

Wykład 1: Całkowa reguła Leibniza

Wykład 2: Krzywe i całki krzywoliniowe

Wykład 3: Powierzchnie i całki powierzchniowe

Wykład 4: Formy różniczkowe

Wykład 5: Wektorowe operacje różniczkowe

Wykład 6: Twierdzenia Greena i Stokesa

Udowodnione już było, że jeśli pole wektorowe \vec{V} jest polem potencjalnym, to całka $\int_K \vec{V} \cdot d\vec{r}$ po dowolnej krzywej zamkniętej ma wartość 0. Istnieją jednak również wzory na tę całkę nawet gdy pole \vec{V} nie jest potencjalne.

Twierdzenie Greena

Niech $U \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwartym obszarem, a $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie ciągłym i różniczkowalnym polem wektorowym określonym na obszarze U . Niech $D \subset U$ będzie obszarem domkniętym ograniczonym krzywą zamkniętą $\partial D \subset U$, zorientowaną w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wówczas

$$\oint_{\partial D} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

co można zapisać także w języku form różniczkowych, używając $\omega = V_x dx + V_y dy$

$$\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Dowód

Załóżmy najpierw, że obszar D może być przedstawiony w postaciach

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\} \end{aligned}$$

Te dwa przedstawienia obszaru D dają nam też dwa przedstawienia brzegu ∂D :

$$\begin{aligned} \partial D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y \in \{f_1(x), f_2(x)\}\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, x \in \{g_1(y), g_2(y)\}\} \end{aligned}$$

z czego wynika, że krzywą zamkniętą ∂D można podzielić na dwie krzywe składowe, na dwa sposoby

$$\partial D = K_1 \cup K_2 = K_3 \cup K_4$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_1 &= \{(x, f_1(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\} \\ K_2 &= \{(x, f_2(x)) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b\} \\ K_3 &= \{(g_1(y), y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\} \\ K_4 &= \{(g_2(y), y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d\} \end{aligned}$$

To przedstawienie daje nam parametryzację krzywych K_i = krzywe K_1 i K_2 można sparametryzować za pomocą parametru x , krzywe K_3 i K_4 za pomocą parametru y . Pamiętając też, że krzywa ∂D ma być zorientowana w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, możemy ustalić, jakie muszą być orientacje krzywych K_i = krzywa K_1 jest zorientowana przez x zmieniające się od a do b ; krzywa K_2 przez x zmieniające się od b do a ; krzywa K_3 przez y zmieniające się od d do c , krzywa K_4 przez y zmieniające się od c do d .

Zacznijmy od lewej strony tezy twierdzenia Greena i podzielmy ją na dwie części. Mamy

$$\oint_{\partial D} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial D} (V_x dx + V_y dy) = \oint_{\partial D} V_x dx + \oint_{\partial D} V_y dy$$

Każdą z tych dwóch części znów podzielimy na dwie

$$\oint_{\partial D} V_x dx + \oint_{\partial D} V_y dy = \left(\int_{K_1} V_x dx + \int_{K_2} V_x dx \right) + \left(\int_{K_3} V_y dy + \int_{K_4} V_y dy \right)$$

Wykorzystując poprzednio znalezione parametryzacje krzywych K_i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{K_1} V_x dx + \int_{K_2} V_x dx &= \int_a^b V_x(x, f_1(x)) dx + \int_b^a V_x(x, f_2(x)) dx = \\ &= \int_a^b (V_x(x, f_1(x)) - V_x(x, f_2(x))) dx \\ \int_{K_3} V_y dy + \int_{K_4} V_y dy &= \int_d^c V_y(g_1(y), y) dy + \int_c^d V_y(g_2(y), y) dy = \\ &= \int_c^d (-V_y(g_1(y), y) + V_y(g_2(y), y)) dy \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} V_x(x, f_1(x)) - V_x(x, f_2(x)) &= - \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial y} dy \\ -V_y(g_1(y), y) + V_y(g_2(y), y) &= \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial x} dx \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\int_{K_1} V_x dx + \int_{K_2} V_x dx = - \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_D \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial y} dx dy \\
\int_{K_3} V_y dy + \int_{K_4} V_y dy &= \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial x} dx \right) dy = \\
&= \int_D \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial x} dx dy
\end{aligned}$$

Mamy więc w sumie

$$\oint_{\partial D} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

co było do udowodnienia.

Jeżeli obszar D nie daje się przedstawić w takiej postaci jak założyliśmy, należy go podzielić na mniejsze obszary, z których każdy już będzie się tak przedstawiał, $D = \bigcup_i D_i$. Wtedy prawa strona tezy twierdzenia Greena rozpisuje się następująco:

$$\int_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy = \sum_i \int_{D_i} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Nie mamy jednak $\partial D \neq \bigcup_i \partial D_i$ - dzieląc obszar D na kawałki D_i tworzymy dodatkowe linie wewnątrz obszaru, które należą do $\bigcup_i \partial D_i$ ale nie do ∂D . Możemy jednak zauważyć, że każda z tych dodatkowych linii jest brzegiem dwóch kawałków D_i , więc w sumie $\sum_i \oint_{\partial D_i}$ całkowanie po każdej z tych dodatkowych krzywych pojawi się dwukrotnie; ponadto te dwie całki będą miały przeciwną orientację - jeżeli jeden kawałek D_i nadaje krzywej jedną orientację, to kawałek leżący po przeciwnej stronie krzywej nadaje jej orientację przeciwną. Z powodu tych przeciwnych orientacji te dwie całki po liniach wewnętrznych kasują się wzajemnie, pozostawiając jedynie całki po liniach zewnętrznych (należących do ∂D), czyli

$$\oint_{\partial D} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \sum_i \oint_{\partial D_i} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Ponieważ na każdym z kawałków twierdzenie Greena jest spełnione, to będzie spełnione również dla całego obszaru D . (*koniec dowodu*)

Twierdzenie Greena mówi o krzywych płaskich (leżących na płaszczyźnie \mathbb{R}^2). Istnieje też podobne twierdzenie o krzywych w przestrzeni, nazywane twierdzeniem Stokesa.

Twierdzenie Stokesa

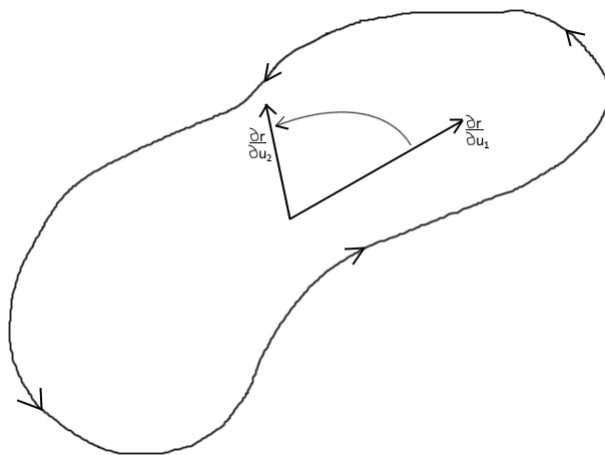
Niech $U \subset \mathbb{R}^3$ będzie otwartym obszarem, a $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie ciągłym i różniczkowalnym polem wektorowym określonym na obszarze U . Niech $\Sigma \subset U$ będzie powierzchnią 2-wymiarową ograniczoną krzywą zamkniętą $\partial\Sigma \subset U$. Orientacja brzegu $\partial\Sigma$ jest wyznaczona przez orientację powierzchni Σ (rysunek poniżej).

Wówczas

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

co można zapisać także w języku form różniczkowych, używając $\omega = V_x dx + V_y dy + V_z dz$

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$$



Rys. 6-1. Zgodność orientacji powierzchni i jej brzegu - kolejność współrzędnych na powierzchni wyznacza kierunek obiegania brzegu.

Dowód

Założmy że powierzchnię Σ można sparametryzować za pomocą dwóch wybranych współrzędnych, np.

$$\Sigma = \{(x, y, z(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D\}$$

gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest pewnym obszarem na płaszczyźnie. Parametryzacja za pomocą (y, z) lub (z, x) również jest dopuszczalna - dowód przebiega analogicznie. Jeżeli powierzchni Σ nie można tak sparametryzować dzielimy ją na mniejsze kawałki które już można, podobnie do tego podziału, jaki miał miejsce w dowodzie twierdzenia Greena.

Mając tą parametryzację mamy

$$\int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Sigma} \left(\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) = \\
&= \int_D \left(\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \Big|_{z=z(x,y)} dy \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} dx \wedge dy \right) = \\
&= \int_D \left(- \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Z drugiej strony brzeg $\partial\Sigma$ można przedstawić w postaci

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D \subset \mathbb{R}^2\}$$

zatem

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} &= \oint_{\partial\Sigma} (V_x dx + V_y dy + V_z dz) = \\
&= \oint_{\partial D} \left(V_x \Big|_{z=z(x,y)} dx + V_y \Big|_{z=z(x,y)} dy + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \right) = \\
&= \oint_{\partial D} \left(\left(V_x \Big|_{z=z(x,y)} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(V_y \Big|_{z=z(x,y)} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \right)
\end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Greena do tego wyrażenia otrzymujemy

$$= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(V_y \Big|_{z=z(x,y)} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(V_x \Big|_{z=z(x,y)} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right) dx \wedge dy$$

Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej i pochodną iloczynu mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(V_y \Big|_{z=z(x,y)} \right) &= \frac{\partial V_y}{\partial x} \Big|_{z=z(x,y)} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial V_z}{\partial x} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(V_x \Big|_{z=z(x,y)} \right) &= \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{z=z(x,y)} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial V_z}{\partial y} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}
\end{aligned}$$

Wstawiając te równości do wzoru powyżej otrzymujemy

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} \Big|_{z=z(x,y)} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} + \right. \\
&\quad + \frac{\partial V_z}{\partial x} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \\
&\quad - \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big|_{z=z(x,y)} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} + \\
&\quad \left. - \frac{\partial V_z}{\partial y} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} - V_z \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy = \\
&= \int_D \left(\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

Porównując z poprzednio uzyskanym wynikiem otrzymujemy

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

(koniec dowodu)

Ćwiczenia wykładowe 3: Potencjały

Rozważmy pole wektorowe

$$\vec{V} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Sprawdźmy, czy jest szansa by posiadało one potencjał skalarny lub wektorowy.

Mamy

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{V} &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial x} 0 \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \vec{e}_z = \\
&= 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + \left(\frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) \vec{e}_z = \vec{0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial z} 0 = \\
&= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Ponieważ pole \vec{V} ma zerową rotację, to może posiadać potencjał skalarny. Natomiast ponieważ ma zerową dywergencję, to może posiadać potencjał wektorowy. Żeby znaleźć potencjał skalarny ϕ pola \vec{V} musimy rozwiązać równania

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = V_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = V_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = V_z = 0$$

Odcałkowując równanie

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

po z otrzymujemy

$$\phi(x, y, z) - \phi(x, y, z_0) = \int_{z_0}^z 0 dz' = 0$$

gdzie z_0 jest dowolnie wybranym punktem odniesienia, a z' jest oznaczeniem na zmienną całkowania, wprowadzonym by uniknąć kolizji oznaczeń. Mamy więc

$$\phi(x, y, z) = \phi(x, y, z_0) =: C(x, y)$$

Podstawiając ten wynik do równania

$$\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

w punktach i odcałkowując je po y otrzymujemy

$$\frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$C(x, y) - C(x, y_0) = \int_{y_0}^y \frac{y'}{x^2 + y'^2} dy'$$

$$C(x, y) = C(x, y_0) + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right] \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = C(x, y_0) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + y_2^2) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y_1^2)$$

definiując

$$D(x) := C(x, y_0) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + y_0^2)$$

otrzymujemy

$$C(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + D(x)$$

czyli

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + D(x)$$

Wstawiając teraz ten wzór do równania

$$\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + D(x) \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{d}{dx} D(x) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{d}{dx} D(x) = 0$$

czyli

$$D(x) = E = \text{const.}$$

Ostatecznie znajdujemy

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + E$$

gdzie E jest dowolną stałą; jest to zgodne z twierdzeniem, które pojawiło się na wykładzie, mówiącym, że potencjał skalarny jest zdefiniowany z dokładnością do stałej.

Żeby znaleźć potencjał wektorowy $\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$ musimy rozwiązać równania:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = V_x, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = V_y, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = V_z$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

Zacznijmy od pierwszego z tych równań. Można je zapisać w postaci

$$\frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{x}{x^2 + y^2}$$

odcałkowując równanie stronami po z otrzymujemy

$$A_y(x, y, z) - A_y(x, y, z_0) = \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial A_z(x, y, z')}{\partial y} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dz'$$

gdzie z_0 jest dowolnie wybranym punktem odniesienia, a z' zostało wprowadzona jako zmienna całkowania by uniknąć kolizji oznaczeń. Mamy więc

$$A_y(x, y, z) = A_y(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' - \frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

Podobnie z drugiego równania mamy

$$\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial x} + \frac{y}{x^2 + y^2}$$

co po odcałkowaniu daje nam

$$A_x(x, y, z) - A_x(x, y, z_0) = \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial A_z(x, y, z')}{\partial x} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dz'$$

$$A_x(x, y, z) = A_x(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' + \frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

Wstawiając te wyniki do trzeciego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(A_y(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' - \frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2} \right) + \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(A_x(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' + \frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2} \right) + \\ &\quad - \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} + \\ &\quad - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} (z - z_0) - \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} (z - z_0) = \\ &= \frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} (z - z_0) - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} (z - z_0) = \\ &= \frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} \end{aligned}$$

Mamy więc równanie

$$\frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} = 0$$

które rozwiązujemy przez przeniesienie $\frac{\partial A_x}{\partial y}$ na drugą stronę i wycałkowanie po y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x(x, y, z_0)}{\partial y} &= \frac{\partial A_y(x, y, z_0)}{\partial x} \\ A_x(x, y, z_0) - A_x(x, y_0, z_0) &= \int_{y_0}^y \frac{\partial A_y(x, y', z_0)}{\partial x} dy' \end{aligned}$$

$$A_x(x, y, z_0) = A_x(x, y_0, z_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y A_y(x, y', z_0) dy'$$

Podstawiając to do poprzednio wyprowadzonego równania na $A_x(x, y, z)$ otrzymujemy

$$A_x(x, y, z) = A_x(x, y_0, z_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y A_y(x, y', z_0) dy' + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' + \frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

Mamy również

$$A_y(x, y, z) = A_y(x, y, z_0) + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' - \frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

Te dwa warunki wystarczają w zupełności, aby zachodziła równość $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{V}$ - żadne dodatkowe warunki nie są już potrzebne. To oznacza, że funkcje $A_z(x, y, z)$, $A_y(x, y, z_0)$ i $A_x(x, y_0, z_0)$ mogą być wybrane dowolnie. Zauważmy też, że te dwa równania na A_x i A_y można zapisać w postaci

$$A_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) + \frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

$$A_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) - \frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_{x_0}^x A_x(x', y_0, z_0) dx' + \int_{y_0}^y A_y(x, y', z_0) dy' + \int_{z_0}^z A_z(x, y, z') dz' = \\ &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{A} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

gdzie całkowanie w ostatnim wzorze jest wykonywane po łamanej $(x_0, y_0, z_0) - (x, y_0, z_0) - (x, y, z_0) - (x, y, z)$.

Przy użyciu funkcji f można zapisać również A_z :

$$A_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z)$$

Pokazuje to, że ogólne rozwiązanie równań na potencjał wektorowy może być zapisane w postaci:

$$\vec{A} = \vec{\nabla} f + \frac{y(z - z_0)}{x^2 + y^2} \vec{e}_x - \frac{x(z - z_0)}{x^2 + y^2} \vec{e}_y$$

gdzie f jest dowolną funkcją, a z_0 dowolną stałą. Jest to zgodne z twierdzeniem z wykładu, które mówiło, że jeśli dodamy do potencjału wektorowego gradient dowolnej funkcji, wynik wciąż jest potencjałem wektorowym.

Można jeszcze dodać, że lokalnie (w otoczeniu dowolnego punktu) część z z_0 można zapisać jako gradient funkcji

$$\frac{-yz_0}{x^2 + y^2} \vec{e}_x + \frac{xz_0}{x^2 + y^2} \vec{e}_y = \vec{\nabla}(z_0 \arctan \frac{y}{x}) = \vec{\nabla}(z_0 \varphi)$$

gdzie φ jest współrzędną kąta w płaszczyźnie xy (ze współrzędnych biegunowych). Nie można tego jednak zrobić globalnie (w całej przestrzeni), gdyż funkcja φ nie można zdefiniować w sposób ciągły na całej przestrzeni.

Wykład 7: Twierdzenie Gaussa, zastosowania twierdzeń Greena, Stokesa i Gaussa

Jest jeszcze trzecie twierdzenie podobne do dwóch ostatnich; też można je postrzegać jako tw. Greena przeniesione w trzeci wymiar, ale w inny sposób:

Twierdzenie Gaussa

Niech $U \subset \mathbb{R}^3$ będzie otwartym obszarem, a $\vec{V} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie ciągłym i różniczkowalnym polem wektorowym określonym na obszarze U . Niech $\Omega \subset U$ będzie obszarem domkniętym ograniczonym powierzchnią zamkniętą $\partial\Omega \subset U$, zorientowaną "na zewnątrz", tzn. tak, że wektor prostopadły do powierzchni, $\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}$ jest skierowany na zewnątrz obszaru Ω .

Wówczas

$$\int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) dx dy dz$$

co można zapisać także w języku form różniczkowych, używając $\omega = V_x dy \wedge dz + V_y dz \wedge dx + V_z dx \wedge dy$

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

Dowód

Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia Greena. Załóżmy, że obszar Ω może być przedstawiony w postaciach

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz}, g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in D_{zx}, h_1(z, x) \leq y \leq h_2(z, x)\} \end{aligned}$$

gdzie D_{xy} , D_{yz} , D_{zx} są pewnymi obszarami domkniętymi w \mathbb{R}^2 . Jeżeli obszar Ω nie daje się tak przedstawić, dzielimy go na mniejsze kawałki Ω_i , które tak przedstawić się dają. Analogicznie do tego co mieliśmy w twierdzeniu Greena i tw. Stokesa, mamy

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) dx dy dz = \sum_i \int_{\Omega_i} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) dx dy dz$$

co wynika z tego, że $\Omega = \sum_i \Omega_i$, oraz

$$\int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \sum_i \int_{\partial\Omega_i} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

co wynika z tego, że wkłady od tych kawałków $\sum_i \partial\Omega_i$ które leżą wewnątrz Ω pojawiają się dwukrotnie, z przeciwnymi orientacjami, więc będą się wzajemnie kasowały. Jeżeli więc udowodnimy, że na małych kawałkach, które można przedstawić za pomocą podanych wyżej wzorów, tw. Gaussa jest spełnione, to będzie spełnione również dla dowolnych obszarów które można rozłożyć na takie kawałki.

Zakładając, że obszar Ω rozpisuje się na sposoby podane powyżej, zdefiniujmy

$$\begin{aligned} \Sigma_z^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, z = f_1(x, y)\} \\ \Sigma_z^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, z = f_2(x, y)\} \\ \Sigma_x^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz}, x = g_1(y, z)\} \\ \Sigma_x^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz}, x = g_2(y, z)\} \\ \Sigma_y^- &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in D_{zx}, y = h_1(z, x)\} \\ \Sigma_y^+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z, x) \in D_{zx}, y = h_2(z, x)\} \end{aligned}$$

Czyli np. powierzchnia Σ_z^- to powierzchnia wyznaczona przez dolne ograniczenie na zmienną z , a powierzchnia Σ_z^+ jest wyznaczona przez górne ograniczenie na zmienną z . Mamy

$$\partial\Omega = \Sigma_{z-} \cup \Sigma_{z+} = \Sigma_{x-} \cup \Sigma_{x+} = \Sigma_{y-} \cup \Sigma_{y+}$$

Zwróćmy uwagę, że narzucona nam orientacja $\partial\Omega$ (na zewnątrz), wyznacza orientację powierzchni Σ_i^\pm :

- powierzchnia Σ_z^- jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma ujemną składową w kierunku z (ponieważ obszar Ω znajduje się ponad tą powierzchnią); wymaga to kolejności współrzędnych (y, x)
- powierzchnia Σ_z^+ jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma dodatnią składową w kierunku z (ponieważ obszar Ω znajduje się poniżej tej powierzchni); wymaga to kolejności współrzędnych (x, y)
- powierzchnia Σ_y^- jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma ujemną składową w kierunku x ; wymaga to kolejności współrzędnych (z, y)
- powierzchnia Σ_y^+ jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma dodatnią składową w kierunku x ; wymaga to kolejności współrzędnych (y, z)
- powierzchnia Σ_x^- jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma ujemną składową w kierunku y ; wymaga to kolejności współrzędnych (x, z)

- powierzchnia Σ_x^+ jest zorientowana tak, że wektor \vec{N} ma dodatnią składową w kierunku y ; wymaga to kolejności współrzędnych (z, x)

Sprawdźmy na przykładzie, że te kolejności współrzędnych są poprawne. Np. dla powierzchni Σ_z^- mamy parametryzację $\vec{r}(x, y) = (x, y, f_1(x, y))$. Zatem

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)$$

Czyli tak jak zostało powiedziane, kolejność współrzędnych (y, x) daje wektor \vec{N} o ujemnej składowej w kierunku z . W pozostałych przypadkach rachunek jest analogiczny.

Mamy

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \\ & = \int_{\partial\Omega} (V_x dy \wedge dz + V_y dz \wedge dx + V_z dx \wedge dy) = \\ & = \int_{\Sigma_x^- \cup \Sigma_x^+} V_x dy \wedge dz + \int_{\Sigma_y^- \cup \Sigma_y^+} V_y dz \wedge dx + \int_{\Sigma_z^- \cup \Sigma_z^+} V_z dx \wedge dy = \\ & = \int_{\Sigma_x^-} V_x dy \wedge dz + \int_{\Sigma_x^+} V_x dy \wedge dz + \int_{\Sigma_y^-} V_y dz \wedge dx + \int_{\Sigma_y^+} V_y dz \wedge dx + \\ & \quad + \int_{\Sigma_z^-} V_z dx \wedge dy + \int_{\Sigma_z^+} V_z dx \wedge dy \end{aligned}$$

Aby zamienić te całki na zwykłe całki wielokrotne, współrzędne muszą być we właściwej kolejności. Na powierzchniach Σ_i^- musimy więc zamienić kolejność współrzędnych, co skutkuje zmianą znaku:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \\ & = - \int_{\Sigma_x^-} V_x dz \wedge dy + \int_{\Sigma_x^+} V_x dy \wedge dz - \int_{\Sigma_y^-} V_y dx \wedge dz + \int_{\Sigma_y^+} V_y dz \wedge dx + \\ & \quad - \int_{\Sigma_z^-} V_z dy \wedge dx + \int_{\Sigma_z^+} V_z dx \wedge dy = \\ & = - \int_{D_{yz}} V_x(g_1(y, z), y, z) dz dy + \int_{D_{yz}} V_x(g_2(y, z), y, z) dy dz + \\ & \quad - \int_{D_{zx}} V_y(x, h_1(z, x), z) dx dz + \int_{D_{zx}} V_y(x, h_2(z, x), z) dz dx + \\ & \quad - \int_{D_{xy}} V_z(x, y, f_1(x, y)) dy dx + \int_{D_{xy}} V_z(x, y, f_2(x, y)) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{D_{yz}} (V_x(g_2(y, z), y, z) - V_x(g_1(y, z), y, z)) dydz + \\
&\quad + \int_{D_{zx}} (V_y(x, h_2(z, x), z) - V_y(x, h_1(z, x), z)) dzdx + \\
&\quad + \int_{D_{xy}} (V_z(x, y, f_2(x, y)) - V_z(x, y, f_1(x, y))) = \\
&= \int_{D_{yz}} \left(\int_{g_2(y, z)}^{g_1(y, z)} \frac{\partial V_x(x, y, z)}{\partial x} dx \right) dydz + \\
&\quad + \int_{D_{zx}} \left(\int_{h_2(z, x)}^{h_1(z, x)} \frac{\partial V_y(x, y, z)}{\partial y} dy \right) dzdx + \\
&\quad + \int_{D_{xy}} \left(\int_{f_2(x, y)}^{f_1(x, y)} \frac{\partial V_z(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \\
&= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) dx dy dz
\end{aligned}$$

(koniec dowodu).

Zauważmy że wszystkie te trzy twierdzenia, Greena, Stokesa i Gaussa, jeśli zapisane na formach, mają bardzo podobną postać:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega, \quad \int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega, \quad \int_{\partial \Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

różnice są jedynie w tym, że

- W twierdzeniu Greena ω jest 1-formą, a D obszarem 2-wymiarowym w przestrzeni \mathbb{R}^2
- W twierdzeniu Stokesa ω jest 1-formą, a Σ powierzchnią 2-wymiarową w przestrzeni \mathbb{R}^3
- W twierdzeniu Gaussa ω jest 2-formą, a Ω obszarem 3-wymiarowym w przestrzeni \mathbb{R}^3

Można by zapisać ogólne twierdzenie, dla k -formy i $(k+1)$ -wymiarowej powierzchni w przestrzeni \mathbb{R}^n , i też byłoby ono prawdziwe, a ogólny dowód byłby uogólnieniem dowodów przedstawionych powyżej. To ogólne twierdzenie, używane raczej przez matematyków niż przez fizyków również nazywane jest twierdzeniem Stokesa.

Te trzy twierdzenia są bardzo użyteczne w fizyce, ponieważ wiele wielkości fizycznych jest ze sobą związanych relacjami różniczkowymi. Na przykład pole elektryczne \vec{E} i gęstość ładunku elektrycznego ρ spełniają związek:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

gdzie ε jest własnością ośrodka zwaną przenikalnością elektryczną. Z twierdzenia Gaussa wynika zatem, że dla dowolnego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x = \int_{\Omega} \frac{\rho}{\varepsilon} d^3x$$

czyli strumień pola elektrycznego przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest wyznaczony jedynie przez ładunki objęte tą powierzchnią. W przypadkach o szczególnej symetrii pozwala to łatwo policzyć pole elektryczne nie korzystając z prawa Coulomba, które w przypadku dużych układów ładunków może prowadzić do skomplikowanych całek.

Podobnie prawo Stokesa znajduje zastosowanie w elektromagnetyzmie. Mamy np. prawo

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

gdzie \vec{E} jest polem elektrycznym, a \vec{B} polem magnetycznym. Twierdzenie Stokesa pozwala zamienić ten związek na postać całkową

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

co można odczytywać jako: zmiana strumienia pola magnetycznego przepływającego przez daną powierzchnię wytwarzają pole elektryczne krążące po brzegu tej powierzchni. Jest to efekt znany jako zasada indukcji Faradaya, wykorzystywany do generacji prądu elektrycznego przez poruszające się magnesy.

Prawo Greena z kolei znajduje zastosowanie np. do liczenia pól powierzchni skomplikowanych figur geometrycznych. Bywa tak, że choć możemy łatwo sparametryzować krzywą ograniczającą jakiś obszar, sam obszar jest trudny do sparametryzowania. Możemy wtedy wykorzystać jeden z poniższych wzorów

$$\oint_{\partial D} xdy = -\oint_{\partial D} ydx = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (xdy - ydx) = \int_D 1dxdy$$

(wszystkie są szczególnymi przypadkami zastosowania twierdzenia Greena) aby policzyć pole obszaru D wykonując jedynie jedno całkowanie po krzywej ograniczającej ten obszar. Należy pamiętać tylko, by okrążyć obszar w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Istnieje nawet wykorzystywane przez geodetów urządzenie zwane planimetrem (pl.wikipedia.org/wiki/Planimetr) mechanizujące ten proces i obliczające pole powierzchni figury płaskiej (np. obszaru na mapie) poprzez oprowadzenie wódzika po granicy tego obszaru.

Można też stosować te twierdzenia by ułatwić sobie pewne rachunki. Założmy, że mamy do policzenia strumień pewnego pola \vec{V} przez pewną powierzchnię σ o brzegu $\partial\Sigma$. Powiedzmy jednak, że powierzchnia Σ ma skomplikowaną parametryzację, więc obliczanie strumienia bezpośrednio z definicji byłoby trudne.

Jeżeli znajdziemy jednak inną powierzchnię Σ' o tym samym brzegu $\partial\Sigma' = \partial\Sigma$, to możemy zauważyć, że te dwie powierzchnie będą ograniczać pewien obszar Ω o brzegu $\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma'$. Zakładając, że powierzchnie te są skierowane na zewnątrz tego obszaru (jeśli nie, to trzeba zamienić niektóre znaki we wzorze poniżej), mamy:

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma'} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3x$$

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \int_{\Sigma'} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3x$$

Jeżeli powierzchnia Σ' ma prostszą parametryzację niż powierzchnia Σ , oraz np. $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ również ma prostą postać, to policzenie prawej strony tej równości może okazać się prostsze niż liczenie lewej strony z definicji. Należy tylko być ostrożnym z orientacjami: jak zaznaczyłem wcześniej, ważne jest by obie powierzchnie Σ i Σ' były zorientowane na zewnątrz obszaru Ω .

Wykład 8: Konwencja sumacyjna

Jak dotąd, całą analizę wektorową przeprowadzaliśmy w kartezjańskim układzie współrzędnych, np. pola wektorowe rozpisywaliśmy na składowe w kierunkach xyz ($\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$), a operacje różniczkowe zapisywaliśmy za pomocą pochodnych $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. W wielu przypadkach warto jednak używać innych współrzędnych, ponieważ upraszczają one opis sytuacji którą mamy do przeanalizowania. Zanim jednak przejdziemy do układów krzywoliniowych, potrzebujemy wprowadzić pewną notację zwaną *konwencją sumacyjną Einsteina*.

