli $I = \pi / \sin(\pi a)$



Residua logarytmiczne:

Niech $f(z)$ będzie holomorficzną i jednoznaczna w D poza (skończoną) liczbą izolowanych biegunów (skończonego rzędu). Jej logarytmicznym residuum z z_0 nazywamy residuum pochodnej logarytmu tej funkcji

$$\psi(z) = (\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Wokół z_0 mamy $f(z) \sim c_m(z - z_0)^m$, przy czym $m > 0$ jest zerem rzędu m a $m < 0$ oznacza biegun rzędu $-m$. Wtedy $\text{Res}_{z_0} = m$. Zatem całka z ψ zlicza krotności zer i biegunów f wewnątrz konturu (razy $2\pi i$).

Przykład:

$$f(z) = z^2 + 1, f'(z) = 2z$$

Tu f ma dwa zera jednokrotne w $\pm i$.

$$\oint_{|z|=R} \frac{2zdz}{z^2 + 1} = \oint_{|z|=R} \left(\frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i} \right) dz$$

Daje to wynik 0 dla $R < 1$ i $4\pi i = 2\pi i(\text{Res}_i + \text{Res}_{-i})$ dla $R > 1$.

Przykład:

$$\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = -\frac{\cos' z}{\sin z}$$

Zatem

$$\oint_{|z|=10} \tan z dz = -12\pi i$$

bo mamy sześć zer w $[-10, 10]$ w $\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2$.

Obliczanie residuów:

$$\frac{\cos(z - 1)}{z^3}$$

ma biegun rzędu 3 w $z = 0$

$$\text{Res}_0 = \frac{d^2 \cos(z - 1)}{2dz^2} = -\frac{\cos(z - 1)}{2} = -1/2$$

po podstawieniu $z = 0$.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

ma residua tam gdzie $\cos z = 0$ czyli w $\pi(k+1/2)$ dla całkowitego k . Ponieważ w tych miejscach zero jest jednokrotne (

$\cos' z = -\sin z = \pm 1$) to biegun jest prosty i można skorzystać choćby z reguły de l'Hospitala czyli $h(z)/z \rightarrow h'(0)$ a więc

$$\text{Res} = \frac{\sin z}{\cos' z} = \frac{\sin z}{-\sin z} = -1$$

Ta zasada obowiązuje dla wszystkich funkcji g/h gdzie h ma jednokrotne zera (dla zer wielokrotnych też jest sposób, ale bardziej skomplikowany, wymaga też wyższych pochodnych, albo kilku wyrazów rozwinięcia w szereg).

Residuum w nieskończoności

Niech f będzie holomorficzną dla $|z| > r$ Wtedy

$$2\pi i \text{Res}_\infty = \oint_{\Gamma} f(z) dz = - \oint_{\Gamma} f(z) dz$$

gdzie Γ jest konturem zamkniętym okrążającym zero ale $|z| > r$. Uwaga: przyjmujemy w definicji orientację zgodną z ruchem wskazówek czyli przeciwną do standardowej.

Możemy rozwinąć $f(z)$ w szereg Laurenta otrzymując zbieżny szereg dla $|z| > r$

$$f(z) = \sum_n a_n z^n$$

Wtedy

$$\text{Res}_\infty = -a_{-1}$$

Często mamy do czynienia z prostszymi sytuacjami, np. $a_n = 0$ dla $n \geq 0$ i wtedy $-zf(z) \rightarrow \text{Res}_\infty$ przy $z \rightarrow \infty$. Jeśli $a_n = 0$ dla $n > N \geq 0$ to trzeba najpierw pominąć wyrazy z $n \geq 0$. Jeśli $a_{-1} = 0$ (np. $a_n = 0$ dla $n \geq -1$) to residuum znika

Jeśli f ma w $|z| < r$ tylko izolowane punkty osobliwe to

$$\sum_w \text{Res}_w = -\text{Res}_\infty$$

czyli suma *wszystkich* residuów, łącznie z nieskończonością, jest zerowa.

Rozszerzenie podstawowego twierdzenia algebry:

Chcemy wiedzieć ile pierwiastków (liczymy także krotności) ma wielomian stopnia n , czyli

$$w(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0, c_n \neq 0$$

wewnątrz konturu C . Możemy skorzystać z residuów logarytmicznych, bo w nie ma biegunów.

$$\psi(z) = \frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{nc_n z^{n-1} + (n-1)c_{n-1} z^{n-2} + \dots}{c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots} = n z^{-1} \frac{1 + (n-1)c_{n-1}/nc_n z + \dots}{1 + c_{n-1}/c_n z + \dots}$$

Jest to gotowa postać szeregu Laurenta dla $|z| > M$, gdzie M jest sumą $|c_k/c_n|$ (aby mianownik był nie miał zer). Wtedy $-\text{Res}_\infty = a_{-1} = n$ i to jest liczba zer (pierwiastków) w .

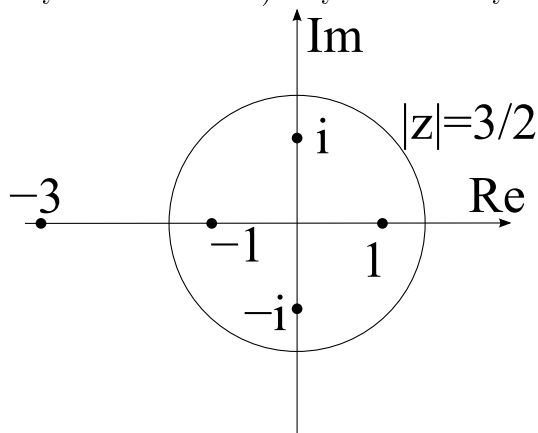
Przykład:

$$\oint_{|z|=3/2} \frac{dz}{(z^4 - 1)(z + 3)}$$

Funkcja ma residua w $\pm 1, \pm i, -3$ (rysunek). Całkę można policzyć sumując cztery pierwsze residua. Ale prościej policzyć residuum w nieskończoności (jest równe 0) i odjąć to w -3 .

$$\text{Res}_{-3} = 1/(z^4 - 1) = 1/(81 - 1) = 1/80$$

czyli wynik $-i\pi/40$. Można ten przykład użłosiwić pisząc zamieniając $z^4 \rightarrow z^{2014}$ (nikt nie policzy 2014 residuów) a tymczasem wynik będzie $-2\pi i/(3^{2014} - 1)$



Zastosowanie residuów do całek rzeczywistych:

Całki typu

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \phi, \cos \phi) d\phi$$

gdzie R jest funkcją wymierną (w/s dla wielomianów w i s). Całkę zamieniamy na zespoloną po konturze $|z| = 1$ (okrąg jednostkowy), $z = e^{i\phi}$, $dz/iz = d\phi$

$$2 \cos \phi = z + z^{-1} = 2\text{Re } z, \quad 2i \sin \phi = z - z^{-1} = i\text{Im } z$$

Przykład:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 4x dx}{2 - \cos x} = \text{Re} \oint_{|z|=1} \frac{z^4}{2 - (z + z^{-1})/2} \frac{dz}{iz}$$

bo $\cos 4x = \text{Re } z^4$. mamy więc

$$\oint_{|z|=1} \frac{2iz^4}{z^2 - 4z + 1} dz$$

równanie $z^2 - 4z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$ ma pierwiastki $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ czyli ale tylko $z_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$ więc jest wewnątrz koła.

$$\text{Res}_{2-\sqrt{3}} = \frac{2iz_1^4}{z_1 - z_2} = -\frac{2i(2 - \sqrt{3})^4}{2\sqrt{3}}$$

czyli wynik całki

$$2\pi(2 - \sqrt{3})^4/\sqrt{3}$$

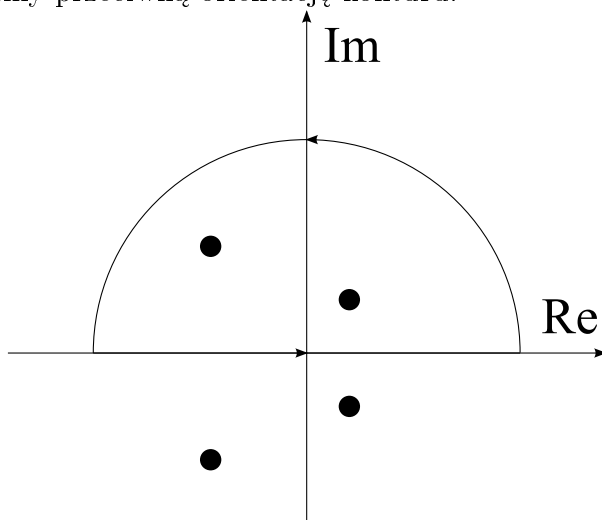
Całki typu

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

gdzie P i Q to wielomiany, takie że Q nie ma zer rzeczywistych i stopień Q jest do najmniej o 2 większy od P (aby całka była zbieżna). Teoretycznie stopień może być większy tylko o 1, ale wtedy trzeba zastrzec tzw. wartość główną, o której powiemy później. Kontur proponowany na rysunku, składa się z prostej rzeczywistej i półokręgu. Całka po konturze jest równa $I + I_0$ (I dla $R \rightarrow \infty$) gdzie I_0 jest wkładem od półokręgu. Pokażemy, że I_0 znika w granicy $R \rightarrow \infty$. Parametryzujemy półokrąg $z = Re^{i\phi}$

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{Rie^{i\phi} P(z) d\phi}{Q(z)} \rightarrow \int_0^\pi ice^{i\phi} / R \rightarrow 0$$

bo iloraz wielomianów zachowuje się jak c/z^2 dla dużych z (gdyby było tylko c/z , trzeba by dodatkowo użyć wartości głównej, o której powiemy). Wystarczy więc zliczyć residua w górnej półpłaszczyźnie $\text{Im} > 0$. Uwaga, można także wziąć dolny półokrąg i tamte residua, ale wtedy mamy przeciwną orientację konturu.



Przykład:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Funkcja $(1+z^2)^{-1}$ spełnia warunki metody i ma residua w $\pm i$. Wewnątrz naszego konturu jest tylko $+i$.

$$\text{Res}_i = \frac{z-i}{1+z^2} = \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

Stąd całka jest równa π (wiemy to skądinąd, to jest arctan).

Całki typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{iax} dx$$

przy czym $F(\pm\infty) \rightarrow 0$. Dla rzeczywistych $a > 0$ okazuje się że można użyć tego samego konturu co poprzednio a wkład od półokręgu znika.

Lemat Jordana:

Jeśli $|F(z)| \leq M(R) \rightarrow 0$ dla $|z| = R$ przy $R \rightarrow \infty$ (czyli jednostajnie) to przy $a > 0$ całka po półokręgu znika w granicy. Szacujemy (zmiennie jak poprzednio)

$$I_0 = \int_0^\pi F(Re^{i\phi}) R i e^{i\phi} e^{iaR \cos \phi} e^{-aR \sin \phi} d\phi$$

Wtedy

$$|I_0| \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR \sin \phi} d\phi = 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \phi} d\phi$$

z symetrii $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$. Jednak dla $\phi \in [0, \pi/2]$ mamy $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ bo \sin jest tam funkcją wklęsłą. Stąd

$$|I_0| \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\phi/\pi} d\phi = \pi M_R (1 - e^{-aR})/a \rightarrow 0$$

Uwaga: jeśli $a < 0$ to można zamienić zmienną $x \rightarrow -x$ lub zamknąć *dolnym* półokręgiem pamiętając o przeciwnej orientacji.

Przykład:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3 \sin ax dx}{(x^2 + b^2)^2}$$

Dla uproszenia założymy rzeczywiste $a, b > 0$. Z symetrii

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 \sin ax dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\text{Im}}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 e^{iax} dx}{(x^2 + b^2)^2}$$

Funkcja

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iaz}}{(z^2 + b^2)^2}$$

Spełnia założenia lematu Jordana i ma biegun drugiego rzędu w ib (jedyny w górnej półpłaszczyźnie)

$$\begin{aligned} \text{Res}_{ib} &= \frac{d}{dz} \frac{z^3 e^{iaz}}{(z + ib)^2} = \\ & [(3z^2 + ia z^3)(z + ib) - 2z^3] \frac{e^{iaz}}{(z + ib)^3} = (2 - ab)e^{-ab}/4 \end{aligned}$$

Stąd $I = \pi(2 - ab)e^{-ab}/4$

Całka po „dziurce od klucza” (także „pac-man”) czyli

$$I = \int_0^\infty x^{a-1} R(x) dx$$

gdzie a jest liczbą *niecałkowitą* (inaczej ta metoda nie działa, choć działa następna). Tu R jest funkcją wymierną (iloraz wielomianów P/Q) bez biegunów dla $x > 0$ i z granicami

$$|z^a R(z)| < M_r \rightarrow 0 \text{ dla } |z| = r \rightarrow 0, \infty$$

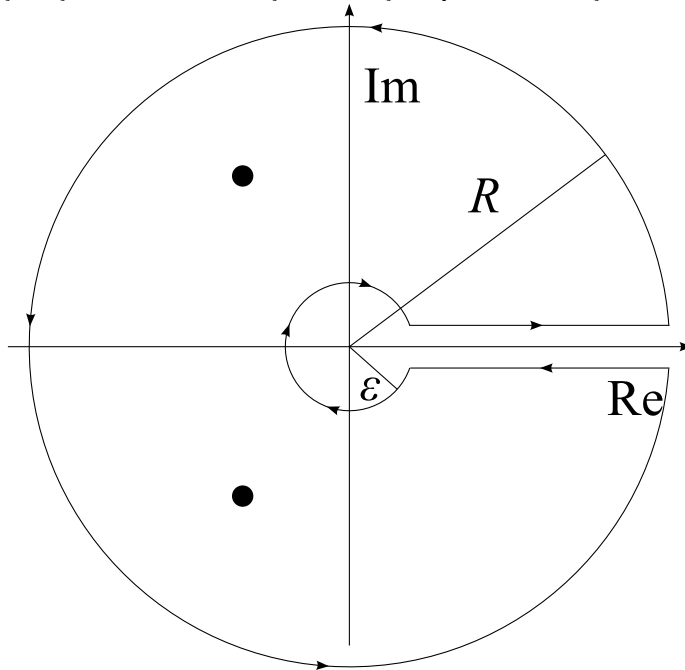
Wybieramy kontur jak na rysunku (stąd nazwa). Proste kawałki tak naprawdę leżą na osi rzeczywistej, ale nie kasują się bo tam jest cięcie, wykorzystujemy fakt że z^a jest funkcją wieloznaczną. Prosty odcinek do przodu daje I . Odcinek powrotny dawałby $-I$, ale... mamy wieloznaczność! Stąd dodatkowy czynnik $e^{2\pi ia}$. Całki po małym i dużym okręgu z kolei znikają, bo

$$I_0 = \int_0^{2\pi} r^a i e^{ia\phi} R(re^{i\phi}) d\phi$$

a więc $|I_0| < 2\pi M_r \rightarrow 0$. Ostatecznie więc

$$I(1 - e^{2\pi ia}) = \sum \text{Res}$$

przy czym z^a określamy tak aby cięcie miała tylko tam gdzie jest klucz.



Przykład:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$$

dla $1 > a > 0$. Mamy residuum w -1 i tam

$$\text{Res}_{-1} = z^{a-1} = e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}$$

Stąd

$$I = -2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{1 - e^{2\pi ia}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

Zobaczmy także, że podstawienie $x = e^t$ zamienia tę całkę na jedną z poprzednich przykładów.

Całka typu:

$$I = \int_0^{\infty} \ln x R(x) dx, \quad J = \int_0^{\infty} R(x) dx,$$

gdzie R jest funkcją wymierną bez biegunów dla $x \geq 0$, i spełniająca

$$|zR(z)| \leq M_r \rightarrow 0$$

dla $|z| = r \rightarrow \infty$. Stosujemy ten sam kontur co poprzednio. Rozważmy funkcję

$$f(z) = R(z) \ln z$$

jest to funkcja wieloznaczna a więc znów wkłady proste nie kasują się. Pamiętając że obchodząc kontur zmieniamy

$$\ln z \rightarrow \ln z + 2\pi i$$

suma wkładów od prostych linii daje

$$\int_0^\infty R(x)(\ln x - \ln x - 2\pi i) = -2\pi J$$

Wkłady od małego i dużego okręgu kasują się bo

$$I_0 = \int_0^{2\pi} ire^{i\phi}(\ln r + i\phi)R(re^{i\phi}) \rightarrow 0$$

tu wykorzystujemy fakt że $\ln r$ zmienia się wolniej niż funkcje potęgowe. Aby policzyć całkę I trzeba dopisać \ln^2

$$f(z) = R(z)(\ln z)^2$$

Wkłady od okręgów znikają tak samo (kwadrat nic nie zmienia), ale inaczej wykorzystujemy niejednoznaczność na liniach prostych gdzie dostajemy wkład

$$\int_0^\infty R(x)(\ln^2 x - (\ln x + 2\pi i)^2)dx = \int_0^\infty R(x)(4\pi^2 - 4\pi i \ln x) = 4\pi^2 J - 4\pi i I$$

Jeśli R jest rzeczywista to odpowiednie całki dostajemy jako części rzeczywiste i urojone sumy reszduów.