Jest to skrótowy sposób zapisu wzorów, który oszczędza miejsce poprzez pominięcie symboli sumowania po indeksach, które powtarzają się we wzorach dwukrotnie, raz jako indeks górny, raz jako indeks dolny. Na przykład, jeśli mamy dwie macierze $\mathbf{A} = [A^i_j]$, $\mathbf{B} = [B^i_j]$, wzór na współczynniki iloczynu tych macierzy ma postać

$$(\mathbf{AB})^i_j = \sum_k A^i_k B^k_j$$

Używając konwencji sumacyjnej zapisalibyśmy po prostu

$$(\mathbf{AB})^i_j = A^i_k B^k_j$$

gdzie sumowanie po k jest domyślne ponieważ jest to indeks powtarzający się dwukrotnie, raz jako indeks dolny, raz jako indeks górny. Podobnie działanie macierzy \mathbf{A} na wektor $\vec{v} = (v^i)$ zapisuje się normalnie wzorem

$$(\mathbf{A}\vec{v})^i = \sum_j A^i_j v^j$$

co w konwencji sumacyjnej ma postać

$$(\mathbf{A}\vec{v})^i = A^i_j v^j$$

Zysk z konwencji sumacyjnej jest wyraźniejszy przy dłuższych wzorach. Np. zapisując iloczyn pięciu macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ zamiast

$$(\mathbf{ABCDE})_j^i = \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n A_k^i B_l^k C_m^l D_n^m E_j^n$$

mamy po prostu

$$(\mathbf{ABCDE})_j^i = A_k^i B_l^k C_m^l D_n^m E_j^n$$

Należy tu podkreślić, że indeks który się powtarza jest indeksem sumowania, więc jego nazwę można dowolnie zmieniać:

$$A_k^i B_j^k = A_l^i B_j^l = A_m^i B_j^m = A_n^i B_j^n$$

Indeksy, które się nie powtarzają, są indeksami zewnętrznymi- ich nazwy możemy zmieniać tylko gdy robimy to po obu stronach równania, np.

$$(\mathbf{AB})_j^i = A_k^i B_j^k$$

można zapisać jako

$$(\mathbf{AB})_n^m = A_k^m B_n^k$$

Konwencja sumacyjna zmusza nas jednak do pilnowania pozycji indeksów, aby były one we właściwych pozycjach do sumowania. Np. jeśli raz postanowiliśmy, że składowe wektorów będą miały indeksy u góry $\vec{v} = (v^i)_{i=1,2,3}$, to elementy bazy przestrzeni wektorowej muszą mieć indeksy u dołu $\mathbf{e} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_i)_{i=1,2,3}$ Aby można było zapisać

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

Iloczyn skalarny

Konwencja sumacyjna czasem wymusza czasem pewne skomplikowanie wzorów. Nie możemy np. bezpośrednio przepisać wzoru

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_i v^i w^i$$

na konwencję sumacyjną, ponieważ oba indeksy i znajdują się w pozycji górnej. Aby móc zapisać ten wzór w konwencji sumacyjnej, musimy wprowadzić symbol δ_{ij} zdefiniowany jako

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

Ponieważ

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v^i \vec{e}_i) \cdot (w^j \vec{e}_j) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) v^i w^j$$

to iloczyn skalarny zapisuje się w konwencji sumacyjnej jako

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \delta_{ij} v^i w^j$$

Oczywiście, ponieważ \vec{e}_i to wektory bazowe kartezjańskiego układu współrzędnych, mamy

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Jest to zwykłą delta Kroneckera. Przemnożona przez wektor nie zmienia wartości jego składowych, ale przenosi indeks górny na dolny:

$$\delta_{1i}v^i = v^1, \quad \delta_{2i}v^i = v^2, \quad \delta_{3i}v^i = v^3$$

Jest to pewna komplikacja względem pierwotnego wzoru, ale z drugiej strony możemy zauważyć, że każdy możliwy iloczyn skalarny (nie tylko standardowy kartezjański), można zapisać w tej postaci, jeśli zastąpimy macierz δ_{ij} przez inną symetryczną macierz. Jak zobaczymy, będzie to konieczne gdy przejdziemy do niekartezjańskich układów współrzędnych.

Wprowadźmy też symbol δ^{ij} z indeksami u góry, potrzebny do tego, by móc odwrócić operację opuszczania indeksu, co czasem będzie potrzebne. Czyli jeżeli

$$\omega_i = \delta_{ij}w^j$$

to

$$w^i = \delta^{ij}\omega_j$$

mamy wtedy

$$w^i = \delta^{ik}\omega_k = \delta^{ik}\delta_{kj}w^j$$

czyli

$$\delta^{ik}\delta_{kj} = \delta^i_j$$

gdzie δ^i_j jest macierzą odwzorowania identycznościowego, $\mathbf{1} = [\delta^i_j]$:

$$\mathbf{1}\vec{w} = \vec{w}$$

$$\delta^i_j w^j = w^i$$

Ponieważ

$$\vec{e}_i \cdot \vec{v} = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)v^j = \delta_{ij}v^j$$

To używając symbolu δ^{ij} możemy zapisać

$$v^i = \delta^{ij}(\vec{e}_j \cdot \vec{v})$$

czyli

$$\vec{v} = \vec{e}_i \delta^{ij}(\vec{e}_j \cdot \vec{v})$$

To przedstawienie przyda nam się w przyszłości.

Iloczyn wektorowy

Ograniczmy się chwilowo do przestrzeni \mathbb{R}^3 . Do opisu iloczynu wektorowego, wprowadźmy symbol

$$\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$$

ten symbol jest nazywany symbolem Levi-Civity (od nazwiska włoskiego matematyka, Tullio Levi-Civita). Okazuje się, że jest on całkowicie antysymetryczny: zamiana kolejności dowolnych dwóch indeksów zamienia znak:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik}$$

Konkretnie mamy

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

oraz $\epsilon_{ijk} = 0$ w przeciwnym przypadku (jeżeli dowolne dwa indeksy się powtarzają).

Używając wcześniej wprowadzonego przedstawienia

$$\vec{v} = \vec{e}_i \delta^{ij} (\vec{e}_j \cdot \vec{v}) = \vec{e}_k \delta^{km} (\vec{e}_m \cdot \vec{v})$$

zastosowanego do wektora $\vec{v} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j$ otrzymujemy

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k \delta^{km} (\vec{e}_m \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)) = \vec{e}_k \delta^{km} \epsilon_{mij}$$

czyli dla dowolnych dwóch wektorów $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$, $\vec{w} = w^j \vec{e}_j$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v^i \vec{e}_i) \times (w^j \vec{e}_j) = (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) v^i w^j = \vec{e}_k \delta^{km} \epsilon_{mij} v^i w^j$$

Zdefiniujmy też symbol ϵ^{ijk} z indeksami u góry, jako

$$\epsilon^{ijk} = \delta^{il} \delta^{jm} \delta^{kn} \epsilon_{lmn}$$

czyli przez podniesienie indeksów używając symbolu δ^{ij} . Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że zachodzi związek

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{lmn} = \delta_l^i \delta_m^j \delta_n^k + \delta_m^i \delta_n^j \delta_l^k + \delta_n^i \delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^i \delta_n^j \delta_m^k - \delta_m^i \delta_l^j \delta_n^k - \delta_n^i \delta_m^j \delta_l^k$$

Dowodu nie przedstawiam, ale można dla dowolnej konkretnej kombinacji indeksów np. $(ijk) = (123)$, $(lmn) = (321)$, można ten wzór łatwo sprawdzić.

Podstawiając $n = k$ i używając faktu, że $\delta_k^k = 3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \epsilon_{lmk} &= \delta_l^i \delta_m^j \delta_k^k + \delta_m^i \delta_k^j \delta_l^k + \delta_k^i \delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^i \delta_k^j \delta_m^k - \delta_m^i \delta_l^j \delta_k^k - \delta_k^i \delta_m^j \delta_l^k = \\ &= 3\delta_l^i \delta_m^j + \delta_m^i \delta_l^j + \delta_m^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_m^j - 3\delta_m^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_m^j = \\ &= \delta_l^i \delta_m^j - \delta_m^i \delta_l^j \end{aligned}$$

Podstawiając kolejno $m = j$ mamy

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{ljk} = \delta_l^i \delta_j^j - \delta_j^i \delta_l^j =$$

$$\begin{aligned}
&= 3\delta_l^i - \delta_l^i = \\
&= 2\delta_l^i
\end{aligned}$$

Wreszcie podstawiając również $l = i$:

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 2\delta_i^i = 6$$

Te własności symbolu Levi-Civity sa użyteczne do przekształcania i upraszczania wzorów i będziemy z nich korzystać w przyszłości.

Formy różniczkowe

1-formę $\alpha = \alpha_i dx^i$ odpowiadającą polu wektorowemu $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ można zapisać w postaci

$$\alpha = \vec{A} \cdot d\vec{r} = (A^j \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_i dx^i) = A^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) dx^i = A^j \delta_{ji} dx^i$$

czyli

$$\alpha_i = A^j \delta_{ji} = \delta_{ij} A^j$$

W drugą stronę, pole wektorowe odpowiadające 1-formie $\alpha = \alpha_i dx^i$ będzie zatem dane wzorem

$$A^i = \delta^{ij} \alpha_j$$

$$\vec{A} = \vec{e}_i \delta^{ij} \alpha_j$$

Co do 2-formy $\beta = B^x dy \wedge dz + B^y dz \wedge dx + B^z dx \wedge dy = B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2$ odpowiadającej polu $\vec{B} = B^i \vec{e}_i$, zauważmy, że można ją zapisać w postaci

$$\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$$

Czynnik $\frac{1}{2}$ pochodzi stąd, że suma $\epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$ zawiera zarówno wyrazy np. $\epsilon_{123} B^1 dx^2 \wedge dx^3$ jak i $\epsilon_{132} B^1 dx^3 \wedge dx^2$. Te dwa wyrazy dają ten sam wkład (ponieważ $\epsilon_{123} dx^2 \wedge dx^3 = \epsilon_{132} dx^3 \wedge dx^2 = dx^2 \wedge dx^3$), więc żeby uzyskać β trzeba tą sumę podzielić przez 2.

W drugą stronę: jeśli $\beta = \frac{1}{2} \beta_{jk} dx^j \wedge dx^k$, to pole \vec{B} możemy otrzymać ze wzoru

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \beta_{jk}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \beta_{jk}$$

Sprawdźmy:

$$\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \beta_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ljk} B^l = \frac{1}{2} 2\delta_l^i B^l = B^i$$

Dodajmy jeszcze że 3-formę $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ można zapisać jako

$$dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \epsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

W drugą stronę, $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ można zapisać jako

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

Jak wyżej, czynnik $\frac{1}{6}$ jest potrzebny, ponieważ w sumie $\epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ jest 6 niezerowych składników dających identyczne wkłady, np.

$$\epsilon_{132} dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 = \epsilon_{231} dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Gradient

Gradient był zdefiniowany jako pole wektorowe $\vec{\nabla} f$ odpowiadające formie

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

gdzie na potrzeby konwencji sumacyjnej traktujemy $\frac{\partial}{\partial x^i}$ jako posiadające indeks dolny, ponieważ x^i jest w "mianowniku". Na podstawie wzoru wyprowadzonego powyżej mamy więc

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Rotacja

Rotacja pola wektorowego \vec{A} odpowiadającemu 1-formie α to pole wektorowe odpowiadające 2-formie $d\alpha$. Jak już było wyznaczone wcześniej

$$\alpha = \delta_{ij} A^j dx^i$$

czyli

$$d\alpha = \delta_{ij} \frac{\partial A^j}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i$$

lub zamieniając nazwy indeksów (by łatwiej skorzystać ze wcześniejszych wzorów)

$$d\alpha = \delta_{km} \frac{\partial A^m}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k$$

Mamy więc

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^i = \epsilon^{ijk} \delta_{km} \frac{\partial A^m}{\partial x^j}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \delta_{km} \frac{\partial A^m}{\partial x^j}$$

Dywergencja

Dywergencja pola wektorowego \vec{B} odpowiadającemu 2-formie β to funkcja odpowiadająca 3-formie $d\beta$. Mamy

$$\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{mjk} B^m dx^j \wedge dx^k$$

zatem

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{1}{2} \epsilon_{ljk} \frac{\partial B^l}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ljk} \frac{\partial B^l}{\partial x^i} \epsilon^{ijk} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{ljk} \frac{\partial B^l}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= \frac{1}{2} 2\delta_l^i \frac{\partial B^l}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \\ &= \frac{\partial B^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned}$$

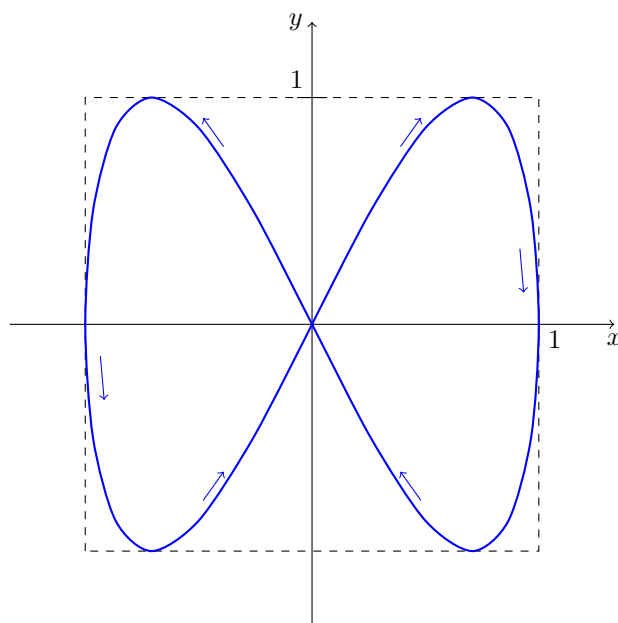
Mamy zatem prosty wzór

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B^i}{\partial x^i}$$

Ćwiczenia wykładowe 4: Zastosowania twierdzeń Greena, Stokesa i Gaussa

Jak było wcześniej powiedziane, twierdzenie Greena może być użyte do znalezienia pola powierzchni figury płaskiej ograniczonej podaną krzywą. Rozwiążmy takie zadanie:

Zad. Znaleźć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą sparametryzowaną przez $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin(2t)$ (rys. poniżej).



Pole obszaru jest zadane wzorem

$$P = \int_D dx dy$$

. Używając twierdzenia Greena możemy to zapisać jako np.

$$P = \oint_{\partial D} x dy$$

pod warunkiem, że brzeg jest obiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Zwróćmy uwagę, że zarówno obszar D jak i ograniczającą krzywą K można podzielić na dwie części (oznaczymy je D_1, D_2 oraz K_1, K_2). Jedną część obszaru jest ograniczoną częścią krzywej odpowiadającą $t \in [0, \pi]$ otaczającą tą część obszaru zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a druga część obszaru jest ograniczana przez część krzywej odpowiadającą $t \in [\pi, 2\pi]$, okrążającą tą część obszaru przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Mamy zatem $P_1 = -\int_{K_1} x dy$, $P_2 = \int_{K_2} x dy$. Ponieważ jednak obie części są symetryczne, wystarczy że obliczymy pole jednej z nich, a pole całości będzie dwa razy tyle; np.

$$P = -2 \int_{K_1} x dy$$

Korzystając z parametryzacji K_1 mamy

$$x = \sin t$$

$$dy = d(\sin(2t)) = 2 \cos(2t) dt$$

$$\begin{aligned}
P &= -4 \int_0^\pi \sin t \cos(2t) dt = \\
&= -4 \int_0^\pi (\sin t)(2 \cos^2 t - 1) dt =^{u=\cos t} \\
&= -4 \int_{-1}^1 (2u^2 - 1) du = \\
&= -4 \left(\frac{2}{3} u^3 - u \right) \Big|_{u=-1}^{u=1} = \\
&= -4 \left(\frac{4}{3} - 2 \right) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Można też użyć innych wzorów. Np. używając wzoru

$$\int_D dx dy = - \oint_{\partial D} y dx$$

otrzymalibyśmy

$$\begin{aligned}
P &= 2 \int_{K_1} y dx = \\
&= 2 \int_0^\pi \sin(2t) \cos t dt = \\
&= 4 \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt =^{u=\cos t} \\
&= 4 \int_{-1}^1 u^2 du = \\
&= 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Końcowy wynik jest oczywiście taki sam.

Twierdzenie Stokesa teoretycznie może być użyte w podobny sposób, do obliczenia pól powierzchni, ale w praktyce wymagałoby to znalezienia pola wektorowego, którego rotacja jest w każdym punkcie powierzchni prostopadła do powierzchni i posiadająca długość 1. Sprawia to, że to podejście jest niepraktyczne. W praktyce stosowane jest jedynie wtedy, gdy mamy do policzenia strumień pola, które posiada znany znany potencjał wektorowy; wtedy pozwala zamienić całkę powierzchniową na całkę po krzywej, co może uprościć rachunki.

Twierdzenie Gaussa też pozwala liczyć strumienie pól, ale nie musimy znać jego potencjału wektorowego; zamiast tego wymaga ono, by powierzchnia przez którą liczymy strumień, była powierzchnią zamkniętą - a jeśli nie jest powierzchnią domkniętą, musimy ją domknąć. Weźmy takie zadanie:

Zad. Policzyc strumień pola $\vec{V} = y^3 \vec{e}_x + x^3 \vec{e}_y + z^3 \vec{e}_z$ przez powierzchnię boczną stożka

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq R - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

zorientowaną na zewnątrz.

Można ten rachunek zrobić bezpośrednio, wprowadzając parametryzację powierzchni bocznej walca przez parametry (ρ, φ)

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \\y &= \rho \sin \varphi \\z &= R - \rho\end{aligned}$$

Mamy wektory styczne

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Policzony z nich wektor prostopadły do powierzchni

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ \rho \end{bmatrix}$$

zgodnie z treścią zadania jest skierowany na zewnątrz stożka. Mamy więc

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \\&= \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{N} d\rho d\varphi = \\&= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (R^3 \sin^3 \varphi \vec{e}_x + R^3 \cos^3 \varphi \vec{e}_y + (R - \rho)^3 \vec{e}_z) (\rho \cos \varphi \vec{e}_x + \rho \sin \varphi \vec{e}_y + \rho \vec{e}_z) = \\&= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (R^3 \rho \sin^3 \varphi \cos \varphi + R^3 \rho \cos^3 \varphi \sin \varphi + \rho(R - \rho)^3) = \\&= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (R^3 \rho \sin \varphi \cos \varphi + \rho(R - \rho)^3) = \\&= \int_0^R d\rho 2\pi \rho (R - \rho)^3 = \\&= 2\pi \int_0^R d\rho (R^3 \rho - 3R^2 \rho^2 + 3R\rho^3 - \rho^4) = \\&= 2\pi \left(R^3 \cdot \frac{1}{2} R^2 - 3R^2 \cdot \frac{1}{3} R^3 + 3R \cdot \frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{\pi}{10} R^5\end{aligned}$$

ale jest też inny sposób, używający twierdzenia Gaussa. Oznaczmy podstawę stożka, zorientowaną w dół (na zewnątrz stożka) przez Σ' . Mamy

$$\partial\Omega = \Sigma \cup \Sigma'$$

Mamy więc

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma'} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) d^3x$$

Zauważmy jednak, że na podstawie stożka $z = 0$, a zatem $\vec{V}|_{\Sigma'} = y^3 \vec{e}_x + x^3 \vec{e}_y$, co oznacza że pole \vec{V} jest styczne do podstawy, a w konsekwencji

$$\int_{\Sigma'} \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

Mamy też

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 3z^2$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \\ &= \int_{\Omega} 3z^2 d^3x = \\ &= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R-\rho} dz 3z^2 \rho = \\ &\quad (\text{dodatkowy czynniki } \rho \text{ pochodzi z jakobianu}) \\ &= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi (R-\rho)^3 \rho = \\ &= \int_0^R d\rho 2\pi (R-\rho)^3 \rho = \\ &= 2\pi \int_0^R d\rho (R^3 \rho - 3R^2 \rho^2 + 3R\rho^3 - \rho^4) = \\ &= 2\pi \left(R^3 \cdot \frac{1}{2} R^2 - 3R^2 \cdot \frac{1}{3} R^3 + 3R \cdot \frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{\pi}{10} R^5 \end{aligned}$$

Dostajemy ten sam wynik, ale z mniejszą ilością obliczeń.

Wykład 9: Krzywoliniowe układy współrzędnych, część 1

Na tym wykładzie zobaczymy, jak wykonywać rachunki analizy wektorowej używając współrzędnych innych niż kartezjańskie.

Załóżmy, że mamy pewien obszar $U \subset \mathbb{R}^3$ sparametryzowany przez współrzędne $(u^a)_{a=1,2,3}$ (np. współrzędne sferyczne $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \varphi$). Współrzędne te będziemy ogólnie nazywać krzywoliniowymi, gdyż w ogólnym przypadku linie, wzdłuż których mają one stałą wartość są liniami krzywymi (np. linie, wzdłuż których r i θ są stałe, a φ się zmienia, są kołami). Załóżmy, że jest to parametryzacja regularna, czyli wektory

$$\vec{t}_a := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a}$$

są liniowo niezależne (dla współrzędnych sferycznych jest to spełnione w całej przestrzeni poza osią z). Oznacza to, że w każdym punkcie U wektory \vec{t}_a tworzą bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 , a zatem dowolne pole wektorowe \vec{V} na U może zostać zapisane w postaci

$$\vec{V} = \vec{t}_a V^a$$

gdzie V^a są pewnymi funkcjami na U . Funkcje te nazywamy **składowymi pola wektorowego \vec{V} we współrzędnych (u^a)** .

Dla uproszczenia notacji, by nie wprowadzać zbyt wielu oznaczeń, to czy składowe wektora są podane we współrzędnych krzywoliniowych czy kartezjańskich, będziemy rozróżniać nie poprzez dodatkowe symbole, a tylko przez nazwy indeksów. Indeksy i, j, k, l, \dots będą zawsze odnosić się do współrzędnych kartezjańskich; indeksy a, b, c, d, \dots będą zawsze oznaczać współrzędne krzywoliniowe.

Wektory \vec{t}_a można rozłożyć w bazie standardowej:

$$\vec{t}_a := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a} = \frac{\partial(x^i \vec{e}_i)}{\partial u^a} = \vec{e}_i \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$$

czyli

$$\vec{t}_a = \vec{e}_i T_a^i$$

gdzie

$$T_a^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$$

są współczynnikami macierzy jacobianu. Mamy też związek odwrotny

$$\vec{e}_i = (T^{-1})_i^a \vec{t}_a$$

Związek pomiędzy wektorami bezowymi przenosi się na związek pomiędzy składowymi wektora we współrzędnych kartezjańskich i współrzędnych krzywoliniowych. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \vec{e}_i V^i &= \vec{t}_a V^a \\ \vec{e}_i V^i &= \vec{e}_i T_a^i V^a \end{aligned}$$

czyli

$$V^i = T_a^i V^a$$

Zależność odwrotna wyraża się zatem wzorem

$$V^a = (T^{-1})_i^a V^i$$

Iloczyn skalarny

Weźmy dwa pola wektorowe rozpisujące się we współrzędnych krzywoliniowych jako $\vec{V} = \vec{t}_a V^a$ i $\vec{W} = \vec{t}_b W^b$. Ich iloczyn skalarny możemy zapisać jako

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = (\vec{t}_a V^a) \cdot (\vec{t}_b W^b) = (\vec{t}_a \cdot \vec{t}_b) V^a W^b$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = g_{ab} V^a W^b$$

gdzie

$$g_{ab} = \vec{t}_a \cdot \vec{t}_b$$

. Wzór ten jest analogiczny do wcześniejszego wzoru, gdy definiował metrykę powierzchni, ale teraz macierz $g = (g_{ab})$ jest macierzą 3×3 . Nazywana jest **metryką przestrzeni** we współrzędnych krzywoliniowych lub **tensorem metrycznym**.

Ponieważ wektory t_a możemy wyrazić za pomocą wektorów \vec{e}_i i współczynników macierzy T , można to zrobić również z macierzą g :

$$g_{ab} = (\vec{e}_i T^i_a) \cdot (\vec{e}_j T^j_b) = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) T^i_a T^j_b$$

$$g_{ab} = \delta_{ij} T^i_a T^j_b$$

powyższy wzór można również zapisać używając macierzy transponowanej

$$g_{ab} = (T^T)_a^i \delta_{ij} T^j_b$$

co można odczytać jako zwykłe mnożenie macierzy:

$$g = T^T \mathbf{1} T = T^T T$$

Z tego wyniku związek

$$\det g = \det(T^T T) = \det(T^T) \det(T) = (\det T)^2$$

który przyda nam się w przyszłości.

Zajmijmy się teraz macierzą g^{-1} , odwrotną do g . Wyjątkowo, współczynniki macierzy g^{-1} oznacza się g^{ab} : nie zapisuje się symbolu $^{-1}$, a od współczynników macierzy g odróżniamy je jedynie pozycją indeksów. Jest to skrótowy zapis który wykształcił się z tego powodu, że macierz ta pojawia się w wielu wzorach, i opuszczenie symbolu $^{-1}$ może je znacząco skrócić i uprościć zapis - pozycja indeksów wystarcza dla rozróżnienia macierzy g od g^{-1} . Mamy więc

$$g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c$$

Mamy też wzory

$$g^{ab} = \delta^{ij} (T^{-1})^a_i (T^{-1})^b_j$$

$$\delta_{ij} = g_{ab} (T^{-1})^a_i (T^{-1})^b_j$$

$$\delta^{ij} = g^{ab} T^i_a T^j_b$$

Sprawdźmy: mamy np.

$$(\delta^{ij} (T^{-1})^a_i (T^{-1})^b_j) g_{bc} =$$

$$\begin{aligned}
&= (\delta^{ij}(T^{-1})^a{}_i(T^{-1})^b{}_j)(\delta_{kl}T^k{}_bT^l{}_c) = \\
&= (T^{-1})^a{}_i\delta^{ij}T^k{}_b(T^{-1})^b{}_j\delta_{kl}T^l{}_c = \\
&= (T^{-1})^a{}_i\delta^{ij}\delta^k{}_j\delta_{kl}T^l{}_c = \\
&= (T^{-1})^a{}_i\delta^i{}_lT^l{}_c = \\
&= (T^{-1})^a{}_i T^i{}_c = \\
&= \delta^a{}_c
\end{aligned}$$

czyli faktycznie $\delta^{ij}(T^{-1})^a{}_i(T^{-1})^b{}_j$ jest macierzą odwrotną do g . Podobnie możemy udowodnić pozostałe relacje.

Macierzy g_{ab} i g^{ab} używa się do zdefiniowania operacji podnoszenia i opuszczania indeksów. Zauważmy, że póki co składowe wektora były zawsze numerowane indeksami górnymi. Analogiczny symbol z indeksem dolnym nie został dotąd wykorzystany. Definiuje się zatem

$$V_a := g_{ab}V^b$$

czyli jeśli wiemy, że V jest symbolem pola wektorowego, to V^a oznacza składowe tego pola w współrzędnych krzywoliniowych, a V_a oznacza te składowe przemnożone jeszcze przez macierz g_{ab} . Żeby z V_a odzyskać V^a musimy pomnożyć je przez współczynniki macierzy g^{-1} , czyli

$$V^a = g^{ab}V_b$$

Przyjęcie tej notacji pozwala uprościć pewne wzory przez podnoszenie lub opuszczanie indeksów. Na przykład wzór na iloczyn skalarny można zapisać jako

$$g_{ab}V^aW^b = V^a(g_{ab}W^b) = V^aW_a$$

lub (korzystając z tego, że $g_{ab} = g_{ba}$)

$$g_{ab}V^aW^b = (g_{ba}V^a)W^b = V_bW^b = V_aW^a$$

Podnoszenie i opuszczanie indeksów za pomocą macierzy g do upraszczania wzorów jest stosowane w wielu wzorach i powinniście Państwo być zaznajomieni z tą możliwością ponieważ jest to jednak nowość, postaram się nie używać tego automatycznie i pozostawiać wzory w postaci może nieco dłuższej, ale za to mam nadzieję, przejrzystszej.