Przykład:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+a)^2 + b^2} dx$$

Mamy

$$f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z+a)^2 + b^2}$$

dla rzeczywistych $a, b > 0$ która ma bieguny proste w $-a \pm ib$.

$$\text{Res}_{-a+ib} = \frac{\ln^2(-a+ib)}{2ib} = \frac{(\ln \sqrt{a^2+b^2} + i(\pi - \arctan(b/a)))^2}{2ib}$$

Uwaga: $\ln z = \ln |z| + i\phi$, gdzie kąt ϕ liczymy od dodatniej osi rzeczywistej przeciwnie do ruchu wskazówek!

$$\text{Res}_{-a-ib} = -\frac{\ln^2(-a-ib)}{2ib} = -\frac{(\ln \sqrt{a^2+b^2} + i(\pi + \arctan(b/a)))^2}{2ib}$$

Stąd

$$I = \ln(a^2 + b^2) \arctan(b/a)/2b$$

Takie całki także można liczyć przez zamianę zmiennych $x = e^t$.

Całka „po kości”, typu

$$I = \int_a^b R(x)(x-a)^\alpha(b-x)^{1-\alpha}$$

R jest funkcją wymierną, nie ma biegunów na $[a, b]$. Wybieramy kontur jak na rysunku (stąd nazwa), i funkcję

$$f(z) = R(z)(z-b) \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha$$

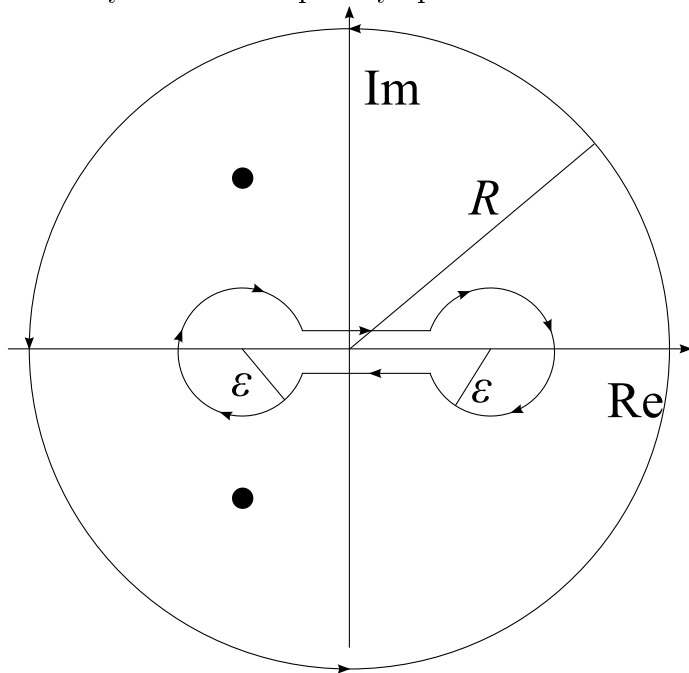
Funkcję określamy tak aby jedyne cięcie było na odcinku $[a, b]$ Dla dużych $|z|$

$$f(z) = R(z)(z-b) \frac{(1-a/z)^\alpha}{(1-b/z)^\alpha}$$

a więc funkcję można rozwijać w szereg Laurenta. Całka po dużym okręgu daje $-2\pi i \text{Res}_\infty$ (jeśli jest niezerowe), po małych znika (to sprawdzamy!), natomiast na odcinkach prostych (od a do b i z powrotem) mamy łącznie

$$\int_a^b R(x)(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha})(x-a)^\alpha(b-x)^{1-\alpha} = 2i \sin(\pi\alpha)I$$

Trzeba oczywiście także policzyć pozostałe residua.



Przykład

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x-x^2}}{x+3} dx$$

Tutaj $a = 0$, $b = 1$ a $\alpha = 1/2$ mamy biegun prosty w -3 a w nieskończoności

$$f(z) = \frac{z-1}{z+3}(1-1/z)^{-1/2} \simeq 1 - 7/2z + \dots$$

czyli $\text{Res}_\infty = 7/2$, a z kolei

$$\text{Res}_{-3} = -4/\sqrt{1+1/3} = -2\sqrt{3}$$

Stąd

$$I/\pi = \text{Res}_{-3} + \text{Res}_\infty = 7/2 - 2\sqrt{3}$$

Całka Gaussa:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0$$

Standardowa metoda liczenia polega na wzięciu kwadratu i zamiany na współrzędne biegunowe $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$,

$$I^2 = \int dx dy e^{-a(x^2+y^2)} = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} \pi d\phi e^{-ar^2} \pi \int_0^\infty e^{-au} du = \pi/a$$

gdzie $u = r^2$. Stąd i dodatniości I mamy $I = \sqrt{\pi/a}$. Okazuje się że można tę całkę policzyć także metodą residuów, choć nie wydaje się to prostsze. Weźmy funkcję

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin \pi z}$$

i scałkujemy po *równoległoboku* o wierzchołkach $-R - iR - 1/2$, $-R - iR + 1/2$, $R + iR + 1/2$, $R + iR - 1/2$ (rysunek), przy $R \rightarrow \infty$. Funkcja ma tam tylko jeden biegun prosty w $z = 0$. Całki po krótkich bokach znikają,

$$I_0 = \int_{-1/2}^{1/2} dt \frac{e^{-\pi R^2 + i\pi t^2 + 2i(1+i)Rt}}{\sin(\pi(R + iR + t))},$$

ponieważ całkę dusi $e^{-\pi R^2}$. Całki po długich bokach dają razem, $z = (1+i)t \pm 1/2$,

$$\int_{-R}^R (1+i) dt \left(\frac{e^{-2\pi t^2 + \pi i(1+i)t + i\pi/4}}{\sin(\pi(1+i)t + \pi/2)} - \frac{e^{-2\pi t^2 - \pi i(1+i)t + i\pi/4}}{\sin(\pi(1+i)t - \pi/2)} \right)$$

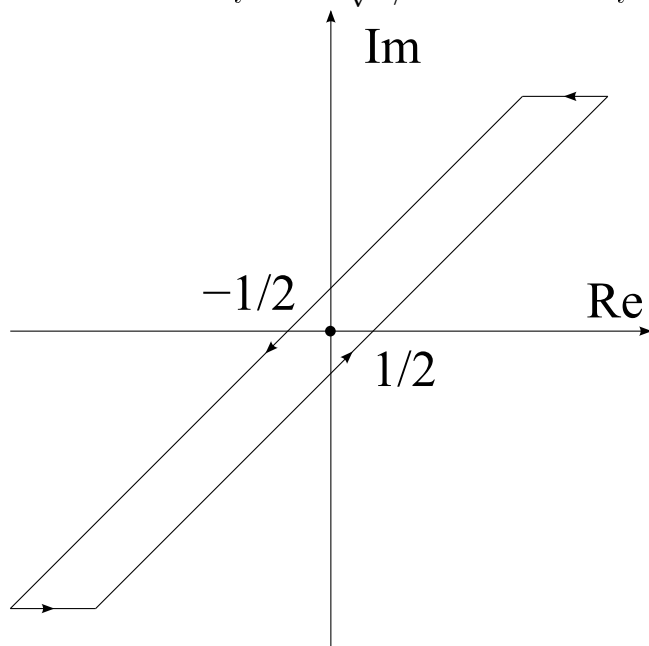
Jednak $\sin(z \pm \pi/2) = \pm \cos z$ oraz $2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz}$ dla $z = (1+i)t$ czyli mamy

$$\int_{-R}^R 2(1+i) dt e^{i\pi/4} e^{-2\pi t^2} = \int_{-R}^R 2\sqrt{2}i e^{-2\pi t^2} dt$$

bo $e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ oraz $(1+i)^2 = 2i$. Z drugiej strony $\text{Res}_0 = 1/\pi$ czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt = 1/\sqrt{2}$$

po zamianie zmiennych $t = \sqrt{a/2\pi s}$ odtwarzamy obiecany wynik.



Faktoryzacja Weierstrassa:

Z podstawowego twierdzenia algebry wiemy, że wielomian można rozbić na czynniki $z - z_k$ gdzie z_k to miejsca zerowe wielomianu

$$W(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

Czy można taką faktoryzację (rozbić na czynniki) na bazie miejsc zerowych uogólnić na dowolne funkcje? Przykład $e^z(z - 1)$ pokazuje, że nie zawsze, bo miejsce zerowe jest tylko jedno $z = 1$ a funkcja nie jest równa $z - 1$. A jednak prawdą okazują się szczególne i przydatne rozbicia Weierstrassa

$$\sin z = z \prod_{n>0} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right), \quad \cos z = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 (n + 1/2)^2}\right)$$

Na pierwszy rzut oka wszystko się zgadza, bo zera \sin są w πn a \cos w $\pi(n + 1/2)$, Funkcje są także okresowe, przynajmniej na oko. Ale gdyby po lewej stronie napisać $e^{\cos z - 1} \sin z$ i $e^{\cos z - 1} \cos z$ to miałyby takie same własności.

Moglibyśmy za to iloczynny zapisać

$$\sin z = z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\pi n}\right), \quad \cos z = \prod_n \left(1 - \frac{z}{\pi(n + 1/2)}\right)$$

gdzie n przebiega wszystkie liczby całkowite. Zapis niby ładniejszy, ale niestety niejednoznaczny, kiedy przechodzimy do granicy. Zaczniemy od sprawdzenia zbieżności iloczynów nieskończonych. Dla $n < |z|$ jest możliwość że któryś czynnik po prostu da zero. Weźmy więc pod uwagę tylko te czynniki, gdzie $n \gg |z|$. Wtedy z^2/n^2 jest już małe i z dobrą dokładnością

$$(1 - z^2/\pi^2 n^2) \simeq e^{-z^2/\pi^2 n^2}$$

Tymczasem suma $\sum_n n^{-2}$ jest zbieżna i skończona i dlatego pierwotne iloczyny faktycznie są zbieżne i to nawet jednostajnie. Gdyby wziąć drugą wersję to mamy

$$(1 - z/\pi n) \simeq e^{-z/\pi n}$$

ale $\sum_n n^{-1}$ jest *rozbieżnym* szeregiem harmonicznym i zbieżności iloczynu może nie być. Dlatego druga wersja wymaga zastrzeżenia że dążymy z n do $+\infty$ i $-\infty$ mniej więcej równo (pojedyncze albo ustalone przesunięcie jest dopuszczalne). Zatem mamy już zbieżność iloczynów i oczywiście holomorficzną granicę. Rozpatrzmy ilorazy

$$f(z) = \frac{\sin z}{z \prod_{n>0} (1 - z^2/\pi^2 n^2)}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{\prod_{n \geq 0} (1 - z^2/\pi^2 (n + 1/2)^2)}$$

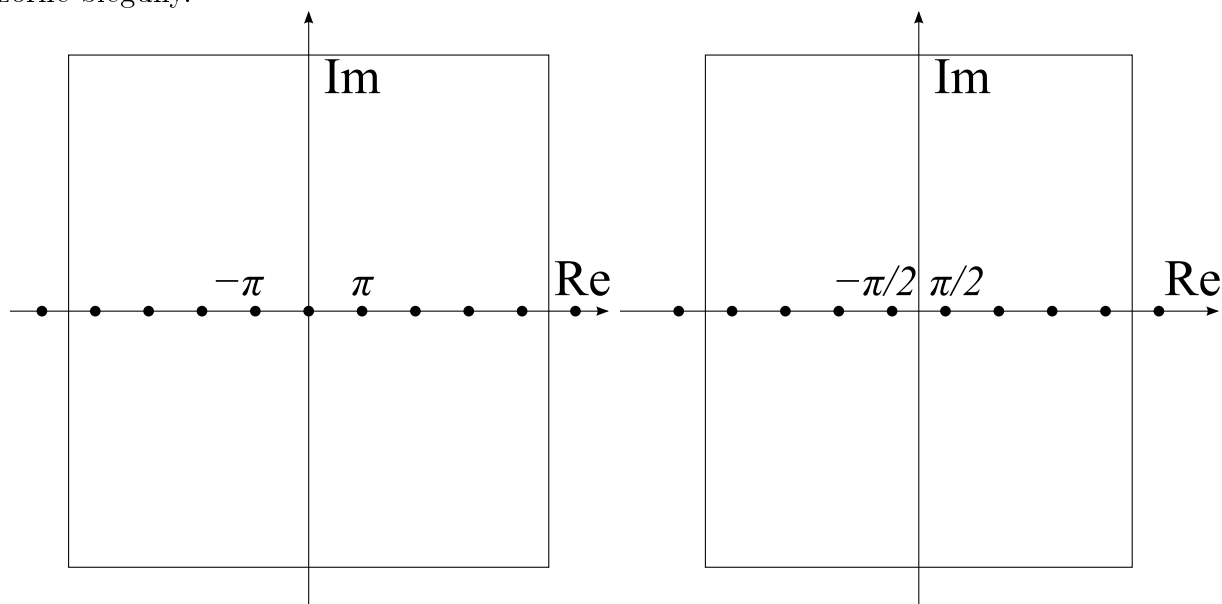
Nasym celem jest pokazanie że $f = g = 1$. Oczywiście $f(0) = g(0) = 1$. Ponadto f i g nie mają ani zer ani biegunów (bo te kasują się pomiędzy licznikiem i mianownikiem). Skoro tak to możemy definiować jednoznacznie $\ln f$ i $\ln g$ i policzyć ich pochodne

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f} = \cot z - \frac{1}{z} - \sum_{n>0} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2} = \cot z - \sum_n \frac{1}{z - \pi n}$$

$$(\ln g)' = \frac{g'}{g} = -\tan z - \sum_{n \geq 0} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 (n + 1/2)^2} = -\tan z - \sum_n \frac{1}{z - \pi(n + 1/2)}$$

przy czym drugie sumy wykonujemy (prawie) symetrycznie, aby zapewnić zbieżność. Wbrew pozorom, nie będzie biegunów. Te z \cot i $-\tan$ dokładnie się kasują. Funkcje są holomorficzne, $(\ln f)'(z) = (\ln g)'(z \pm \pi/2)$ okresowe, $(\ln f)'(z) = (\ln f)'(z + \pi)$ i antysymetryczne $(\ln f)'(z) = -(\ln f)'(-z)$ (g tak samo) i równe 0, dla $z = n\pi/2$ i całkowitych n . To nadal nie wystarcza do pokazania że się zerują, bo takie same własności ma np. $\sin(2z)$.

Weźmy teraz kwadrat o środku w zerze i boku $\pi(2N + 1)$ dla f albo $2\pi N$ dla g (rysunki) i oszacujmy wartości \ln' na tych kwadratach. Taki wybór jest celowy aby nie przechodzić przez pozorne bieguny.



Na pionowych liniach $\operatorname{Im} z = y$,

$$\cot z_f = -\tan z_g = -i \tanh y$$

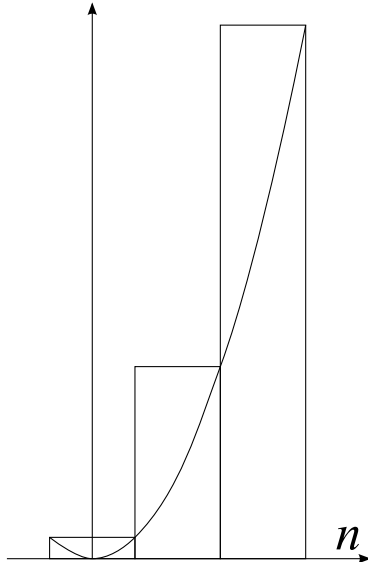
a więc jest to funkcja ograniczona do $[-1, 1]$. Na poziomych liniach \cot i $-\tan$ są praktycznie stałe i równe $\pm i$. Linie pionowe przesunęmy tak, aby przebiegały przez zero (nie szkodzi to zbieżności. Wtedy wkłady od ułamków dają

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2iy}{\pi^2(n + 1/2)^2 + y^2}$$

Tę funkcję można oszacować od góry całką, ponieważ mianownik daje się oszacować od dołu przez $\pi^2(n + 1/2)^2 + y^2$ przy całkowaniu po n od $-1/2$ do nieskończoności (rysunek), czyli

$$\leq \int_{-1/2}^{\infty} \frac{2ydn}{\pi^2 n^2 + y^2} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2y}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = 1 + \arctan(\pi/2y)/\pi$$

podstawiając $n = ty/\pi$. Na poziomych bokach podobnie mamy stałe ograniczenie. Ale to oznacza że maksimum $(\ln g)'$ na kwadracie jest ograniczone stałą (bo \arctan jest), która nie rośnie z N . Tymczasem z twierdzenia Liouville'a wynika że w takim razie $(\ln f)'$ i $(\ln g)'$ są stałe. To już wystarcza, aby stwierdzić że $f = g = 1$ i zakończyć dowód.



Funkcje Eulera

Funkcja *Gamma* jest zdefiniowana

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

dla $\operatorname{Re} z > 0$. Łatwo sprawdzić, że ma pochodną zespoloną, a także, całkując przez części, że $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Tej tożsamości można użyć wstecz, definiując rekurencyjnie $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$. Dla wszystkich z , także o $\operatorname{Re} z \leq 0$, oprócz ujemnych liczb naturalnych, $z = 0, -1, -2, \dots$, gdzie Γ ma bieguny proste. Alternatywna definicja wynika z granicy

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t/n)^n$$

a więc

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - t/n)^n t^{z-1} dt$$

Zamieniając zmienne $s = t/n$ mamy

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 (1 - s)^n s^{z-1} ds$$

Końcową całkę liczymy rekurencyjnie przez części

$$\int_0^1 (1 - s)^n s^{z-1} ds = (1 - s)^n s^z / z \Big|_0^1 + (n/z) \int_0^1 (1 - s)^{n-1} s^z ds$$

i

$$\int_0^1 s^{z+n-1} ds = 1/(z + n)$$

A zatem

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

Ta definicja jest od razu słuszna dla wszystkich z . Dla $\text{Re } z \in]0, 1[$ mamy

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty dt ds e^{-t-s} t^{z-1} s^{-z}$$

Podstawiając $u = t + s$, $v = t/s$, $s = u/(v+1)$, $t = uv/(v+1)$ i $\partial(t, s)/\partial(u, v) = u/(1+v)^2$ dostajemy

$$\int_0^\infty e^{-u} du \int_0^\infty \frac{v^{z-1}}{1+v} dv$$

a biorąc $v = e^w$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{zw} dw}{1 + e^w} = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

co wiemy już z całek zespolonych. Stąd, już dla dowolnych z

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi / \sin \pi z$$

i np. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ co skądinąd wiemy z całki Gaussa po podstawieniu $s = x^2$. Oczywiście $\Gamma(n+1) = n!$. Pochodna (logarytmu) funkcji Γ , tzw. *digamma*

$$\psi(z) = (\ln \Gamma)'(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \dots - \frac{1}{z+n}$$

$$\psi(z+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)}$$

gdzie

$$\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} - \ln n$$

jest stałą Eulera-Mascheroniego $\gamma \simeq 0,57721$. Stała jest prawdopodobnie niewymierna, ale obecnie nie ma na to dowodu.

Funkcja *Beta*

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$$

dla $\operatorname{Re} p, q > 0$. Tymczasem

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty dt ds e^{-t-s} t^{p-1} s^{q-1}$$

Zamieniając zmienne $x = t + s$, $y = t/x$, $t = xy$, $s = x(1-y)$ mamy $x \in [0, \infty[$, $y \in [0, 1]$ i $\partial(t, s)/\partial(x, y) = x$. Stąd

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty dx e^{-x} x^{p+q-1} \int_0^1 dy y^{p-1} (1-y)^{q-1} = \Gamma(p+q)B(p, q)$$

Stąd B można wyrazić (już ogólnie) przez Γ ,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Wzór Stirlinga:

Jest niesłychanie przydatny dla dużych argumentów Γ . Jeśli $z \rightarrow +\infty$ jest rzeczywiste to zamieniając zmienne $t = zs$

$$\Gamma(z+1) = z^{z+1} \int_0^\infty e^{-z(s-\ln s)} ds$$

Tymczasem rozwijając wokół $s = 1$, $\ln(s) \simeq (s-1) - (s-1)^2/2$ otrzymamy

$$\Gamma(z+1) \simeq z^{z+1} e^{-z} \int_0^\infty e^{-z(s-1)^2/2} ds \simeq z^{z+1} e^{-z} \int_{-\infty}^\infty e^{-z(s-1)^2/2} ds = z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z}$$

gdzie wykorzystaliśmy całkę Gaussa. Przybliżenie jest prawdziwe także dla z zespolonych, o ile $\operatorname{Re} z > 0$ i $\operatorname{Im} z/\operatorname{Re} z$ jest stale ograniczone (argument). W dowodzie trzeba tylko obrócić prostą całkowania tak aby była wzdłuż z .

Funkcja Gamma jest bardzo często spotykana w matematyce, ma też liczne własności.

Wartość główna całki:

Do tej pory zastrzegaliśmy że biegun nie znajduje się na konturze całkowania zespolonego. Bierze się to stąd, że inaczej całka jest nie istnieje, albo nie ma jednoznacznej wartości. Można taką sytuację uwzględnić, podchodząc do bieguna *symetrycznie*. Otrzymujemy wtedy *wartość główną* (ang. *principal value*) (także wartość główna Cauchy'ego) całki

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{a-\epsilon} f(x) dx + \int_{b+\epsilon}^b f(x) dx$$

Uwaga, oznaczenia są różne: P , PV , $P.V.$, $p.v.$, pv , P_v , $V.P.$, CPV , \int^* .

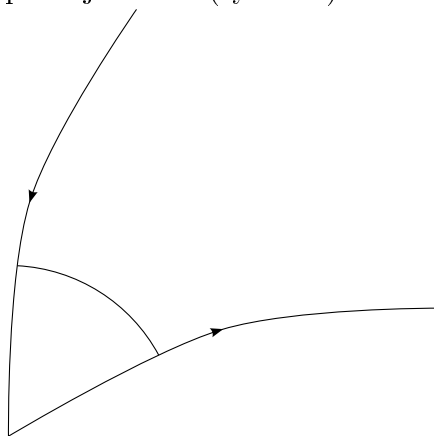
Przykład

$$P \int_{-2}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\ln |-\epsilon| - \ln |-2| + \ln 1 - \ln |\epsilon|) = -\ln 2$$

Jak widać $\ln \epsilon$ kasuje się, i to właśnie z symetrii. Wartość główna intuicyjnie przenosi się na kontury zespolone. Jeśli punkt osobliwy z_0 znajduje się na konturze C , który przechodzi przez niego w sposób gładki i krzywą także parametryzujemy w sposób gładki, to dla f holomorficznej

$$P \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i\pi f(z_0)$$

czyli połowa wzoru Cauchy'ego. Jeśli krzywa ma w z_0 złamanie, to kąt złamania zastępuje π po prawej stronie (rysunek).



Analiza Fouriera

Szeregi Fouriera

Jeśli funkcja $f(z)$ jest holomorphyzna w pierścieniu zawierającym okrąg jednostkowy $|z| = 1$. To dla $z = e^{i\phi}$ ma rozwinięcie

$$f(e^{i\phi}) = f(\phi) = \sum_n c_n e^{in\phi}$$

i

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} f(\phi)$$

Uwaga, f jest tu z definicji okresowa czyli $f(\phi + 2\pi) = f(\phi)$. Pamiętając że $f = u + iv$ można niezależnie rozwinąć

$$u(\phi) = \sum_n d_n e^{in\phi}$$

a ponieważ u jest rzeczywiste, więc $d_n = d_{-n}^*$ pisząc $2d_n = a_n - ib_n$ mamy

$$u(\phi) = a_0/2 + \sum_{n>0} (a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi))$$

oraz

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos(n\phi) d\phi, \quad \pi b_n = \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin(n\phi) d\phi,$$

Okazuje się że szeregi Fouriera można definiować dla szerszej klasy funkcji. Funkcja może być nawet nieciągła w skończonej liczbie punktów, ale szereg Fouriera będzie poprawny jeśli w tym punktach ma ciągle odpowiednie pochodne jednostronne a poza nimi ma ciągłą pochodną. Można ten warunek osłabić jeszcze bardziej.

Warunki Dirichleta, Diniego, Jordana:

Jeśli funkcja $f(\phi)$ jest określona na $[0, 2\pi[$ (na okręgu jednostkowym) a dalej okresowa z okresem 2π i ma tylko skończoną liczbę punktów nieciągłości oraz (Jordan) maksimum i minimum (ekstremów) lub (Dini) całka z $|f(t + \phi) + f(\phi - t) - 2f(\phi)|/t$ od zera po t do dowolnej liczby dodatniej jest zbieżna (np. gdy f ma skończoną jednostronną pochodną), a w punktach nieciągłości, włączając punkt $2\pi \equiv 0$, jest równa średniej z granicy lewo- i prawostronnej, to jej szereg Fouriera jest zbieżny do f , tj.

$$f(\phi) = \sum_n c_n e^{in\phi}$$

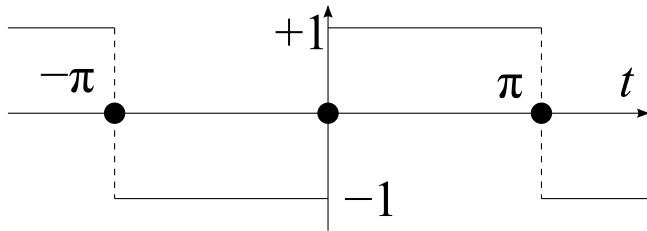
dla

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} f(\phi) d\phi$$

(sumę ucinamy symetrycznie). Jeśli f dodatkowo jest wszędzie ciągła i wszędzie spełnia warunki Jordana albo Diniego, pod warunkiem że ograniczenie w całce Diniego jest wspólne dla całego przedziału, to zbieżność jest oczywiście jednostajna. Dowód na końcu skryptu

Szereg Fouriera nie musi mieć okresu 2π . Jeśli mamy $f(t+T) = f(t)$ możemy zdefiniować

$$Tc_n = \int_0^T f(t)e^{-2\pi int/T} dt, \quad f(t) = \sum_n e^{2\pi int/T} c_n$$



Przykład (rysunek):

$$f(t) = \text{sgnt} = \begin{cases} +1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

dla $t \in [-\pi, \pi[$ oraz $f(\pi) = f(-\pi) = 0$. Wtedy

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itn} f(t) dt = \frac{e^{-i\pi n} - 2 + e^{i\pi n}}{-in} = 2i((-1)^n - 1)/n$$

czyli $c_n = 0$ dla n parzystych i $c_n = -2i/\pi n$ dla n nieparzystych oraz

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n>0} \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1}$$

Taki szereg jest zbieżny punktowo, ale nie bezwzględnie. Zauważmy też, że dla $t = 0$ (i tylko wtedy) konieczna jest symetryzacja sumy, inaczej granica nie istnieje!

Przykład:

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Wtedy,

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = ix^2 e^{-inx}/n \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2ix e^{-inx} dx/n \\ &= 2xe^{-inx}/n^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{-inx} dx/n^2 = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

czyli $c_n = a_n/2 = 2(-1)^n/n^2$ dla $n \neq 0$ oraz $c_0 = a_0/2 = \pi^2/3$ dla $x = \pi$ otrzymamy $e^{\pm i\pi n x} = (-1)^n$ czyli

$$\pi^2 = \pi^2/3 + \sum_{n>0} n^{-2}, \quad \sum_{n>0} n^{-2} = \pi^2/6$$

Czasem zamiast szeregu Fouriera rozważa się sumę skończoną

$$\sqrt{N}c_n = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ink/N} f_k$$

dla $n, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ jest to jakby okrąg, ale równo pocięty na punkty. Przydaje się tu tożsamość

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ink/N} = \begin{cases} N & \text{dla } n = 0 \\ 0 & \text{dla } n \neq 0 \end{cases}$$

na mocy której można przechodzić z c_n do f_k i na odwrót.

Wzór Parsewala i Plancherela:

Teraz nie będziemy wnikać w ciągłość f , wystarczy nam całkowalność z kwadratem modułu, czyli

$$\int_0^{2\pi} |f(\phi)|^2 d\phi$$

jest skończona. Wtedy również skończone są wszelkie całki

$$2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi$$

na mocy nierówności Schwarz'a

$$\left(\int_a^b |fg| dt \right)^2 \leq \int_a^b |f|^2 dt \int_a^b |g|^2 dt$$

Biorąc sumę

$$2\pi \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = \int_0^{2\pi} f(\phi) \sum_n e^{in(t-\phi)} d\phi = \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{\sin(N+1/2)(t-\phi)}{\sin((t-\phi)/2)} d\phi$$

Ostatnią całkę można zapisać trochę inaczej

$$\int_0^{2\pi} f(t+s) \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin(s/2)} d\phi ds$$

i wykonać najpierw całkę po s . Całka

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin(s/2)} ds$$

Jeśli f ma ciągłą pochodną w t to całka dąży do $2\pi f(t)$ z całki Dirichleta i wtedy mamy

$$\sum_n c_n e^{int} = f(t)$$

Co prawda całkowalność nie wymaga pochodnych, ale każdą funkcję całkowalną można przybliżać gładkimi f_j , w sensie dążenia $\int_0^{2\pi} |f - f_j|^2 dt$ do 0. Dlatego powyższy wzór należy rozumieć jako granicę dla funkcji gładkich. Nawiasem mówiąc, ścisła zbieżność wynikająca tylko z całkowalności kwadratu modułu (bez założenia kawałkami ciągłej pochodnej) jest bardzo trudna wiąże się z bardzo trudnym twierdzeniem Carlesona. Na szczęście w praktycznych zastosowaniach funkcje mają kawałkami ciągłe pochodne i wtedy, na mocy poprzednich twierdzeń, nie ma problemu. Całkując obie strony z $f^*(t)$ dostajemy

$$2\pi \sum_n c_n c_n^* = \lim \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) f(t+s) \frac{\sin(N+1/2)s}{\sin(s/2)} \frac{dt ds}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(t) f^*(t) dt$$

czyli

$$2\pi \sum_n |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Jest to wzór Parsewala. W tym momencie z gładkości f można już zrezygnować, bo całka i suma są zbieżne bezwzględnie. Biorąc g takie że

$$2\pi d_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\phi} g(\phi) d\phi$$

można ze wzoru Parsewala wyprowadzić wzór Plancherela

$$2\pi \sum_n d_n^* c_n = \int_0^{2\pi} g^*(t) f(t) dt$$

biorąc $f(t) \rightarrow f(t) + wg(t)$ gdzie w jest dowolną stałą zespoloną.

Gdyby wybrać taką funkcję g że

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^*(t) f(t) dt \rightarrow f(0)$$

to $d_n^* \rightarrow 1$, nie mogłaby to więc być funkcja całkowalna z kwadratem modułu. A jednak taka granica przydaje się jest to tzw. delta Diraca $g(t) \rightarrow \delta(t)$, o której więcej powiemy później.

Przykład:

Dla rozważanej już funkcji $f(x) = x^2$ mamy

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = 2\pi^5/5$$

a z kolei

$$\sum_n |c_n|^2 = \pi^4/9 + 8 \sum_{n>0} n^{-4}$$

czyli

$$4\pi^4/45 = 8 \sum_{n>0} n^{-4}, \quad \sum_{n>0} n^{-4} = \pi^4/90$$

Dla funkcji okresowych o wartościach zespolonych i argumentach rzeczywistych o okresie T , całkownych z kwadratem ($< \infty$) można wprowadzić iloczyn skalarny

$$(f|g) = \int_0^T f^*(t)g(t)dt$$

Można wtedy wprowadzić bazę funkcji okresowych

$$U_n(t) = e^{2\pi i n t/T} / \sqrt{T}$$

jest to baza ortonormalna, bo łatwo sprawdzić, że

$$(U_n|U_m) = (1/T) \int_0^T e^{2\pi i(n-m)t/T} dt = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases}$$

Można też użyć bazy funkcji rzeczywistych

$$C_n = \frac{U_n + U_{-n}}{\sqrt{2}} = \cos(2\pi t/T) \sqrt{2/T}, \quad S_n = \frac{U_n - U_{-n}}{i\sqrt{2}} = \sin(2\pi t/T) \sqrt{2/T}$$

dla $n \neq 0$ oraz $C_0 = U_0 = 1/\sqrt{T}$. W tym sensie funkcje okresowe całkowne z kwadratem można wyrażać w bazie (przeliczalnej) poprzez współczynniki szeregu Fouriera.

Transformata Fouriera:

Niech $f(x)$ będzie funkcją zespoloną określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych. Wtedy transformatą Fouriera nazywamy

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

Oczywiście całka nie zawsze musi istnieć.

Warunki Dirichleta:

Niech $\int |f(t)|$ będzie skończona czyli całka jest zbieżna bezwzględnie. Wtedy $\tilde{f}(k)$ też zawsze istnieje i jest ciągła czyli całkowna. Ponadto (Jordan) w każdym przedziale skończonym ma skończoną liczbę minimów i maksimów (czyli jest przedziałami monotoniczna) lub (Dini) całka z $|f(t+x) + f(x-t) - 2f(x)|/t$ od zera po t do dowolnej liczby dodatniej jest zbieżna (np. gdy f ma skończoną jednostronną pochodną), i ma skończoną liczbę punktów nieciągłości, w których jest równa średniej granicy lewo i prawostronnej.

Wtedy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (e^{ikx} \tilde{f}(k) + e^{-ikx} \tilde{f}(-k))$$

W pierwszej całce zastrzegamy (prawie) symetryczne przechodzenie do nieskończoności. Tak samo jak dla szeregu, jeśli f jest ciągła i spełnia warunek Diniego osobno dla całki $|f(x+t) - f(x)|/t$ i $|f(x-t) - f(x)|/t$ to całki nie trzeba symetryzować. Dowód na końcu skryptu

Różne formy zapisu transformaty Fouriera

$\tilde{f}(u) = a(u) + ib(u)$ gdzie

$$a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cos(xu), \quad b(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \sin(xu)$$

Tu a jest parzysta a b nieparzysta.

Różne podręczniczki mają często inaczej wpisane 2π . Nasza konwencja

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi}$$

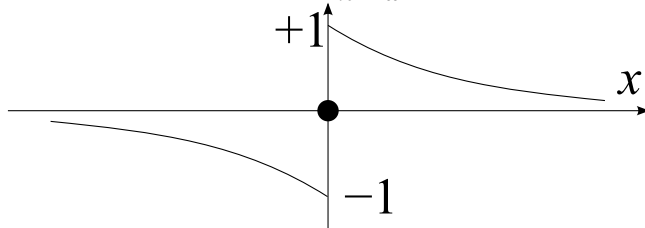
Inne, np. symetryczna

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}$$

a także

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i k x} dx, f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} \tilde{f}(k) dk$$

Można też zamienić rolami k i x .



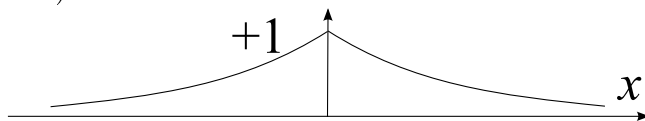
Przykład (rysunek)

$$f(x) = e^{-a|x|}\text{sgn}x = \begin{cases} e^{-ax} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -e^{ax} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

dla $a > 0$. Wtedy

$$\tilde{f}(k) = \frac{-2ik}{a^2 + k^2}$$

Tu przy odwracaniu dla $x = 0$ (tylko) trzeba symetryzować (inaczej są rozbieżności logarytmiczne).