Iloczyn wektorowy

Analogicznie do przypadku współrzędnych kartezjańskich, zdefiniujemy

$$f_{abc} = \vec{t}_a \cdot (\vec{t}_b \times \vec{t}_c)$$

Mamy

$$f_{abc} = (\vec{e}_i T^i{}_a) \cdot (\vec{e}_j T^j{}_b \times \vec{e}_k T^k{}_c) = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) T^i{}_a T^j{}_b T^k{}_c$$

$$f_{abc} = \epsilon_{ijk} T_a^i T_b^j T_c^k$$

Z tego że symbol ϵ_{abc} je zupełnie antysymetryczny (antysymetryczny ze względu na zamianę dowolnych dwóch indeksów) wynika, że symbol f_{abc} również jest zupełnie antysymetryczny. Mamy bowiem, na przykład

$$f_{bac} = \epsilon_{ijk} T_b^i T_a^j T_c^k = -\epsilon_{jik} T_a^j T_b^i T_c^k = -f_{abc}$$

Zupełna antysymetria symbolu f_{abc} oznacza, że wszystkie niezerowe współczynniki tego symbolu są wyznaczone przez f_{123} :

$$f_{123} = f_{231} = f_{312} = -f_{132} = -f_{321} = -f_{123}$$

co można w skrócie zapisać

$$f_{abc} = f_{123} \epsilon_{abc}$$

Ale to nie koniec; współczynnik f_{123} dany jest wzorem

$$f_{123} = \epsilon_{ijk} T_1^i T_2^j T_3^k = T_1^1 T_2^2 T_3^3 + T_1^2 T_2^3 T_1^1 + T_1^3 T_2^1 T_2^2 + \\ - T_1^1 T_2^3 T_2^2 - T_1^3 T_2^2 T_1^1 - T_1^1 T_2^3 T_2^2$$

w czym możemy rozpoznać wzór na wyznacznik:

$$f_{123} = \det T$$

a przypomnę, że mieliśmy wcześniej $\det g = (\det T)^2$. Zakładając więc, że układ współrzędnych krzywoliniowych jest zorientowany tak samo jak układ współrzędnych kartezjańskich, czyli $\det T > 0$, mamy

$$f_{123} = \sqrt{\det g}$$

czyli

$$f_{abc} = \sqrt{\det g} \epsilon_{abc}$$

Jeżeli chcemy zapisać iloczyn dowolnych dwóch wektorów we współrzędnych krzywoliniowych

$$\vec{V} \times \vec{W} = \vec{t}_a (\vec{V} \times \vec{W})^a$$

mamy

$$\vec{t}_a \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{t}_a \cdot \vec{t}_b (\vec{V} \times \vec{W})^b = g_{ab} (\vec{V} \times \vec{W})^b$$

zatem

$$(\vec{V} \times \vec{W})^a = g^{ab} \vec{t}_b \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \\ = g^{ab} \vec{t}_b \cdot (\vec{t}_c V^c \times \vec{t}_d W^d) = \\ = g^{ab} \vec{t}_b \cdot (\vec{t}_c \times \vec{t}_d) V^c W^d = \\ = g^{ab} f_{bcd} V^c W^d = \\ = \sqrt{\det g} g^{ab} \epsilon_{bcd} V^c W^d$$

czyli

$$\vec{V} \times \vec{W} = \vec{t}_a \sqrt{\det g} g^{ab} \epsilon_{bcd} V^c W^d$$

Formy różniczkowe

Przypomnijmy: polu wektorowemu $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ odpowiada 1-forma $\alpha = \delta_{ij} A^i dx^j$. Jeżeli pole wektorowe mamy zapisane we współrzędnych krzywoliniowych $\vec{A} = A^a \vec{e}_a$, i podobnie chcemy zapisać formę, musimy podstawić

$$A^i = T^i_a A^a$$

oraz

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^b} du^b = T^j_b du^b$$

mamy więc

$$\alpha = \delta_{ij} (T^i_a A^a) (T^j_b du^b) = (\delta_{ij} T^i_a T^j_b) A^a du^b = g_{ab} A^a du^b$$

Oznacza to, że całki krzywoliniowe skierowane we współrzędnych krzywoliniowych można zapisać jako

$$\int_K \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_K g_{ab} A^a du^b$$

Co do 2-form, polu wektorowemu $\vec{B} = B^i \vec{e}_i$ odpowiada 2-forma

$$\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$$

dokonując analogicznego podstawienia jak powyżej, mamy

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^i_a B^a (T^j_b du^b) \wedge (T^k_c du^c) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} T^i_a T^j_b T^k_c B^a du^b \wedge du^c = \\ &= \frac{1}{2} f_{abc} B^a du^b \wedge du^c = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c \end{aligned}$$

Oznacza to, że całki powierzchniowe skierowane we współrzędnych krzywoliniowych można zapisać jako

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c$$

Jest to szczególnie przydatne, gdy nasza powierzchnia Σ jest powierzchnią stałej współrzędnej. Np. strumień pola \vec{B} przez kawałek sfery we współrzędnych sferycznych ($\sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$) możemy natychmiast zapisać jako

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Sigma} \frac{1}{2} r^2 \sin \theta (\epsilon_{123} B^1 du^2 \wedge du^3 + \epsilon_{132} B^2 du^3 \wedge du^1) = \\
&= \int_{\Sigma} r^2 \sin \theta B^1 du^2 \wedge du^3 = \\
&= \int_{\Sigma} r^2 \sin \theta B^r d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

We wzorze nie pojawiają się wkłady zawierające $du^1 = dr$, bo na sferze $r = u^1 = \text{const}$.

Wreszcie 3-forma odpowiadająca funkcji f , czyli $f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, zapisuje się jako

$$\begin{aligned}
f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= \\
&= \frac{1}{6} f \epsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = \\
&= \frac{1}{6} f \epsilon_{ijk} (T^i_a du^a) \wedge (T^j_b du^b) \wedge (T^k_c du^c) = \\
&= \frac{1}{6} f \epsilon_{ijk} T^i_a T^j_b T^k_c du^a \wedge du^b \wedge du^c = \\
&= \frac{1}{6} f \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} du^a \wedge du^b \wedge du^c = \\
&= f \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3
\end{aligned}$$

czyli

$$\int_{\Omega} f d^3 x = \int_{\Omega} f \sqrt{\det g} d^3 u$$

Biorąc pod uwagę, że $\det g = (\det T)^2$, a T jest macierzą jacobianu, jest to znany wzór na zamianę zmiennych w całce wielokrotnej.

Podsumowując, możemy umieścić wzory z ostatnich dwóch wykładów w tabeli

	wsp. kartezjańskie x^i	wsp. krzywoliniowe u^a	związki
wektory bazowe	\vec{e}_i	\vec{t}_a	$\vec{t}_a = \vec{e}_i T^i_a, \quad T^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$
pola wektorowe	$\vec{e}_i V^i$	$\vec{t}_a V^a$	$V^a = (T^{-1})^a_i V^i$
iloczyn skalarny $\vec{V} \cdot \vec{W}$	$\delta_{ij} V^i W^j$	$g_{ab} V^a W^b$	$g_{ab} = \vec{t}_a \cdot \vec{t}_b = \delta_{ij} T^i_a T^j_b$
iloczyn wektorowy $\vec{V} \times \vec{W}$	$\vec{e}_i \delta^{ij} \epsilon_{jkl} V^k W^l$	$\vec{t}_a \sqrt{\det g} g^{ab} \epsilon_{bcd} V^c W^d$	
1-forma odpowiadająca polu \vec{A}	$\delta_{ij} A^i dx^j$	$g_{ab} A^a du^b$	
2-forma odpowiadająca polu \vec{B}	$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$	$\frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c$	
3-forma odpowiadająca funkcji f	$f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	$f \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$	

Wzory na operatory różniczkowe we współrzędnych krzywoliniowych pojawiają się na następnym wykładzie.

Wykład 10: Współrzędne krzywoliniowe, część 2

Gradient

Przypomnijmy, gradient funkcji f jest definiowany jako pole wektorowe odpowiadające 1-formie df . Mamy

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^b} du^b = g_{ab}(\vec{\nabla} f)^a du^b$$

czyli

$$g_{ab}(\vec{\nabla} f)^a = \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

$$(\vec{\nabla} f)^a = g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

$$\vec{\nabla} f = \vec{t}_a g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

Wynik ten możemy również uzyskać ze wzoru

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Korzystając ze wzoru

$$\delta^{ij} = g^{ab} T_a^i T_b^j$$

otrzymujemy

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_i T_a^i g^{ab} T_b^j \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Ponieważ

$$\vec{e}_i T_a^i = \vec{t}_a$$

oraz

$$T_b^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial u^b} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

to

$$\vec{\nabla} f = \vec{t}_a g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

Rotacja

Tak jak poprzednio, skorzystamy z definicji rotacji pola wektorowego \vec{A} : jest to pole wektorowe odpowiadające 2-formie $d\alpha$, gdzie α jest 1-formą odpowiadającą polu \vec{A} , czyli

$$\alpha = g_{ab} A^a du^b$$
$$d\alpha = \frac{\partial(g_{ab} A^a)}{\partial u^c} du^c \wedge du^b = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g_{ac} A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab} A^a)}{\partial u^c} \right) du^b \wedge du^c$$

Zwróćmy uwagę, że w odróżnieniu od przypadku współrzędnych kartezjańskich, nie możemy wyciągnąć g_{ab} poza różniczkowanie, gdyż jest to w ogólności funkcja zależna od współrzędnych (w odróżnieniu od δ_{ij} , które jest stałe). Wyrażenie

zostało też zapisane w formie, w której współczynnik przy $du^b \wedge du^c$ jest antysymetryczny, aby można było porównać ze wzorem na 2-formę odpowiadającą polu wektorowemu:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) du^b \wedge du^c = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a du^b \wedge du^c$$

A zatem

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a &= \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \\ \epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony przez ϵ^{dbc} i używając wzoru $\epsilon^{dbc} \epsilon_{abc} = 2\delta_a^d$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \epsilon^{dbc} \epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{dbc} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) \\ 2\delta_a^d (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{dbc} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^d &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{dbc} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) \end{aligned}$$

Możemy ten wzór uprościć, korzystając z relacji

$$\begin{aligned} \epsilon^{dbc} \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} &\stackrel{\text{(zamiana oznaczeń } b \leftrightarrow c)}{=} \epsilon^{dcb} \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} = \\ &\stackrel{\text{(using antisymmetry of } \epsilon)}{=} -\epsilon^{dbc} \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} \epsilon^{dbc} \left(\frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} - \frac{\partial(g_{ab}A^a)}{\partial u^c} \right) &= 2\epsilon^{dbc} \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})^d &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{dbc} \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b} \end{aligned}$$

czyli

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{t}_d \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{dbc} \frac{\partial(g_{ac}A^a)}{\partial u^b}$$

Zamieniając jeszcze nazwy indeksów $a \leftrightarrow d$, aby we wzorze były one w bardziej naturalnej kolejności, możemy ten wzór zapisać jako

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{t}_a \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b}$$

Można uzyskać też ten wzór nie korzystając z form, ze wzoru

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\delta_{kl}A^l)}{\partial x^j}$$

ale jest to bardziej skomplikowane. Mamy

$$\delta_{kl}A^l = g_{cd}(T^{-1})^c_k(T^{-1})^d_lA^l = g_{cd}(T^{-1})^c_kA^d$$

zatem

$$\frac{\partial(\delta_{jk}A^k)}{\partial x^j} = \frac{\partial((T^{-1})^c_k)}{\partial x^j}g_{cd}A^d + (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial x^j}$$

Ponieważ T jest macierzą pochodnych współrzędnych x po współrzędnych u ,

$$T^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$$

to można udowodnić, że macierz odwrotna jest macierzą współrzędnych u po współrzędnych x :

$$(T^{-1})^a_i = \frac{\partial u^a}{\partial x^i}$$

Mamy zatem

$$\frac{\partial((T^{-1})^c_k)}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^k \partial u^j}$$

jest to wyrażenie symetryczne ze względu na zamianę indeksów $j \leftrightarrow k$. Z kolei ϵ^{ijk} jest symbolem antysymetrycznym. Zatem

$$\epsilon^{ijk} \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^k \partial u^j} = \epsilon^{ikj} \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^j \partial u^k} = -\epsilon^{ijk} \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^k \partial u^j}$$

czyli

$$\epsilon^{ijk} \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^k \partial u^j} = 0$$

Wynika z tego, że w możemy uprościć wyrażenie

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk} \frac{\partial(\delta_{jk}A^k)}{\partial x^j} &= \epsilon^{ijk} \left(\frac{\partial((T^{-1})^c_k)}{\partial x^j} g_{cd}A^d + (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial x^j} \right) = \\ &= \epsilon^{ijk} \frac{\partial^2 x^c}{\partial u^k \partial u^j} g_{cd}A^d + \epsilon^{ijk} (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial x^j} = \\ &= \epsilon^{ijk} (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Następnie korzystając z relacji

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial u^b}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial u^b} = (T^{-1})^b_j \frac{\partial}{\partial u^b}$$

otrzymujemy

$$\epsilon^{ijk} \frac{\partial(\delta_{jk}A^k)}{\partial x^j} = \epsilon^{ijk} (T^{-1})^b_j (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b}$$

Korzystając również ze wzoru

$$\vec{e}_i = \vec{t}_a (T^{-1})^a_i$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{t}_a (T^{-1})^a_i \epsilon^{ijk} (T^{-1})^b_j (T^{-1})^c_k \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b} = \\
&= \vec{t}_a \det(T^{-1}) \epsilon^{abc} \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b} = \\
&= \vec{t}_a \frac{1}{\det T} \epsilon^{abc} \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b} = \\
&= \vec{t}_a \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \frac{\partial(g_{cd}A^d)}{\partial u^b}
\end{aligned}$$

Dywergencja

Jak w poprzednich przypadkach, korzystamy z definicji dywergencji pola wektorowego \vec{B} : jest to funkcja odpowiadająca 3-formie $d\beta$, gdzie β jest 2-formą odpowiadającą polu wektorowemu \vec{B} . We współrzędnych krzywoliniowych mamy

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c$$

zatem

$$\begin{aligned}
d\beta &= \frac{\partial}{\partial u^d} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a \right) du^d \wedge du^b \wedge du^c = \\
&= \frac{\partial}{\partial u^d} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a \right) \epsilon^{dbc} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon^{dbc} \frac{\partial}{\partial u^d} \left(\sqrt{\det g} B^a \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = \\
&= \frac{1}{2} 2\delta_a^d \frac{\partial}{\partial u^d} \left(\sqrt{\det g} B^a \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = \\
&= \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{\det g} B^a \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3
\end{aligned}$$

porównując to ze wzorem na 3-formę odpowiadającą funkcji $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{\det g} B^a \right) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \sqrt{\det g} = \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{\det g} B^a \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{\det g} B^a \right)$$

Można też udowodnić ten wzór z formuły

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i$$

ale jak poprzednio, jest to bardziej skomplikowane niż przy użyciu form różniczkowych. Mamy

$$B^i = T^i_a B^a$$

oraz

$$T_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial u^a} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial u^a}$$

zatem

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (T_a^i B^a) = \\ &= T_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} (B^a) + B^a \frac{\partial}{\partial x^i} (T_a^i) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^a} (B^a) + B^a \frac{\partial}{\partial x^i} (T_a^i) \end{aligned}$$

Z kolei

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} B^a) &= \\ = \frac{\partial}{\partial u^a} (B^a) + B^a \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g}) &= \\ = \frac{\partial}{\partial u^a} (B^a) + B^a \frac{1}{\det T} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} \end{aligned}$$

Aby udowodnić wzór na dywergencję, musimy zatem pokazać, że

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (T_a^i) = \frac{1}{\det T} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a}$$

Żeby to udowodnić, skorzystamy ze wzoru

$$\epsilon_{ijk} T_b^i T_c^j T_d^k = (\det T) \epsilon_{bcd}$$

z której wynika, że

$$\det T = \frac{1}{6} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ijk} T_b^i T_c^j T_d^k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} &= \frac{1}{6} \epsilon^{bcd} \frac{\partial}{\partial u^a} (\epsilon_{ijk} T_b^i T_c^j T_d^k) = \\ &= \frac{1}{6} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_c^j T_d^k + T_b^i \frac{\partial T_c^j}{\partial u^a} T_d^k + T_b^i T_c^j \frac{\partial T_d^k}{\partial u^a} \right) \end{aligned}$$

Używając zamiany oznaczeń możemy udowodnić, że każdy z trzech składników daje identyczny wkład; np. zamieniając oznaczenia $i \leftrightarrow j$ oraz $b \leftrightarrow c$ w drugim składniku, otrzymujemy

$$\frac{1}{6} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ijk} T_b^i \frac{\partial T_c^j}{\partial u^a} T_d^k = \frac{1}{6} \epsilon^{cbd} \epsilon_{jik} T_c^j \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_d^k = \frac{1}{6} (-\epsilon^{bcd})(-\epsilon_{ijk}) \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_c^j T_d^k = \frac{1}{6} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ijk} \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_c^j T_d^k$$

Podobnie możemy zrobić z trzecim składnikiem. Mamy więc

$$\frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} = \frac{1}{2} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ijk} \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_c^j T_d^k$$

Rozpiszmy teraz

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{ljk} \delta_i^l = \epsilon_{ljk} T_e^l (T^{-1})^e{}_i$$

dzięki temu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} &= \frac{1}{2} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ljk} T_e^l (T^{-1})^e{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} T_c^j T_d^k = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{bcd} (\epsilon_{ljk} T_e^l T_c^j T_d^k) (T^{-1})^e{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{bcd} \epsilon_{ecd} (\det T) (T^{-1})^e{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} = \\ &= \frac{1}{2} 2 \delta_e^b (\det T) (T^{-1})^e{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} = \\ &= (\det T) (T^{-1})^b{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} \end{aligned}$$

Ponieważ

$$T_b^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^b}$$

to

$$\frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^a \partial u^b} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^b \partial u^a} = \frac{\partial T_a^i}{\partial u^b}$$

Dodając do tego fakt, że

$$(T^{-1})^b{}_i \frac{\partial}{\partial u^b} = \frac{\partial u^b}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^b} = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} &= (\det T) (T^{-1})^b{}_i \frac{\partial T_b^i}{\partial u^a} = \\ &= (\det T) (T^{-1})^b{}_i \frac{\partial T_a^i}{\partial u^b} = \\ &= (\det T) \frac{\partial T_a^i}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Zatem faktycznie

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{\partial}{\partial u^a} (B^a) + B^a \frac{\partial}{\partial x^i} (T_a^i) = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^a} (B^a) + B^a \frac{1}{\det T} \frac{\partial(\det T)}{\partial u^a} = \\ &= \frac{1}{\det T} \frac{\partial}{\partial u^a} ((\det T) B^a) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} B^a) \end{aligned}$$

Laplasjan

Połączmy jeszcze wzory na gradient i dywergencję by otrzymać wzór na laplasjan funkcji, czyli dywergencję gradientu:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} (\vec{\nabla} f)^a) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} \left(\sqrt{\det g} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b} \right)\end{aligned}$$

Powyższy wzór, choć można go zastosować dla dowolnych współrzędnych, najczęściej stosuje się w przypadku, tzw. współrzędnych ortogonalnych, czyli takich, dla których macierz g_{ab} jest diagonalna (co się zdarza gdy $\vec{t}_a \cdot \vec{t}_b = 0$ dla $a \neq b$). Rozważmy ten przypadek. Oznaczmy

$$h_a = |\vec{t}_a|$$

mamy

$$\begin{aligned}[g_{ab}] &= \begin{bmatrix} (h_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (h_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (h_3)^2 \end{bmatrix} \\ \det g &= (h_1 h_2 h_3)^2 \\ \sqrt{\det g} &= h_1 h_2 h_3 \\ [g^{ab}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(h_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(h_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(h_3)^2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ponieważ jedynie współczynniki g^{11} , g^{22} i g^{33} macierzy g^{-1} są niezerowe, wzór na laplasjan przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\sqrt{\det g} g^{11} \frac{\partial f}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\sqrt{\det g} g^{22} \frac{\partial f}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\sqrt{\det g} g^{33} \frac{\partial f}{\partial u^3} \right) = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u^3} \right) \right)\end{aligned}$$

Ponieważ większość przydatnych w fizyce układów współrzędnych to układy ortogonalne (np. zarówno układ współrzędnych sferycznych jak i cylindrycznych się do nich zaliczają), powyższy wzór pozwala napisać wzór na laplasjan znając jedynie funkcje h_a czyli długości wektorów \vec{t}_a .

Zróbmy podsumowanie. Rozszerzając tabelką podaną pod koniec poprzedniego wykładu, mamy

	wsp. kartezjańskie x^i	wsp. krzywoliniowe u^a	związki
wektory bazowe	\vec{e}_i	\vec{t}_a	$\vec{t}_a = \vec{e}_i T^i_a, \quad T^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$
pola wektorowe	$\vec{e}_i V^i$	$\vec{t}_a V^a$	$V^a = (T^{-1})^a_i V^i$
iloczyn skalarny $\vec{V} \cdot \vec{W}$	$\delta_{ij} V^i W^j$	$g_{ab} V^a W^b$	$g_{ab} = \vec{t}_a \cdot \vec{t}_b = \delta_{ij} T^i_a T^j_b$
iloczyn wektorowy $\vec{V} \times \vec{W}$	$\vec{e}_i \delta^{ij} \epsilon_{jkl} V^k W^l$	$\vec{t}_a \sqrt{\det g} g^{ab} \epsilon_{bcd} V^c W^d$	
1-forma odpowiadająca polu \vec{A}	$\delta_{ij} A^i dx^j$	$g_{ab} A^a du^b$	
2-forma odpowiadająca polu \vec{B}	$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B^i dx^j \wedge dx^k$	$\frac{1}{2} \sqrt{\det g} \epsilon_{abc} B^a du^b \wedge du^c$	
3-forma odpowiadająca funkcji f	$f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$	$f \sqrt{\det g} du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$	
gradient $\vec{\nabla} f$	$\vec{e}_i \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$	$\vec{t}_a g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$	
rotacja $\vec{\nabla} \times \vec{A}$	$\vec{e}_i \epsilon^{ijk} \delta_{kl} \frac{\partial A^l}{\partial x^j}$	$\vec{t}_a \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \frac{\partial (g_{cd} A^d)}{\partial u^b}$	
dywergencja $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$	$\frac{\partial B^i}{\partial x^i}$	$\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} B^a)$	
laplasjan Δf	$\delta^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$	$\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b})$	

Zauważmy, że wszystkie wzory we współrzędnych krzywoliniowych udało się zapisać za pomocą jednego tylko obiektu: metryki g . Oznacza to, że sama zależność współrzędnych x^i od współrzędnych u^a przestaje mieć znaczenie, jeżeli tylko znamy metrykę. Zdarza się nawet, że rozważa się sytuacje zakrzywionych przestrzeni, w których w ogóle nie ma czegoś takiego jak współrzędne kartezjańskie, wszystkie układy współrzędnych są układami krzywoliniowymi z nietrywialną metryką - ale jeśli tylko tą metrykę mamy podaną, to możemy z powyższych wzorów korzystać, nie korzystając w ogóle ze współrzędnych kartezjańskich.

Ćwiczenia wykładowe 5: Konwencja sumacyjna i krzywoliniowe układy współrzędnych

Rozwiążmy takie zadanie:

Zad. Używając konwencji sumacyjnej, pokażać, że

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

gdzie laplasjan pola wektorowego definiujemy jako działający niezależnie na każdą składową:

$$(\Delta \vec{A})^i = \Delta (A^i)$$

Dowód przeprowadzimy w kartezjańskim układzie współrzędnych - nie ma tu potrzeby angażowania ogólnych wzorów w układzie krzywoliniowym. Przypomnijmy, że

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \delta_{kl} \frac{\partial A^l}{\partial x^j}$$

Jeśli w tym wzorze za \vec{A} podstawimy $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, otrzymujemy

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \delta_{kl} \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})^l}{\partial x^j}$$

Żeby dostać $(\vec{\nabla} \times \vec{A})^l$ wystarczy we wzorze na rotację zamienić nazwy indeksów. Przede wszystkim $i \rightarrow l$, ale nie możemy też drugi raz użyć indeksów j, k i l , więc zamienimy je odpowiednio na m, n, p , otrzymując

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_l \epsilon^{lmn} \delta_{np} \frac{\partial A^p}{\partial x^k}$$

czyli

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})^l = \epsilon^{lmn} \delta_{np} \frac{\partial A^p}{\partial x^k}$$

podstawiając to do wzoru na $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\epsilon^{lmn} \delta_{np} \frac{\partial A^p}{\partial x^m} \right) = \\ &= \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \epsilon^{lmn} \delta_{kl} \delta_{np} \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m} \end{aligned}$$

Mamy w tym wzorze wyrażenie $\epsilon^{lmn} \delta_{kl} \delta_{np}$. Możemy użyć δ_{kl} i δ_{np} do obniżenia indeksów w ϵ^{lmn} :

$$\epsilon^{lmn} \delta_{kl} \delta_{np} = \epsilon_k^m \quad p$$

ale otrzymujemy w ten sposób nietypowy symbol ϵ z dwoma indeksami na dole i jednym na górze. Można jednak obniżyć i trzeci indeks, w następujący sposób

$$\epsilon_k^m \quad p = \epsilon_{krp} \delta^{rm}$$

Otrzymujemy więc

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{e}_i \epsilon^{ijk} \epsilon_{krp} \delta^{rm} \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m}$$

Zachodzi

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{krp} = \epsilon^{kij} \epsilon_{krp} = \delta_r^i \delta_p^j - \delta_p^i \delta_r^j$$

Zatem

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{e}_i (\delta_r^i \delta_p^j - \delta_p^i \delta_r^j) \delta^{rm} \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m} = \\ &= \vec{e}_i (\delta^{im} \delta_p^j - \delta_p^i \delta^{jm}) \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m} = \\ &= \vec{e}_i \delta^{im} \delta_p^j \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m} - \vec{e}_i \delta_p^i \delta^{jm} \frac{\partial^2 A^p}{\partial x^j \partial x^m} = \\ &= \vec{e}_i \delta^{im} \frac{\partial^2 A^j}{\partial x^j \partial x^m} - \vec{e}_i \delta^{jm} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^j \partial x^m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{e}_i \delta^{im} \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^j} \right) - \vec{e}_i \delta^{jm} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^m} A^i = \\
&= \vec{e}_i \delta^{im} \frac{\partial}{\partial x^m} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{e}_i (\Delta A^i) = \\
&= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}
\end{aligned}$$

Jako drugie ćwiczenie z konwencji sumacyjnej rozważmy takie zadanie:

Zad. Niech \vec{n} będzie wektorem o długości 1 oraz $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \neq 0$. Pokazać, że macierz odwrotna do macierzy

$$A^i_j = \delta^i_j - (1 - \xi) n^i n_j = \delta^i_j - (1 - \xi) n^i \delta_{jk} n^k$$

jest postaci

$$B^i_j = \delta^i_j - \lambda n^i n_j$$

dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Znaleźć λ .

Aby to sprawdzić, wystarczy przemnożyć te dwie macierze:

$$\begin{aligned}
A^i_j B^j_k &= \left(\delta^i_j - (1 - \xi) n^i n_j \right) \left(\delta^j_k - \lambda n^j n_k \right) = \\
&= \delta^i_j \delta^j_k - (1 - \xi) n^i n_j \delta^j_k - \lambda \delta^i_j n^j n_k + (1 - \xi) \lambda n^i n_j n^j n_k = \\
&= \delta^i_k - (1 - \xi) n^i n_k - \lambda n^i n_k + (1 - \xi) \lambda |\vec{n}|^2 n^i n_k = \\
&= \delta^i_k - (1 - \xi) n^i n_k - \lambda n^i n_k + (1 - \xi) \lambda n^i n_k = \\
&= \delta^i_k - (1 - \xi + \xi \lambda) n^i n_k
\end{aligned}$$

Potrzebujemy zatem

$$1 - \xi + \xi \lambda = 0$$

czyli

$$\lambda = \frac{-1 + \xi}{\xi} = 1 - \frac{1}{\xi}$$

Dla tego λ mamy

$$A^i_j B^j_k = \delta^i_k$$

czyli

$$\mathbf{AB} = \mathbf{1}$$

czyli \mathbf{B} jest macierzą odwrotną do \mathbf{A} .

Zróbmy jeszcze ćwiczenie z odczytywania wzorów dotyczących układów krzywoliniowych.

Zad. Znaleźć jawne wzory na gradient, rotację, dywergencję i laplasjan w sferycznym układzie współrzędnych.

Mamy $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \varphi$ oraz związki $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Daje nam to

$$\vec{t}_r = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \vec{t}_\theta = \begin{bmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{bmatrix}, \quad \vec{t}_\varphi = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_{ab}] = [\vec{t}_a \cdot \vec{t}_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\det g} = r^2 \sin \theta$$

$$[g^{ab}] = [\vec{t}_a \cdot \vec{t}_b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

Macierz g jest macierzą diagonalną, zatem wszystkie wyrażenia w których występuje czynnik g_{ab} z $a \neq b$ będą się zerowały. Uprości nam to wzory znacząco.

Zajmijmy się najpierw gradientem. Mamy ogólny wzór

$$\vec{\nabla} f = \vec{t}_a g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b}$$

Jest on zapisany w konwencji sumacyjnej, co oznacza, że należy go odczytywać jako sumę wyrazów ze wszystkimi możliwymi kombinacjami wartości indeksów a i b . Ale ze wszystkich tych składników jedynie trzy będą niezerowe: te w których $a = b = r$, $a = b = \theta$ lub $a = b = \varphi$. W pozostałych $a \neq b$, więc wyrazy te będą się zerować. Mamy więc

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \vec{t}_r g^{rr} \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{t}_\theta g^{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{t}_\varphi g^{\varphi\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \\ &= \vec{t}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{t}_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{t}_\varphi \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Weźmy teraz rotację. Mamy ogólny wzór

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{t}_a \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \frac{\partial (g_{cd} A^d)}{\partial u^b}$$

Wyrażenie zapisane w konwencji sumacyjnej oznacza sumowanie po wszystkich możliwych kombinacjach indeksów a, b, c, d . Na wstępie oznaczałoby to $3^4 = 81$ kombinacji. Ale czynnik ϵ^{abc} oznacza, że wskaźniki a, b, c muszą być wszystkie różne, lub cały wyraz się wyzeruje. Z kolei czynnik g_{cd} oznacza, że potrzebujemy $d = c$, lub znów, cały wyraz się wyzeruje. Z tego powodu pozostaje nam jedynie 6 składników:

$$a = r, \quad b = \theta, \quad c = d = \varphi$$

$$\begin{aligned}
a &= r, & b &= \theta, & c &= d = \theta \\
a &= \theta, & b &= \varphi, & c &= d = r \\
a &= \theta, & b &= r, & c &= d = \varphi \\
a &= \varphi, & b &= r, & c &= d = \theta \\
a &= \varphi, & b &= \theta, & c &= d = r
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \vec{t}_r \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\epsilon^{r\theta\varphi} \frac{\partial(g_{\varphi\varphi} A^\varphi)}{\partial \theta} + \epsilon^{r\varphi\theta} \frac{\partial(g_{\theta\theta} A^\theta)}{\partial \varphi} \right) + \\
&+ \vec{t}_\theta \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\epsilon^{\theta\varphi r} \frac{\partial(g_{rr} A^r)}{\partial \varphi} + \epsilon^{\theta r\varphi} \frac{\partial(g_{\varphi\varphi} A^\varphi)}{\partial r} \right) + \\
&+ \vec{t}_\varphi \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\epsilon^{\varphi r\theta} \frac{\partial(g_{\theta\theta} A^\theta)}{\partial r} + \epsilon^{\varphi\theta r} \frac{\partial(g_{rr} A^r)}{\partial \theta} \right) = \\
&= \vec{t}_r \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta A^\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(r^2 A^\theta)}{\partial \varphi} \right) + \\
&+ \vec{t}_\theta \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial A^r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta A^\varphi)}{\partial r} \right) + \\
&+ \vec{t}_\varphi \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r^2 A^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A^r}{\partial \theta} \right) = \\
&= \vec{t}_r \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin^2 \theta A^\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A^\theta}{\partial \varphi} \right) + \\
&+ \vec{t}_\theta \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A^r}{\partial \varphi} - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial(r^2 A^\varphi)}{\partial r} \right) + \\
&+ \vec{t}_\varphi \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(r^2 A^\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A^r}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

Następna w kolejności jest dywergencja. Mamy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} B^a)$$

Jest tylko jeden indeks sumowania a , więc po prostu musimy wypisać jawnie 3 składniki

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{\det g} B^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\det g} B^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{\det g} B^\varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta B^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta B^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \theta B^\varphi) \right) = \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B^r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta B^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial B^\varphi}{\partial \varphi}
\end{aligned}$$

Mamy wreszcie laplasjan:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial u^a} (\sqrt{\det g} g^{ab} \frac{\partial f}{\partial u^b})$$

Z powodu obecności czynnika g^{ab} będziemy mieli tylko 3 niezerowe składniki, odpowiadające $a = b$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{\det g} g^{rr} \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\det g} g^{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sqrt{\det g} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\end{aligned}$$

Wykład 11: Funkcje zespolone

Zacznijmy dziś nowy dział, tak zwaną *analizę zespoloną*. Jest to dział matematyki który bada funkcje $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pod względem ich własności analitycznych: ciągłości, różniczkowalności, całkowalności itd. Zacznijmy jednak od pojęć jeszcze bardziej podstawowych:

Definicja: zbieżność ciągu liczb zespolonych

Niech $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Mówimy, że jest on *zbieżny do granicy* $g \in \mathbb{C}$, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = g$, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{Re} g, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} g$$

Równoważnie warunek ten można zapisać jako

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - g| = 0$$

Ta definicja jest intuicyjna. Ciąg punktów zespolonych dąży do zadanej granicy, jeśli składowe rzeczywista i urojona tego ciągu dążą odpowiednio do składowej rzeczywistej i urojonej granicy; równoważnie, jeśli na płaszczyźnie odległość punktów z_n od punktu granicznego dąży do zera. Równoważność tych warunków wynika z oszacowań

$$0 \leq |x_n - \operatorname{Re} g|, |y_n - \operatorname{Im} g| \leq |z_n - g| \leq |x_n - \operatorname{Re} g| + |y_n - \operatorname{Im} g|$$

z których wynika, że jeśli $|x_n - \operatorname{Re} g|$ i $|y_n - \operatorname{Im} g|$ dążą do zera to $|z_n - g|$ dąży do zera, i vice versa.