Przykład(rysunek)

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

dla $a > 0$. Wtedy

$$\tilde{f}(k) = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

Tu już nie ma problemu z odwracaniem, całka jest zbieżna bezwzględnie, bo f jest ciągła. W obu przykładach transformatę odwrotną można też łatwo obliczyć metodą residuów, które są

w $\pm ia$. Wybór residuum zależy od x . Dla $x > 0$ zamykamy kontur od góry czyli $+ia$, a dla $x < 0$ od dołu czyli $-ia$, z tym że zmieniamy znak całki z powodu przeciwnej orientacji.

Wzór Parsewala i Plancherela

Rozważymy teraz transformatę Fouriera funkcji całkownych z kwadratem modułu, czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2$$

jest skończone. Wbrew pozorom już samo istnienie transformaty nie jest oczywiste, np. $1/\sqrt{1+x^2}$ jest całkowne z kwadratem ale nie ma transformaty dla $k=0$ (nieskończoność). Podobnie jak dla szeregu Fouriera, będziemy każdą funkcję przybliżać funkcjami f_n w sensie malejącej całki z $|f_n - f|^2$ gładkimi i całkownymi zarówno z kwadratem jak i samym modułem. Dla takich funkcji wiemy, że transformata istnieje i – co łatwo zauważyć – jest ciągła (zbieganie szacuje się przez całkę z $|f(x) \sin x \Delta k|$ dla $\Delta k \rightarrow 0$) czyli całkowna i daje się odwrócić.

Zatem

$$\int_{-K}^K |\tilde{f}(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \int_{-K}^K f^*(x) f(y) e^{ik(x-y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \frac{2 \sin((x-y)K)}{K} f^*(x) f(y)$$

Na mocy wzoru na transformatę odwrotną, $f(y)$ spełnia jego założenia,

$$\int dy \frac{2 \sin((x-y)K)}{K} f(y) \rightarrow 2\pi f(x)$$

czyli otrzymujemy wzór Parsewala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

oraz, biorąc $f \rightarrow f + wg$ dla ustalonej liczby zespolonej w , wzór Plancherela

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^*(k) g(k) dk = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx$$

Teraz można te wzory uściślić do dowolnych funkcji całkownych z kwadratem modułu. Wystarczy choć jeden ciąg funkcji przybliżający, którego transformaty Fouriera są zbieżne do funkcji kawałkami ciągłej. Uwaga, teoretycznie istnieją złośliwe funkcje, których transformata Fouriera (w granicy każdego ciągu) nigdzie nie jest ciągła. Wspomniane, ale bardzo trudne twierdzenie Carlesona mówi że nawet w takich sytuacjach można sobie poradzić, nie musimy się jednak tym zajmować.

Komentarz:

Bezpieczne funkcje to gładkie i zanikające szybciej niż potęgowo (tzw. funkcje Schwartza) i wszelkie inne, jako ich granice, kiedy możemy zapewnić zbieżność kawałkami funkcji i transformat (czyli praktyczna większość)

Przykład: Dla $f(x) = e^{-a|x|}$ i $\tilde{f}(k) = 2a/(a^2 + k^2)$ mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = a^{-1}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2 + k^2)^2} dk = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 u du / a = 2\pi/a$$

po podstawieniu $k = a \tan u$.

Własności transformaty:

Linowość: $af + bg$ daje $a\tilde{f} + b\tilde{g}$ (rozbitcie całki).

Jeśli $g(x) = f'(x)$ to $\tilde{g}(k) = ik\tilde{f}(k)$ (całkowanie przez części).

Ogólniej $g(x) = f^{(n)}(x)$, $\tilde{g}(k) = (ik)^n \tilde{f}(k)$.

Przesunięcie $g(x) = f(x - x_0)$, $\tilde{g}(k) = \tilde{f}(k)e^{-ikx_0}$ (zamiana zmiennych).

Skalowanie $g(x) = f(cx)$, $\tilde{g}(k) = \tilde{f}(k/c)/|c|$ (zamiana zmiennych).

Sprzężenie $g(x) = f^*(x)$, $\tilde{g}(k) = \tilde{f}^*(-k)$.

Dla *splotu*, tj.

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Mamy $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$.

Przykład

$$f(x) = e^{-ax^2}$$

dla σ rzeczywistego

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-k^2/4a} e^{-a(x+ik/2a)^2}$$

Przesuwamy oś rzeczywistą na płaszczyźnie zespolonej o $ik/2a$, można sprawdzić że na brzegach nie ma to znaczenia, bo wszystko dusi e^{-aR^2} . Wtedy

$$\tilde{f}(k) = e^{-k^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\pi/a} e^{-k^2/4a}$$

Inna metoda polega na wykorzystaniu własności transformaty. Weźmy $g(x) = f'(x) = -2axf(x)$ Wtedy z jednej strony $\tilde{g} = ik\tilde{f}$ a drugiej $\tilde{g}(k) = -2ai\tilde{f}'(k)$. Stąd $\tilde{f}' = -k/2a$. Rozwiązaniem takiego równania różniczkowego jest $\tilde{f} = Ae^{-k^2/4a}$. Pozostaje wyznaczyć stałą A , biorąc $k = 0$ i całkę Gaussa, $A = \sqrt{\pi/a}$. Jest to ważny fakt, że transformata Gaussa jest też funkcją Gaussa, gdzie $\sigma^2/2$ zamienia się na $2/\sigma^2$. Ma to znaczenie dla zasady nieoznaczoności w mechanice kwantowej.

Zasada nieoznaczoności (wiąże się z zastosowaniem w mechanice kwantowej)

Normalizacja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk / 2\pi = N$$

Średnie

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx / N, \quad \langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{f}(k)|^2 dk / 2\pi N$$

Wariancje

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 |f(x)|^2 dx / N, \quad \sigma_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk / 2\pi N$$

Zakładamy że średnie i wariancje są skończone. Dla uproszczenia przeddefiniujemy

$$f(x), \tilde{f}(k) \rightarrow f(x + \langle x \rangle) e^{-i(k)\langle x \rangle}, \tilde{f}(k + \langle k \rangle) e^{ik\langle x \rangle}$$

aby dla nowego f było $\langle x \rangle = \langle k \rangle = 0$. Jednocześnie σ_x i σ_k nie zmieniają się. Mamy nierówność

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$$

gdzie

$$g(x) = df(x)/dx + \lambda x f(x)$$

dla ustalonego λ czyli

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |df/dx|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 x^2 |f(x)|^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (df^*/dx) x f dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f^* x (df/dx) dx$$

W pierwszej całce wykorzystujemy $\tilde{h} = ik\tilde{f}$ dla $h = df/dx$ i wzór Parsewala a w trzeciej całkujemy przez części (wyrazy brzegowe $|f|^2 x$ zanikają bo σ_x jest skończona) i rozbijamy $d(xf)/dx = f + xdf/dx$, kasując drugą część z ostatnią całką, zostaje więc

$$0 \leq N(\langle k^2 \rangle + \lambda^2 \langle x^2 \rangle) + N\lambda$$

Biorąc $\lambda = -2\langle k^2 \rangle$,

$$0 \leq N\langle k^2 \rangle (4\langle k^2 \rangle \langle x^2 \rangle - 1)$$

czyli

$$\langle k^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq 1/4$$

albo $\sigma_x^2 \sigma_k^2 \geq 1/4$.

Transformatę atosuje się także w analizie sygnałów czasowych $f(t)$, gdzie przybiera postać

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-i\omega t}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) e^{i\omega t}$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstotliwością a ν częstotliwością (w sensie telekomunikacyjnym).

Transformata wielowymiarowa

We trzech wymiarach

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3 r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} f(\vec{r}), \quad f(\vec{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k})$$

gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $d^3 r = dx dy dz$, $d^3 k = dk_x dk_y dk_z$. Wzory Parsewala i Plancherela

$$\int |\tilde{f}(\vec{k})|^2 d^3 k = (2\pi)^3 \int |f(\vec{r})|^2 d^3 r, \quad \int \tilde{f}^*(\vec{k}) g(\vec{k}) d^3 k = (2\pi)^3 \int f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) d^3 r$$

Jeśli $f(\vec{r}) = f(r)$ czyli zależy tylko od $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ to wygodnie jest używać współrzędnych sferycznych

$$\tilde{f}(0, 0, k) = 2\pi \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{-ik \cos \theta r} f(r) = 4\pi \int_0^{\infty} r f(r) \sin(kr)/k$$

czyli $\tilde{f}(\vec{k}) = \tilde{f}(k)$ dla $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, z symetrii obrotowej.

Dla potencjału Yukawy $f(r) = e^{-\lambda r}/r$, $\lambda > 0$ jest liczbą rzeczywistą

$$\tilde{f}(k) = 4\pi \int_0^\infty e^{-\lambda r} \sin(kr)/k = \frac{4\pi}{\lambda^2 + k^2}$$

W granicy $\lambda \rightarrow 0$ otrzymamy potencjał Coulomba $f = 1/r$, $\tilde{f} = 4\pi/k^2$. Zauważmy, że wtedy nie są to już funkcje całkowane z kwadratem modułu.

Dystrybucje:

We wzorze Plancherela

$$2\pi \int_{-\infty}^\infty g^*(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}^*(k)\tilde{f}(k)dk$$

spróbujmy wspiąć takie g , że

$$\int_{-\infty}^\infty g^*(x)f(x)dx = f(0)$$

Wtedy

$$2\pi f(0) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}(k)dk = \int_{-\infty}^\infty \tilde{g}^*(k)\tilde{f}(k)dk$$

Zatem $\tilde{g}(k) = 1$. Całka z tej funkcji, jak i jej kwadratu, jest nieskończona czyli $g(0)$ musi być nieskończona. Próba wyłączenia 0 kończy się w najlepszym razie zerowaniem całego g albo nieokreślonością w zerze – nie jest to szukane rozwiązanie. Taka funkcja – w tradycyjnym sensie – nie istnieje. Tę "funkcję" wprowadził Dirac. Tzw. delta Diraca

$$g(x) = \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} dk$$

a jej matematyczny sens nadał Schwartz, jako *dystrybucji*. Dystrybucja to tak naprawdę funkcjonal, czyli coś co działa na funkcjach (mówimy *próbnych*), gładkich i zanikających szybciej niż potęgi, i daje liczbę. I tak ją właśnie definiujemy.

Zapis

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\delta(x) = f(0)$$

staje się definicją. Dodatkowo można pamiętać, że $\delta(x \neq 0) = 0$. Delta podlega zwykłym regułom całkowania, np.

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\delta(x-y) = f(y)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\delta(ax) = f(0)/|a|$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\delta(g(x)) = f(x_0)/|g'(x_0)|$$

gdzie $g(x_0) = 0$, o ile miejsce zerowe g jest tylko jedno. Jak jest wiele, to po nich sumujemy. Całkowanie przez części

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)dx = -f'(0)$$

Ta reguła (oprócz ostatniej równości) dotyczy *wszystkich dystrybucji* i wynika z faktu, że f szybko znika w nieskończoności.

Deltę można traktować jako granicę ciągu funkcji, parametryzowanych $\epsilon \rightarrow 0_+$ i pisząc $\delta^\epsilon(x)$ Przykłady (i transformaty):

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-x^2/4\epsilon}}{\sqrt{4\pi\epsilon}}, e^{-\epsilon k^2} \\ & \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}, e^{-\epsilon|k|} \\ & \frac{\sin x\epsilon}{\pi x}, \begin{cases} 1 & \text{dla } -1/\epsilon \leq k \leq 1/\epsilon \\ 0 & \text{dla } |k| \geq 1/\epsilon \end{cases} \\ & e^{-i\pi/4} e^{ix^2/4\epsilon} / \sqrt{4\pi\epsilon}, e^{-i\epsilon k^2} \\ & g(x/\epsilon)/\epsilon, \tilde{g}(k\epsilon) \end{aligned}$$

dla (prawie) dowolnej funkcji g , pod warunkiem $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) = \tilde{g}(0) = 1$.

Inne dystrybucje

"Funkcja" Heaviside'a (progowa, stopnia)

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

W zasadzie jest już zwykłą funkcją, ale nie ma pochodnej w zerze i ma rozbieżną całkę z kwadratu. W zerze stosujemy *dystrybucyjną* regułę różniczkowania czyli całkowanie przez części,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f'(x)dx = \int_0^{\infty} f'(x)dx = -f(0)$$

bo f znika w nieskończoności. Zatem można napisać $\theta'(x) = -\delta(x)$.

Funkcja znaku

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

można także napisać $\text{sgn}(x) = 2\theta(x) - 1$, ponieważ dla dystrybucji nie jest istotna (o ile skończona) wartość w nieciągłości. Stąd podobnie $\text{sgn}'(x) = 2\delta(x)$.

Tak jak i deltę można modelować funkcją gładką i znikającą w nieskończoności

$$\operatorname{sgn}_\epsilon(x) = \frac{2}{\pi}(\arctan(x/\epsilon) - \arctan(x\epsilon))$$

i faktycznie

$$\operatorname{sgn}'_\epsilon(x) = \frac{2\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} - \frac{2\epsilon}{\pi(x^2\epsilon^2 + 1)}$$

Inne dystrybucje:

Transformata Fouriera dystrybucji także jest dystrybucją. Dla delty Diraca mamy $\tilde{\delta}(k)$. Wydawałoby się, że to zwykła funkcja, ale nie jest całkowalna, także z kwadratem (modułu), bo całka rozbiega do nieskończoności. Z kolei

$$\operatorname{s\tilde{g}n}(k) = -i2/k$$

Taka funkcja nie bardzo ma sens w okolicy $k = 0$. Zobaczmy co się dzieje z modelem

$$\operatorname{s\tilde{g}n}_\epsilon(k) = 2i(e^{-\epsilon|k|} - e^{-|k|/\epsilon})/k$$

Tym razem jest to już dobra funkcja, skończona w $k = 0$ (choć nieciągła).

Taką dystrybucję zdefiniujemy już oficjalnie dla x :

$$P \, 1/x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}$$

gdzie prawa strona jest naturalnym modelem a lewa wprowadzonym już oznaczeniem wartości głównej (*principal value*), czyli

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)/x = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) dx f(x)/x$$

Często występuje połączenie delty Diraca i wartości głównej modelowane przez

$$(x \pm i\epsilon)^{-1} = P \, 1/x \mp i\pi\delta(x)$$

dla $\epsilon \rightarrow 0_+$. Z kolei interpretując

$$\ln|x| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1/2) \ln(x^2 + \epsilon^2)$$

możemy zapisać

$$(\ln|x|)' = P \, 1/x$$

Delta Diraca w 3 wymiarach:

Deltę jak i pozostałe dystrybucje przenoszą się na więcej wymiarów

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

oraz

$$\int d^3r f(\vec{r})\delta^3(\vec{r}) = f(0,0,0)$$

w trójwymiarowej delcie także można zamieniać zmienne, ale jest trochę bardziej skomplikowane

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(s - s_0)/|J|, \quad J = \left. \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, s)} \right|_{u_0, v_0, s_0}$$

gdzie $\vec{r}(u_0, v_0, s_0) = 0$ a J jest jacobianem.

Tak jak poprzednio $\tilde{\delta}^3(\vec{k}) = 1$.

Zastosowanie w analizie wektorowej:

Z własności transformaty Fouriera można napisać

$$\vec{F}(\vec{r}) = \nabla\phi, \quad \tilde{F}(\vec{k}) = -i\vec{k}\tilde{\phi}(\vec{k})$$

Oznacza to niesłychanie przydatny fakt, że w transformacie pochodna ∇ staje się mnożeniem przez wektor $-i\vec{k}$.

Przyjrzyjmy się teraz $\phi = 1/r$. Jak już wiemy $\tilde{\phi} = 4\pi/k^2$, można też wziąć modele całkowe czyli $e^{-\lambda r}/r$ i $4\pi/(k^2 + \lambda^2)$. Wiemy także że

$$\nabla\phi = \vec{F} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \nabla \cdot \vec{F} = 0$$

Czy na pewno zero? Ostrzeżeniem jest wyłączenie zera i konflikt z twierdzeniem Gaussa (całka po sferze nie jest zero). Dla transformaty Fouriera mamy

$$-i\vec{k}\tilde{\phi} = \tilde{F}(\vec{k}) = -4\pi i\vec{k}/k^2, \quad -i\vec{k} \cdot \tilde{F} = -4\pi(\vec{k} \cdot \vec{k})/k^2 = -4\pi$$

i wcale nie wyszło zero. Wiemy jednak że jest to transformata delty a ściśle $-4\pi\delta^3(\vec{r})$. I faktycznie jest to zero dla $\vec{r} \neq 0$. Mogliśmy to podejrzewać już z twierdzenia Gaussa które sygnalizowało, że całka obejmująca 0 daje -4π a to własność delty. Pokazuje to, że dystrybucje radzą sobie z problemami, których nie mogliśmy rozwiązać w zwykłej analizie wektorowej.

Dystrybucje i transformata Fouriera łatwo teraz prowadzą do poznanego już twierdzenia Helmholtza, czyli istnienia rozkładu $\vec{F} = \nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$. Mamy bowiem

$$\vec{k} \cdot \tilde{F} = -ik^2\tilde{\phi}, \quad \vec{k} \times \tilde{F} = -i\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{A}) = ik^2\vec{A} - i\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{A})$$

Bierzemy

$$\tilde{\phi} = \frac{i\vec{k} \cdot \tilde{F}}{k^2}, \quad \vec{A} = \frac{-i\vec{k} \times \tilde{F}}{k^2}$$

Co po odwróceniu transformaty, pamiętając że iloczyn przechodzi na splot, otrzymujemy twierdzenie. Taki krótki dowód nie byłby możliwy w tradycyjnej analizie wektorowej.