Mamy też

Definicja: zbieżność ciągu liczb zespolonych do nieskończoności

Niech $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Mówimy, że jest on *zbieżny do nieskończoności zespolonej*, co zapisujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$$

Ta definicja nie jest już tak intuicyjna. O ile w liczbach rzeczywistych mamy dwa kierunki zbieżności do nieskończoności (do $+\infty$ i do $-\infty$), to w liczbach zespolonych kierunki nie mają znaczenia - mamy tylko jeden "punkt" w nieskończoności, tylko jedną nieskończoność zespoloną. Oznacza to, że ciągi liczb rzeczywistych które są zbieżne do $-\infty$, jeżeli traktowane jako ciągi liczb rzeczywistych są wciąż zbieżne do nieskończoności zespolonej. Istnieją nawet ciągi, np. $z_n = (-1)^n n$, które w liczbach rzeczywistych nie mają granicy, nawet nieskończonej (bo oscylują między $+\infty$ a $-\infty$) ale jako ciągi liczb zespolonych mają granicę w nieskończoności zespolonej.

Idea nieskończoności zespolonej jako pojedynczego punktu wiąże się z pojęciem tzw. *sfer Riemanna* będącej płaszczyzną zespoloną z "doklejaną nieskończonością zespoloną, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, którą będziemy oznaczać też $\bar{\mathbb{C}}$. Okazuje się, że płaszczyznę zespoloną można odwzorować na powierzchnię sfery dwuwymiarowej (zanurzonej w trzech wymiarach) pokrywającą tę sferę niemal w całości - bez jednego punktu. Ten jeden punkt odpowiada nieskończoności zespolonej. Konkretny wzór na to odwzorowanie to

$$\bar{\mathbb{C}} \ni z \mapsto \phi(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$\bar{\mathbb{C}} \ni \infty \mapsto (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

a na odwzorowanie odwrotne

$$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}^2 \ni (X, Y, Z) \mapsto \phi^{-1}(X, Y, Z) = \frac{X + iY}{1 - Z} \in \bar{\mathbb{C}} \quad \text{dla } (X, Y, Z) \neq (0, 0, 1)$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}^2 \ni (0, 0, 1) \mapsto \infty \in \bar{\mathbb{C}}$$

Można łatwo sprawdzić, że te wzory są faktycznie wzorami na funkcje do siebie odwrotne, mamy:

$$\phi^{-1}(\phi(z)) = \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1} + i \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}}{1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}} = \frac{2\operatorname{Re} z + i2\operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1 - (|z|^2 - 1)} = \frac{2(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)}{2} = z$$

oraz

$$\begin{aligned} \phi(\phi^{-1}(z)) &= \left(\frac{2\operatorname{Re} \frac{X+iY}{1-Z}}{\left| \frac{X+iY}{1-Z} \right|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} \frac{X+iY}{1-Z}}{\left| \frac{X+iY}{1-Z} \right|^2 + 1}, \frac{\left| \frac{X+iY}{1-Z} \right|^2 - 1}{\left| \frac{X+iY}{1-Z} \right|^2 + 1} \right) = \\ &= \left(\frac{\frac{2X}{1-Z}}{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} + 1}, \frac{\frac{2Y}{1-Z}}{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} + 1}, \frac{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} - 1}{\frac{X^2+Y^2}{(1-Z)^2} + 1} \right) = \\ &= \left(\frac{\frac{2X}{1-Z}}{\frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} + 1}, \frac{\frac{2Y}{1-Z}}{\frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} + 1}, \frac{\frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} - 1}{\frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} + 1} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\frac{2X}{1-Z}}{\frac{1+Z}{1-Z} + 1}, \frac{\frac{2Y}{1-Z}}{\frac{1+Z}{1-Z} + 1}, \frac{\frac{1+Z}{1-Z} - 1}{\frac{1+Z}{1-Z} + 1} \right) = \\
&= \left(\frac{2X}{(1+Z) + (1-Z)}, \frac{2Y}{(1+Z) + (1-Z)}, \frac{(1+Z) - (1-Z)}{(1+Z) + (1-Z)} \right) = \\
&= \left(\frac{2X}{2}, \frac{2Y}{2}, \frac{2Z}{2} \right) = \\
&= (X, Y, Z)
\end{aligned}$$

Jest to też odwzorowanie ciągłe - przekształca ciągi zbieżne na ciągi zbieżne. Jest to oczywiste, gdy $z_n \rightarrow g$, bo ϕ obcięte do płaszczyzny zespolonej jest złożeniem odwzorowań ciągłych. Ale również gdy $z_n \rightarrow \infty$, czyli $|z_n| \rightarrow \infty$ mamy

$$\begin{aligned}
&|\phi(z_n) - \phi(\infty)|^2 = \\
&= \left| \left(\frac{2\operatorname{Re} z_n}{|z_n|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} z_n}{|z_n|^2 + 1}, \frac{|z_n|^2 - 1}{|z_n|^2 + 1} \right) - (0, 0, 1) \right|^2 = \\
&= \left| \left(\frac{2\operatorname{Re} z_n}{|z_n|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im} z_n}{|z_n|^2 + 1}, \frac{-2}{|z_n|^2 + 1} \right) \right|^2 = \\
&= \left(\frac{2\operatorname{Re} z_n}{|z_n|^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2\operatorname{Im} z_n}{|z_n|^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{-2}{|z_n|^2 + 1} \right)^2 = \\
&= \frac{4(\operatorname{Re} z_n)^2 + 4(\operatorname{Im} z_n)^2 + 4}{(|z_n|^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{4(|z_n|^2 + 1)}{(|z_n|^2 + 1)^2} = \\
&= \frac{4}{|z_n|^2 + 1} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

czyli $\phi(z_n) \rightarrow \phi(\infty)$, co oznacza, że ϕ jest ciągłe również w nieskończoności. ϕ^{-1} również jest ciągłe; oczywiste jest, że jest ciągłe w punktach o $Z \neq 0$, a gdy mamy ciąg $\mathbb{S}^2 \ni (X_n, Y_n, Z_n) \rightarrow (0, 0, 1)$ to

$$\begin{aligned}
&|\phi^{-1}(X_n, Y_n, Z_n)|^2 = \\
&= \left| \frac{X_n + iY_n}{1 - Z_n} \right|^2 = \\
&= \frac{X_n^2 + Y_n^2}{(1 - Z_n)^2} = \\
&= \frac{1 - Z_n^2}{(1 - Z_n)^2} = \\
&= \frac{1 + Z_n}{1 - Z_n} \xrightarrow{(\text{ponieważ } Z_n \rightarrow 1)} \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Zatem faktycznie $\phi^{-1}(X_n, Y_n, Z_n)$ zbiega do nieskończoności zespolonej czyli do $\phi^{-1}(0, 0, 1)$. To, że zarówno ϕ jak i ϕ^{-1} są ciągłe oznacza, że $\bar{\mathbb{C}}$ jest topologicznie

równoważne sferze \mathbb{S}^2 , stąd nazwa "sfera Riemanna". Traktowanie nieskończoności zespolonej jako po prostu jednego z punktów na sferze Riemanna, bywa w wielu przypadkach przydatne - uprawomocnia liczenie wartości funkcji w nieskończoności zespolonej, czy mówienie że wartość funkcji w jakimś punkcie jest równa nieskończoności.

Mając definicję granicy ciągów zespolonych, możemy zdefiniować teraz granice funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, lub ogólniej, granice funkcji $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Mamy

Definicja: granica funkcji na płaszczyźnie zespolonej

Niech $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ będzie funkcją o argumentach i wartościach zespolonych. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{C}}$ jest granicą tej funkcji w punkcie $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, co oznaczamy jako $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g$, jeśli dla dowolnego ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ zachodzi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = g$$

Jeżeli $z_0 \in \mathbb{C}$ i $g \in \mathbb{C}$ to badanie granicy funkcji zespolonej jest równoważne badanie granicy funkcji dwóch zmiennych na płaszczyźnie $f(x + iy) = f(x, y)$, i powyższą definicję można zapisać w postaci Cauchy'ego:

Mówimy, że $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = g$, jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : (|z - z_0| < \delta) \Rightarrow (|f(z) - g| < \epsilon)$$

Powyższą definicję możemy jednak zastosować również gdy $z_0 = \infty$ lub $g = \infty$. Na przykład, gdy $z_0 = \infty$, $g \in \mathbb{C}$ definicja mówi, że

Mówimy, że $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = g$ jeśli

- dla każdego ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ takiego, że $|z_n| \rightarrow \infty$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = g$
- (równoważnie) $\forall \epsilon > 0 \exists M > 0 \forall z \in \mathbb{C} : (|z| > M) \Rightarrow (|f(z) - g| < \epsilon)$

Dla $z_0 \in \mathbb{C}$, $g = \infty$ mamy

Mówimy, że $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ jeśli

- dla każdego ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ takiego, że $z_n \rightarrow z_0$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$
- (równoważnie) $\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in \mathbb{C} : (|z - z_0| < \delta) \Rightarrow (|f(z)| > M)$

Wreszcie dla $z_0 = g = \infty$ mamy

Mówimy, że $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ jeśli

- dla każdego ciągu $z_n \in \mathbb{C}$ takiego, że $|z_n| \rightarrow \infty$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(z_n)| = \infty$
- (równoważnie) $\forall M_1 > 0 \exists M_2 > 0 \forall z \in \mathbb{C} : (|z| > M_2) \Rightarrow (|f(z)| > M_1)$

Mając definicję granicy funkcji, ciągłość definiujemy oczywiście jako

Definicja: granica funkcji na płaszczyźnie zespolonej

Funkcję $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ nazywamy ciągłą w punkcie $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ gdy $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Zazwyczaj będziemy zakładać, że rozważane funkcje są wszędzie ciągłe; jest jednak kilka ważnych zastosowań analizy zespolonej które można wykorzystać jedynie używając funkcji nieciągłych.

Poza liczeniem granic i ciągłością, podstawowymi narzędziami analizy są różniczkowanie i całkowanie. Zaczniemy od całkowania. Definiuje się je analogicznie do całki krzywoliniowej skierowanej:

Definicja: całka z funkcji po krzywej na płaszczyźnie zespolonej

Niech $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, oraz niech K będzie krzywą na płaszczyźnie zespolonej zadaną parametryzacją $z(t)$, $t \in [a, b]$. Definiujemy wówczas

$$\int_K f(z) dz := \int_a^b f(z) \frac{dz}{dt} dt$$

Rozpisując funkcję $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ oraz $z(t) = x(t) + iy(t)$ możemy również zapisać

$$\int_K f(z) dz = \int_K (u + iv)(dx + idy) = \int_K (udx - vdy) + i \int_K (vdx + udy)$$

To przedstawienie będzie nam przydatne w przyszłości, pozwoli nam bowiem zastosować poznane wcześniej narzędzia analizy wektorowej, np. twierdzenie Greena.

Definicja pochodnej zespolonej jest analogiczna do definicji pochodnej rzeczywistej:

Definicja: pochodna w sensie zespolonym

Funkcję $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, nazywamy *różniczkowalną w sensie zespolonym* w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeśli istnieje granica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jeśli ta granica istnieje, oznaczamy ją $f'(z_0)$. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie jakiegoś obszaru, definiuje to funkcję f' na tym obszarze.

Różniczkowalność funkcji zespolonej okazuje się mieć daleko idące konsekwencje. Po pierwsze, okazuje się, że jest to warunek silniejszy niż po prostu różniczkowalność funkcji $f(x, y) = f(x + iy)$; muszą być również spełnione dodatkowe warunki, o czym mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie o różniczkowalności funkcji zespolonej

Niech $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ będzie otwartym obszarem. Niech $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ będzie funkcją ciągłą. Funkcja f ma ciągłą pochodną w sensie zespolonym w każdym punkcie obszaru \mathcal{U} wtedy i tylko wtedy gdy funkcje $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe oraz spełniają warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Warunki te nazywamy **warunkami Cauchy'ego-Riemanna**.

Dowód

Twierdzenie mówi "wtedy i tylko wtedy, gdy", musimy więc udowodnić je w dwóch kierunkach.

Zacznijmy od kierunku \Rightarrow : zakładając, że funkcja jest różniczkowalna i ma ciągłą pochodną, udowodnimy różniczkowalność funkcji u i v i ciągłość ich pochodnych oraz warunki Cauchy'ego-Riemanna.

Z założenia, w każdym punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ obszaru \mathcal{U} istnieje granica

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Licząc tę granicę, możemy dążyć z z do z_0 w dowolny sposób; w szczególności możemy dążyć wzdłuż kierunku rzeczywistego ($z = z_0 + \epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \rightarrow 0$) lub wzdłuż kierunku urojonego ($z = z_0 + i\epsilon$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon \rightarrow 0$), i w obu przypadkach otrzymujemy tę samą granicę. Jeśli dążymy wzdłuż kierunku rzeczywistego, mamy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \epsilon) - f(z_0)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \epsilon, y_0) + iv(x_0 + \epsilon, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \epsilon, y_0) - u(x_0, y_0)}{\epsilon} + i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \epsilon, y_0) - v(x_0, y_0)}{\epsilon} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Z drugiej strony, jeśli do z_0 dążymy wzdłuż kierunku urojonego, mamy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\epsilon) - f(z_0)}{i\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \epsilon) + iv(x_0, y_0 + \epsilon) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\epsilon} = \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \epsilon) - u(x_0, y_0)}{\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \epsilon) - v(x_0, y_0)}{\epsilon} = \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Ponieważ z założenia pochodna funkcji f istnieje i jest ciągła, oznacza to, że pochodne cząstkowe funkcji u i v również istnieją i są ciągłe. Z porównania powyższych wzorów otrzymujemy również

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

czyli warunki Cauchy'ego Riemanna.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dowód w drugą stronę: Zakładając istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych funkcji u i v , oraz spełnianie warunków Cauchy'ego-Riemanna, chcemy udowodnić istnienie i ciągłość pochodnej zespolonej funkcji f .

Skoro pochodne cząstkowe u istnieją i są ciągłe, oznacza to, że u ma pochodną zupełną i rozpisuje się w postaci

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + R_u(x, y, x_0, y_0)$$

gdzie

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_u(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Podobnie funkcja v rozpisuje się jako

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + R_v(x, y, x_0, y_0)$$

gdzie

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_v(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Mamy zatem

$$f(z) - f(z_0) = \left((x - x_0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + R_u(x, y, x_0, y_0) \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + i \left((x - x_0) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + R_v(x, y, x_0, y_0) \right) = \\
& \text{(korzystając z warunków Cauchy'ego-Riemanna zamieniamy } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{)} \\
& = ((x - x_0) + i(y - y_0)) \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (- (y - y_0) + i(x - x_0)) \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \\
& \quad + R_u(x, y, x_0, y_0) + iR_v(x, y, x_0, y_0) = \\
& = ((x + iy) - (x_0 + iy_0)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) + \\
& \quad + R_u(x, y, x_0, y_0) + iR_v(x, y, x_0, y_0)
\end{aligned}$$

czyli

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{R_u(x, y, x_0, y_0) + iR_v(x, y, x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Mamy

$$\begin{aligned}
& \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left| \frac{R_u(x, y, x_0, y_0) + iR_v(x, y, x_0, y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \right| = \\
& = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\sqrt{R_u(x, y, x_0, y_0)^2 + R_v(x, y, x_0, y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \\
& = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \sqrt{\left(\frac{R_u(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right)^2 + \left(\frac{R_v(x, y, x_0, y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right)^2} = \\
& = 0
\end{aligned}$$

czyli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_u(x, y, x_0, y_0) + iR_v(x, y, x_0, y_0)}{z - z_0} = 0$$

a zatem granica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

istnieje i definiuje $f'(z_0)$, a z ciągłości pochodnych u i v funkcja f' jest ciągła.

Co było do udowodnienia.

Wykład 12: Podstawowe własności funkcji holomorficzych

Poprzedni wykład skończyliśmy na definicji różniczkowania w liczbach zespolonych i kryterium na rozpoznawanie funkcji różniczkowalnych. Wprowadźmy

Definicja: funkcja holomorficzna

Funkcję $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, nazywamy *holomorficzną* w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeśli jest różniczkowalna w sensie zespolonym na pewnym otwartym zbiorze \mathcal{U} będącym otoczeniem punktu z_0 (tzn. $z_0 \in \mathcal{U}$).

Podkreślmy, że holomorficzność jest warunkiem silniejszym niż różniczkowalność. Istnieją funkcje różniczkowalne w sensie zespolonym tylko w pojedynczym punkcie, ale już nie w jego otoczeniu.

Rozważmy kilka przykładów funkcji zespolonych i zbadajmy ich różniczkowalność.

Przypadek 1. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$

Policzmy

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} - z^n \right) = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k z^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^{k-1} z^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^k z^{n-k-1} = nz^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^k z^{n-k-1} \end{aligned}$$

Człony które zawierają dodatnią potęgę h dążą do zero dla $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^k z^{n-k-1} = 0$$

zatem ta funkcja jest wszędzie różniczkowalna (a zatem również wszędzie holomorficzna) oraz

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = nz^{n-1}$$

Jest to wynik identyczny z wynikiem z analizy funkcji rzeczywistych; będzie to prawda dla dowolnej funkcji zbudowanej za pomocą wyłącznie operacji algebraicznych.

Przypadek 2. $f(z) = z^*$

Mamy

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^* - z^*}{h} = \frac{h^*}{h}$$

Okazuje się, że granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^*}{h}$$

nie istnieje; jeśli bowiem $h = \epsilon \in \mathbb{R}$ mamy $h^*/h = 1$; jeśli natomiast $h = i\epsilon$, to $h^*/h = -1$. Zatem funkcja $f(z) = z^*$ jest wszędzie nieróżniczkowalna. Można

to rozpoznać też z warunków Cauchy'ego-Riemanna: Mamy $f(x + iy) = x - iy$, czyli $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, więc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

czyli pierwszy warunek Cauchy'ego Riemanna nie jest spełniony, to funkcja jest nieróżniczkowalna, a więc i nieholomorficzna.

Przypadek 3. $f(z) = |z|^2 = zz^*$

Mamy

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)(z+h)^* - zz^*}{h} = \frac{hz^* + zh^* + hh^*}{h} = \frac{h^*}{h}z + z^* + h^*$$

Mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^* = 0$$

ponieważ

$$\lim_{h \rightarrow 0} |h^*| = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

Z poprzedniego przykładu wiemy już, że granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^*}{h}$$

nie istnieje, ale granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^*}{h} z$$

istnieć może, choć tylko gdy $z = 0$ (bo wtedy $\frac{h^*}{h}z = 0$, więc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^*}{h}z = 0$). Zatem ta funkcja jest różniczkowalna tylko w jednym punkcie, $z = 0$ i nieróżniczkowalna poza nim. Oznacza to, że jest nieholomorficzna, nawet w punkcie $z = 0$.

Obecność z^* zazwyczaj świadczy o nieróżniczkowalności funkcji, ale czasem może się zdarzyć, że choć we wzorze występuje z^* funkcja jest nadal różniczkowalna; dzieje się tak, gdy przez pewne (czasem nieoczywiste) przekształcenia z^* można ze wzoru wyeliminować. Weźmy na przykład funkcję (**Przypadek 4.**):

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(zz^*) + i \arctan \frac{i(z^* - z)}{z^* + z} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

Mamy

$$u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v = \arctan \frac{y}{x}$$

zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + y^2} 2y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Warunki Cauchy'ego-Riemanna są spełnione, więc funkcja jest różniczkowalna. Okazuje się, że funkcja ta jest sposobem na zdefiniowanie logarytmu liczby zespolonej. Mamy bowiem, dla $x > 0$:

$$f(x + i0) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 0^2) + i \arctan \frac{0}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2) + i0 = \ln x$$

Możemy zatem zdefiniować

$$\ln(x + iy) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

Ta definicja definiuje funkcję holomorficzną w półpłaszczyźnie $x > 0$ ($\operatorname{Re} z$). Jeśli podstawimy $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ otrzymujemy (dla $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

$$\ln(r \cos \varphi + ir \sin \varphi) = \frac{1}{2} \ln(r^2) + i \arctan(\tan \varphi) = \ln r + i\varphi$$

Tą ostatnią definicję $\ln z := \ln r + i\varphi$, możemy rozszerzyć na $\varphi \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ale tu musimy już być ostrożni, bo mamy niejednoznaczność. Jeśli zmienimy $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, to $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$, ale wartość logarytmu zmienia się o $2\pi i$. Z tego powodu mówi się, że logarytm liczby zespolonej jest *funkcją wieloznaczną*. Są dwa sposoby, by uczynić go zwykłą, dobrze zdefiniowaną sposob.

Pierwszy, to skonstruowanie tzw. *powierzchni Riemanna*, która rozróżnia punkty o wartościach kąta φ i $\varphi + 2\pi$ - lokalnie wygląda ona jak płaszczyzna zespolona, ale po okrążeniu 0 o kąt pełny nie wracamy do punktu początkowego. Można to sobie wyobrazić, jako nieskończenie wiele płaszczyzn zespolonych, rozciętych wzdłuż ujemnej półosi rzeczywistych i sklejonych ze sobą tak, że przekraczając ujemną półoś rzeczywistą przechodzę z jednej płaszczyzny na następną. Na powierzchni Riemanna logarytm kąt φ , liczony od ustalonego punktu jest jednoznacznie zdefiniowany, zatem i logarytm jest dobrze zdefiniowany. My jednak nie będziemy dalej zajmować się tym podejściem.

Drugi sposób to pogodzenie się z faktem, że na płaszczyźnie zespolonej nie można zdefiniować logarytmu w sposób ciągły i wycięcie z tej płaszczyzny jednej półprostej, tzw. *cięcia*, na której logarytm będzie miał nieciągłość. Każdy taki wybór oznacza wybór konkretnego przedziału wartości kąta φ . Np. wycięcie ujemnej półprostej rzeczywistej odpowiada wyborowi $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Mamy wtedy np.

$$\ln(1 + i) = \ln(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

$$\ln(-i) = \ln(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})) = -i\frac{\pi}{2}$$

Wybór innego cięcia, czyli innego przedziału kątów φ będzie prowadził do innej definicji logarytmu. Jeżeli np. wybiorę, aby przedziałem dozwolonych wartości kątów było $(0, 2\pi)$, to otrzymuję cięcie na półprostej odpowiadającej $\varphi = 0$ (lub $\varphi = 2\pi$), czyli na dodatniej półprostej rzeczywistej. Mamy wtedy

$$\ln(1 + i) = \ln(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

jak w poprzednim przypadku, ale

$$\ln(-i) = \ln\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = i\frac{3\pi}{2}$$

co jest już innym wynikiem. Dlatego licząc logarytm liczb zespolonej musimy pamiętać, by najpierw jednoznacznie go zdefiniować i potem trzymać się wybranej definicji.

Wracając do tematu różniczkowalności: zauważyliśmy, że obecność z^* w definicji funkcji f może świadczyć o jej nieróżniczkowalności. Zbadajmy to. Dla $z = x + iy$ mamy

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{i}{2}(z^* - z)$$

Choć z i z^* nie są ani zmiennymi rzeczywistymi, ani niezależnymi, potraktujmy powyższe równości jak zamianę zmiennych i zdefiniujmy operacje $\frac{\partial}{\partial z}$ i $\frac{\partial}{\partial z^*}$ następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial x}{\partial z^*} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z^*} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Operacje te nie są prawdziwymi pochodnymi cząstkowymi, ale mają takie same własności algebraiczne; jeżeli więc mamy funkcję zapisaną za pomocą z i z^* , możemy te pochodne liczyć tak jakbyśmy liczyli zwykłe pochodne cząstkowe. Jeśli podstawimy $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Możemy więc stwierdzić, że warunki Cauchy'ego-Riemanna są spełnione wtedy i tylko wtedy gdy

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

jest to skrótowy sposób zapisu warunków Cauchy'ego-Riemanna. Mamy również

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

A sięgając do dowodu twierdzenia o różniczkowalności funkcji zespolonej, możemy zauważyć, że ta prawa strona to nic innego niż $f'(z)$. Zatem, jeśli funkcja f jest różniczkowalna, to

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

czyli, tak jak zauważyliśmy na przykładzie funkcji z^n , standardowe metody liczenia pochodnej znane z analizy funkcji rzeczywistych można wykorzystać do liczenia pochodnej zespolonej.

Jeśli funkcja jest zapisana za pomocą z i z^* , zazwyczaj łatwo stwierdzić, czy $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$; czasem należy jednak być ostrożnym o czym świadczy podany wyżej przykład funkcji

$$f(z) = \frac{1}{2} \ln(zz^*) + i \arctan \frac{i(z^* - z)}{z^* + z}$$

Choć z^* jest w powyższym wzorze obecne, mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{1}{2} \frac{1}{zz^*} z + i \frac{1}{1 + \left(\frac{i(z^* - z)}{z^* + z}\right)^2} i \frac{1(z^* + z) - 1(z^* - z)}{(z^* + z)^2} = \\ &= \frac{1}{2z^*} + i^2 \frac{2z}{(z^* + z)^2 - (z^* - z)^2} = \\ &= \frac{1}{2z^*} - \frac{2z}{4zz^*} = \frac{1}{2z^*} - \frac{1}{2z^*} = 0 \end{aligned}$$

Mamy też

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{1}{zz^*} z^* + i \frac{1}{1 + \left(\frac{i(z^* - z)}{z^* + z}\right)^2} i \frac{-1(z^* + z) - 1(z^* - z)}{(z^* + z)^2} = \\ &= \frac{1}{2z} + i^2 \frac{-2z^*}{(z^* + z)^2 - (z^* - z)^2} = \\ &= \frac{1}{2z} + \frac{2z^*}{4zz^*} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}$$

co jest w zgodności ze wzorem z analizy funkcji rzeczywistych.

Warunki Cauchy'ego-Riemanna mają jeszcze jedną konsekwencję. Mając

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

możemy zauważyć, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

czyli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Podobnie można pokazać, że

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Zatem jedynie funkcje spełniające warunki

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

gdzie Δ jest laplasjanem na \mathbb{R}^2 , mogą być rzeczywistą lub urojoną składową funkcji holomorficzej. Można też pójść w drugą stronę. Mając daną funkcję $u : \mathbb{R} * 2 \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\Delta u = 0$, możemy rozwiązać warunki

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

I znaleźć funkcję v która będzie spełniała warunki Cauchy'ego-Riemanna z daną funkcją u . Funkcja ta będzie dana z dokładnością do stałej. Oznacza to, że mając tylko część rzeczywistą (lub tylko część urojoną) funkcji holomorficzej można zrekonstruować całą funkcję, z dokładnością do stałej.

Ćwiczenia wykładowe 6: Badanie funkcji zespolonych

Na wykładzie zdefiniowana została funkcja logarytm od zmiennej zespolonej

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

I zostało stwierdzone, że będzie ona posiadać nieciągłość, której położenie zależy od wyboru dozwolonych wartości kąta φ . Jeśli zakresem kątów jest $(-\pi, \pi)$, nieciągłość leży na ujemnej półosi rzeczywistej (gdzie $\varphi = \pm\pi$); jeśli zakresem jest kątów jest $(0, 2\pi)$, nieciągłość leży na dodatniej półosi rzeczywistej (gdzie $\varphi = 0$ lub $\varphi = 2\pi$). (Można też wybierać inne zakresy kątów, $(\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ dla dowolnych wartości φ_0 , ale te dwie wyżej wymienione są najczęściej używane). Zbadajmy te nieciągłości.

Zadanie. Znaleźć

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \ln z$$

dla z_0 leżącego na cięciu logarytmu w zależności od strony, z której do tego punktu podchodzimy.