Zastosowania w równaniach różniczkowych

Równanie dyfuzji dla $P(x, t)$ gęstości albo prawdopodobieństwa znalezienia cząstek w danym położeniu i czasie

$$\partial_t P = D\partial_x^2 P$$

gdzie $D > 0$ (rzeczywiste) jest stałą dyfuzji. Biorąc $\tilde{P}(k, t)$ (uwaga, czas t nie podlega, przynajmniej tutaj, transformacie Fouriera)

$$\partial_t \tilde{P} = -Dk^2 \tilde{P}$$

które rozwiązujemy

$$\tilde{P} = \tilde{P}(k, 0)e^{-Dtk^2}$$

Funkcja $\tilde{P}(k, 0)$ reprezentuje warunek początkowy, w chwili $t = 0$. Bardzo często zakłada się, że dyfuzja startuje z jednego punktu np. $x = 0$, czyli $P(x, t = 0) = \delta(x)$ i wtedy $\tilde{P}(k, 0) = 1$. Transformatę można odwrócić i dostać

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$$

Jeśli dopuścimy D urojone, a raczej zespolone, możemy opisać także równanie Schrödingera

$$i\hbar\partial_t\psi = -\partial_x^2\psi\hbar^2/2m$$

dla funkcji falowej $\psi(x, t)$. Biorąc $D = i\hbar/2m$, i $\psi(x, 0) = \delta(x)$ dostaniemy

$$\psi(x, t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t}} e^{-imx^2/2\hbar t} \frac{\sqrt{2}}{1+i}$$

bo z powodu wymagania zbieżności $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$.

Przestrzeń Hilberta

Definicja:

\mathcal{H} niech będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbf{C} (liczby zespolone), czyli kombinacje liniowe wektorów f, g , tj. $af + bg \in \mathcal{H}$ dla $a, b \in \mathbf{C}$.

Iloczyn skalarny:

Odwzorowanie

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (f, g) \rightarrow \langle f|g \rangle \in \mathbf{C}$$

spełniające warunki:

1. $\langle f|f \rangle \in \mathbf{R}_+$ jeśli $f \neq 0$
2. $\langle f|g + \lambda h \rangle = \langle f|g \rangle + \lambda \langle f|h \rangle$
3. $\langle f + \lambda g|h \rangle = \langle f|h \rangle + \lambda^* \langle g|h \rangle$ lub $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle^*$

Warunki 3 są równoważne na mocy 1 i 2. Z warunków już wynika, że jeśli $\langle f|f \rangle = 0$ to $f = 0$. Inne oznaczenia $(f|g)$, $\langle f, g \rangle$, (f, g) .

Przykład $\mathcal{H} = \mathbf{C}^n$

$f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i \in \mathbf{C}$,

$$\langle f|g \rangle = \sum_j f_j^* g_j = f_1^* g_1 + f_2^* g_2 + \dots + f_n^* g_n$$

Definicja:

Parę $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ nazywamy *przestrzenią unitarną*.

Definicja:

\mathcal{H} nad \mathbf{C} nazywamy unormowaną, jeśli istnieje funkcja, *norma*,

$$\mathcal{H} \ni f \rightarrow \|f\| \in \mathbf{R}$$

o własnościach:

- $\|f\| > 0$ jeśli $f \neq 0$ (dodatnia)
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ (jednorodna)
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (nierówność trójkąta)

Stąd wynika, że dla $\|f\| = 0$ musi być $f = 0$. Norma definiuje jednocześnie *odległość* $d(f, g) = \|f - g\|$.

Dla przestrzeni unitarnych mamy *normę kanoniczną* $\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$

Nierówność Cauchy-Buniakowskiego-Schwarza (zwyczajowo Schwarz)

Dla normy kanonicznej w przestrzeni unitarnej

$$|\langle f|g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

Dowód:

Niech $h = f + \lambda g$. Wtedy

$$0 \leq \|h\|^2 = \langle f + \lambda g|f + \lambda g \rangle = \langle f|f \rangle + |\lambda|^2 \langle g|g \rangle + \lambda \langle f|g \rangle + \lambda^* \langle g|f \rangle$$

Weźmy

$$\lambda = -\frac{\langle g|f \rangle}{\|g\|^2}$$

Wtedy dostajemy

$$0 \leq \|f\|^2 - \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^2}$$

co kończy dowód.

Można tym się posłużyć do pokazania nierówności trójkąta

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f|g \rangle \\ &\leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2|\langle f|g \rangle| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\|f\|\|g\| = (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

Przestrzeń Hilberta:

Przestrzeń unitarna $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ jest przestrzenią Hilberta, jeśli jest zupełna. Zupełność oznacza że dowolny ciąg Cauchy'ego (f_n) względem normy, czyli spełniający warunek że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N , że $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ dla wszystkich $n, m > N$ ma granicę w \mathcal{H} . Warunek Cauchy'ego jest zawsze spełniony jeśli jest granica, ale w drugą stronę trzeba to pokazać.

Przykład: C^n . Warunek Cauchy'ego odpowiada definicji liczb rzeczywistych (i zespolonych) jako granic ciągów wymiernych.

Przestrzeń L^2 :

Jest to przestrzeń funkcji $f(x)$ na $x \in [a, b]$ lub \mathbf{R} ($a = -\infty, b = \infty$) i wartościach zespolonych, takich że całka

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

istnieje i jest skończona (nie rozbiega do nieskończoności). Funkcja nie musi być wszędzie określona, o tym za chwilę.

Definiujemy iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

który jako całka istnieje i jest skończony na mocy nierówności Schwarz'a. Nie spełnia jednak (na razie) własności, że $\langle f|f \rangle = 0$ tylko dla $f = 0$ bo np $f(x \neq 0) = 0$ i $f(0) = 1$ daje całkę zero. Próba wyłączenia takich funkcji powoduje brak zupełności bo możemy wybrać ciąg $f_n = 1/(n^2x^2 + 1)$, który do niej zbiega. Rozwiązaniem jest osłabienie definicji równości. Ustalamy, że $f = g$ wtedy i tylko wtedy gdy $\|f - g\| = 0$. Niestety musimy zmienić definicję całki. Przykładem jest funkcja (graniczna) równa 1 w punktach wymiernych i 0 w niewymiernych (na skończonym przedziale). Nie da się jej scałkować w sensie Riemanna. Tu akurat da się ten problem naprawić zmieniając wszystkie wartości na 0. Są jednak funkcje bez możliwości naprawy. Zapiszmy funkcję określoną na $[-\pi, \pi]$ przez jej rozkład w systemie dwójkowym (używany np. w komputerach, w odróżnieniu od powszechnie używanego dziesiętnego, np. $\pi = (11, 0010010000111111\dots)_2$). Niech $x = \epsilon_0\pi y$ gdzie $\epsilon = \pm 1$

$$y = \frac{s_1}{2} + \frac{s_2}{4} + \frac{s_3}{8} + \frac{s_4}{16} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j}{2^j}$$

dla $s_j = 0, 1$ oraz $\epsilon_j = 2s_j - 1 = \pm 1$ Niech teraz

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon_j}{j^{3/4}}$$

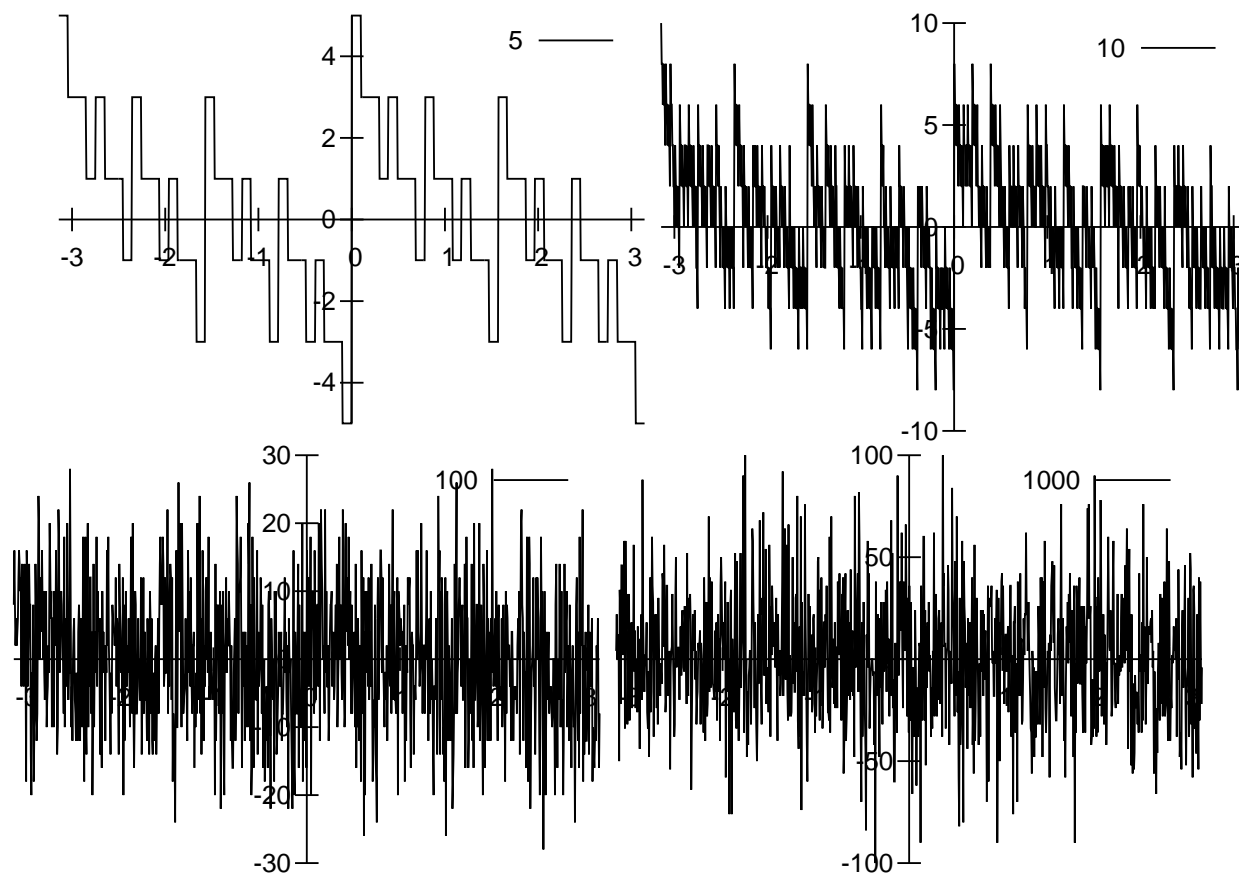
jest to funkcja całkowalna z kwadratem bo

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/2} < \infty$$

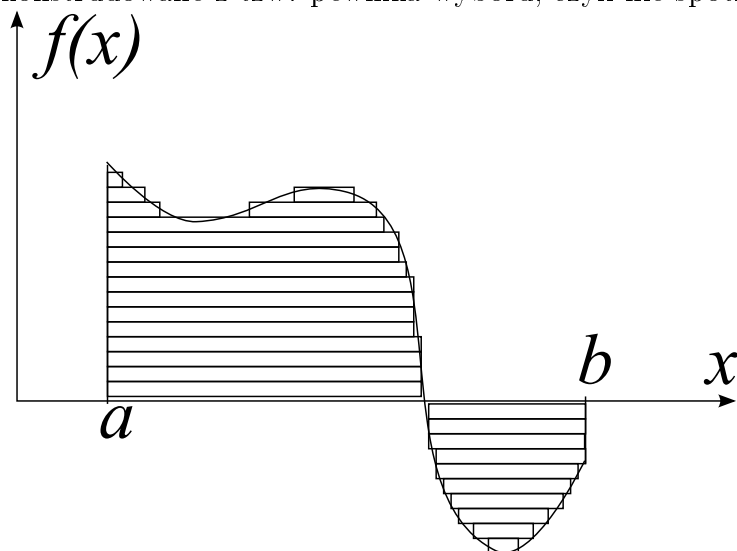
Wykorzystujemy tu fakt, że tylko iloczyny $\epsilon_j \epsilon_k$ dla $j = k$ dają niezerowy wkład do całki a pozostałe kasują się, bo są równie często dodatnie jak ujemne. Szereg po prawej stronie jest zbieżny bezwzględnie. Spełnia z tego samego powodu warunek Cauchy'ego (można się wspomóc nierównością Schwarz'a w dowodzie). A jednak w wielu punktach nie zbiega, opierając się na zbiorze gdzie zbiega, nie da się funkcji poprawić do kawałkami ciągłej ani nawet ograniczonej. Powodem jest rozbieganie szeregu

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-3/4} \rightarrow \infty$$

Dokładna granica zależy z grubsza od proporcji zer do jedynek w rozwinięciu dwójkowym, ale często jest nieskończona, nie jest też bezwzględna. Wizualnie można to sprawdzić obcinając sumę przy zwiększanej liczbie wyrazów, patrz rysunki poniżej dla 5, 10, 100, 1000. Każde obcięcie daje funkcję całkowalną w sensie Riemanna, ale granica nie jest tak całkowalna.



Niestety dla falkich funkcji trzeba *zmienić definicję całki*. Używa się wtedy całki Lebesgue'a. W praktyce różni się ona od całki Riemanna tym, że w definicji granicy podziałów nie tniemy dziedziny (czyli w „słupki”) ale zbiór wartości (czyli „w plasterki”), patrz rysunek. Trzeba też określić miary zbiorów (rzeczywiste nieujemne), poprzecznych wymiarów słupków, które nie muszą być prostymi przedziałami. Np. przedział $[a, b]$ dla $b > a$ ma miarę $b - a$. Miary przedziałów indeksowanych naturalnie mogą się sumować. Różnice odejmują się tj. miara $A \setminus B$ jest równa mierze A minus miara B jeśli $A \subset B$, zachowywać nierówność ≥ 0 . Jeśli jakimkolwiek takim sposobem jesteśmy w stanie określić miarę zbioru jednoznacznie to jest on mierzalny i takie muszą być zbiory ograniczonych wartości funkcji całkowlanych w sensie Lebesgue'a. Przykład: zbiór liczb wymiernych na odcinku $[0, 1]$ ma miarę 0 a niewymiernych jako dopełnienie, miarę 1. Każdy zbiór „ręcznie” skonstruowany jest mierzalny. Niemierzalne są konstruowane z tzw. pewnika wyboru, czyli nie spotkamy ich w praktyce.



Całka Lebesgue'a już radzi sobie ze wszystkimi funkcjami w L^2 , czyniąc ją zupełną, o czym ściśle mówi **twierdzenie Riesz-Fischera**. Dowód twierdzenia opiera się na użyciu tzw. bazy ortonormalnej, o której (i samym dowodzie) powiemy za chwilę.

Uogólniony iloczyn skalarny

$$\langle f|g \rangle_w = \int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx$$

Dla funkcji rzeczywistej $w(x) > 0$.

Zupełne ortonormalne układy funkcji

Dla $\mathcal{H} = L^2[a, b]$ (a i b mogą być nieskończone) definiujemy *ortonormalny zbiór funkcji* $f_i(x)$ (i może przebiegać zbiór liczb skończonych, naturalnych lub całkowitych) o własności

$$\langle f_i|f_j \rangle = \int_a^b f_i^*(x)f_j(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Przykład: Szereg Fouriera dla $[a, b] = [0, L]$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2/L} \cos(2\pi nx/L), \quad \phi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(2\pi nx/L)$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz $\varphi_0(x) = \sqrt{1/L}$.

Można także wziąć funkcje

$$f_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(\pi nx/L)$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$ albo

$$g_n(x) = \sqrt{1/L} e^{2\pi i n x/L}$$

dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Wszystkie powyższe układy funkcji są ortonormalne.

Nierówności Bessela

Niech f_i (zbiór skończony) będą funkcjami ortonormalnymi w \mathcal{H} . Wtedy dla $v \in \mathcal{H}$ mamy jednoznaczny rozkład $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$ gdzie v_{\parallel} jest rozpięte przez f_i a v_{\perp} ortogonalne do f_i , przy czym

$$v_{\parallel} = \sum_i \langle f_i | v \rangle f_i$$

Wtedy

$$\|v\|^2 = \|v_{\perp}\|^2 + \|v_{\parallel}\|^2 \geq \|v_{\parallel}\|^2$$

lub równoważnie

$$\|v\|^2 \geq \sum_i |\langle f_i | v \rangle|^2$$

W skończenie wymiarowej \mathcal{H} (wymiar N) zawsze można wybrać zupełną i skończony zbiór wektorów ortonormalnych, zwanych *bazą* i wtedy $v_{\perp} = 0$ oraz

$$v = \sum_{i=1}^N a_i f_i, \quad a_i = \langle f_i | v \rangle$$

lub równoważnie

$$v = \sum_{i=1}^N \langle f_i | v \rangle f_i$$

W nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta baza składa się z nieskończonej liczby wektorów ortonormalnych. Uwaga: W L^2 można skonstruować bazę *przeliczalną*, tj. numerowaną liczbami naturalnymi. Bazy nieprzeliczone nie są używane w praktyce.