Zacznijmy od przypadku, w którym $\ln z$ definiujemy z cięciem na ujemnej półosi rzeczywistej (czyli dla $z \in \mathbb{R}_-$), co odpowiada przedziałowi dozwolonych kątów $(-\pi, \pi)$. Weźmy punkt z_0 leżący na cięciu. Możemy zbliżyć się do tego punktu od strony dodatnich y lub od strony ujemnych y . Po każdej stronie funkcja jest ciągła, więc możemy wybrać po jednym konkretnym sposobie zbliżania się z każdej strony. Wybierzmy sposób w którym $r = \text{const.} = |z_0|$. Mamy więc albo

$$x = |z_0| \cos \varphi, \quad y = |z_0| \sin \varphi, \quad \varphi \nearrow \pi$$

co odpowiada dążeniu do punktu z_0 od strony dodatnich y , lub

$$x = |z_0| \cos \varphi, \quad y = |z_0| \sin \varphi, \quad \varphi \searrow -\pi$$

co odpowiada dążeniu do punktu z_0 od strony ujemnych y . Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x + iy) &= \lim_{\varphi \nearrow \pi} \ln(x + iy) = \\ &= \lim_{\varphi \nearrow \pi} \ln(|z_0| \cos \varphi + i|z_0| \sin \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \nearrow \pi} (\ln |z_0| + i\varphi) = \\ &= \ln |z_0| + i\pi \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(x + iy) &= \lim_{\varphi \searrow -\pi} \ln(x + iy) = \\ &= \lim_{\varphi \searrow -\pi} \ln(|z_0| \cos \varphi + i|z_0| \sin \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \searrow -\pi} (\ln |z_0| + i\varphi) = \\ &= \ln |z_0| - i\pi \end{aligned}$$

Różnica pomiędzy tymi granicami udowadnia nieciągłość.

Podobnie, jeśli nieciągłość logarytmu wybraliśmy na dodatniej półosi rzeczywistej (czyli dla $z \in \mathbb{R}_+$), co odpowiada przedziałowi dozwolonych kątów $(0, 2\pi)$. Weźmy punkt z_0 leżący na cięciu. Jak wcześniej, możemy zbliżyć się od strony dodatnich y ($\varphi \searrow 0$) lub ujemnych y ($\varphi \nearrow 2\pi$). Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x + iy) &= \lim_{\varphi \searrow 0} \ln(x + iy) = \\ &= \lim_{\varphi \searrow 0} \ln(|z_0| \cos \varphi + i|z_0| \sin \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \searrow 0} (\ln |z_0| + i\varphi) = \\ &= \ln |z_0| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(x + iy) &= \lim_{\varphi \nearrow 2\pi} \ln(x + iy) = \\ &= \lim_{\varphi \nearrow 2\pi} \ln(|z_0| \cos \varphi + i|z_0| \sin \varphi) = \\ &= \lim_{\varphi \nearrow 2\pi} (\ln |z_0| + i\varphi) = \\ &= \ln |z_0| + 2i\pi \end{aligned}$$

Jak poprzednio, różnica pokazuje nieciągłość.

Rozważmy teraz bardziej skomplikowaną funkcję:

$$f(z) = \ln(z^2 + 1)$$

i zbadajmy jej nieciągłość. To gdzie będzie miała ona nieciągłość zależy od tego, gdi wybierzemy nieciągłość funkcji $\ln z$.

Weźmy najpierw przypadek, gdy $\ln z$ ma nieciągłość dla $z \in \mathbb{R}_-$. oznacza to, że funkcja $f(z)$ będzie miała nieciągłość gdy $z^2 + 1 \in \mathbb{R}_-$, gdyż to $z^2 + 1$ jest argumentem logarytmu w funkcji $f(z)$. Musimy zatem rozwiązać warunki

$$\operatorname{Re}(z^2 + 1) < 0, \quad \operatorname{Im}(z^2 + 1) = 0$$

podstawiając $z = x + iy$ mamy

$$\operatorname{Re}((x + iy)^2 + 1) < 0, \quad \operatorname{Im}((x + iy)^2 + 1) = 0$$

$$\operatorname{Re}(x^2 + 2ixy - y^2 + 1) < 0, \quad \operatorname{Im}(x^2 + 2ixy - y^2 + 1) = 0$$

$$x^2 - y^2 + 1 < 0, \quad 2xy = 0$$

Z drugiego warunku mamy $x = 0$ lub $y = 0$, ale jeśli $y = 0$ to pierwszy warunek przyjmuje postać $x^2 + 1 < 0$ i nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych. Zatem mamy

$$x = 0, \quad -y^2 + 1 < 0$$

$$x = 0, \quad y^2 > 1$$

$$x = 0, \quad y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Cięcie będzie miało zatem postać **dwóch** półprostych, leżących na osi urojonej ($x = 0$). Policzmy granicy funkcji po obu stronach obu cięć.

Weźmy najpierw $z_0 = 0 + iy$, $y > 1$. Trzymajmy $y = \text{const.}$ i zbliżajmy się do cięcia zmieniając x , albo $x \rightarrow 0^+$, albo $x \rightarrow 0^-$. Mamy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 - y^2 + 1 + 2ixy)$$

skorzystajmy z wyniku poprzedniego zadania. Mamy $x^2 - y^2 + 1 \rightarrow 1 - y^2 < 0$ oraz $2xy \rightarrow 0^+$ (ponieważ $y > 0$ i $x \rightarrow 0^+$). Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^2 - y^2 + 1 + 2ixy) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(-(y^2 - 1) + i\epsilon) = \ln(y^2 - 1) + i\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \ln(y^2 - 1) + i\pi$$

Zbliżając się do tego samego punktu z drugiej strony ($x \rightarrow 0^-$) mamy $2xy_0 \rightarrow 0^-$ zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(-(y^2 - 1) + i\epsilon) = \ln(y^2 - 1) - i\pi$$

Analiza dolnego cięcia $y_0 < -1$ jest analogiczna, ale ponieważ teraz $y_0 < 0$ będziemy mieć zamianę znaków:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(-(y^2 - 1) + i\epsilon) = \ln(y^2 - 1) - i\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(-(y^2 - 1) + i\epsilon) = \ln(y^2 - 1) + i\pi$$

Rozważmy teraz sytuację, w której $\ln z$ definiujemy inaczej, z cięciem na dodatniej półprostej rzeczywistej. Aby znaleźć cięcie $\ln(z^2 + 1)$ musimy wtedy rozwiązać warunki

$$x^2 - y^2 + 1 > 0, \quad 2xy = 0$$

Tym razem przypadek $y = 0$ jest możliwy; mamy

$$(x = 0 \vee y = 0) \wedge x^2 - y^2 + 1 > 0$$

$$(x = 0 \wedge -y^2 + 1 > 0) \vee (y = 0 \wedge x^2 + 1 > 0)$$

$$(x = 0 \wedge y^2 < 1) \vee (y = 0 \wedge x \in \mathbb{R})$$

$$(x = 0 \wedge -1 < y < 1) \vee (y = 0 \wedge x \in \mathbb{R})$$

Tym razem cięcie będzie składało się z odcinka $x = 0$, $-1 < y < 1$ (odcinek od $-i$ do $+i$) oraz całej prostej rzeczywistej. Rozpatrzę granice przy wybranych kawałkach, na pozostałych rachunek jest analogiczny.

Na kawałku $y = 0$, $x > 0$ (dodatnia półoś rzeczywista) mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x^2 - y^2 + 1 + 2ixy)$$

ponieważ $\epsilon = 2xy > 0$ mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x^2 + 1 + i\epsilon) = \ln(x^2 + 1)$$

Z kolei zbliżając się od strony ujemnych y mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + 1 + i\epsilon) = \ln(x^2 + 1) + i2\pi$$

Weźmy jeszcze kawałek cięcia $x = 0$, $0 < y < 1$. Jeśli zbliżamy się od strony dodatnich x mamy $\epsilon = 2xy > 0$ zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(-y^2 + 1 + i\epsilon) = \ln(1 - y^2)$$

a zbliżając się od drugiej strony

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(z^2 + 1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(-y^2 + 1 + i\epsilon) = \ln(1 - y^2) + i2\pi$$

Wykład 13: Szereg Taylora zmiennej zespolonej, funkcja wykładnicza i potęgowa

Oprócz definiowania funkcji zespolonej w postaci $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie u i v są danymi funkcjami zmiennych rzeczywistych, jest też inny ważny sposób zadawania funkcji zespolonych, zwłaszcza funkcji holomorficznnych, mianowicie poprzez szereg potęgowy - posiadając pojęcie zbieżności na płaszczyźnie zespolonej możemy badać zbieżność ciągów i szeregów, w tym szeregów funkcyjnych. Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie danym ciągiem liczb zespolonych oraz $z_0 \in \mathbb{C}$. Zdefiniujemy funkcję f jako

$$f(z) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

Aby ten szereg był zbieżny, potrzebujemy, by

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = 0$$

czyli

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right| = 0$$

Zauważmy, że

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n$$

Jeżeli zatem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n = 0$$

czyli szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n \quad (*)$$

jest zbieżny, to gwarantuje to zbieżność szeregu definiującego funkcję f . Ale szereg (*) jest szeregiem o współczynnikach rzeczywistych; znamy warunek określający jego zbieżność:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n} < 1$$

(dla przypomnienia \limsup oznacza tzw. granicę górną ciągu, czyli supremum zbioru granic wszystkich podciągów zbieżnych ciągu; jeśli a_n jest ciągiem zbieżnym, to $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$). Mamy więc

$$|z - z_0| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Obszar zadany tym warunkiem jest kołem o środku w punkcie z_0 i promieniu r . W przypadku szeregów zespolonych nie mówimy więc o przedziale zbieżności (jak dla funkcji rzeczywistych) ale o **koło zbieżności**. Wzór na promień zbieżności jest taki sam jak w przypadku funkcji rzeczywistych; ogólny wzór jest podany wyżej, ale jeśli istnieją odpowiednie granice, możemy policzyć go również ze wzorów

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Funkcja zdefiniowana szeregiem jak wyżej jest zawsze funkcją holomorficzną wewnątrz swojego koła zbieżności. Mamy bowiem

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n$$

badając zbieżność tego szeregu otrzymujemy

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+2)a_{n+2}}{(n+1)a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = R$$

Funkcję wykładniczą zmiennej rzeczywistej można zdefiniować jako granicę ciągu

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

lub jako granicę szeregu

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

. Dowodzi się, że obie definicje są równoważne i definiują funkcję określoną dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ (nie będę teraz tego dowodu powtarzał). Podobnie funkcję wykładniczą zmiennej zespolonej można zdefiniować jako

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Dowód, że obie definicje są równoważne jest analogiczny do dowodu w przypadku rzeczywistym, i definiują funkcję \exp dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Analogicznie jak w przypadku rzeczywistym, można też udowodnić, że funkcja ta spełnia warunki

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2), \quad \text{dla dowolnych } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\frac{d}{dz} \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z)$$

Ponieważ wszystkie współczynniki szeregu potęgowego są liczbami rzeczywistymi, mamy również

$$\exp(z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z^*)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right)^* = (\exp(z))^*$$

Ze wzorów tych wynika, że

$$|\exp(z)|^2 = (\exp(z))^* \exp(z) = \exp(z^*) \exp(z) = \exp(z^* + z) = \exp(2\operatorname{Re} z) = (\exp(\operatorname{Re} z))^2$$

czyli

$$|\exp(x + iy)| = \exp x = e^x$$

W szczególności oznacza to, że

$$|\exp(iy)| = 1$$

czyli

$$\exp(iy) = \cos \varphi(y) + i \sin \varphi(y)$$

dla pewnej funkcji $\varphi(y)$. Różniczkując powyższą równość po y otrzymujemy

$$i \exp(iy) = (-\sin \varphi(y) + i \cos \varphi(y)) \frac{d\varphi}{dy}$$

Mamy więc

$$i(\cos \varphi(y) + i \sin \varphi(y)) = (-\sin \varphi(y) + i \cos \varphi(y)) \frac{d\varphi}{dy}$$

$$i \cos \varphi(y) - \sin \varphi(y) = (-\sin \varphi(y) + i \cos \varphi(y)) \frac{d\varphi}{dy}$$

z czego wynika, że

$$\frac{d\varphi}{dy} = 1$$

czyli

$$\varphi(y) = y + \varphi(0)$$

Z równości

$$\exp(0) = 1$$

mamy $\varphi(0) = 0$, a zatem

$$\phi(y) = y$$

$$\exp(iy) = \cos y + i \sin y$$

Dowodzi to relacji która była już do tej pory używana w rachunkach, ale była dotąd pozostawiona bez dowodu. Mamy ostatecznie

$$\exp(x + iy) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

Można sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja spełnia warunki Cauchy'ego-Riemanna oraz dla liczb rzeczywistych pokrywa się z definicją eksponenta dla liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że na płaszczyźnie zespolonej funkcja \exp jest funkcją okresową, z okresem $2\pi i$:

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z) \exp(2\pi i) = \exp(z) \cdot 1 = \exp(z)$$

Sprawdźmy też, że tak zdefiniowana funkcja \exp i wcześniej zdefiniowana funkcja \ln

$$\ln(r \cos \varphi + ir \sin \varphi) = \ln r + i\varphi$$

są do siebie funkcjami odwrotnymi. Mamy

$$\exp \ln(r \cos \varphi + ir \sin \varphi) = \exp(\ln r + i\varphi) = e^{\ln r} \cos \varphi + ie^{\ln r} \sin \varphi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

Ta równość spełniona jest zawsze.

$$\ln \exp(x + iy) = \ln(e^x \cos y + ie^x \sin y) = \ln(e^x) + iy = x + iy$$

Ta równość jest spełniona jeśli y należy do odpowiedniego przedziału kątów, np. $y \in (0, 2\pi)$ jeśli wybraliśmy cięcie logarytmu wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej.

Używając funkcji \exp definiujemy potęgowanie liczb zespolonych. Dla liczb $z, \alpha \in \mathbb{C}$ definiujemy

$$z^\alpha := \exp(\alpha \ln z)$$

W szczególności

$$e^z = \exp(z \ln e) = \exp z$$

Definicja potęgowania zależy od definicji logarytmu; ponieważ funkcja \ln ma nieciągłość, funkcja z^α również w ogólności ma nieciągłość (wyjątkiem jest przypadek $\alpha \in \mathbb{Z}$). Załóżmy na przykład, że $\alpha \in \mathbb{R}$, a cięcie logarytmu wybierzemy na dodatniej półosi rzeczywistej; wtedy, dla $x > 0$ mamy

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x + iy) = \ln x$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(x + iy) = \ln x + 2\pi i$$

Mamy zatem

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (x + iy)^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = x^\alpha$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} (x + iy)^\alpha = \exp(\alpha(\ln x + 2\pi i)) = x^\alpha \exp(2\pi i \alpha) = x^\alpha (\cos(2\pi \alpha) + i \sin(2\pi \alpha))$$

Jeśli zatem $\alpha \notin \mathbb{Z}$ mamy nieciągłość wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej. Fakt ten będzie znaczący do pewnych zastosowań analizy zespolonej.

Wykład 14: Osobliwości funkcji zespolonych. Twierdzenie Cauchy'ego-Goursata. Wzór całkowy Cauchy'ego

Wrócimy dziś do rozważania bardziej ogólnych funkcji zmiennej zespolonej. O ile jak najbardziej możliwe jest, by funkcja była holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej (taką funkcję nazywamy *funkcją całkowitą*), to zazwyczaj obszar holomorficznego funkcji nie obejmuje całej płaszczyzny. Prowadzi to do pojęcia punktu osobliwego/osobliwości:

Definicja: punkt osobliwy/regularny

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy *punktem osobliwym* lub *osobliwością* funkcji f jeśli funkcja f nie jest holomorficzną w tym punkcie, czyli nie istnieje otwarty zbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ taki, że $z_0 \in \mathcal{U}$, a funkcja f jest różniczkowalna na \mathcal{U} . Punkt, który nie jest osobliwy nazywamy punktem *regularnym*.

Można wyróżnić różne rodzaje punktów osobliwych:

Definicja: punkt osobliwy izolowany/nieizolowany.

Punkt osobliwy $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji f nazywamy *izolowanym* jeśli istnieje otwarty zbiór $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ taki, że $z_0 \in \mathcal{U}$, a funkcja f jest holomorficzną na $\mathcal{U} \setminus \{z_0\}$.

Punkt osobliwy, który nie jest izolowany nazywamy punktem osobliwym *nieizolowanym*.

Innymi słowy, jeśli punkt z_0 jest osobliwością izolowaną funkcji f , to istnieje takie $r > 0$, że w kole $\{z : |z - z_0| < r\}$ funkcja f nie ma innych osobliwości.

Przykładami osobliwości izolowanych są np. $z_0 = 0$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z}$, albo $z_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$. Przykładami osobliwości nieizolowanych są punkty linii cięcia dla funkcji posiadających linię cięcia (np. $\ln z$), ale także np. punkt $z_0 = 0$ dla funkcji $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Gwoli wyjaśnienia tego ostatniego przykładu: jest to osobliwość nieizolowana, ponieważ niezależnie jak małe otoczenie tego punktu weźmę, znajdą się w nim inne osobliwości postaci $z_n = \frac{1}{n\pi}$.

Szczególnie należy też wyróżnić *punkty rozgałęzienia*. Są to końcowe punkty linii cięć. Są one szczególne z tego względu, że linię cięcia można zazwyczaj przesuwać, zmieniając minimalnie definicję funkcji - z tego powodu osobliwości w punktach wewnętrznych linii cięcia można wyeliminować przez przesunięcie cięcia w inne miejsce. Punkty rozgałęzienia są jednak nieruchome, i osobliwości w tych punktach wyeliminować nie można.

Osobliwości izolowane dzieli się dalej, na podstawie tego "jak bardzo osobliwy" jest to punkt:

Definicja: osobliwość pozorna

Punkt osobliwy izolowany $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji f nazywamy *osobliwością pozorną* jeśli istnieje liczba $a \in \mathbb{C}$, taka, że punkt z_0 jest punktem regularnym funkcji g zdefiniowanej jako

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{dla } z \neq z_0 \\ a & \text{dla } z = z_0 \end{cases}$$

Przykładem osobliwości pozornej jest punkt $z_0 = 0$ dla funkcji $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Funkcja ta nie jest zdefiniowana w punkcie $z_0 = 0$, więc jest to punkt osobliwy; jeśli jednak zdefiniujemy $f(0) = 1$, to otrzymana funkcja nie będzie miała osobliwości.

Definicja: biegun/osobliwość istotna

Punkt osobliwy izolowany $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji f nazywamy *biegunem* rzędu n , $n \in \mathbb{N}$ gdy jest on punktem regularnym funkcji $(z - z_0)^n f(z)$, ale punktem osobliwym funkcji $(z - z_0)^{n-1} f(z)$.

Jeśli nie istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$ taka, że punkt z_0 jest punktem regularnym funkcji $(z - z_0)^n f(z)$, punkt ten nazywamy osobliwością istotną.

Przykładem bieguna rzędu n jest punkt $z_0 = 0$ dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z^n}$. Można nawet podać twierdzenia

Twierdzenie

Punkt osobliwy izolowany $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji f jest *biegunem* rzędu n , wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja holomorphyzna g taka, że $g(z_0) \neq 0$ oraz

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \quad \text{dla } z \neq z_0$$

Twierdzenie

Punkt osobliwy izolowany $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji f jest *biegunem* rzędu n , wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja holomorphyzna h oraz liczby c_1, c_2, \dots, c_n , takie, że $c_n \neq 0$ oraz

$$f(z) = h(z) + \frac{c_1}{z - z_0} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_0)^n} \quad \text{dla } z \neq z_0$$

Te twierdzenia pozwalają szybko rozpoznać bieguny wielu funkcji i podać ich rzędy.

Dowód (obu twierdzeń):

Jeśli z_0 jest biegunem rzędu n zdefiniujemy

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^n f(z) & \text{dla } z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) & \text{dla } z = z_0 \end{cases}$$

Z definicji bieguna, funkcja g będzie holomorphyzna w punkcie z_0 , oraz $g(z_0) \neq 0$ (bo inaczej biegun byłby niższego rzędu). Funkcję h oraz współczynniki c_n

definiujemy przez szereg Taylora funkcji g :

$$g(z) = c_n + c_{n-1}(z - z_0) + \dots + c_1(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n h(z)$$

Tak skonstruowane funkcje spełniają warunki występujące w twierdzeniach powyżej.

W drugą stronę: Jeśli

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

mamy

$$(z - z_0)^n f(z) = g(z), \quad (z - z_0)^{n-1} f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$$

Ponieważ z założenia $g(z_0) \neq 0$, oznacza to, że z_0 jest punktem regularnym funkcji $(z - z_0)^n f(z)$, ale nie funkcji $(z - z_0)^{n-1} f(z)$, czyli jest biegunem rzędu n .

Podobnie, jeśli

$$f(z) = h(z) + \frac{c_1}{z - z_0} + \frac{c_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_0)^n}$$

mamy

$$(z - z_0)^n f(z) = (z - z_0)^n g(z) + (z - z_0)^{n-1} c_1 + \dots + (z - z_0) c_{n-1} + c_n$$

$$(z - z_0)^{n-1} f(z) = (z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^{n-2} c_1 + \dots + c_{n-1} + \frac{c_n}{z - z_0}$$

Ponieważ z założenia $c_n \neq 0$, oznacza to, że z_0 jest punktem regularnym funkcji $(z - z_0)^n f(z)$, ale nie funkcji $(z - z_0)^{n-1} f(z)$, czyli jest biegunem rzędu n .

Zanim przejdziemy do bardziej zaawansowanych twierdzeń, wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie z dziedziny topologii, które będzie nam potrzebne.

Definicja: obszar jednospójny

Obszar $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ nazywamy *jednospójnym* jeśli każda krzywa zamknięta $K \subset \mathcal{U}$ ogranicza pewien obszar $D \subset \mathcal{U}$.

Jednospójność można rozumieć jako "brak dziur". Na przykład koło $\{z : |z - z_0| < R\}$ jest jednospójne, ale pierścień $\{z : r < |z - z_0| < R\}$ dla $0 < r < R$ jednospójny nie jest, ma "dziurę" w środku.

Przejdźmy teraz do twierdzeń analizy zespolonej. Zaczniemy od twierdzenia

Twierdzenie Cauchy'ego-Goursata Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze jednospójnym $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. $K \subset \mathcal{U}$ będzie krzywą zamkniętą. Wówczas

$$\oint_K f(z) dz = 0$$

Dowód:

Dowód opiera się na wykorzystaniu twierdzenia Greena i warunków Cauchy'ego-Riemanna. Rozpiszmy $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Mamy

$$\begin{aligned}\oint_K f(z)dz &= \oint_K (u + iv)(dx + idy) = \\ &= \oint_K (udx - vdy) + i \oint_K (vdx + udy)\end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Greena, mamy

$$\begin{aligned}\oint_K (udx - vdy) &= \int_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy \\ \oint_K (vdx + udy) &= \int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx dy\end{aligned}$$

Warunki Cauchy'ego mówią, że

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

z czego wynika, że

$$\oint_K f(z)dz = 0 + i0 = 0$$

Należy podkreślić, że jeżeli krzywa zamknięta otacza jakieś osobliwości, to możliwe jest, by $\oint f(z)dz \neq 0$, ponieważ takie osobliwości stanowią dziury w obszarze holomorficzności, więc założenie powyższego twierdzenia nie jest spełnione.

Z twierdzenia Cauchy'ego-Goursata wynikają natychmiast dwa ważne wnioski: jeżeli mamy dwie krzywe K_1 i K_2 o tych samych końcach, to jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze zawartym pomiędzy tymi krzywymi, to

$$\int_{K_1} f(z)dz = \int_{K_2} f(z)dz$$

Wynika to z tego, że można wziąć krzywą zamkniętą złożoną z krzywej K_1 oraz krzywej K_2 przebieganej w przeciwną stronę, i całka po tej krzywej zamkniętej jest równa 0.

W praktyce oznacza to, że dowolną krzywą całkowania można deformować, przekształcać, i zmieniać jej kształt, pod warunkiem że robimy to w sposób ciągły i nie przeciągamy jej przez żadne osobliwości. Dotyczy to także krzywych zamkniętych (bo można najpierw zdeformować jeden jej kawałek, potem inny, potem kolejny, ostatecznie przekształcając całą krzywą). Załóżmy na przykład, że mamy dwie krzywe zamknięte otaczające jakąś osobliwość (więc możliwe jest,

że $\oint f(z)dz \neq 0$). Jeśli jednak pomiędzy tymi dwoma krzywymi nie ma żadnych osobliwości, mamy

$$\oint_{K_1} f(z)dz = \oint_{K_2} f(z)dz$$

Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze jednospójnym \mathcal{U} . Niech $z_0 \in \mathcal{U}$. Niech $K \subset \mathcal{U}$ będzie krzywą zamkniętą otaczającą punkt z_0 . Policzmy całkę

$$\oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Jedynym punktem osobliwym funkcji $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ jest punkt z_0 . Według tego, co zostało powiedziane powyżej, kontur całkowania możemy więc przekształcać, pod warunkiem że nie przeciągniemy go przez punkt z_0 . W szczególności możemy go przekształcić do postaci małego okręgu otaczającego punkt z_0 , o promieniu ϵ , i wartość całki się nie zmieni.

$$\oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Przyjmując dodatnią orientację, ten mały okrąg możemy sparametryzować poprzez

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + \epsilon e^{it}, & t \in [0, 2\pi] \\ dz &= i\epsilon e^{it} dt \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{it})}{(z_0 + \epsilon e^{it}) - z_0} i\epsilon e^{it} dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt \end{aligned}$$

Ponieważ promień ϵ może być dowolnie mały, możemy wykonać granicę $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{|z - z_0| = \epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt = \text{zakładając, że można z granicą wejść pod całkę} \\ &= i \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = \\ &= 2\pi i f(z_0) \end{aligned}$$

W tym obliczeniu założyliśmy, że można z granicą wejść pod całkę; sprawdźmy więc poprawność policzonej granicy, przez policzenie

$$\left| i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt - 2\pi i f(z_0) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \epsilon e^{it}) - f(z_0)) dt \right| \leq \\
&\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \epsilon e^{it}) - f(z_0)| dt
\end{aligned}$$

Jeżeli weźmiemy dostatecznie małe ϵ , to ponieważ funkcja f jest ciągła mamy

$$|f(z_0 + \epsilon e^{it}) - f(z_0)| < \delta$$

dla dowolnie małego δ . A zatem, dla każdego $\delta > 0$ istnieje ϵ wystarczająco małe, aby

$$\left| i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\delta$$

Oznacza to, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt - 2\pi i f(z_0) \right| = 0$$

czyli faktycznie

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) dt = 2\pi i f(z_0)$$

Ten wynik jest ważnym twierdzeniem w analizie zespolonej:

Twierdzenie: wzór całkowy Cauchy'ego

Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze jednospójnym $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. $K \subset \mathcal{U}$ będzie krzywą zamkniętą otaczającą punkt $z_0 \in \mathcal{U}$. Wówczas

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Dowód już przeprowadziliśmy.

Jako konsekwencję tego twierdzenia mamy

Twierdzenie: wzór całkowy Cauchy'ego dla pochodnych

Niech f będzie funkcją holomorficzną na obszarze jednospójnym $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$. $K \subset \mathcal{U}$ będzie krzywą zamkniętą otaczającą punkt $z_0 \in \mathcal{U}$. Wówczas

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza n -tą pochodną funkcji f .

Wzór ten można uzyskać różniczkując podstawowy wzór całkowy Cauchy'ego po z_0 . Ze wzoru całkowego Cauchy'ego mamy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{d^n}{dz_0^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Jeżeli uprawnione jest wejście z pochodną pod znak całki, mamy więc Ze wzoru całkowego Cauchy'ego mamy

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Ponieważ

$$\frac{\partial^n}{\partial z_0^n} \frac{1}{z - z_0} = \frac{n!}{(z - z_0)^{n+1}}$$

otrzymujemy tezę twierdzenia:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Pozostaje tylko kwestia tego, czy wchodzenie z różniczkowaniem po parametrze pod całkę jest tu faktycznie dozwolone. Np. dla pierwszego różniczkowania musimy pokazać, że

$$\frac{d}{dz_0} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} = \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}$$

czyli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \left(\oint_K \frac{f(z)}{z - z_0 - h} - \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} \right) - \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| = 0$$

Zachodzi

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right) - \frac{1}{(z - z_0)^2} = \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2}$$

więc warunek do udowodnienia ma postać

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \oint_K f(z) \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right| = 0$$

Deformując krzywą K do okręgu o środku w z_0 i promieniu $r > h$ mamy

$$\begin{aligned} & \left| \oint_K f(z) \frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} dz \right| = \\ & = \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \frac{h}{(re^{it} - h)(re^{it})^2} ire^{it} dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})| |h|}{|re^{it} - h| r} dt \leq \\ & \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})| |h|}{(r - |h|) r} dt \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z nierówności trójkąta, $|re^{it} - h| > r - |h|$. Ponieważ funkcja $|f(z_0 + re^{it})|$ jest ograniczona (bo jest ciągła na przedziale zwartym), czyli $|f(z_0 + re^{it})| \leq M$, mamy

$$\left| \oint_K f(z) \left(\frac{h}{(z - z_0 - h)(z - z_0)^2} \right) dz \right| \leq 2\pi M \frac{|h|}{(r - |h|) r} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

a zatem faktycznie

$$\frac{d}{dz_0} \oint_K \frac{f(z)}{z - z_0} = \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}$$

Dowód dla wyższych pochodnych jest analogiczny, ale nie będę go tutaj przedstawiał.

Ćwiczenia wykładowe 7: Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

Opierając się na wzorach wyrażających funkcje \sin i \tan za pomocą funkcji \exp , wyrażmy funkcje \arcsin i \arctan za pomocą funkcji \ln .

Wzór wyrażający funkcję \sin za pomocą funkcji \exp ma postać:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} - 2i \sin z &= 0 \\ e^{2iz} - 2i \sin z e^{iz} - 1 &= 0 \\ (e^{iz} - i \sin z)^2 - 1 + \sin^2 z &= 0 \\ (e^{iz} - i \sin z)^2 &= 1 - \sin^2 z \\ e^{iz} - i \sin z &= (1 - \sin^2 z)^{\frac{1}{2}} \\ e^{iz} &= i \sin z + (1 - \sin^2 z)^{\frac{1}{2}} \\ iz &= \ln(i \sin z + (1 - \sin^2 z)^{\frac{1}{2}}) \\ z &= -i \ln(i \sin z + (1 - \sin^2 z)^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

czyli

$$\arcsin z = -i \ln(i z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$$

\arcsin jest funkcją niejednoznaczną, jej wartość zależy od tego, jak zdefiniujemy funkcję \ln (gdzie wybierzemy jej cięcie).

Podobnie dla funkcji \tan :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$$

czyli

$$\begin{aligned} i(e^{iz} + e^{-iz}) \tan z &= e^{iz} - e^{-iz} \\ e^{iz}(1 - i \tan z) &= e^{-iz}(1 + i \tan z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{2iz} &= \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} \\
2iz &= \ln \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} \\
z &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i \tan z}{1 - i \tan z} \\
\arctan z &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}
\end{aligned}$$

Zbadajmy tak zdefiniowane funkcje arcsin i arctan. Ich definicja zależy od definicji funkcji ln, czyli od tego, gdzie wybierzemy jej cięcie/nieciągłość. Rozważę tu tylko jeden przypadek, gdy cięcie wybiorę na ujemnej półosi rzeczywistej, czyli

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(x + i\epsilon) = \ln x \quad \text{dla } x > 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x + i\epsilon) = \ln(-x) + i\pi, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \ln(x + i\epsilon) = \ln(-x) - i\pi \quad \text{dla } x < 0$$

ten wybór wpływa również na nieciągłość funkcji potęgowej:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} (x + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad \text{dla } x > 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = i\sqrt{-x}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} (x + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = -i\sqrt{-x} \quad \text{dla } x < 0$$

Zacznijmy od funkcji arcsin. Nieciągłość tej funkcji może pochodzić z dwóch źródeł: albo z nieciągłości zewnętrznego logarytmu, albo z nieciągłości funkcji potęgowej. Czyli nieciągłość jest tam, gdzie

$$(1 - z^2 \in \mathbb{R}^-) \quad \vee \quad (iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^-)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
1 - z^2 \in \mathbb{R}^- &\Leftrightarrow (1 - x^2 + y^2 < 0) \wedge (2xy = 0) \\
&\Leftrightarrow ((y = 0) \wedge (1 - x^2 < 0)) \vee ((x = 0) \wedge 1 + y^2 < 0) \\
&\Leftrightarrow (y = 0) \wedge (x^2 > 1)
\end{aligned}$$

czyli będzie cięcie na dwóch półprostych od $-\infty$ do -1 oraz od 1 do ∞ . Druga możliwość daje nam

$$\begin{aligned}
iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^- &\Leftrightarrow \exists a > 0 : iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = -a \\
&\Leftrightarrow \exists a > 0 : (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = -a - iz \\
&\Rightarrow \exists a > 0 : 1 - z^2 = (-a - iz)^2 \\
&\Leftrightarrow \exists a > 0 : 1 - z^2 = a^2 + 2iaz - z^2 \\
&\Leftrightarrow \exists a > 0 : z = i \frac{a^2 - 1}{2a}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} : z = ib$$

gdzie ostatnie przejście wynika z tego, że zbiorem wartości funkcji $\frac{a^2-1}{2a}$ dla $a > 0$ jest cały zbiór \mathbb{R} . Wnoskujemy więc, że cięcie MOŻE być tylko dla z czysto urojonego; nie ma jednak gwarancji, że faktycznie tam będzie, ponieważ w pewnym momencie podnieśliśmy równość do kwadratu, co daje wynikanie tylko w jedną stronę, a nie w obie. Sprawdźmy więc; dla $z = ib$ mamy

$$z = ib \Rightarrow iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = -b + (1 + b^2)^{\frac{1}{2}} = -b + \sqrt{1 + b^2} > 0$$

więc jednak

$$iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}^-$$

więc nieciągłości na osi urojonej nie będzie.

Podsumowując: funkcja arcsin, zdefiniowana jako $\arcsin z = -i \ln(iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$ ma nieciągłość na dwóch półprostych: od $-\infty$ do -1 oraz od 1 do ∞ . Zbadajmy tę nieciągłość. Dla $x > 1$ mamy

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 - x^2 + y^2 - 2ixy)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} (1 - x^2 + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \\ &= -i\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} (1 - x^2 + y^2 - 2ixy)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - x^2 + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \\ &= +i\sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \arcsin z &= -i \ln(ix - i\sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= -i \left(\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) + i\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -i \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \arcsin z &= -i \ln(ix + i\sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= -i \left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + i\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -i \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

gdzie wykorzystywany jest fakt, że dla $x > 1$ mamy $x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$ oraz $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$, a dla $a > 0$ mamy $\ln(ia) = \ln a + i\frac{\pi}{2}$.

Z kolei dla $x < -1$ mamy

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^+} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (1 - x^2 + y^2 - 2ixy)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - x^2 + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \\ &= i\sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^-} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} (1 - x^2 + y^2 - 2ixy)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} (1 - x^2 + i\epsilon)^{\frac{1}{2}} = \\ &= -i\sqrt{x^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^+} \arcsin z &= -i \ln(ix + i\sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= -i \left(\ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) - i\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -i \ln(-x - \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^-} \arcsin z &= -i \ln(ix - i\sqrt{x^2 - 1}) = \\ &= -i \left(\ln(-x + \sqrt{x^2 - 1}) - i\frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -i \ln(-x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

gdzie wykorzystywany jest fakt, że dla $x < -1$ mamy $x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$ oraz $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$, a dla $a < 0$ mamy $\ln(ia) = \ln(-a) - i\frac{\pi}{2}$.

Podobnie postępujemy w przypadku funkcji arctan; jest o tyle prościej, że we wzorze

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

mamy tylko jedno źródło potencjalnej nieciągłości, i jest to logarytm. Przyjmując (tak jak poprzednio) cięcie logarytmu na ujemnej półosi rzeczywistej, mamy warunek na cięcie:

$$\begin{aligned}\frac{1 + iz}{1 - iz} \in \mathbb{R}_- &\Leftrightarrow \exists a > 0 : \frac{1 + iz}{1 - iz} = -a \\ &\Leftrightarrow (1 - iz \neq 0) \wedge (\exists a > 0 : 1 + iz = -a(1 - iz)) \\ &\Leftrightarrow (z \neq -i) \wedge (\exists a > 0 : iz(1 - a) = -1 - a) \\ &\Leftrightarrow (z \neq -i) \wedge (\exists a > 0 : z = i\frac{1 + a}{1 - a})\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (z \neq -i) \wedge (\exists b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : z = ib)$$

$$\Leftrightarrow z \in \{ib : (b < -1) \vee (b > 1)\}$$

gdzie przedostatnie przejście wynika z tego, że zbiorem wartości funkcji $\frac{1+a}{1-a}$ dla $a > 0$ jest zbiór $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Cięcie funkcji arctan składa się więc z dwóch półprostych leżących na osi y , jednej od $-\infty$ do -1 i drugiej od 1 do $+\infty$. Mamy

$$\frac{1+iz}{1-iz} = \frac{1-y+ix}{1+y-ix} = \frac{(1-y+ix)(1+y+ix)}{(1+y-ix)(1+y+ix)} = \frac{1-x^2-y^2+2ix}{(1+y)^2+x^2} = \frac{1-x^2-y^2}{(1+y)^2+x^2} + i\epsilon$$

gdzie $\epsilon = \frac{2x}{(1+y)^2+x^2}$. ϵ zawsze ma ten sam znak co x , więc niezależnie od tego czy $y < -1$ czy $y > 1$, jeśli zbliżam się do nieciągłości mam

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan z &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-x^2-y^2}{(1+y)^2+x^2} + i \frac{2x}{(1+y)^2+x^2} \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-y^2}{(1+y)^2} + i\epsilon \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-y}{1+y} + i\epsilon \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{y-1}{y+1} + i\pi \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \ln \frac{y-1}{y+1} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan z &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-x^2-y^2}{(1+y)^2+x^2} + i \frac{2x}{(1+y)^2+x^2} \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-y^2}{(1+y)^2} + i\epsilon \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-y}{1+y} + i\epsilon \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{y-1}{y+1} - i\pi \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \ln \frac{y-1}{y+1} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Wykład 15: wnioski ze wzoru całkowego Cauchy'ego. Szereg Taylora, twierdzenie Liouville'a, podstawowe twierdzenie algebry

Na ostatnim wykładzie skończyliśmy na wzorze całkowym Cauchy'ego dla pochodnych

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Zwróćmy uwagę, że dowód tego wzoru udowadnia nie tylko sam wzór, ale przede wszystkim istnienie pochodnej $f^{(n)}$. Założeniem było jedynie że funkcja f jest holomorphyzna, czyli różniczkowalna przynajmniej raz na całym obszarze ograniczonym krzywą K ; możemy natomiast wnioskować, że jest różniczkowalna dowolną ilość razy:

Twierdzenie:

Niech f będzie funkcją holomorphyzną na obszarze U , to jest różniczkowalna dowolną ilość razy na obszarze U .

Może to być zaskakujące, bo w przypadku funkcji zmiennej rzeczywistej nie jest trudno skonstruować funkcję różniczkowalną tylko ograniczoną ilość razy (np. $f(x) = |x|^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$). W przypadku funkcji zmiennej zespolonej okazuje się to niemożliwe - jeśli funkcja jest różniczkowalna raz, to jest różniczkowalna dowolnie wiele razy.

Wynika też z tego, że mając dowolny punkt z_0 w otoczeniu którego funkcja f jest holomorphyzna, możemy dla tej funkcji skonstruować szereg Taylora, czyli ciąg funkcji

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Pokażemy, że jeśli funkcja f jest holomorphyzna w kole zadanym warunkiem $|z - z_0| < r$, to szereg Taylora będzie zbieżny przynajmniej wewnątrz tego koła (a być może też dalej).

Parę wykładów temu było już pokazane, że jeśli funkcja zmiennej zespolonej jest zadana szeregiem $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, to obszarem zbieżności jest koło zadane warunkiem $|z - z_0| < R$, gdzie

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

dla szeregu Taylora mamy

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Rozważmy więc krzywą K będącą okręgiem o środku z_0 promieniu $\epsilon < r$. Z założenia, funkcja f jest holomorphyzna wewnątrz tego okręgu, możemy więc wykorzystać wzór całkowy Cauchy'ego, otrzymując

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Parametryzacją tego okręgu jest $z(t) = z_0 + \epsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, więc

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{it})}{(\epsilon e^{it})^{n+1}} i \epsilon e^{it} dt = \frac{1}{2\pi \epsilon^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) e^{-int} dt$$

a zatem

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \epsilon e^{it}) e^{-int} dt \right|} \leq \frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \epsilon e^{it})| dt}$$

Funkcja f na okręgu K jest ograniczona, mamy więc, dla pewnego $M < \infty$:

$$|f(z_0 + \epsilon e^{it})| \leq M$$

$$\frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \epsilon e^{it})| dt} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2\pi} 2\pi M} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{M}$$

Mamy więc

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{M}$$

Mamy więc odzaczowanie górne ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$ ciągiem zbieżnym

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\epsilon} \sqrt[n]{M} = \frac{1}{\epsilon}$$

z czego wynika, że

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\epsilon}$$

Konieczność użycia granicy górnej \limsup wynika z tego, że nie mamy gwarancji, że ciąg a_n jest zbieżny. Przypomnę, granica górna to supremum zbioru granic wszystkich zbieżnych podciągów; ponieważ granica każdego zbieżnego podciągu ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$ będzie spełniała powyższe oszacowanie, to i granica górna całego ciągu $\sqrt[n]{|a_n|}$ oszacowanie to spełnia. Mamy wreszcie

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq \epsilon$$

ponieważ za ϵ było promieniem dowolnego okręgu o środku w z_0 zawartego w obszarze holomorficznosci, oznacza to, że $R \geq r$, czyli promień zbieżności szeregu Taylora jest przynajmniej tak duży jak promień największego koła o środku w z_0 wewnątrz którego funkcja f jest holomorficzna.

Dowiedźmy jeszcze, że szereg Taylora jest zbieżny do oryginalnej funkcji (dla funkcji zmiennej rzeczywistej tak być nie musi, np. dla szeregu $f(x) = e^{-1/x^2}$ dookoła $x_0 = 0$). Dla dowolnego punktu z leżącego w obszarze zbieżności szeregu Taylora niech K będzie okręgiem o środku w z_0 i promieniu r spełniającym warunek $|z - z_0| < r < R$; taki okrąg okrąży oba punkty z i z_0 , zawierając się przy tym w obszarze holomorficznosci. Mamy

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta$$

gdzie ζ została użyta jako zmienna całkowania ponieważ symbol z był już w użyciu. Mamy dalej, wykorzystując wzór na skończoną sumę szeregu geometrycznego:

$$\begin{aligned} S_N(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^N \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1 - \frac{(z - z_0)^{N+1}}{(\zeta - z_0)^{N+1}}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(1 - \frac{(z - z_0)^{N+1}}{(\zeta - z_0)^{N+1}} \right) d\zeta \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} f(z) - S_N(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(1 - \frac{(z - z_0)^{N+1}}{(\zeta - z_0)^{N+1}} \right) d\zeta = \\ &= \frac{(z - z_0)^{N+1}}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^{N+1}} d\zeta \end{aligned}$$

podstawiając parametryzację okręgu $\zeta(t) = z_0 + re^{it}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |f(z) - S_N(z)| &= \frac{|z - z_0|^{N+1}}{2\pi r^N} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 - z + re^{it}} e^{-iNt} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{|z - z_0|^{N+1}}{2\pi r^N} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{|z_0 - z + re^{it}|} d\zeta \end{aligned}$$

Funkcja f na tym okręgu jest ograniczona, $f(z_0 + re^{it}) \leq M$. Mamy też, z nierówności trójkąta

$$|z_0 - z + re^{it}| \geq r - |z - z_0|$$

a zatem

$$|f(z) - S_N(z)| \leq \frac{|z - z_0|^{N+1}}{r^N} \frac{M}{r - |z - z_0|} = \frac{M|z - z_0|}{r - |z - z_0|} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^N$$

Ponieważ wybraliśmy $r > |z - z_0|$ mamy $|z - z_0|/r < 1$ a zatem prawa strona nierówności dąży do 0. Zatem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |f(z) - S_N(z)| = 0$$

czyli

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) = f(z)$$

A zatem faktycznie szereg Taylora jest zbieżny do oryginalnej funkcji.

Jeżeli ograniczenie na promień koła holomorficznego wynika z istnienia punktów osobliwych, czyli jest równy odległości punktu z_0 od najbliższego punktu

osobliwego, to możemy nawet stwierdzić, że promień szeregu Taylora będzie dokładnie równy tej odległości. Nie może być bowiem mniejszy (co pokazaliśmy powyżej), ale nie może być też większy, bo w takim przypadku obszar zbieżności szeregu Taylora obejmowałby punkty, w których funkcja zadana tym szeregiem nie jest różniczkowalna, co dla szeregów potęgowych jest niemożliwe. Mamy zatem

Twierdzenie:

Niech f będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu z_0 , a jej punktami osobliwymi są punkty z_k , $k \leq 1$, to w obszarze zadany warunkiem $|z - z_0| < R$, gdzie

$$R = \inf_k |z_0 - z_k|$$

funkcja f jest granicą swojego szeregu Taylora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Twierdzenie to pozwala szybko wyznaczać promień zbieżności szeregu - jeśli znamy punkty osobliwe funkcji, nie musimy liczyć nieraz skomplikowanych granic.

Ze wzoru całkowego Cauchy'ego wynika też tzw. twierdzenie Liouville'a:

Twierdzenie Liouville'a:

Jeśli f jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej i ograniczoną, to jest funkcją stałą.

Znów, może to być zaskakujące, bo w nietrudno jest znaleźć gładką i ograniczoną funkcję zmiennej rzeczywistej, która nie jest funkcją stałą (np. $f(x) = \sin x$). Na płaszczyźnie zespolonej jest to niemożliwe; funkcja która nie jest funkcją stałą jenie może być jednocześnie ograniczona i holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej.

Dowód.

Założmy, że funkcja f jest ograniczona przez stałą M , $|f(z)| < M$. Ponieważ funkcja f jest z założenia holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej, oznacza to, że we wzorze całkowym Cauchy'ego mogą wykorzystywać okręgi o dowolnie dużym promieniu R - żaden z nich nie okrąży żadnych osobliwości, bo tych osobliwości na płaszczyźnie zespolonej po prostu nie ma. Mamy więc

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) e^{-int} dt$$

gdzie wykorzystano już wielokrotnie stosowaną parametryzację okręgu $z(t) = z_0 + Re^{it}$. Ponieważ z założenia $|f(z)| < M$, mamy

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{1}{2\pi R^n} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi R^n} 2\pi M = \frac{M}{R^n}$$

Ponieważ promień R może zostać wybrany dowolnie duży, oznacza to, że $f^{(n)}(z_0) = 0$ dla $n > 0$. Jedyne niezerowy wyraz szeregu Taylora może zatem być dla $n = 0$ a taki szereg definiuje funkcję stałą.

Twierdzenie Liouville'a możemy z kolei wykorzystać do udowodnienia twierdzenia

Podstawowe twierdzenie algebry:

Każdy wielomian stopnia większego lub równego 1 o współczynnikach zespolonych ma na płaszczyźnie zespolonej przynajmniej jedno miejsce zerowe.

Jak w przypadku poprzednich twierdzeń, tak i to nie byłoby spełnione w liczbach rzeczywistych, np. wielomian $f(x) = x^2 + 1$ nie ma rzeczywistych miejsc zerowych.

Dowód.

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że mamy wielomian

$$W(z) = a_0 + a_1z + a_nz^n, \quad a_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

który nie ma miejsc zerowych na płaszczyźnie zespolonej. Oznaczałoby to, że funkcja

$$f(z) = \frac{1}{W(z)}$$

Nie ma żadnych osobliwości na płaszczyźnie zespolonej. Zapiszmy tę funkcję jako

$$f(z) = \frac{1}{a_nz^n} \frac{1}{\frac{a_0}{a_nz^n} + \frac{a_1}{a_nz^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nz} + 1}$$

Postać ta pokazuje, że $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Podzielmy płaszczyznę zespoloną na dwa obszary. Pierwszym niech będzie obszar zadany warunkiem $|z| > R$, gdzie R jest na tyle duże, aby w tym obszarze $|f(z)| < 1$; takie R istnieje, ponieważ $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Pozostały obszar będzie zatem zadany warunkiem $|z| \leq R$.

W pierwszym obszarze funkcja jest oczywiście ograniczona (przez 1). Ale również w drugim obszarze funkcja jest ograniczona, ponieważ jest to obszar zwarty a funkcja f jest ciągła i nie ma żadnych osobliwości. Wybierając większe z tych dwóch ograniczeń otrzymujemy ograniczenie na funkcję f na całej płaszczyźnie zespolonej.

Skoro funkcja f jest holomorficzna i ograniczona na całej płaszczyźnie zespolonej, to możemy zastosować twierdzenie Liouville'a. Ale z tego twierdzenia wynika, że funkcja f jest funkcją stałą, a zatem i wielomian $W(z)$ jest wielomianem stałym, co stoi w sprzeczności z założeniem, że jest on wielomianem stopnia większego lub równego 1. Ta sprzeczność kończy dowód nie wprost.

Wykład 16: szereg Laurenta, residua

Na poprzednim wykładzie pokazaliśmy, że każdą funkcję f holomorficzną w punkcie z_0 da się w pewnym otoczeniu tego punktu zapisać w postaci szeregu Taylora:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Pokazaliśmy też wcześniej, że w jeśli funkcja f ma biegun n -tego rzędu, ale jest holomorficzną poza nim, można ją zapisać w postaci

$$f(z) = g(z) + \frac{c_1}{z - z_0} + \dots + \frac{c_n}{(z - z_0)^n}$$

gdzie g jest funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu z_0 . Łącząc te dwa fakty, możemy stwierdzić, że funkcję posiadającą w punkcie z_0 biegun n -tego rzędu możemy zapisać w postaci

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^n \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

gdzie w porównaniu z poprzednim wzorem, zmieniłem oznaczenie $c_k \rightarrow a_{-k}$.

W ogólności, jeśli nie znamy rodzaju osobliwości, to pod warunkiem, że jest osobliwość izolowana (czyli istnieje takie jej otoczenie, w którym nie ma innych osobliwości) możemy funkcję zapisać w postaci

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Takie przedstawienie nazywamy **szeregiem Laurenta**. Szereg Taylora jest szczególnym przypadkiem szeregu Laurenta w sytuacji, gdy wszystkie współczynniki a_k o ujemnych indeksach są równe 0, czyli gdy punkt z_0 nie jest osobliwy. Jeśli osobliwość jest biegunem, wtedy tylko skończona ilość współczynników a_k z indeksami ujemnymi (czyli przy ujemnych potęgach $(z - z_0)$) jest niezerowa; konkretnie, jeśli osobliwość jest biegunem n -tego rzędu, to $a_k = 0$ dla $k < -n$. Jeżeli jednak osobliwość nie jest biegunem (jest osobliwością istotną), to funkcji nie można zapisać za przy użyciu skończonej liczby wyrazów z indeksami ujemnymi. Gdy jednak mamy tych wyrazów nieskończenie wiele, pojawia się problem zbieżności nieskończonego szeregu.

Rozważmy zagadnienie zbieżności bliżej. Jak widać powyżej, szereg Laurenta, rozpisuje się jako suma dwóch szeregów:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

Mówimy, że szereg Laurenta jest zbieżny, jeśli oba te szeregi są zbieżne, każdy z osobna. Pierwszy a nich jest zwykłym szeregiem potęgowym, dla którego już dobrze wiemy, kiedy jest on zbieżny; mianowicie, gdy

$$|z - z_0| \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Co do drugiego z nich, mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad \text{gdzie } c_k = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

jego zbieżność wyznaczamy z kryterium Cauchy'ego:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$$

czyli

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|a_{-n}|}}{|z - z_0|} < 1 \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} < |z - z_0| \end{aligned}$$

Łącząc warunki na zbieżność obu części szeregu, otrzymujemy, że szereg Laurenta jest zbieżny w obszarze danym warunkiem $R_1 < |z_0| < R_2$, gdzie

$$\begin{aligned} R_1 &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \\ R_2 &= \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \end{aligned}$$

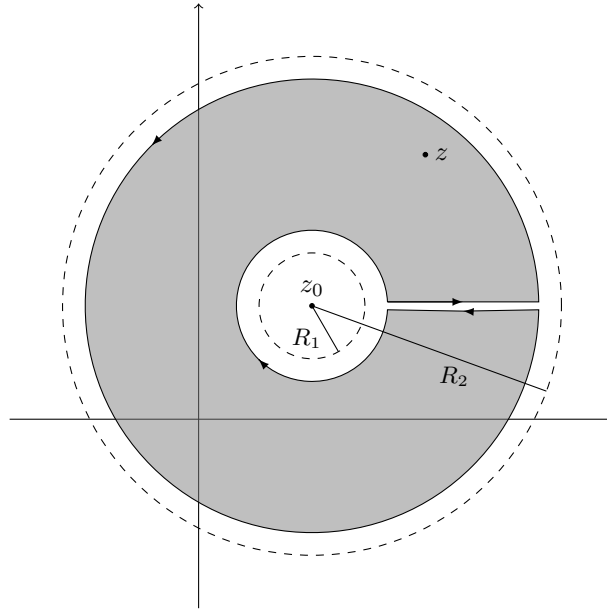
Taki obszar nazywamy *pierścieniem* o środku w punkcie z_0 , wewnętrznym promieniu R_1 i zewnętrznym promieniu R_2 . Możliwe jest, że $R_1 = 0$; wtedy ten pierścień jest kołem o środku z_0 i promieniu R_1 , jednak z wyrzuconym punktem z_0 (bo mamy warunek $0 < |z - z_0|$). Z kolei jeśli $R_2 = \infty$ to pierścień nie ma zewnętrznego ograniczenia, i obejmuje całą płaszczyznę zespoloną z wyciętym kołem $|z - z_0| \leq R_1$.

Załóżmy, że funkcja f jest holomorficzna w pewnym pierścieniu $R_1 < |z_0| < R_2$. Żeby znaleźć wzory na współczynniki a_n szeregu Laurenta zbieżnego do funkcji f w tym pierścieniu, skorzystajmy ze wzoru Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

gdzie K jest brzegiem obszaru o nietypowym kształcie, przedstawionym na rysunku poniżej. Dla przejrzystości pozostawiono przerwę pomiędzy dwoma odcinkami przebieganymi w przeciwne strony, ale należy je traktować

jako pokrywające się odcinki. Krzywa K jest zatem złożona z dwóch okręgów i odcinka: ujemnie zorientowanego okręgu o środku w z_0 i promieniu $r_1 \in (R_1, |z - z_0|)$; dodatnio zorientowanego okręgu o środku w z_0 i promieniu $r_2 \in (|z - z_0|, R_2)$; oraz łączącego tego okręgi odcinka, przebieganego w obie strony. Jak widać na rysunku, obszar ograniczony tą krzywą jest w całości zawarty w obszarze holomorficznosci funkcji f (w pierścieniu), więc użycie wzoru Cauchy'ego jest uprawnione.



Przy całkowaniu po całym konturze dwa wkłady od całkowania po odcinku skasują się wzajemnie (bo całkują jedną funkcję po tym samym odcinku, ale w przeciwnych kierunkach), pozostawiając całki po okręgach; ponieważ wewnętrzny okrąg jest ujemnie zorientowany, wyprodukuje to znak $-$:

$$\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

na wewnętrznym okręgu mamy $|\zeta - z_0| = r_2 < |z - z_0|$; możemy więc rozpisać

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

gdzie skorzystano ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, uprawnionego ponieważ $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$.

Z kolei na zewnętrznym okręgu mamy $|\zeta - z_0| = r_1 > |z - z_0|$ oraz $\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| < 1$, więc

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

Otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} 2\pi i f(z) &= \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n f(\zeta)}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^{-k} \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

gdzie założyliśmy, że można zamienić kolejnością liczenie całki i nieskończonej sumy (można to udowodnić podobnie jak to było zrobione w dowodzie twierdzenia o szeregu Taylora, przez policzenie sumy skończonej i oszacowanie różnicy pomiędzy sumą skończoną i domniemaną granicą; szczegółowego dowodu nie będę teraz powtarzał).

Mamy zatem

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{dla } n \geq 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{dla } n \leq -1$$

Ponieważ jednak funkcje podcałkowe w powyższych całkach nie mają osobliwości w obszarze $R_1 < |z_0| < R_2$, możemy oba całki zamienić na całki po jednym, dowolnym okręgu o środku o środku w z_0 i promieniu $r \in (R_1, R_2)$. Otrzymujemy jednolity wzór

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}$$

Zapisując to w postaci twierdzenia:

Twierdzenie (o szeregu Laurenta):

Niech f będzie funkcją holomorficzną w pierścieniu $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Szereg Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ jest zbieżny w pierścieniu $R_1 < |z_0| < R_2$ do funkcji f jeśli

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

gdzie K jest dowolnym dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie z_0 i promieniu $r \in (R_1, R_2)$

Dowód przeprowadziliśmy powyżej.

Należy jednak zaznaczyć, że chociaż powyższe twierdzenie udowadnia istnienie szeregu Laurenta zbieżnego do wybranej funkcji, wykorzystanie podanych wzorów zazwyczaj jest niepraktyczne. W praktyce współczynniki szeregu Laurenta wyznacza się inaczej, a konkretna metoda zależy od samej funkcji. Przykłady zostaną pokazane na ćwiczeniach wykładowych.

W odróżnieniu od szeregu Taylora, wokół ustalonego punktu z_0 jedna funkcja f może mieć wiele szeregów Laurenta do niej zbieżnych, każdy o innym pierścieniu zbieżności. Granice pomiędzy tymi pierścieniami są wyznaczona przez położenia innych punktów osobliwych poza z_0 . Dla przykładu, jeśli nie licząc punktu z_0 (który może być osobliwy lub nie) funkcja f ma na płaszczyźnie zespolonej dwa punkty osobliwe z_1 i z_2 takie, że $|z_1 - z_0| = r_1 < |z_2 - z_0| = r_2$, to funkcja ta będzie miała trzy różne szeregi Laurenta wokół punktu z_0 :

1. pierwszy w obszarze $0 < |z - z_0| < r_1$
2. drugi w obszarze $r_1 < |z - z_0| < r_2$
3. trzeci w obszarze $r_2 < |z_0| < \infty$

Przypomnę twierdzenie Cauchy'ego-Gorsata: jeśli funkcja f jest holomorficzną w obszarze ograniczonym krzywą K , to

$$\oint_K f(z) dz = 0$$

Mamy teraz już narzędzia, by rozważyć bardziej skomplikowany przypadek. Założmy, że krzywą K zawiera się w pewnym pierścieniu $R_1 < |z - z_0| < R_2$ w którym funkcja f jest holomorficzną. (dopuszczamy istnienie osobliwości w kole $|z - z_0| \leq R_1$; wymagamy jedynie by nie było osobliwości pomiędzy wewnętrznym a zewnętrznym okręgiem). Spróbujmy policzyć całkę $\oint_K f(z) dz$.