Definicja: Układ wektorów ortonormalnych f_i jest zupełny (jest bazą) w \mathcal{H} jeśli dla każdego $g \in \mathcal{H}$ zachodzi

$$\left\| g - \sum_i \langle f_i | g \rangle f_i \right\| = 0$$

czyli

$$g = \sum_i \langle f_i | g \rangle f_i$$

Relacja zupełności

Dla $\mathcal{H}L^2[a, b]$ zapisujemy

$$\phi(x) = \sum_i a_i f_i, \quad a_i = \langle f_i | \phi \rangle = \int_a^b dx f_i^*(x) \phi(x)$$

czyli

$$\sum_i \int_a^b dy f_i(x) f_i^*(y) \phi(y) = \int_a^b \sum_i f_i^*(x) f_i(y) \phi(y) dy$$

Stąd wynika że musi zachodzić

$$\sum_i f_i^*(x) f_i(y) = \delta(x - y)$$

oczywiście w sensie granicznym (bo δ nie jest zwykłą funkcją)

Przykład: Szereg Fouriera

$$f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : x \in [-\pi, \pi]$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Mamy wtedy

$$\sum_n \frac{e^{in(x-y)}}{2\pi} = \delta(x - y)$$

Wzór Parsevala:

Z zupełności

$$g = \sum_i \langle f_i | g \rangle f_i$$

mamy

$$\|g\|^2 = \sum_i \sum_j \langle f_i | g \rangle^* \langle f_j | g \rangle \langle f_i | f_j \rangle$$

Z ortonormalności $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$ (1 dla $i = j$, 0 dla $i \neq j$) czyli

$$\|g\|^2 = \sum_i |\langle f_i | g \rangle|^2$$

Twierdzenie Riesz-Fischera:

Po omówieniu baz zupełnych możemy wrócić do dowodu twierdzenia o zupełności $L^2[a, b]$. Idea dowodu polega na skonstruowaniu pewnej bazy zupełnej (przeliczalnej) i znalezieniu współczynników rozkładu $\langle f_i | g \rangle$. Współczynniki te jednoznacznie identyfikują funkcję na mocy wzoru Parsevala. Nie ma też problemu z iloczynem skalarnym bo całka Lebesgue'a zapewnia jego istnienie (można to nawet potraktować jako definicję całkowalności w sensie Lebesgue'a). Przeważnie wybiera się bazy kawałkami gładkie, które tym bardziej są całkowalne. Pozostaje wskazać odpowiednią bazę. Na odcinku może to być szereg Fouriera. Dowiedliśmy jego zupełność dla funkcji kawałkami gładkich. Takimi funkcjami można z kolei przybliżać wszystkie w L^2 całkowalne w sensie Lebesgue'a. Musi być Lebesgue'a bo „plasterki” są wolne od rozbieżności,

w odróżnieniu od „słupków” Riemanna. Na całej osi rzeczywistej można dokonać pocięcia na przedziały i w każdym zastosować szereg Fouriera. Baza będzie poprawna choć funkcje są nieciągłe. Można znaleźć bazę ciągłą i gładką na całej osi, ale wymaga to wprowadzenia najpierw operatorów hermitowskich, o czym za chwilę.

Operatory liniowe w przestrzeni Hilberta

Odwzorowanie liniowe U pomiędzy przestrzeniami Hilberta \mathcal{H}_1 i \mathcal{H}_2 :

$$\mathcal{H}_1 \ni f \rightarrow v = Uf \in \mathcal{H}_2$$

jeśli

$$U(a_1f_1 + a_2f_2 + \dots) = a_1Uf_1 + a_2Uf_2 + \dots$$

Jeśli $g = \sum_i c_i f_i$ a f_i jest bazą to

$$Ug = \sum_i c_i Uf_i$$

Uwaga: operatory dzielimy na ograniczone i nieograniczone. Ograniczony, jeśli $\|Uf\| < M\|f\|$ dla ustalonego M . Wtedy można zdefiniować normę operatora $\|U\| \leq M$ jest równe maksimum $\|Uf\|$ dla $\|f\| = 1$. Dopuszczamy operatory nieograniczone, pod warunkiem że są ograniczone na gęstym podbiorze \mathcal{H}_1 (gęsty: jego elementy są dowolnie blisko w sensie normy od wszystkich elementów \mathcal{H}) i domknięte czyli jeśli $f_n \rightarrow f$ (w sensie normy) i $Uf_n \rightarrow Uf$. Operatory liniowe ograniczone są już gęste i domknięte. Przykłady operatorów ograniczonych

$$(Uf)(x) = f(x)/(1+x^2), \quad (Uf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy$$

Norma pierwszego to 1 a drugiego $\sqrt{\pi}$ (co wynika z transformaty Fouriera). Operatory nieograniczone domknięte

$$(Uf)(x) = xf(x), \quad (Uf)(x) = df/dx$$

Operatory sprzężone:

$T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Jeśli dla każdego v i u można określić $w = T^\dagger u$

$$\langle u|Tv \rangle = \langle w|v \rangle = \langle T^\dagger u|v \rangle$$

Konstrukcja T^\dagger jest bezproblemowa dla operatorów ograniczonych. Dla nieograniczonych najprościej znaleźć bazę, na której elementach T istnieje, wtedy przejście $T \rightarrow T^\dagger$ wykonuje się jak dla macierzy, tylko nieskończonych. Poprawność konstrukcji zapewniona jest przez gęstość i domkniętość. Tam gdzie bazę trudno znaleźć (np. nieprzeliczalna) można wziąć bazę niezupełną i konstrukcję argumentować gęstością i domkniętością.

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} & \cdots \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \rightarrow T^\dagger = \begin{pmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* & T_{31}^* & \cdots \\ T_{21}^* & T_{22}^* & T_{32}^* & \cdots \\ T_{31}^* & T_{32}^* & T_{33}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dla operatorów nieograniczonych może się okazać, że T nie działa na niektóre elementy bazy (a nawet wszystkie, np. szeregi Fouriera dla operatora pochodnej). Wtedy jednak z gęstości i domkniętości można bazę poprawić tak aby T działało na niej.

Operatory hermitowskie

Operator jest *hermitowski* (Hermite) jeśli $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ i $T = T^\dagger$.

Dla dowolnego operatora, niekoniecznie hermitowskiego, można sformułować zagadnienie własne

$$Tu = \lambda u$$

gdzie λ jest pewną liczbą zespoloną a $\mathcal{H} \ni u \neq 0$. W przestrzeni skończenie wymiarowej zagadnienie własne zawsze ma rozwiązanie, ale w nieskończonej nie zawsze jest to prawdą. Ponadto usiłowanie konstrukcji u może wyprowadzić nas poza \mathcal{H} . Musimy po prostu założyć istnienie rozwiązania.

Jeśli T jest hermitowski, to

- λ jest rzeczywista bo $\lambda \langle u|u \rangle = \langle u|Tu \rangle = \langle Tu|u \rangle = \lambda^* \langle u|u \rangle$
- Jeśli są dwie pary rozwiązań (u_1, λ_1) , i (u_2, λ_2) oraz $\lambda_1 \neq \lambda_2$ to u_1 i u_2 są ortogonalne, bowiem

$$\lambda_1 \langle u_1|u_2 \rangle = \langle Tu_1|u_2 \rangle = \langle u_1|Tu_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1|u_2 \rangle$$

- W skończenie wymiarowej przestrzeni istnieje baza zbudowana z wektorów własnych T , twierdzenie spektralne. Uwaga: wartości własne mogą się powtarzać.

Operator rzutu na $w, P_w u = \langle w|u \rangle w / \|w\|^2$ jest przykładem hermitowskiego. Wektory własne hermitowskiego T tworzą bazę ortonormalną, a bardzo często zupełną, co ma zastosowanie w twierdzeniu Rejsza-Fischera. Zupełność zwykle trzeba dowieść. Jeśli to się uda, możemy T rozpisać w bazie swoich stanów własnych, ortonormalnych, (u_i, λ_i) , także używając rzutów

$$Tu = \sum_i \lambda_i \langle u_i|u \rangle u_i = \sum_i \lambda_i P_i u$$

lub $T = \sum_i \lambda_i P_i$.

Przykład:

Operator R definiowany

$$(Rf)(x) = -if'(x)$$

jest nieograniczony, ale możemy go zdefiniować na $L^2[0, a]$ na gęstym zbiorze funkcji różniczkowalnych w sposób ciągły i takich że $f(0) = f(1)$ oraz $f'(0) = f'(1)$ (np. w granicy). Jest także domknięty. Jest hermitowski, bo

$$\langle g|Rf \rangle = -i \int_0^1 dx g^*(x) f'(x) = i \int_0^1 f(x) g'(x) - if(x)g(x)|_0^a$$

Ostatni wyraz znika z warunku brzegowego. Zagadnienie własne jest równaniem różniczkowym

$$\lambda f = -if'$$

które ma rozwiązanie $Ae^{i\lambda x}$. Wiemy że λ jest rzeczywista. Mamy więc rozwiązania dla $\lambda = 2\pi n/a$ dla $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a z normalizacji $A = 1/\sqrt{a}$. Są to więc elementy szeregu Fouriera. Uwaga: z samej powyższej analizy nie wynika jeszcze że λ nie może być dowolna rzeczywista, bo nie wszędzie zdefiniowaliśmy R . Jednak wiemy już, że szereg Fouriera tworzy bazę zupełną, i z tego wynika brak innych rozwiązań. Poznamy później ogólniejszą argumentację dotyczącą baz zupełnych dla operatorów nieograniczonych.

Układy Sturm-Liouville'a

Rozpatrzmy operator L (Liouville'a) taki że

$$(Lf)(x) = p_0(x)f''(x) + p_1(x)f'(x) + p_2(x)f(x)$$

przy czym p_i na ciągłą 2-itą pochodną na przedziale $[a, b]$ (może być nieskończony). Operator działa na funkcjach o ciągłej 2. pochodnej, które albo spełniają $f(a) = f(b)$, $f'(a) = f'(b)$, $f''(a) = f''(b)$, albo $f(a) = f(b) = 0$, albo – dla całej osi – zanikają szybciej niż potęgowo. Zakładamy też $p_0 \neq 0$ na $]a, b[$ (może znikać wyjątkowo na brzegach). Zdefiniujemy pomocniczą funkcję w o własności

$$wp_0 = \pm \exp \int p_1(x)dx/p_0(x)$$

przy czym zakładamy że całka nieoznaczona jest dobrze określona i $w > 0$. Wtedy

$$Lf = w^{-1}(wp_0f')' + p_2f$$

Wprowadźmy iloczyn skalarny z wagą w ,

$$\langle f|g \rangle_w = \int_a^b w(x)f^*(x)g(x)dx$$

Wtedy L będzie hermitowski względem tak definiowanego iloczynu skalarnego

$$\langle f|Lg \rangle_w = \int_a^b [f^*(wp_0g')' + wp_2f^*g]dx = \int_a^b [wp_2f^*g - wp_0f'^*g']dx + wf^*p_0g'|_a^b$$

Warunkiem hermitowskości jest znikanie ostatniego wyrazu, czyli jeśli $wp_0(a) = wp_0(b)$ lub $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$. Wtedy można rozwiązywać zagadnienie własne, względem zdefiniowanego iloczynu skalarnego.

Wielomiany Legendre'a

Rozpatrujemy przedział $[-1, 1]$ i

$$Lf = (x^2 - 1)f'' + 2xf' = ((x^2 - 1)f')'$$

Tutaj $w = 1$, $p_0 = (x^2 - 1)$ Okazuje się że wartości własne L mają postać $n(n+1)$ a odpowiednie funkcje to wielomiany Legendre'a $P_n(x)$. Ich definicja jest następująca $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = (3x^2 - 1)/2$, $P_3 = (5x^3 - 3x)/2$ a dalej używamy wzoru Rodriguesa

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Można sprawdzić jego poprawność biorąc $h = (x^2 - 1)^n$ i pochodną $h' = 2xn(x^2 - 1)^{n-1}$ czyli

$$(1 - x^2)h' + 2n x h = 0$$

i różniczkując $n + 1$ razy stosując regułę Leibniza, czyli

$$(1 - x^2)h^{n+2} - 2(n + 1)xh^{(n+1)} - (n + 1)nh^{(n)} + 2n x h^{(n+1)} + 2n(n + 1)h^{(n)} = 0$$

Zauważmy też że $P_n(1) = 1$ z rozbitcia $(x^2 - 1)^n = (x + 1)^n(x - 1)^n$ które przy n -krotnym różniczkowaniu musi działać na $(x - 1)^n$ aby wynik był niezerowy. Wielomiany są parzyste lub nieparzyste $P_n(x) = (-1)^n P_n(-x)$ czyli $P_n(-1) = (-1)^n$. Korzystając z kolei ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnej funkcji holomorficznej

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \oint_{|z-x|=R} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

Wtedy całka jest równa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{(Re^{i\phi} + x)^2 - 1}{2Re^{i\phi}} \right)^n d\phi = \\ & \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{Re^{2i\phi} + 2xe^{i\phi} + (x^2 - 1)/R}{2e^{i\phi}} \right)^n d\phi \end{aligned}$$

Weźmy $R = (1 - x^2)^{1/2}$ czyli

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{R(e^{2i\phi} - 1) + 2xe^{i\phi}}{2e^{i\phi}} \right)^n d\phi = \\ & \frac{1}{2\pi} \int (Ri \sin \phi + x)^n d\phi \end{aligned}$$

moduł wyrażenia w nawiasie jest ograniczony przez $\sqrt{R^2 + x^2} = 1$. Stąd ograniczenie $|P_n| \leq 1$.
Definiujemy funkcję tworzącą

$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

Dla każdego x szereg jest zbieżny dla $|t| < 1$ na mocy wyprowadzonego ograniczenia. Zapiszmy

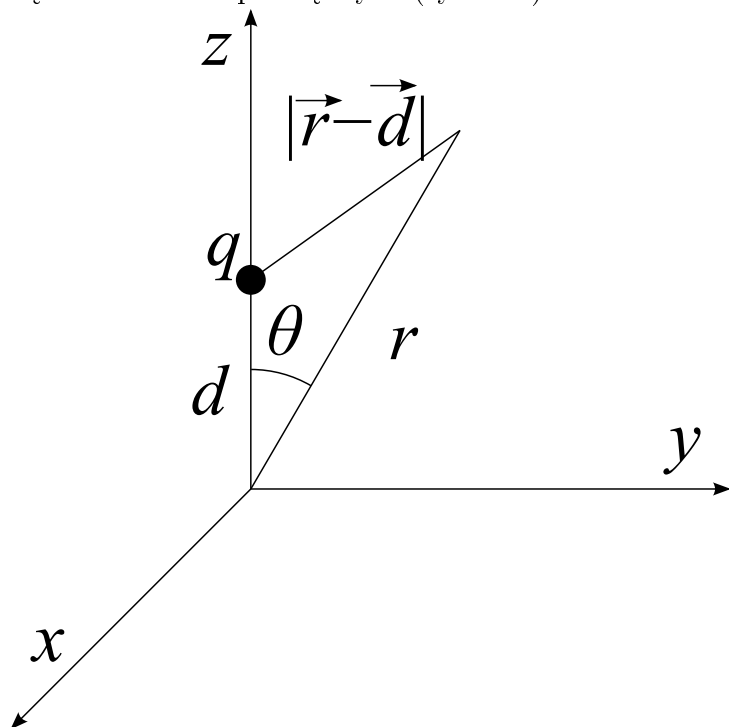
$$F(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{|z|=1} \left(\frac{t(z^2 - 1)}{2(z - x)} \right)^n \frac{(z - x)^{-1} dz}{2\pi} = \oint \frac{1}{z - x - t(z^2 - 1)/2} \frac{dz}{2\pi i}$$

Mianownik ma residuum wyznaczone przez $tz^2 - 2z + 2x - t = 0$ co daje $tz = 1 \pm \sqrt{1 - 2xt + t^2}$ przy czym chcemy aby $|z| < 1$. To daje znak $-$ dla $t > 0$ i ostatecznie dla residuum dostajemy

$$F(t, x) = (1 + t^2 - 2tx)^{-1/2}$$

Przykład:

Rozkład potencjału od ładunku punkowego q umieszczonego na osi z w odległości d od początku układu współrzędnych (rysunek)



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{|\text{vecr} - \vec{d}|} = \frac{q/r}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

dla $t = d/r$ $x = \cos \theta$, bo $|\vec{r} - \vec{d}|^2 = r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta$. Zatem

$$V = \frac{q}{r} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{d}{r}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

Związek rekurencyjny

- różniczkując funkcję tworzącą po t i porównując wyrazy o tych samych potęgach t dostajemy

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

- różniczkując po x i porównując potęgi t dostajemy

$$xP'_n - P'_{n-1} = nP_n$$

Relacja zupełności

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1}$$

Zero dla $m \neq n$ wynika z tego że są to różne funkcje własne L a dla $n = m$ mamy ze wzoru Rodriguesa

$$\int_{-1}^1 P_n^2 = \frac{1}{2^{2n}n!^2} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n)} [(x^2 - 1)^n]^{(n)} dx$$

Całkując przez części otrzymamy

$$\frac{1}{2^{2n}n!^2}[(x^2 - 1)^n]^{(n-1)}[(x^2 - 1)^n]^{(n)} - \frac{1}{2^{2n}n!^2} \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)}[(x^2 - 1)^n]^{(n+1)} dx$$

Jednak pierwszy wyraz znika bo każde różniczkowanie mniej niż n razy zostawia choć jeden czynnik $x^2 - 1$ który znika na brzegach. Operację możemy powtórzyć n razy otrzymując

$$\frac{1}{2^{2n}n!^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n [(x^2 - 1)^n]^{(2n)} dx$$

Tymczasem najwyższa potęga $(x^2 - 1)^n$ to x^{2n} zatem pochodna jest stała i równa $(2n)!$. Zamieniając zmienne $s = (x + 1)/2$ otrzymamy

$$\frac{2(2n)!}{n!^2} \int_0^1 s^n (1 - s)^n = \frac{2(2n)!}{n!^2} B(n + 1, n + 1) = \frac{2(2n)!}{n!^2} \frac{n!^2}{(2n + 1)!} = \frac{2}{2n + 1}$$

gdzie wykorzystaliśmy funkcję B Eulera. Uwaga: P_n nie są więc dobrze unormowane, ale można to zrobić biorąc $P_n \sqrt{n + 1/2}$, jednak przyjęta konwencja pozostawia je nieunormowane.