Ponieważ w pierścieniu nie ma osobliwości, możemy krzywą K zdeformować i uproszczyć do okręgu o dowolnym promieniu $r \in (R_1, R_2)$. Mamy

$$\oint_K f(z) dz = \oint_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

Funkcję f możemy rozwinąć w szereg Laurenta:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Mamy więc

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz$$

Wykorzystując parametryzację okręgu $z = z_0 + re^{it}$ mamy

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n i r e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

Jeśli $n \neq -1$ mamy

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{e^{2\pi i(n+1)} - 1}{i(n+1)} = 0$$

Natomiast dla $n = -1$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Mamy więc

$$\oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{dla } n = -1 \end{cases}$$

A zatem z całej sumy wyrażającej poszukiwaną całkę pozostaje tylko jeden wyraz

$$\oint_K f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \oint_{|z-z_0|=r} (z - z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}$$

Jak widzimy powyżej, współczynnik a_{-1} szeregu Laurenta ma szczególne znaczenie; na tyle, że czasem otrzymuje szczególną nazwę:

Definicja (residuum):

Residuum funkcji f w izolowanym punkcie osobliwym z_0 nazywamy współczynnik a_{-1} szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ zbieżnego do funkcji f w otoczeniu punktu z_0 , czyli w pewnym pierścieniu $0 < |z - z_0| < R$. Stosowane oznaczenia to

$$\text{Res}_{z_0} f = \text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$$

Jeżeli zatem mamy krzywą okrążającą tylko jeden punkt osobliwy funkcji f , to ponieważ możemy taką krzywą zdeformować do małego okręgu okrążającego punkt z_0 mamy

$$\oint_K f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f, z_0)$$

Definiuje się też

Definicja (residuum w nieskończoności):

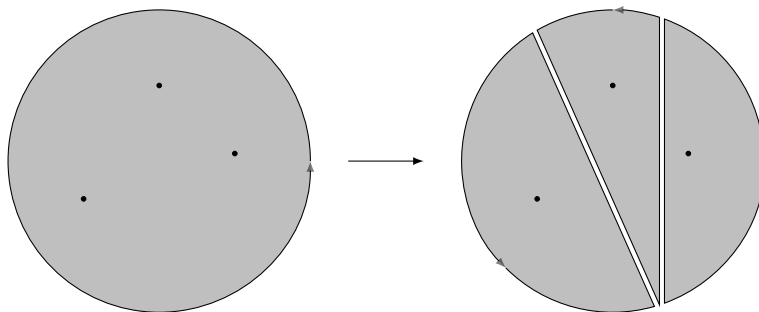
Residuum funkcji f w nieskończoności nazywamy **minus** współczynnik a_{-1} szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ zbieżnego do funkcji f w otoczeniu nieskończoności, czyli w pewnym pierścieniu $R < |z| < \infty$. Stosowane oznaczenia to

$$\operatorname{Res}_{\infty} f = \operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$$

Residuum w nieskończoności jest definiowane jako minus współczynnik a_{-1} odpowiedniego szeregu Laurenta, ponieważ otoczenie nieskończoności znajduje się na zewnątrz okręgu $|z| = R$, w odróżnieniu od otoczeń zwykłych punktów z_0 , które znajdują się wewnątrz okręgów $|z - z_0| < R$. Ta różnica powoduje zmianę naturalnej orientacji tego okręgu, stąd przeciwny znak. A zatem dla krzywej okrążającej wszystkie punkty osobliwe danej funkcji f (krzywą taką można zdeformować do dowolnie dużego okręgu) mamy

$$\oint_K f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$$

Pozostaje jeszcze przypadek, gdy krzywa K otacza kilka punktów izolowanych, choć niekoniecznie wszystkie. W takim przypadku w pierwszym kroku całkę po takiej krzywej K należy rozpisać jako sumę całek po kilku krzywych K_i , z których każda otacza tylko jeden punkt osobliwy, jak pokazano na rysunku poniżej:



Ponieważ całki po dodanych odcinkach wewnątrz obszaru będą się kasować (bo każdy odcinek jest przebiegany dwukrotnie, w przeciwnych kierunkach), mamy

$$\oint_K f(z) dz = \sum_i \oint_{K_i} f(z) dz$$

Ponieważ każda z krzywych k_i otacza tylko jeden punkt osobliwy, mamy dla nich

$$\oint_{K_i} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_i)$$

gdzie z_i jest odpowiednim punktem osobliwym. Dostajemy zatem

Twierdzenie o residuach:

Jeśli dodatnio zorientowana krzywa K okrąży skończoną ilość izolowanych punktów osobliwych funkcji f , która to funkcja jest poza tymi punktami holomorphyzna, to

$$\oint_K f(z)dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i)$$

gdzie sumowanie wykonywane jest po wszystkich punktach osobliwych z_i okrążanych przez krzywą K

Można zwrócić uwagę, że jeśli funkcja f ma na płaszczyźnie zespolonej skończoną liczbę punktów osobliwych, to powyższy wzór stosuje się również, gdy krzywa K okrąży je wszystkie. W takim przypadku całkę $\oint_K f(z)dz$ można policzyć na dwa sposoby: albo z residuów w punktach osobliwych, albo z residuum w nieskończoności. Mamy zatem

$$2\pi i \sum_i \text{Res}(f, z_i) = \oint_K f(z)dz = -2\pi i \text{Res}(f, \infty)$$

Możemy z tego wyprowadzić wzór

$$\sum_i \text{Res}(f, z_i) + \text{Res}(f, \infty) = 0$$

Ten wzór możemy wykorzystać, gdy twierdzenie o residuach wymaga od nas policzenia sumy residuów w wielu punktach; zamiast tego możemy policzyć residua w pozostałych punktach i residuum w nieskończoności; wiedząc, że suma wszystkich musi być równa 0, możemy wyznaczyć początkowo poszukiwaną sumę.

Na koniec tego wykładu, wyprowadźmy jeszcze wzory pozwalające znajdować wartość residuum nie licząc całego szeregu Laurenta. Jeżeli osobliwość w z_0 jest osobliwością istotną, takiego wzoru niestety nie ma; residuum czasem daje się obliczyć, ale zależy to od postaci samej funkcji f . Jeżeli jednak punkt z_0 jest biegunem rzędu n , mamy w otoczeniu tego punktu

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z - z_0)^k$$

funkcja $f(z)(z - z_0)^n$ jest funkcją holomorphyzną w otoczeniu punktu z_0 , a prawa strona powyższej równości to jej szereg Taylora. Mamy zatem

$$a_{k-n} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left((z - z_0)^n f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

w szczególności, dla $k = n - 1$ mamy

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left((z-z_0)^n f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

Aby znaleźć wzór na residuum w nieskończoności, zauważmy natomiast, że jeśli w otoczeniu nieskończoności (dla dużych $|z|$) mamy

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

to dla małych $|z|$ (w otoczeniu 0) mamy

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k} z^k$$

$$-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-a_{-k}) z^{k-2} = \dots + \frac{-a_0}{z^2} + \frac{-a_{-1}}{z} - a_{-2} - a_{-3}z + \dots$$

A zatem $-a_{-1}$ jest nie tylko residuum w nieskończoności funkcji $f(z)$, ale również residuum w 0 funkcji $-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$$

Ćwiczenia wykładowe 8: wyznaczanie szeregu Laurenta

Współczynniki szereg Laurenta można teoretycznie próbować znaleźć ze wzoru

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

ale w praktyce istnieją lepsze, prostsze metody (choć o ograniczonym zakresie zastosowań). Ważnym przypadkiem są na przykład funkcje wymierne.

Rozważmy najpierw funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z-z_1}$$

Będziemy chcieli znaleźć jej szereg Laurenta wokół punktu z_0 . Jeśli $z_0 = z_1$, jest to trywialne; funkcja f jest już zapisana w postaci szeregu Laurenta:

$$f(z) = \dots + 0 \cdot (z-z_0)^{-3} + 0 \cdot (z-z_0)^{-2} + 1 \cdot (z-z_0)^{-1} + 0 \cdot (z-z_0)^0 + 0 \cdot (z-z_0)^1 + \dots$$

czyli wtedy

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq -1 \\ 1 & \text{dla } n = -1 \end{cases}$$

to przedstawienie jest oczywiście poprawne na całej płaszczyźnie zespolonej (poza punktem osobliwym $z = z_0 = z_1$).

Jeśli $z_0 = z_1$ sytuacja jest bardziej skomplikowana. Możemy wyróżnić dwa pierścienie holomorficzości

1. pierwszy dany warunkiem $0 < |z - z_0| < |z_1 - z_0|$
2. drugi dany warunkiem $|z_1 - z_0| < |z - z_0| < \infty$

W zależności od tego w którym obszarze jesteśmy, będziemy mieć inny szereg.

W pierwszym obszarze mamy, wykorzystując wzór na sumę szeregu geometrycznego

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_1} &= \frac{1}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} = -\frac{1}{z_1 - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}} = -\frac{1}{z_1 - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

czyli

$$a_n = \begin{cases} \frac{-1}{(z_1 - z_0)^{n+1}} & \text{dla } n \geq 0 \\ 0 & \text{dla } n \leq -1 \end{cases}$$

W drugim obszarze mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - z_1} &= \frac{1}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z_1 - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1 - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z_1 - z_0)^{k-1}}{(z - z_0)^k} \end{aligned}$$

czyli

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \geq 0 \\ (z_1 - z_0)^{-n-1} & \text{dla } n \leq -1 \end{cases}$$

Należy tu podkreślić, że oba rozwinięcia są słuszne tylko w odpowiednich obszarach, tylko tam, gdzie odpowiedni szereg geometryczny jest zbieżny.

Na konkretnym przykładzie: rozwińmy funkcję $f(z) = \frac{1}{z}$ wokół punktu $z_0 = 2i$. Mamy $z_1 = 0$, $|z_1 - z_0| = |-2i| = 2$. A zatem dla $|z - 2i| < 2$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{(z - 2i) + 2i} = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 + \frac{1}{2i}(z - 2i)} = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - \frac{i}{2}(z - 2i)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2} (z - 2i) \right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+1}} (z - 2i)^n = \\
&= \frac{-i}{2} + \frac{1}{4} (z - 2i) + \frac{i}{8} (z - 2i)^2 - \frac{1}{16} (z - 2i)^3 + \dots
\end{aligned}$$

Z kolei dla $|z - 2i| > 2$ mamy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z - 2i) + 2i} = \\
&= \frac{1}{z - 2i} \frac{1}{1 + \frac{2i}{z - 2i}} = \\
&= \frac{1}{z - 2i} \frac{1}{1 - \frac{-2i}{z - 2i}} = \\
&= \frac{1}{z - 2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2i}{z - 2i} \right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^n (z - 2i)^{-n-1} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2i^{k-1}}{(z - 2i)^k} = \\
&= \frac{1}{z - 2i} + \frac{-2i}{(z - 2i)^2} + \frac{-4}{(z - 2i)^3} + \frac{8i}{(z - 2i)^4} + \dots
\end{aligned}$$

Aby znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{1}{(z - z_1)^k}$ dla $k > 1$ możemy skorzystać ze wzoru

$$\frac{1}{(z - z_1)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{1}{z - z_1}$$

Znamy już rozwinięcie funkcji $\frac{1}{z - z_1}$ i możemy je wstawić do powyższego wzoru.

Na przykład dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z^3}$ wokół punktu $z_0 = 2i$ mamy, dla $|z - 2i| < 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+1}} (z - 2i)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+2}} n(n-1) (z - 2i)^{n-2} = \text{wyrazy dla } n=0 \text{ i } n=1 \text{ są równe } 0 \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{2^{n+2}} n(n-1) (z - 2i)^{n-2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{k+1}}{2^{k+4}} (k+2)(k+1)(z-2i)^k = \\
&= \frac{i}{8} + \frac{-3}{16}(z-2i) + \frac{-3i}{16}(z-2i)^2 + \frac{5}{32}(z-2i)^3 + \dots
\end{aligned}$$

a dla $|z-2i| < 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z} = \\
&= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} -2i^n (z-2i)^{-n-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n 2^{n-1} (-n-1)(-n-2)(z-2i)^{-n-3} = \\
&= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-i)^{k-3} 2^{k-4} (k-2)(k-1)}{(z-2i)^k} = \\
&= \frac{1}{(z-2i)^3} + \frac{-6i}{(z-2i)^4} + \frac{-24}{(z-2i)^5} + \dots
\end{aligned}$$

Jeśli mamy bardziej skomplikowaną funkcję wymierną (o wielu punktach osobliwych), pierwsze co musimy zrobić, to rozłożyć ją na ułamki proste. Mamy na przykład

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

Potem każdą ze składowych funkcji rozwijamy na wszystkie możliwe sposoby, odnotowując obszary w których rozwinięcie jest prawidłowe. Dla powyższej funkcji, dla rozwinięcia wokół $z_0 = 0$ mamy (podaję końcowy wynik, obliczenia są analogiczne do tych wyżej):

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{z-1} &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} z^n & \text{dla } |z| < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} & \text{dla } |z| > 1 \end{cases} \\
\frac{2}{z-2} &= \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^n}{2^n} & \text{dla } |z| < 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} & \text{dla } |z| > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Sumując oba składniki możemy dostać trzy wyniki, w zależności od tego które z rozwinięć dla obu składników jest poprawne

$$\frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n & \text{dla } |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{z^n} & \text{dla } 1 < |z| < 2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} & \text{dla } |z| > 2 \end{cases}$$

Czasem daje się to zrobić nieco prościej. Na przykład, gdy mamy do rozpisania funkcję

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

dokoła $z_0 = 0$, zamiast dokonywać rozkładu na ułamki proste

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3}$$

i znajdować rozwinięcie każdego członu z osobna, możemy od razu wykorzystać rozwinięcie $\frac{1}{(z-1)^3}$:

$$\frac{1}{(z-1)^3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+2)(n+1)}{2} z^n & \text{dla } |z| < 1 \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2z^n} & \text{dla } |z| > 1 \end{cases}$$

i przemnożyć je przez z^2 by otrzymać

$$\frac{z^2}{(z-1)^3} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+2)(n+1)}{2} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-n(n-1)}{2} z^n & \text{dla } |z| < 1 \\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{2z^{n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2z^n} & \text{dla } |z| > 1 \end{cases}$$

Oprócz szeregu geometrycznego czasem potrzeba też znać i wykorzystywać szeregi Taylora innych funkcji, np.:

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}$$

oraz, zakładając, że cięcie funkcji \ln i funkcji potęgowej mamy na ujemnej półosi rzeczywistej:

$$\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \text{dla } |z| < 1$$

$$(1-z)^{-\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} z^n, \quad \text{dla } |z| < 1$$

Na przykład, możemy znaleźć rozwinięcie funkcji $f(z) = z^3(1 - \frac{1}{z^2})^{\frac{1}{2}}$ dla $|z| > 1$:

$$\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdots \left(n - \frac{3}{2}\right)}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$$

$$f(z) = z^3 - \frac{1}{2}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdots \left(n - \frac{3}{2}\right)}{n!} \frac{1}{z^{2n-3}} =$$

$$\begin{aligned}
&= z^3 - \frac{1}{2}z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdots (k + \frac{1}{2})}{(k+2)!} \frac{1}{z^{2k+1}} = \\
&= z^3 - \frac{1}{2}z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}{2^{k+2}(k+2)!} = \\
&= z^3 - \frac{1}{2}z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(2k+1)!!}{2^{k+2}(k+2)!} \frac{1}{z^{2k+1}}
\end{aligned}$$

Wykład 17: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych

Znamy już dwie niezależne metody liczenia całek zespolonych: z definicji, przez sparametryzowanie krzywej całkowania za pomocą zmiennej rzeczywistej:

$$\int_K f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

oraz, w przypadku całek po krzywych zamkniętych, przez residua:

$$\int_K f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych w obszarze ograniczonym krzywą K .

Zauważmy, że porównując oba wzory mamy

$$\int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

Po lewej stronie mamy jakąś całkę po zmiennej rzeczywistej, być może skomplikowaną; po prawej stronie mamy wyrażenie wymagające policzenia jedynie residuów funkcji zespolonej w kilku punktach. Wzór ten daje więc nam nową metodę liczenia całek, nie opierającą się na znajdywaniu funkcji pierwotnej. Wynik można często uzyskać szybciej i mniejszym wynikiem niż fundamentalnymi metodami, a czasem pozwala nawet liczyć całki, których fundamentalnymi metodami w ogóle policzyć się nie daje. Metoda ta ma jednak też swoje ograniczenia.

Po pierwsze, krzywa na płaszczyźnie zespolonej wykorzystywana w tej metodzie musi być krzywą zamkniętą. Zazwyczaj oznacza to, że tą metodą można obliczyć wyłącznie całki oznaczone o ściśle wyznaczonych granicach (jak zobaczymy na przykładach w dalszej części wykładu). Po drugie, funkcja f wykorzystywana w tym wzorze musi być funkcją holomorficzną w obszarze ograniczonym krzywą K , za wyjątkiem skończonej liczby izolowanych punktów osobliwych;

ewentualnie, możemy wykorzystać residuum w nieskończoności, wtedy funkcja f musi być holomorphyzna na całej płaszczyźnie zespolonej za wyjątkiem obszary ograniczonego krzywą K . Po trzecie, w praktyce zazwyczaj nie mamy danych funkcji $f(z)$ i krzywej K , a jedynie mamy zadaną całkę

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$$

Aby wykorzystać metodę residuów, musimy dopiero znaleźć odpowiednią krzywą zamkniętą K i funkcję $f(z)$ takie, aby

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt = \int_K f(z) dz$$

albo przynajmniej całka $\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt$ wyrażała się w prosty sposób przez całkę $\int_K f(z) dz$ (przykłady będą dane później).

Te ograniczenia powodują, że w praktyce metodę residuów można zastosować jedynie dla pewnych szczególnych całek rzeczywistych. Jest kilka rodzajów takich szczególnych całek, które teraz zaczniemy omawiać szczegółowo.

Całki $\int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t) dt$, gdzie g jest funkcją wymierną

Przypomnijmy wzory

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Jeżeli weźmiemy zatem okrąg o środku w 0 i promieniu 1, sparametryzowany przez $z(t) = e^{it}$, możemy zapisać

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

Mamy też

$$dz = ie^{it} dt = iz dt$$

czyli

$$dt = \frac{dz}{iz}$$

POzwala nam to zapisać

$$\int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} g\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

Jeśli g jest funkcją wymierną, to również funkcja

$$f(z) = g\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

jest funkcją wymierną, co gwarantuje, że ma skończoną ilość punktów osobliwych.

Mógłby pojawić się pewien problem, gdy funkcja f posiada punkty osobliwe na okręgu $|z| = 1$; jeśli tak jest, to okręgu nie możemy tu wykorzystać, ponieważ twierdzenie o residuach wymaga, by punkty osobliwe znajdowały się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą całkowania (położenie na brzegu jest niedozwolone). Istnienie punktu osobliwego funkcji $f(z)$ gdzieś na okręgu $|z| = 1$ oznaczałoby jednak, że funkcja $g(\cos t, \sin t)$ ma osobliwość gdzieś na odcinku $[0, 2\pi]$. Jeżeli jednak będziemy rozważać tylko takie funkcje g które nie mają osobliwości (czyli na przykład $\frac{1}{1+\sin^2 t}$ lub $\frac{1}{2+\cos t}$, ale nie $\frac{1}{\sin t}$ czy $\frac{1}{1-3\sin^2 t}$), to funkcja f nie będzie miała osobliwości na okręgu $|z| = 1$.

Można jeszcze zauważyć, że wykorzystując podstawienie $z(t) = e^{it}$ mamy

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}.$$

Pozwala to szybko przekształcić funkcje g wykorzystujące $\cos(nt)$ i $\sin(nt)$ na funkcje na płaszczyźnie zespolonej. Można również dopuścić, by funkcja g zawierała wyrażenia $e^{int} = z^n$ lub $e^{-int} = z^{-n}$, bo ich obecność nie wpłynie na wymierność funkcji f .

Podsumujmy to co zostało powyżej powiedziane w formie twierdzenia:

Twierdzenie:

Jeśli g jest funkcją wymierną dwóch zmiennych taką, że funkcja $g(\cos t, \sin t)$ jest ciągła na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz

$$f(z) = g\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$$

to

$$\int_0^{2\pi} g(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji f takich, że $|z_k| < 1$.

czy nawet bardziej ogólnie

Twierdzenie:

Jeśli g jest funkcją wymierną dwóch zmiennych taką, że funkcja $g(e^{it}, e^{-it})$ jest ciągła na przedziale $[0, 2\pi]$ oraz

$$f(z) = g(z, z^{-1}) \frac{1}{iz}$$

to

$$\int_0^{2\pi} g(e^{it}, e^{-it}) dt = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji f takich, że $|z_k| < 1$.

Przykład. Obliczmy

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(4t)}{2 - \cos t} dt$$

Standardowa metoda polegałaby na użyciu podstawienia za $u = \tan \frac{t}{2}$ by sprowadzić tę całkę do całki z funkcji wymiernej. Metoda przez residua da jednak wynik szybciej.

Korzystając z tego, że $\cos(4t) = \operatorname{Re} e^{i4t}$ zapiszmy najpierw

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(4t)}{2 - \cos t} dt = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i4t}}{2 - \cos t} dt$$

można by się obyć bez tego kroku, ale wykonując go będziemy mieć prostsze obliczenia, Używając podstawienia $z = e^{it}$ mamy

$$\cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i4t}}{2 - \cos t} dt &= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{z^4}{2 - \frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = \\ &= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{1}{i} \frac{z^4}{2z - \frac{z^2+1}{2}} dz = \\ &= \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{1}{-i/2} \frac{z^4}{z^2 - 4z + 1} dz \end{aligned}$$

Mamy

$$f(z) = \frac{1}{-2i} \frac{z^4}{z^2 - 4z + 1}$$

Znajdźmy punkty osobliwe tej funkcji:

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z - 2)^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (z-2)^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow (z-2 = \sqrt{3}) \vee (z-2 = -\sqrt{3}) \\
&\Leftrightarrow (z = 2 + \sqrt{3}) \vee (z = 2 - \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Punkt $2 + \sqrt{3}$ leży poza okręgiem $|z| = 1$, ale punkt $2 - \sqrt{3}$ leży wewnątrz okręgu; musimy więc policzyć residuum w tym drugim punkcie. Jest to miejsce zerowe pierwszego rzędu mianownika, zatem będzie to biegun pierwszego rzędu funkcji f . Mamy więc

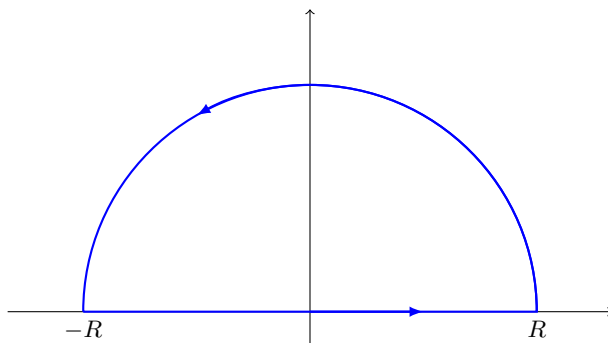
$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}(f, 2 - \sqrt{3}) = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \left((z - (2 - \sqrt{3})) f(z) \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \left((z - (2 - \sqrt{3})) \frac{1}{-i/2} \frac{z^4}{z^2 - 4z + 1} \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \left((z - (2 - \sqrt{3})) \frac{1}{-i/2} \frac{z^4}{(z - (2 - \sqrt{3}))(z - (2 + \sqrt{3}))} \right) = \\
&= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \left(\frac{1}{-i/2} \frac{z^4}{z - (2 + \sqrt{3})} \right) = \\
&= \frac{1}{-i/2} \frac{(2 - \sqrt{3})^4}{(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})} = \\
&= \frac{1}{-i/2} \frac{(2 - \sqrt{3})^4}{-2\sqrt{3}} = \\
&= \frac{(2 - \sqrt{3})^4}{i\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

A zatem

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(4t)}{2 - \cos t} dt = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{Res}(f, 2 - \sqrt{3}) \right) = 2\pi \frac{(2 - \sqrt{3})^4}{\sqrt{3}}$$

Całki $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, gdzie f jest funkcją wymierną

Kontur K_R , który będziemy wykorzystywać do policzenia takiej całki, ma postać:



czyli składa się z dwóch kawałków: odcinka leżącego na osi rzeczywistej, który możemy sparametryzować przez $z(x) = x$, $x \in [-R, R]$, oraz łuku który możemy sparametryzować przez $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Mamy zatem, dla dowolnej funkcji $f(z)$, ciągłej na tym konturze:

$$\oint_{K_R} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt$$

Możemy zatem zapisać

$$\int_{-R}^R f(x)dx = \oint_{K_R} f(z)dz - \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt$$

a zatem, zakładając że dla dostatecznie dużego R funkcja f jest ciągła na wszystkich konturach K_R , mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\oint_{K_R} f(z)dz - \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt \right)$$

Rozważmy sytuację, gdy funkcja f jest funkcją wymierną. Aby mieć gwarancję, że całka jest zbieżna, musimy założyć, że funkcja f jest ciągła na całej prostej rzeczywistej (czyli mianownik nie ma rzeczywistych miejsc rzeczywistych; dopuszczamy np. funkcję $\frac{1}{x^2+1}$, ale nie $\frac{1}{x^4-1}$). Musimy też założyć, że odpowiednio szybko (czyli szybciej niż $\frac{1}{x}$) maleje w $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = 0$$

Innymi słowy jeśli $f(x) = \frac{p(x)}{r(x)}$, gdzie p i r są wielomianami, musimy mieć $\deg r \geq \deg p + 2$.

Ponieważ zakładamy, że żadna osobliwość f z nich nie znajduje się na osi rzeczywistej, gwarantuje to ciągłość f na fragmencie konturu będącym odcinkiem. Funkcje wymierne mają też skończoną liczbę osobliwości, jeżeli więc weźmę

$$R > \max\{|z| : z \text{ jest punktem osobliwym funkcji } f\}$$

mam też gwarancję, że łuk nie przechodzi przez żaden z punktów osobliwych. a zatem założenie, że dla dostatecznie dużego R funkcja f jest ciągła na wszystkich konturach K_R jest prawdziwe, i mogę policzyć $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ze wzoru podanego powyżej.

Jeszcze raz wykorzystując fakt, że punktów osobliwych funkcji f jest skończona ilość, i żaden z nich nie leży na osi rzeczywistej, możemy zauważyć, że dla dostatecznie dużego R kontur K_R obejmie wszystkie punkty osobliwe leżące w górnej części płaszczyzny zespolonej (czyli tej dla której $\text{Im } z > 0$). Mamy więc, z twierdzenia o residuach

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{K_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } z_k > 0} \text{Res}(f, z_k)$$

Należy podkreślić, że sumujemy wyłącznie po punktach osobliwych leżących w górnej półpłaszczyźnie; częsty błąd popełniany przez studentów polega na uwzględnianiu wszystkich punktów osobliwych.

Założyliśmy też, że $f(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$ gdzie p i r są wielomianami oraz $\deg r \geq \deg p + 2$. Udowodnijmy, że istnieje oszacowanie:

$$|Rf(Re^{it})| \leq M(R), \quad \text{gdzie} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$$

Mamy bowiem, dla $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $r(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$:

$$\begin{aligned} |Rf(Re^{it})| &= \left| R \frac{a_n R^n e^{int} + \dots a_1 R e^{it} + a_0}{b_m R^m e^{imt} + \dots b_1 R e^{it} + b_0} \right| = \\ &= \left| \frac{a_n}{b_m R^{m-n-1}} \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n R e^{it}} + \dots + \frac{a_0}{a_n R^n e^{int}}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m R e^{it}} + \dots + \frac{b_0}{b_m R^m e^{imt}}} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{a_n}{b_m R^{m-n-1}} \right| \left| \frac{1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n R e^{it}} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n R^n e^{int}} \right|}{1 - \left| \frac{b_{m-1}}{b_m R e^{it}} \right| - \dots - \left| \frac{b_0}{b_m R^m e^{imt}} \right|} \right| \end{aligned}$$

jeżeli teraz wezmę R wystarczająco duże, aby

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_n R e^{it}} \right|, \dots, \left| \frac{a_0}{a_n R^n e^{int}} \right| \leq 1 \left| \frac{b_{m-1}}{b_m R e^{it}} \right|, \dots, \left| \frac{b_0}{b_m R^m e^{imt}} \right| < \frac{1}{2m}$$

mamy

$$\begin{aligned} 1 + \left| \frac{a_{n-1}}{a_n R e^{it}} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n R^n e^{int}} \right| &\leq n + 1 \\ 1 - \left| \frac{b_{m-1}}{b_m R e^{it}} \right| - \dots - \left| \frac{b_0}{b_m R^m e^{imt}} \right| &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a zatem

$$|Rf(Re^{it})| \leq 2(n+1) \left| \frac{a_n}{b_m R^{m-n-1}} \right| =: M(R)$$

ponieważ założyliśmy, że $\deg r = m \geq \deg p + 2 = n + 2$ mamy $m - n - 1 \geq 1$ a zatem faktycznie $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$.

Mając to oszacowanie mamy

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})R| dt \leq \int_0^{2\pi} M(R) dt = 2\pi M(R) \rightarrow 0$$

a zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it} dt = 0$$

Łącząc otrzymane wzory otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Zapiszmy twierdzenie:

Twierdzenie:

Jeśli $f(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$ gdzie p i r są wielomianami takimi, że $\deg r \geq \deg p + 2$, oraz wielomian r nie posiada miejsc zerowych na osi rzeczywistej, to to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji f takich, że $\operatorname{Im} z_k > 0$.

Przykład. Obliczmy znaną całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Tą całkę akurat łatwo policzyć fundamentalnymi metodami:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \left(\arctan x \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

Ale sprawdźmy, że metoda przez residua daje ten sam wynik.

Funkcja $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ma dwa punkty osobliwe: i oraz $-i$. Punkt $-i$ leży w dolnej półpłaszczyźnie, więc nas nie interesuje. Mamy więc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1+z^2}, i \right) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \left((z-i) \frac{1}{(z+i)(z-i)} \right) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi \end{aligned}$$

Otrzymany wynik się zgadza. Nie wymagał jednak liczenia funkcji pierwotnej, co w przypadku skomplikowanych funkcji wymiernych jest dużym uproszczeniem.

Wykład 18: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych, część 2

Kontynuując rozpoczętą na poprzednim wykładzie listę szczególnych przypadków całek, które można policzyć metodą przez reszki:

Całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(kx) dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(kx) dx$, gdzie g jest funkcją wymierną

Jeżeli całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{\pm ikx} dx$ są zbieżne, można za ich pomocą zapisać całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(kx) dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(kx) dx$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(kx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(kx) dx &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx\end{aligned}$$

Jeśli $g(x)$ jest funkcją, która dla rzeczywistych argumentów x przyjmuje rzeczywiste wartości, możemy też zapisać

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cos(kx) dx &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \sin(kx) dx &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx\end{aligned}$$

Na poprzednim wykładzie mieliśmy wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\oint_{K_R} f(z) dz - \int_0^{\pi} f(Re^{it}) i Re^{it} dt \right)$$

gdzie kontur K_R jest brzegiem półkola o środku w 0 i promieniu R położonego w górnej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Zastanówmy się, czy możemy wykorzystać ten wzór dla funkcji $f(x) = g(x) e^{ikx}$, gdzie g jest funkcją wymierną.