Odwrotna relacja zupełności

$$\sum_{n \geq 0} (2n + 1) P_n(x) P_n(y) / 2 = \delta(x - y)$$

dla $x, y \in [-1, 1]$. Wynika ona z faktu, że same P_n już tworzą bazę zupełną. Wiemy to, bo P_n są wielomianami stopnia n , ortogonalne czyli liniowo niezależne, a więc każdy wielomian stopnia n jest (zupełną) kombinacją liniową P_j dla $j \leq n$. Pozwala to na jeszcze jedną definicję (niezależną od L) P_n jako wielomianów stopnia n ortogonalnych na $[0, 1]$. Z drugiej strony każdą funkcję w $L^2[0, 1]$ można przybliżać wielomianami, a więc i P_n . Np. $e^{-a(x-x_0)^2}$ jest modelem delty, a z drugiej strony ma jednostajne rozwinięcie w szereg potęgowy względem x .

Istnieje też argumentacja polegająca na tym, że L nie ma innych wartości i wektorów własnych. Załóżmy rozwinięcie w szereg $P = \sum_j a_j x^j$. Podstawiając do równania własnego

$$Lf = (x^2 - 1)P'' + 2xP' = \lambda P$$

mamy

$$\sum_j (x^2 - 1)j(j - 1)x^{j-2}a_j + 2 \sum_j 2jx^j a_j = \sum_j \lambda a_j x^j$$

Porównując te same potęgi x^j otrzymamy

$$-(j + 2)(j + 1)a_{j+2} = j(j - 1)a_j + 2ja_j + \lambda a_j = (\lambda - j(j + 1))a_j$$

czyli

$$a_{j+1} = \frac{j(j - 1) - \lambda}{j(j + 1)} a_{j-1}$$

Widać, że szereg się urwie do wielomianu jeśli $\lambda = j(j - 1)$ to będą właśnie wprowadzone wielomiany Legendre'a. Jeśli nie urwie się to dla $j^2 \gg \lambda$ mamy

$$a_{j+1} \simeq a_{j-1}$$

czyli będzie

$$\simeq \sum_{n \geq 0} n! (-1)^n x^{2n} \rightarrow B(1-x^2)^{-1}$$

a to jest funkcja rozbieżna dla $x \rightarrow \pm 1$ i niecałkowalna z kwadratem.

Przykład:

Zapisać funkcję $f(x) = 1 - |x|$ dla $x \in [-1, 1]$ jako sumę (nieskończoną) wielomianów Legendre'a

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n P_n(x)$$

Obliczamy

$$a_n(x) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

czyli

$$a_0 = \int_0^1 (1-x) dx = 1 - 1/2 = 1/2$$

Z symetrii f i P wynika że $a_1 = 0$ i ogólnie znikają nieparzyste a_{2n+1} Dalej

$$a_2 = 5 \int_0^1 (1-x)(3x^2-1) dx / 2 = 5/2 - 15/8 - 5/2 + 5/4 = -5/8$$

Wyższe a_n można tu akurat znaleźć całkowaniem przez części wzoru Rodriguesa

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2^n n!} \int_0^1 (1-x) [(x^2-1)^n]^{(n)} = \frac{2n+1}{2^n n!} \int_0^1 [(x^2-1)^n]^{(n-1)} + \frac{2n+1}{2^n n!} (1-x) [(x^2-1)^n]^{(n-1)} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{2n+1}{2^n n!} [(x^2-1)^n]^{(n-2)} \Big|_0 - \frac{2n+1}{2^n n!} [(x^2-1)^n]^{(n-1)} \Big|_0 \\ &= -(-1)^{(n+2)/2} \frac{(2n+1)}{2^n n(n-1)} \binom{n}{(n-2)/2} \end{aligned}$$

Np. $a_4 = 3/16$.

Wielomiany Hermite'a

Występują np. w opisie kwantowego oscylatora harmonicznego. Tym razem zakładamy całą oś rzeczywistą.

$$Lf = -f''/2 + xf' = -e^{x^2} (e^{-x^2} f)' / 2$$

bo $w = \exp \int 2x dx = e^{-x^2}$. Funkcje własne f znajduje się konstruując operator

$$Af = f' / \sqrt{2}$$

i jego sprzężenie względem iloczynu skalarnego $\langle \cdot | \cdot \rangle_w$

$$A^\dagger f = -e^{x^2} (e^{-x^2} f)' / \sqrt{2} = -f' / \sqrt{2} + \sqrt{2} x f$$

Stąd $L = A^\dagger A$ a także $(AA^\dagger - A^\dagger A)f = f$. Umownie zapisujemy dla operatorów $[A, B] = AB - BA$, tzw. komutator. Wtedy $[A, A^\dagger] = I$ gdzie $If = f$ jest operatorem identycznościowym. Zatem $[A, L] = A$ i $[A^\dagger, L] = -A^\dagger$. Przypuśćmy że f spełnia

$$Lf = \lambda f$$

Wtedy $g = Af$ i $h = A^\dagger f$ mają własności $Lg = (\lambda - 1)g$ natomiast $Lh = (\lambda + 1)h$ czyli g i h są także funkcjami własnymi tylko z obniżoną/podniesioną wartością własną. Jednak, wartości własne nie mogą być dowolnie małe bo

$$\lambda \|f\|_w = \langle f | Lf \rangle_w = \langle f | A^\dagger A \rangle_w = \langle Af | Af \rangle_w \geq 0$$

Stąd $\lambda \geq 0$. Każdy ciąg $\lambda, \lambda - 1, \lambda - 2, \dots$ musi się więc urywać co wymaga

$$Af = 0$$

dla funkcji, gdzie ciąg się urywa, musi zachodzić $Af = 0$, czyli wtedy $Lf = 0$ i $\lambda = 0$. W ten sposób dostajemy pełną konstrukcję funkcji własnych – wielomianów Hermite'a o wartościach $\lambda = n$, dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 8x^3 - 12x$

$$H_n(x) = (\sqrt{2}A^\dagger)^n H_0 = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$$

Wielomiany są symetryczne/antysymetryczne $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$. Są ortogonalne, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$$

Dowód indukcyjny, $\langle H_0 | H_0 \rangle_w = \sqrt{\pi}$ z całki Gaussa. Potem

$$\begin{aligned} \langle H_{n+1} | H_{n+1} \rangle_w &= \langle \sqrt{2}A^\dagger H_n | \sqrt{2}A^\dagger H_n \rangle = \\ 2 \langle H_n | AA^\dagger H_n \rangle_w &= 2 \langle H_n | (L + 1)H_n \rangle_w = 2(n + 1) \langle H_n | H_n \rangle \end{aligned}$$

Ze wzoru Cauchy'ego

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz$$

po krzywej otaczającej x (jednokrotnie) bo e^{z^2} jest wszędzie holomorficzna. Biorąc krzywą dostatecznie daleko od x można wykonać sumowanie

$$2\pi i \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x) e^{-x^2} = \oint \frac{e^{-z^2}}{z - x - t} dz = 2\pi i e^{(x+t)^2}$$

bo residuum jest w $z = x + t$. Dostajemy wtedy funkcję tworzącą

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt - t^2}$$

Różniczkując funkcję tworzącą po t dostajemy relację rekurencyjną

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

a po x , $H'_n = 2nH_{n-1}$. Podobnie jak wielomiany Legendre'a, wielomiany Hermite'a tworzą bazę zupełną, tj.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{H_n(x)H_n(y)}{\sqrt{\pi}2^n n!} = \delta(x - y)e^{x^2}$$

Wynika to także z funkcji tworzącej dla $t = e^{i\phi}$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{t^n H_n(x)H_n(y)}{2^n n!} = \sum_{nm} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr \frac{H_n(x)H_m(y)e^{i(n-m)\phi} e^{-r} \sqrt{tr}^{n+m}}{2\pi \sqrt{2}^{n+m} n! m!}$$

Wtedy można zmienić kolejność całek i sum, stosując funkcje tworzące

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr e^{-r} e^{\sqrt{2}\sqrt{tr}((x+y)\cos\phi + i(x-y)\sin\phi) + ye^{-i\phi} - tr \cos 2\phi}$$

Zamieniamy zmienne $u = \sqrt{r} \cos \phi$, $v = \sqrt{r} \sin \phi$, $\partial(u, v)/\partial(r, \phi) = 1/2$ i wtedy mamy całkę

$$\int_{-\infty}^\infty dudv e^{-u^2 - v^2 + \sqrt{2}i((x+y)u + i(x-y)v) - t(u^2 - v^2)} / \pi$$

Całki można wykonać niezależnie i otrzymujemy

$$(1 - t^2)^{-1} e^{t(x+y)^2/2(1+t) - t(x-y)^2/2(1-t)} \rightarrow \sqrt{\pi} e^{x^2} \delta(x - y)$$

dla $t \rightarrow 1_-$. Wiele innych ciekawych własności i zastosowań wielomianów Hermite'a można znaleźć w wikipedii.

Wielomiany Laguerre'a

$$Lf = -xf'' + (x - 1)f' = -e^x(xe^{-x}f)'$$

wtedy $w = e^{-x}$ i rozpatrujemy $x \geq 0$. Funkcje własne dla $\lambda = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ mają postać $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - x$, $L_2 = x^2/2 - 2x + 1$

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} (e^{-x} x^n)^{(n)} = (d/dx - 1)^n x^n / n!$$

Pokażemy później że faktycznie są funkcjami własnymi. Mamy $L_n(0) = 1$ oraz

$$L'_n = L'_{n-1} - L_{n-1}$$

Ponadto

$$L_n^{(k)} = (d/dx - 1)^n x^{n-k} / (n - k)!$$

obliczając $L_n^{(k)}(0)$ musimy trafić różniczkowaniem dokładnie $n - k$ razy co daje wynik kombinatoryczny $(-1)^k \binom{n}{k}$. Stąd jeszcze jeden wzór

$$L_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

Tradycyjnie zapisujemy wzór Cauchyego

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z} z^n}{(z-x)^{n+1}} dz$$

Funkcja tworząca

$$\sum_{n \geq 0} t^n L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \oint \frac{e^{-z}}{(z-x-tz)} dz$$

Sumę wewnątrz wykonaliśmy pod warunkiem $|tz| < |z-x|$. Jest to w istocie równanie koła (tzw. okrąg Apoloniusza), które zawiera x tylko gdy $|t| < 1$ i to jest warunkiem zbieżności funkcji tworzącej. Wtedy residuum jest w $z = x/(1-t)$ czyli

$$\sum_{n \geq 0} t^n L_n(x) = \frac{e^{-tx/(1-t)}}{1-t}$$

Różniczkując to równanie po t dostajemy

$$\sum_{n \geq 0} nt^{n-1} L_n(1-t)^2 = \sum_{n \geq 0} (-x+1-t)t^n L_n(x)$$

Porównując współczynniki przy t^n otrzymamy

$$(n+1)L_{n+1} - 2nL_n + (n-1)L_{n-1} = (1-x)L_n - L_{n-1}$$

czyli

$$(n+1)L_{n+1} = (2n+1-x)L_n - nL_{n-1}$$

Przesuńmy indeks o 1,

$$(n+2)L_{n+2} = (2n+3-x)L_{n+1} - (n+1)L_n$$

i dwukrotnie zróżniczkujemy

$$(n+1)L''_{n+2} = (2n+3-x)L''_{n+1} - 2L'_{n+1} - (n+1)L''_n$$

Na mocy

$$L''_{n+2} = L''_{n+1} - L'_{n+1} = L''_n - L'_n - L'_n + L_n = L''_n - 2L'_n + L_n$$

i $L''_{n+1} = L''_n - L'_n$ oraz $L'_{n+1} = L'_n - L_n$ otrzymujemy

$$(n+2)(L''_n - 2L'_n + L_n) = (2n+3-x)(L''_n - L'_n) - 2(L'_n - L_n) - (n+1)L''_n$$

Po uproszczeniu

$$nL_n = -xL''_n + (x-1)L'_n$$

czyli spełnia równanie własne!

Normalizacja

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(y) dx = (n!)^2 \delta_{mn}$$

Wyprowadzamy ją ze wzoru

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m L_n(x) dx = \int_0^{\infty} x^m (e^{-x} x^n)^{(n)} dx$$

Całkujemy przez części m razy. Za każdym razem wyrazy brzegowe znikają, w zerze z powodu x^m , w nieskończoności przez e^{-x} . Otrzymamy

$$(-1)^m m! \int_0^{\infty} (e^{-x} x^n)^{(n-m)} dx = (-1)^{m-1} m! (e^{-x} x^n)^{(n-m-1)}|_0 = 0$$

dla $m < n$ (bo z pochodnej zawsze zostanie jakaś potęga x , która w zerze znika). Dla $m = n$

$$(-1)^n n! \int_0^{\infty} (e^{-x} x^n) dx = (-1)^n n! n!$$

Teraz przypominamy że L_n samo jest wielomianem stopnia n o najwyższym wyrazie $(-1)^n x^n$ i stąd normalizacja, bo niższe potęgi całkują się do zera. Podobnie mamy relację zupełności

$$\sum_n L_n(x) L_n(y) / n!^2 = \delta(x - y) e^x$$

Komentarz

Operatory będące kombinacją pochodnych i mnożenia, generują funkcje własne tworzące bazy zupełne na mocy własności równań różniczkowych (np. jednoznaczności rozwiązań, ciągłości ze względu na parametry). Zupełność można też dowodzić zamieniając oś rzeczywistą na ciąg bliskich punktów, różniczkowanie $f'(x) \rightarrow (f(x + \Delta) - f(x)) / \Delta$ bo wtedy przestrzeń ma skończony wymiar i baza istnieje jak w zwykłej algebrze.

Trudniejsze dowody

Dowód jednoznaczności klasy homografii:

Mamy nieznaną jeszcze funkcję $f(z)$ która przekształca okręgi i proste w okręgi i proste, zakładając że każda prosta zawiera punkt ∞ . Wtedy także zbiory przecięć okręgów/prostych przekształcać się na zbiory przecięć ich obrazów (1 lub 2 punkty dla dwóch obiektów, skończona ilość dla wielu, ich liczba nie zmienia się na mocy różnowartościowości i odwracania) Ponieważ homografie mają tę samą własność, możemy je dowolnie składać z f . Jeśli złożenie będzie homografią to f także, na mocy wykazanych własności homografii.

Wiemy że w obrazie f są w_1, w_2, w_3 i w_4 nie leżące na jednym okręgu ani prostej (muszą to być więc różne punkty).

Przenieśmy teraz punkty z_1, z_2, z_3 (muszą być różne) a także w_1, w_2, w_3 do odpowiednio $0, \infty, 1$

Krok 1a:

Jeśli $w_1 = 0$ to przechodzimy do kroku 1b. W przeciwnym razie, składamy z homografią $h(z) = z - w_1$ lub $h(z) = 1/z$ gdy $w_1 = \infty$, tj. dostajemy $h(f(z))$.

Krok 1b:

Jeśli $w_2 = \infty$ to przechodzimy do kroku 1c. W przeciwnym razie składamy z homografią $h(z) = z/(z - w_2)$, $h(\infty) = 1$

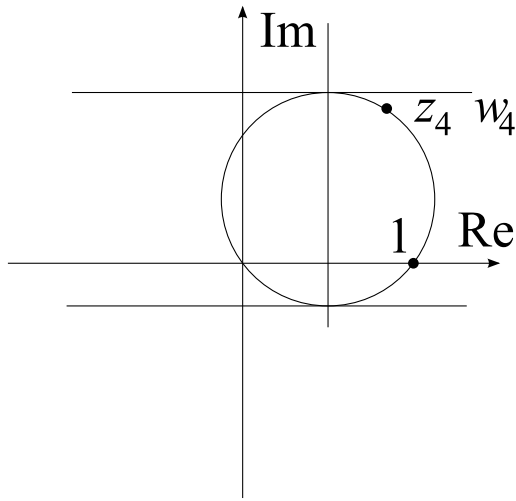
Krok 1c:

Jeśli $w_3 = 1$ to kończymy. W przeciwnym razie składamy z homografią $h(z) = z/w_3$. To samo powtarzamy dla punktów z_{123} z tym że składamy na odwrót $f(h(z))$ biorąc kolejno $h(z) = z + w_1$ (lub $1/z$), $h(z) = z_2 z / (z + 1)$ ($h(-1) = \infty$) oraz $h(z) = z_3 z$.

Podsumowanie Kroku 1: Otrzymaliśmy funkcję o założonej własności, ewentualnie złożoną z homografiami, taką że $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty)$. Wiemy także że $f(z_4) = w_4$ oraz z_4 ani w_4 nie leżą na osi rzeczywistej $(x, 0)$.

Krok 2: Wykażemy że $f(z) = z$ lub $f(z) = z^*$

Obrazem każdej prostej jest prosta, co wynika z $f(\infty) = \infty$. Obrazem prostej przechodzącej przez 0 (1) jest prosta przechodząca przez 0 (1) co wynika z $f(0) = 0$ ($f(1) = 1$). Obrazem prostej przechodząca przez punkty 0 i 1 jest ta sama prosta (oś rzeczywista). Okrąg przechodzący przez 0, 1 i przechodzi na okrąg także przechodzący przez 0-1 lub oś rzeczywistą. Każda prosta równoległa do osi rzeczywistej, ma obraz który jest także prostą równoległą do osi rzeczywistej. W przeciwnym razie istniałby punkt przecięcia z osią rzeczywistą i f nie byłaby różnowartościowa. Dwa różne punkty przecięcia prostej $(1/2, y \neq 0, \infty)$ z okręgiem 0-1- z_4 mogą leżeć jednocześnie na pewnych prostych równoległych do osi rzeczywistej stycznych w tych punktach do okręgu. Obrazy tych punktów są różne i nie należą do osi rzeczywistej, są na okręgu 0-1- w_4 . Muszą to także być punkty styczności z prostymi równoległymi od osi rzeczywistej. Tu powołujemy się na zachowanie liczby punktów wspólnych. A zatem nadal należą do prostej $(1/2, y)$ co oznacza że cała prosta przechodzi na siebie (rysunek).



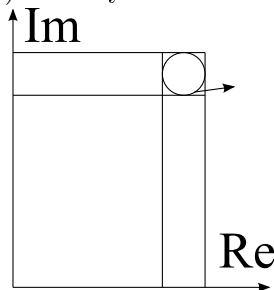
Oznacza to, że proste równoległe do obu osi przechodzą na odpowiednie równoległe (przy czym osie na osie) czyli

$$f(z) = x' + iy' = \alpha(x) + i\beta(y)$$

gdzie α i β to pewne funkcje rzeczywiste, i wiemy że $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, $\beta(0) = 0$. Weźmy okrąg wpisany (tj. styczny) w kwadrat utworzony przez osie i wybrane proste równoległe. Z równoległości i zachowania styczności, kwadrat przechodzi na kwadrat $\beta(t) = \pm\alpha(t)$, a więc $\beta(1) = \pm\alpha(1) = \pm 1$. Jeśli jest -1 to składamy z homografią z^* . Stąd $\beta(1) = 1$, $f(i) = i$. Zatem prosta $x = y$ i $y = x - 1$ też przechodzą na siebie (bo $f(1) = 1$), i także $f(-i) = -i$ a także kontynuując $f(-1) = -1$ i $\beta(t) = +\alpha(t)$. Ponadto $(x, x+q)$ przechodzi na $(x', x'+\alpha(q))$, a przecież $x' = \alpha(x)$, $x' + \alpha(q) = \alpha(x+q)$ czyli

$$\alpha(x) + \alpha(q) = \alpha(x+q)$$

Można prosto pokazać że to implikuje $\alpha(t) = t$ dla t wymiernych. Stąd wszelkie proste i okręgi o parametrach (środek, promień, odległość) wymiernych przechodzą na siebie. Dla niewymiernych można jedynie pokazać, że jeśli $\alpha(t) = k$ to $\alpha(wt) = kwt$ dla dowolnej liczby wymiernej w . Przypuśćmy, że $k > 1$ dla pewnego t , weźmy jakikolwiek okrąg o promieniu wymiernym ale mniejszym niż $k - 1$ i środku w $(4+d, 4+d)$, gdzie $2(k-1) > d > k-1$ jest dodatnią liczbą wymierną. Na tym okręgu na pewno istnieje punkt o przynajmniej jednej współrzędnej wt , ten punkt przechodzi na $kwt > k(4+d-k+1) = k(5+d-k) > 4+d+k-1$ co wynika z $k(4+d-k+1) > 4k > 4+3(k-1)$ bo $k > 1$. Okrąg przechodzi na siebie, a jednak obraz punktu będzie poza okręgiem, bo ma za daleką współrzędną, sprzeczność (rysunek). Podobnie argumentujemy dla $k < 1$ (wtedy obraz jest za blisko, a także dla k ujemnych. Stąd zostaje $\alpha(t) = t$ czyli teza.



Dowód twierdzenia Goursata:

W dowodzie musimy skorzystać z własności pochodnej zespolonej, same warunki Cauchy Riemanna nie wystarczą (bo nie zakładamy ciągłości). Idea dowodu polega na założeniu że całka nie jest zerem i doprowadzenia do sprzeczności. Pokażemy tezę dla uproszczenia dla kwadratu, a potem dowód można poszerzać już na dowolny obszar. Przypuśćmy że całka nie jest zerem dla kwadratu o boku a , jest równa W takie że $|W| = a^2q$ i $q > 0$ (liczba rzeczywista). Ogólnie określamy $q_b = |W_b|/b^2$ dla każdego kwadratu o boku b jaki rozważymy. W takim razie tniemy kwadrat dwukrotnie na pół (rysunek) aby dostać 4 kwadraty dwukrotnie mniejsze od wyjściowego. Możemy policzyć całkę po konturze każdego kwadratu. Suma daje całkę wyjściową, bo części stykowe są kasują (mają przeciwne kierunki), czyli $W = W_b + W_c + W_d + W_e$. Jednak, $a^2q = |W| \leq |W_b| + |W_c| + |W_d| + |W_e| = a^2(q_b + q_c + q_d + q_e)/4$ czyli $4q \leq q_1 + q_2 + q_3 + q_4$. Zatem dla przynajmniej jednego z czterech kwadratów $q \leq q_x$. Wybieramy ten kwadrat i tak powtarzamy operację. Otrzymamy ciąg kwadratów zmniejsza się, tak że ma granicę w jednym punkcie, należącym do każdego kwadratu, a cały czas $q_x > q$. Niech to będzie punkt $z = 0$ (jeśli jest inny, z_0 , można funkcję przesunąć $f(z + z_0)$). Załóżmy także że $f(0) = 0$ (np. odejmując $f(z) - f(0)$). W tym punkcie istnieje pochodna zespolona $f'(0) = w$. Poprawimy jeszcze tę funkcję $f(z) \rightarrow f(z) - wz$ tak aby $f'(0) = f(0) = 0$. Dodatek $wz = (wz^2/2)'$ daje zerową każdą całkę po konturze zamkniętym, bo wz i $wz^2/2$ jest wszędzie holomorficzna. Dla konturu dowolnego kwadratu K o boku s określonego współrzędnymi (x_1, y_1, x_2, y_2) możemy napisać

$$\oint_K f(z)dz = \int_{x_1}^{x_2} (f(x, y_1) - f(x, y_2))dx + \int_{y_1}^{y_2} (f(x_2, y) - f(x_1, y))dy$$

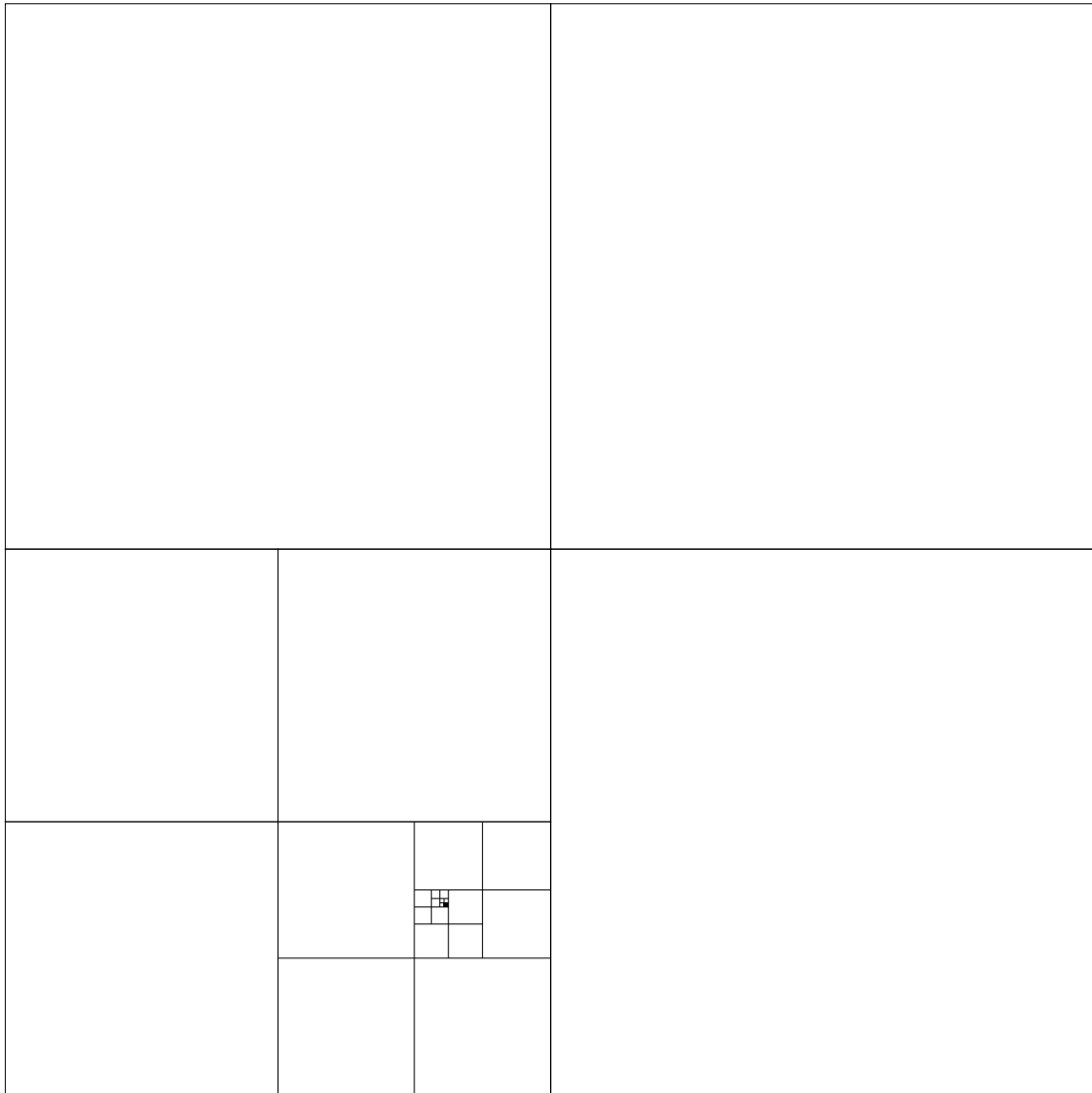
Wybermy teraz z definicji pochodnej zespolonej takie $\epsilon < q/4$ że dla $|z| < \delta$ mamy

$$|f(z)| \leq \epsilon|z|$$

Niech $|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2| \leq \delta/2$. Taki kwadrat oczywiście istnieje (im bliżej 0) i w tym kwadracie $|z| \leq \delta$. Ponadto $|z| \leq 2\max(|x_1|, |x_2|, |y_1|, |y_2|) = M$. Stąd szacujemy

$$\left| \oint_K f(z)dz \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} (|f(x, y_1)| + |f(x, y_2)|)dx + \int_{y_1}^{y_2} (|f(x_2, y)| + |f(x_1, y)|)dy \leq 4M\epsilon s$$

bo $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = s$. Jednak $M < s$ czyli całka szacuje się przez $4\epsilon s^2$ a więc $q_s < 4\epsilon < q$. Sprzeczność. Stąd teza. W rozumowaniu nie muszą być kwadraty, mogą być np. prostokąty, trójkąty, trapezy, kawałki koła i praktycznie dowolnych figur byle nie za mocno spłaszczane. Zlepiając kwadraty/prostokąty/trójkąty/itp. dojdziemy przez uciąglenie do dowolnej krzywej, co kończy dowód.



Dowód warunków Diniego i Jordana dla szeregu Fouriera:

Bez straty ogólności dokonamy uproszczeń i skrótów. Pokażemy, że dla funkcji ciągłej, takiej że $f(0) = 0$ i niemalejącej (Jordan) na $[0, \pi]$ lub $\int_0^\pi |f(t)| dt/t$ jest skończone (Dini) i mamy

$$\sum_{n=-N}^N \int_0^\pi f(\phi) e^{ni\phi} d\phi \rightarrow 0$$

Dla ustalonego N sumę można wciągnąć pod całkę

$$\int_0^\pi f(\phi) \frac{\sin(\phi(N + 1/2))}{\sin(\phi/2)} d\phi$$

Zauważmy że

$$\int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi(N + 1/2)) \left(\frac{1}{\sin(\phi/2)} - \frac{2}{\phi} \right) d\phi = \int_0^\pi f(\phi) \sin(\phi(N + 1/2)) \frac{\phi - 2 \sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)\phi} d\phi$$

Ponieważ

$$g(\phi) = f(\phi) \frac{\phi - 2 \sin(\phi/2)}{\sin(\phi/2)\phi}$$

jest ciągła, a łatwo pokazać, że

$$\int_0^\pi g(\phi) \sin(\phi(N + 1/2)) d\phi \rightarrow 0$$

(prosty dowód polega na przesunięciu $\phi \rightarrow \phi + 2\pi/(2N + 1)$, które odwraca znak całki i skorzystaniu z ciągłości). Zatem nam wystarczy pokazać, że

$$\int_0^\pi f(\phi) \frac{\sin(\phi\lambda)}{\phi} d\phi \rightarrow 0$$

dla $\lambda \rightarrow \infty$. Jest to natychmiast prawdą dla warunku Diniego. Dla Jordana przyjmijmy tymczasowo, że f jest ściśle rosnąca i ma określoną dodatnią pochodną. Nawet jeśli tak nie jest, można całkę (dla ustalonego λ) dowolnie przybliżać takimi funkcjami, bo wszystkie funkcje pod całką są ciągłe. Dla dowolnej funkcji h o ciągłej pochodnej i $h(0) = 0$ można wtedy pokazać, że

$$\int_0^a f(\phi) h'(\phi) d\phi = f(a)h(a) - \int_0^a f'(\phi)h(\phi) d\phi$$

Dla $H' = f'h$, $H(0) = 0$ mamy z twierdzenia o wartości średniej

$$H(a) = f(a)H'(c)/f'(c) = f(a)h(c)$$

dla pewnego $c \in [0, a]$ Stąd dla tego c ,

$$\int_0^a f(\phi) h'(\phi) d\phi = f(a)h(a) - f(a)h(c) = f(a)(h(a) - h(c))$$

Skoro takie c istnieje dla f o $f' > 0$ to z ciągłości będzie to prawdą także dla każdego f niemalejącego. Uwaga, teraz widać konieczność, aby f była niemalejąca, bo inaczej istniałby punkt $f' = 0$ i tam zawiodłoby twierdzenie o wartości średniej. U nas

$$h(a) = \text{Si}(\lambda a) = \int_0^{\lambda a} \frac{\sin t}{t} dt$$

jest to tzw. sinus całkowity, ale wystarczy nam wiedzieć że jest ciągły i ograniczony bo $\text{Si}(\infty) = \pi/2$ co wiemy z całki Dirichleta. Wystarczy teraz dokonać podziału całki

$$\int_0^\pi = \int_0^a + \int_a^\pi$$

tak aby $f(\phi) < \epsilon$ dla $\phi \leq a$. Pierwszą oszacujemy jak wyżej a druga całka zawiera funkcję ciągłą razy $\sin \lambda\phi$ czyli będzie zbiegać do zera. Ponieważ ϵ może być dowolnie małe dostajemy tezę. Dowód bez trudu uogólnia się na pełne warunki Dirichleta (przez przesunięcie/odbicie ϕ , f i ciągłość).

Komentarz:

Zauważmy że są funkcje spełniające warunek Diniego, ale nie Jordana, np. $\phi \sin(1/\phi)$ i odwrotnie $1/\ln|\phi|$. albo żadnego, chociaż ciągle $\sin(1/\phi)/\ln\phi$. Pokazuje to że zbieżność punktowa szeregu Fouriera jest trudna do określenia dla funkcji patologicznych. Zawsze w takich sytuacjach pomaga regularyzacja, czyli przybliżanie funkcjami gładkimi, dla których szereg jest zbieżny bez problemu. Jeśli f ma jest ciągła i spełnia warunek osobno dla $f(x+t)$ i $f(x-t)$ to z całki Dirichleta można łatwo pokazać, że symetryzacja sumy nie jest już konieczna. W praktycznych sytuacjach funkcje mają kawałkami ciągle pochodne, więc szereg jest zbieżny, dla ciągłych jednostajnie, a jedynie nieciągłości wymagają sumy symetrycznej i tam nie ma zbieżności jednostajnej. Przy okazji, w punktach nieciągłości szereg zbiega nieintuicyjnie od dalszej strony, tzw. *zjawisko Gibbsa*.

Dowód warunków Dirichleta dla transformaty Fouriera:

Bez straty ogólności możemy położyć $x = 0$ Dla pozostałych $x = x_0$ przesuwamy funkcję o x_0 , co skutkuje zamianą $\tilde{f}(k) \rightarrow e^{-ikx_0} \tilde{f}(k)$. Weźmy teraz całkę

$$\int_{-K}^K \tilde{f}(k) dk = \int_{-K}^K dk \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Ponieważ całka z f jest zbieżna bezwzględnie i f jest przedziałami ciągła i ograniczona, możemy zamienić kolejność całkowania

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-K}^K dk e^{-ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x) \frac{\sin(Kx)}{K}$$

Dalszy ciąg jest praktycznie taki sam jak dla szeregów Fouriera (zamiast $N + 1/2$ mamy K), zapisując $f(x) = f(x) - f(0) + f(0)$ i pamiętając o całce Dirichleta z $f(0)$. Jedyne zanikanie całki dla dużych x uzasadniamy zbieżnością bezwzględną całki.