Udowodnimy najpierw tzw. lemat Jordana:

Twierdzenie (Lemat Jordana):

Jeśli $k > 0$, a $g(z)$ jest funkcją taką, że istnieje funkcja $M(R)$ taka, że $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$

$$\forall |z| \geq R: |g(z)| \leq M(R)$$

to dla funkcji $f(z) = g(z) e^{ikz}$ zachodzi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R, \operatorname{Im} z > 0} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f(Re^{it}) i Re^{it} dt = 0$$

Dowód: Podstawiając podaną postać funkcji f do całki mamy

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it} dt = \\
 & = \int_0^\pi g(Re^{it})e^{kRie^{it}}iRe^{it} dt = \\
 & = \int_0^\pi g(Re^{it})e^{-kR \sin t + ikR \cos t}iRe^{it} dt \\
 & \left| \int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it} dt \right| = \\
 & = \left| \int_0^\pi g(Re^{it})e^{-kR \sin t + ikR \cos t}iRe^{it} dt \right| \leq \\
 & \leq \int_0^\pi |g(Re^{it})e^{-kR \sin t + ikR \cos t}iRe^{it}| dt = \\
 & = \int_0^\pi |g(Re^{it})| e^{-kR \sin t} R dt \leq \\
 & \leq \int_0^\pi M(R)e^{-kR \sin t} R dt = \\
 & = RM(R) \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt
 \end{aligned}$$

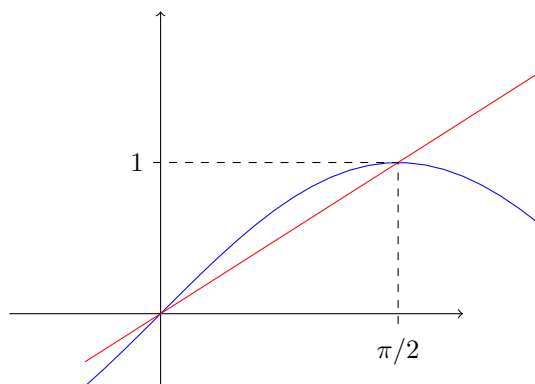
Rozważmy więc całkę $\int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt$. Po pierwsze, korzystając z tego, że $\sin t = \sin(\pi - t)$ mamy

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt = \\
 & = \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt + \int_{\pi/2}^\pi e^{-kR \sin t} dt = \\
 & = \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt + \int_{\pi/2}^0 e^{-kR \sin(\pi-s)}(-ds) = \\
 & = \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt + \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin s} ds = \\
 & = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt
 \end{aligned}$$

Na przedziale $t \in [0, \pi/2]$ funkcja $\sin t$ jest wklęsła, z czego wynika nierówność

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$$

jak widać też z wykresu:



Ponieważ ponadto założyliśmy, że $k > 0$ mamy zatem,

$$e^{-kR \sin t} \leq e^{-kR \frac{2t}{\pi}}$$

a więc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt &= \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin t} dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-kR \frac{2t}{\pi}} dt = \\ &= 2 \frac{-\pi}{2kR} e^{-kR \frac{2t}{\pi}} \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{kR} (1 - e^{-kR}) \end{aligned}$$

Podstawiając to do wcześniej uzyskanego wyniku otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it} dt \right| &\leq \\ &\leq RM(R) \int_0^\pi e^{-kR \sin t} dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{k} M(R) (1 - e^{-kR}) \rightarrow^{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

A zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it} dt \right| = 0$$

co było do udowodnienia.

Wracając do samej całki konturowej, otrzymujemy zatem, że jeśli założenia lematu Jordana są spełnione, to

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{K_R} g(z) e^{ikz} dz$$

Przypomnijmy: założenia mówią, że $k > 0$ i istnieje oszacowanie: dla $|z| > R$, $|g(z)| \leq M(R)$, gdzie $\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = 0$. Jeżeli g jest funkcją wymierną, $g(z) = \frac{p(z)}{r(z)}$, to drugie założenie jest spełnione gdy $\deg r \geq \deg p + 1$, czyli gdy mianownik rośnie z $|z|$ szybciej niż licznik.

Podobnie jak na poprzednim wykładzie, założymy, że funkcja wymierna $g(x)$ nie ma osobliwości na osi rzeczywistej, wszystkie jej punkty osobliwe leżą albo powyżej albo poniżej osi rzeczywistej. Wszystkie punkty leżące powyżej prostej rzeczywistej zostaną objęte konturem K_R dla dostatecznie dużego R , a zatem z twierdzenia o residuach mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{z_n: \operatorname{Im} z_n > 0} \operatorname{Res}(g(z)e^{ikz}, z_n) \quad \text{dla } k > 0$$

Podsumowując, mamy twierdzenie:

Twierdzenie:

Jeśli $f(z) = \frac{p(z)}{r(z)}e^{ikz}$ gdzie p i r są wielomianami takimi, że $\deg r \geq \deg p + 1$, wielomian r nie posiada miejsc zerowych na osi rzeczywistej, oraz $k > 0$ to to

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_n \operatorname{Res}(f, z_n)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji f takich, że $\operatorname{Im} z_n > 0$.

Podkreślmy, że założenie $k > 0$ jest ważne; bez niego nie mamy nierówności $e^{-kR \sin t} \leq e^{-kR \frac{2t}{\pi}}$ które jest konieczne do udowodnienia Lematu Jordana. Jak więc zatem policzyć całki postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx$$

jeśli $k \leq 0$? Po pierwsze, dla $k = 0$ jest to przypadek omówiony na poprzednim wykładzie; aby mieć zbieżność całek, potrzebujemy wtedy $\deg r \geq \deg p + 2$, ale wzór pozostaje ten sam. Jeśli natomiast $k < 0$ mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}e^{-ikx} dx}$$

Niech $\bar{g}(z)$ będzie funkcją wymierną taką, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\bar{g}(x) = \overline{g(x)}$; otrzymujemy tę funkcję przez sprzężenie zespolone wszystkich współczynników w liczniku i mianowniku, nie sprzęgamy jednak samej zmiennej z . Można tę funkcję zapisać również jako $\bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$. Mamy wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)e^{i(-k)x} dx$$

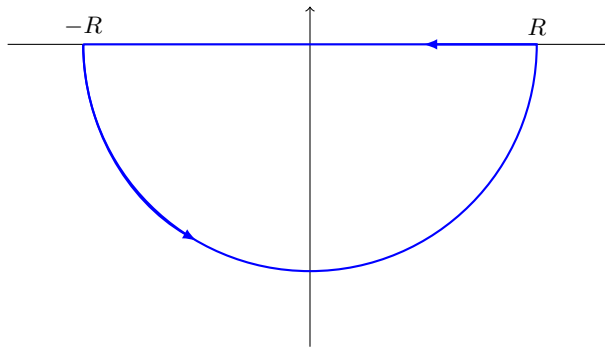
Całkę tą możemy już policzyć powyższą metodą, ponieważ jeśli $k < 0$, to $-k > 0$ a zatem mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(x)e^{i(-k)x} = 2\pi i \sum_{z_n: \text{Im } z_n > 0} \text{Res}(\bar{g}(z)e^{-ikz}, z_n)$$

a zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} = -2\pi i \sum_{z_n: \text{Im } z_n > 0} \overline{\text{Res}(\bar{g}(z)e^{-ikz}, z_n)} \quad \text{dla } k < 0$$

Inną metodą na policzenie takich całek jest wzięcie innego konturu; zamiast półkola w górnej półpłaszczyźnie należy wziąć półkole w dolnej półpłaszczyźnie:



Przeprowadzając analogiczne rachunki można się przekonać, że dla takiego konturu lemat Jordana wymaga właśnie $k < 0$. Ten kontur będzie obejmował osobliwości na dolnej półpłaszczyźnie. Trzeba też zwrócić uwagę, że jeśli przebiegamy taki kontur w kierunku dodatnim (przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) to po osi rzeczywistej poruszamy się od $+\infty$ do $-\infty$, co spowoduje dodatkowy znak minus w końcowym wzorze, który będzie miał postać:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx = -2\pi i \sum_{z_n: \text{Im } z_n < 0} \text{Res}(g(z)e^{ikz}, z_n) \quad \text{dla } k < 0$$

Ćwiczenia wykładowe 9: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych

Zacznijmy od przykładu ilustrującego metodę z dzisiejszego wykładu. Policzmy całkę

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^4 + 4} dx$$

Mamy najpierw

$$I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i2x}}{x^4 + 4} dx$$

Założenia Lematu Jordana są spełnione: mamy $k = 2 > 0$ oraz $\deg r = 4 > \deg p = 1$. Mamy więc

$$I = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{z_n: \operatorname{Im} z_n > 0} \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{2iz}}{z^4 + 4}, z_n \right) \right)$$

Znajdźmy więc punkty osobliwe funkcji podcałkowej.

$$\begin{aligned} z^4 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^4 &= -4 = 4e^{i\pi} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt[4]{4} e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{2\pi n}{4}}, \quad n \in \{0, 1, 2, 3\} \\ \Leftrightarrow z &\in \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\} \\ \Leftrightarrow z &\in \{1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i\} \end{aligned}$$

Z tych punktów dwa leżą w górnej półpłaszczyźnie: $1 + i$ oraz $-1 + i$. Mamy więc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^4 + 4} dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{ze^{i2z}}{z^4 + 4}, 1 + i \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{i2z}}{z^4 + 4}, -1 + i \right) \right)$$

Policzmy te residua. Niech $z_n \in \{z_0, z_1\} = \{1 + i, -1 + i\}$. Są to pierwiastki jednokrotne mianownika, więc będą to bieguny pierwszego rzędu całej funkcji. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{2iz}}{z^4 + 4}, z_n \right) &= \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - z_n)ze^{2iz}}{z^4 + 4} \stackrel{=0/0, \text{używamy tw. de l'Hospitala}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{\frac{d}{dz} \left((z - z_n)ze^{2iz} \right)}{4z^3} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{ze^{2iz} + (z - z_n)e^{i2z} + (z - z_n)2ize^{2iz}}{4z^3} = \\ &= \frac{z_n e^{2iz_n}}{4z_n^3} = \\ &= \frac{e^{2iz_n}}{4z_n^2} \end{aligned}$$

Mamy więc

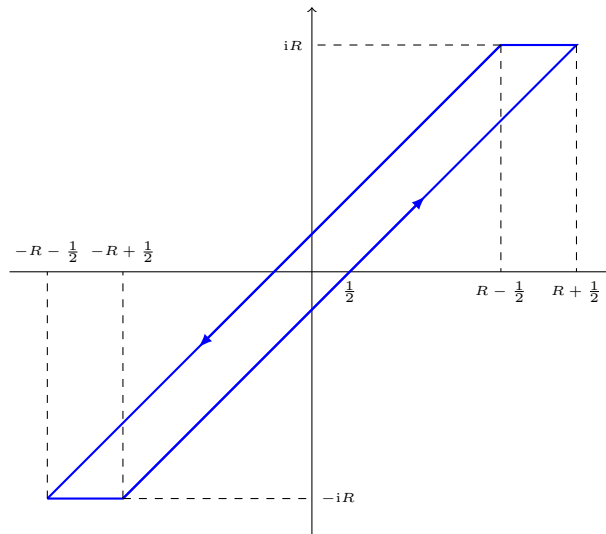
$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \left(\frac{e^{2iz_0}}{4z_0^2} + \frac{e^{2iz_1}}{4z_1^2} \right) \right) = \\ &= \operatorname{Im} \left(2\pi i \left(\frac{e^{2i(1+i)}}{4(1+i)^2} + \frac{e^{2i(-1+i)}}{4(-1+i)^2} \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Im} \left(2\pi i \left(\frac{e^{-2+2i}}{8i} + \frac{e^{-2-2i}}{-8i} \right) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{\pi e^{-2}}{4} (e^{2i} - e^{-2i}) \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{\pi}{4e^2} 2i \sin 2 \right) = \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{\pi \sin 2}{2e^2} i \right) = \\
&= \frac{\pi \sin 2}{2e^2}
\end{aligned}$$

jest to jeden z tych wyników, które uzyskać bez użycia metody przez residua byłoby bardzo trudno.

Drugie zadanie, które zrobimy dzisiaj nie będzie wykorzystywało jednego ze standardowych konturów, które omawiamy ostatnio na wykładzie:

Zadanie: Całkując funkcję $f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)}$ po konturze



Wyprowadzić wzór na całkę Gaussa $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$.

Nasz kontur całkowania składa się z czterech odcinków, sparametryzowanych kolejno wzorami:

- $K_1: z(t) = t + \frac{1}{2} + it, \quad t \in [-R, R]$
- $K_2: z(t) = R + t + iR, \quad t \in [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$
- $K_3: z(t) = t - \frac{1}{2} + it, \quad t \in [R, -R]$

- $K_4: z(t) = -R + t - iR, \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Zacznijmy od krótkich odcinków

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{K_1} f(z) dz = \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{i\pi(R+t+iR)^2}}{\sin(\pi(R+t+iR))} dt = \\
&= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{i\pi(2iR^2+2t(R+iR)+t^2)}}{\sin(\pi(R+t)) \cos(\pi iR) + \cos(\pi(R+t)) \sin(\pi iR)} dt = \\
&= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi R^2+i2\pi t(R+iR)+i\pi t^2}}{\sin(\pi(R+t)) \cos(\pi iR) + \cos(\pi(R+t)) \sin(\pi iR)} dt = \\
&= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi R^2+i2\pi t(R+iR)+i\pi t^2}}{\sin(\pi(R+t)) \cosh(\pi R) + i \cos(\pi(R+t)) \sinh(\pi R)} dt
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystane zostały wzory $\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i \sinh x$. Możemy więc oszacować moduł I_2 :

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{e^{-2\pi R^2+i2\pi t(R+iR)+i\pi t^2}}{\sin(\pi(R+t)) \cosh(\pi R) + i \cos(\pi(R+t)) \sinh(\pi R)} dt \right| = \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi R^2-\pi t R}}{\sqrt{\sin^2(\pi(R+t)) \cosh^2(\pi R) + \cos^2(\pi(R+t)) \sinh^2(\pi R)}} dt = \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi R^2-\pi t R}}{\sqrt{\sin^2(\pi(R+t)) + \sinh^2(\pi R)}} dt \leq \\
&\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2\pi R^2+\frac{\pi}{2} R}}{\sinh(\pi R)} dt = \\
&= \frac{e^{-2\pi R^2+\frac{\pi}{2} R}}{\sinh(\pi R)} = \frac{e^{-2\pi R^2+\frac{\pi}{2} R}}{\frac{1}{2}(e^{\pi R} - e^{-\pi R})} = 2 \frac{e^{-2\pi R^2-\frac{\pi}{2} R}}{1 - e^{-2\pi R}}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano tożsamość

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y &= \\
&= \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y = \\
&= \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 y) \sinh^2 y = \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y
\end{aligned}$$

Mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} 2 \frac{e^{-2\pi R^2-\frac{\pi}{2} R}}{1 - e^{-2\pi R}} = 0$$

co dowodzi, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0$$

Analogiczny dowód można przeprowadzić dla całki po odcinku K_4 .

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = 0$$

Pozostają długie odcinki

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{K_1} f(z) dz = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(t+\frac{1}{2}+it)^2}}{\sin(\pi(t+\frac{1}{2}+it))} (1+i) dt = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(2it^2+t+it+\frac{1}{4})}}{\sin(\pi(t+it)+\frac{\pi}{2})} (1+i) dt = \\ &= \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{i\pi(t+it)}}{\cos(\pi(t+it))} (1+i) dt = \\ &= e^{\frac{i\pi}{4}} (1+i) \int_{-R}^R \frac{e^{-\pi t^2} e^{i\pi(t+it)}}{\cos(\pi(t+it))} dt = \\ &= i\sqrt{2} \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} e^{i\pi(t+it)}}{\cos(\pi(t+it))} dt \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{K_3} f(z) dz = \\ &= \int_R^{-R} \frac{e^{i\pi(t-\frac{1}{2}+it)^2}}{\sin(\pi(t-\frac{1}{2}+it))} (1+i) dt = \\ &= - \int_{-R}^R \frac{e^{i\pi(2it^2-t-it+\frac{1}{4})}}{\sin(\pi(t+it)-\frac{\pi}{2})} (1+i) dt = \\ &= - \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi(t+it)}}{-\cos(\pi(t+it))} (1+i) dt = \\ &= e^{\frac{i\pi}{4}} (1+i) \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} e^{-i\pi(t+it)}}{\cos(\pi(t+it))} dt = \\ &= i\sqrt{2} \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} e^{-i\pi(t+it)}}{\cos(\pi(t+it))} dt \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 &= i\sqrt{2} \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} (e^{i\pi(t+it)} + e^{-i\pi(t+it)})}{\cos(\pi(t+it))} dt = \\ &= i\sqrt{2} \int_{-R}^R \frac{e^{-2\pi t^2} 2 \cos(\pi(t+it))}{\cos(\pi(t+it))} dt = \end{aligned}$$

$$= i2\sqrt{2} \int_{-R}^R e^{-2\pi t^2} dt$$

czyli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_3) = i2\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt$$

Mamy więc łącznie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_K f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) = i2\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt$$

Z drugiej strony, całkę tą możemy policzyć przez residua. Funkcja $f(z) = \frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)}$ ma punkty osobliwe tam, gdzie $\sin(\pi z) = 0$, czyli dla $z \in \mathbb{Z}$. Z tych punktów jednak tylko jeden leży wewnątrz konturu: $z = 0$. Mamy więc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_K f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)}, 0 \right)$$

jest to biegun 1-go rzędu (bo $z = 0$ jest miejscem zerowym pierwszego stopnia funkcji $\sin(\pi z)$), więc

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)}, 0 \right) &= \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z e^{i\pi z^2}}{\sin(\pi z)} \stackrel{=0/0, \text{ korzystamy z tw. de l'Hospitala}}{=} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{i\pi z^2} + 2iz^2 e^{i\pi z^2}}{\pi \cos(\pi z)} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

czyli

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_K f(z) dz = 2i$$

Porównując oba wzory na całkę konturową otrzymujemy

$$i2\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt = 2i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aby otrzymać teraz wzór na całkę Gaussa, musimy dokonać zamiany zmiennych $t = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} x$, otrzymując

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

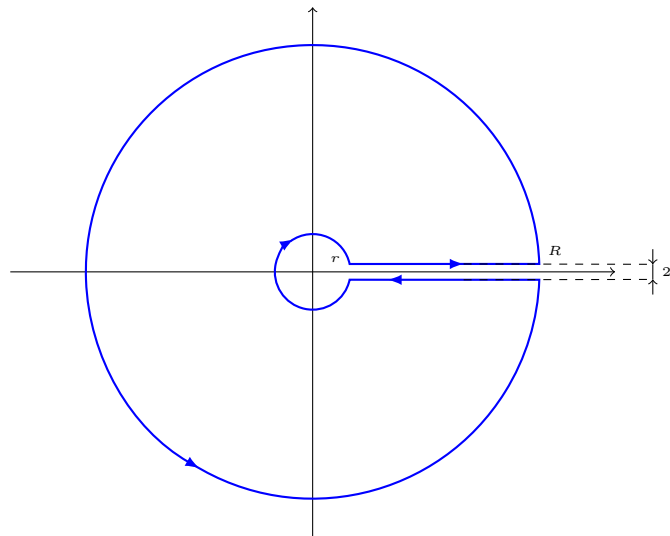
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Oczywiście istnieje prostsza metoda na policzenie tej całki (przez zamianę zmiennych z kartezjańskich na biegunowe na płaszczyźnie \mathbb{R}^2) ale powyższe zadanie miało zaprezentować, jak należy podchodzić do zadań typu "całkując daną funkcję po danym konturze, obliczyć daną całkę".

Wykład 19: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych, część 3

Całki $\int_0^{\infty} g(x)x^{\alpha}dx$, gdzie $\alpha \notin \mathbb{Z}$ oraz g jest funkcją wymierną

Kolejny użyteczny kontur przydatny do całkowania przez residua jest nazywany *dziurką od klucza* i ma postać



Ten kontur używany jest do całkowania funkcji, które mają cięcie na dodatniej półosi rzeczywistej, ale poza tym mają tylko skończoną ilość punktów osobliwych (konkretne przykłady zostaną podane później). Jest on charakteryzowany przez trzy parametry: Promień zewnętrznego okręgu R , promień wewnętrznego okręgu r , oraz odstęp pomiędzy dwoma odcinkami 2ϵ . Zawsze jednak będziemy rozważać jedynie granicę

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} f(z) dz$$

W granicy $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ stają się pełnymi okręgami, które możemy sparametryzować standardowo ($z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$) oraz $z(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; zwróćmy uwagę, że wewnętrzny okrąg jest przebiegany w kierunku zgodnym z ruchem

wskazówek zegara, więc trzeba będzie zmienić znak całki). Proste odcinki w granicy stają się dodatnią półprostą rzeczywistą przebieganą albo od 0 do ∞ , albo przeciwnie. Możemy więc zapisać

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty f(x + i\epsilon) dx = \\ &= \int_0^\infty \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + i\epsilon) \right) dx \\ I_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \\ I_3 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\infty^0 f(x - i\epsilon) dx = \\ &= - \int_0^\infty \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - i\epsilon) \right) dx \\ I_4 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{2\pi}^0 f(re^{it}) ire^{it} dt = \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt \end{aligned}$$

W całkach I_1 oraz I_3 pozostawiłem jawnie $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$, ponieważ, jak zostało powiedziane kontur ten używany jest do funkcji mających cięcie na dodatniej półosi rzeczywistej, więc nie możemy po prostu zapisać $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + i\epsilon) = f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - i\epsilon)$; granice z obu stron będą różne, więc musimy pamiętać z której strony zbliżamy się do osi rzeczywistej, aby policzyć wartość tych całek.

Jedną z prostszych funkcji które spełniają warunek posiadania cięcia na półosi rzeczywistej, a poza tym mają skończoną liczbę osobliwości są funkcje postaci

$$f(z) = g(z)z^\alpha$$

gdzie $\alpha \notin \mathbb{Z}$, a $g(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ jest funkcją wymierną. Załóżmy też, że $g(z)$ nie posiada osobliwości na dodatniej półosi rzeczywistej. Dla takich funkcji mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + i\epsilon) &= g(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x + i\epsilon)^\alpha = \\ &= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 0} (xe^{i\varphi})^\alpha = \\ &= g(x)x^\alpha \lim_{\varphi \rightarrow 0} e^{i\varphi\alpha} = \\ &= g(x)x^\alpha \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - i\epsilon) &= g(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon)^\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} (xe^{i\varphi})^\alpha = \\
&= g(x)x^\alpha \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} e^{i\varphi\alpha} = \\
&= g(x)x^\alpha e^{i2\pi\alpha}
\end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx \\
I_3 &= -e^{i2\pi\alpha} \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx
\end{aligned}$$

Musimy jeszcze upewnić się, że całka $\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx$ jest zbieżna. Dla $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ niech $n = \deg p = n$ oraz $\deg q = m$, czyli $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$ oraz $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m$, gdzie $p_n \neq 0$ oraz $q_m \neq 0$. Załóżmy, też że $p(0) = p_0 \neq 0$ oraz $q(0) = q_0 \neq 0$; gdyby tak nie było, to z p i q można by wyciągnąć czynniki x i wcielić go to czynnika x^α , więc nie tracimy na ogólności czyniąc to założenie.

W takim przypadku, dla małych x mamy

$$g(x)x^\alpha = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n}{q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m}x^\alpha = \frac{p_0}{q_0}x^\alpha(1 + \mathcal{O}(x))$$

czyli całka $\int g(x)x^\alpha dx$ jest zbieżna w 0 wtedy i tylko wtedy gdy całka $\int x^\alpha dx$ jest zbieżna w 0, co ma miejsce dla

$$\alpha > -1$$

Z kolei dla dużych x mamy

$$g(x)x^\alpha = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n}{q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m}x^\alpha = \frac{p_n}{q_m}x^{\alpha+n-m}(1 + \mathcal{O}(x^{-1}))$$

czyli całka $\int g(x)x^\alpha dx$ jest zbieżna w ∞ wtedy i tylko wtedy gdy całka $\int x^{\alpha+n-m} dx$ jest zbieżna w 0, co ma miejsce dla

$$\alpha + n - m < -1$$

Oba powyższe warunki muszą być spełnione, aby całka $\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx$ była zbieżna.

Przyjrzyjmy się teraz całkom I_2 i I_4 . Podobnie jak wyżej, dla dużych $|z|$ mamy

$$f(z) = \frac{p_0 + p_1z + \dots + p_nz^n}{q_0 + q_1z + \dots + q_mz^m}z^\alpha = \frac{p_n}{q_m}z^{\alpha+n-m}(1 + \mathcal{O}(z^{-1}))$$

czyli dla dostatecznie dużych $|z|$ istnieje stała C taka, że:

$$|f(z)| \leq C|z|^{\alpha+n-m}$$

a zatem dla dostatecznie dużych R mamy

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{2\pi} f(Re^{it})iRe^{it} dt \right| \leq \\
& \leq \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})iRe^{it}| dt = \\
& = R \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt \leq \\
& \leq R \int_0^{2\pi} CR^{\alpha+n-m} dt = \\
& \leq 2\pi CR^{1+\alpha+n-m}
\end{aligned}$$

Ponieważ jednak, by mieć zbieżność całki $\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx$ musieliśmy założyć, że $\alpha + n - m < -1$ mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1+\alpha+n-m} = 0$$

a zatem

$$I_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(Re^{it})iRe^{it} dt = 0$$

Podobnie jest z I_4 ; dla dostatecznie małych $|z|$ mamy

$$|f(z)| = \left| \frac{p_0}{q_0} z^\alpha (1 + \mathcal{O}(z)) \right| \leq C|z|^\alpha$$

a zatem

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it})ire^{it} dt \right| \leq \\
& \leq r \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq \\
& \leq r \int_0^{2\pi} Cr^\alpha dt = \\
& \leq 2\pi Cr^{1+\alpha}
\end{aligned}$$

Ponieważ $\alpha > -1$ to

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} = 0$$

a zatem

$$I_4 = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it})ire^{it} dt = 0$$

Podsumowując, mamy

$$\begin{aligned}
& \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \oint_{K(R,r,\epsilon)} f(z) dz = \\
& = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx + 0 - e^{i2\pi\alpha} \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx + 0 = \\
&= (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx
\end{aligned}$$

Z drugiej strony, całkę tą możemy policzyć przez residua. Jeżeli wezmę dostatecznie małe r i ϵ oraz dostatecznie duże R , kontur obejmie wszystkie punkty osobliwe funkcji $g(z)$ (przypominam, założyliśmy, że funkcja g ma skończenie wiele punktów osobliwych, i żaden z nich nie leży na dodatniej półosi rzeczywistej). Mamy zatem

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k)$$

Porównując oba wzory otrzymujemy

$$(1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k)$$

czyli

$$\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k)$$

Zauważając jeszcze, że możemy zapisać

$$1 - e^{i2\pi\alpha} = -e^{i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) = -2ie^{i\pi\alpha} \sin(\pi\alpha)$$

powyższy wynik można zapisać jako

$$\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx = -e^{-i\pi\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k)$$

Jak widać potrzebujemy $\alpha \notin \mathbb{Z}$ aby $\sin(\pi\alpha) \neq 0$, i nie było dzielenia przez 0.

Zapiszmy twierdzenie:

Twierdzenie:

Niech p i q będą wielomianami takimi, że $p(0) \neq 0 \neq q(0)$, wielomian q nie posiada miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej. Niech $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $-1 < \alpha < -1 - \deg p + \deg q$. Niech $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}z^\alpha$, z cięciem na dodatniej półosi rzeczywistej. Wtedy

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha dx = -e^{-i\pi\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji $\frac{p(z)}{q(z)}$.

Przykład zostanie policzony na ćwiczeniach wykładowych.

Całki $\int_0^\infty g(x)dx$, gdzie g jest funkcją wymierną

Można jeszcze zauważyć, że dla funkcji wymiernej $g(z)$, przy założeniu, że całka $\int_0^\infty g(x)dx$ jest zbieżna, można ją zapisać jako

$$\int_0^\infty g(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx$$

A całkę z prawej strony można już liczyć ze wzoru przedstawionego powyżej. Mamy więc

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x)dx &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-e^{-i\pi\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k) \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\alpha} \sum_{z_k} \text{Res}(g(z)z^\alpha, z_k) \right) \end{aligned}$$

Pozwala to policzyć całki $\int_0^\infty g(x)dx$, mimo że twierdzenie powyżej wymaga obecności czynnika x^α z $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

Jest też inny sposób na policzenie takich całek, bezpośrednio z metody całkowania przez residua. Polega on na wycalkowaniu funkcji

$$f(z) = g(z) \ln z$$

po dziurce od klucza.

Jak poprzednio, mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} f(z)dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty f(x+i\epsilon)dx = \\ &= \int_0^\infty \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x+i\epsilon) \right) dx \\ I_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(Re^{it})iRe^{it} dt \\ I_3 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\infty^0 f(x-i\epsilon)dx = \\ &= - \int_0^\infty \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x-i\epsilon) \right) dx \\ I_4 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{2\pi}^0 f(re^{it})ire^{it} dt = \end{aligned}$$

$$= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) i r e^{it} dt$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x + i\epsilon) &= g(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x + i\epsilon) = \\ &= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 0} \ln(xe^{i\varphi}) = \\ &= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 0} (\ln x + i\varphi) = \\ &= g(x) \ln x \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(x - i\epsilon) &= g(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(x - i\epsilon) = \\ &= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} \ln(xe^{i\varphi}) = \\ &= g(x) \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi} (\ln x + i\varphi) = \\ &= g(x)(\ln x + 2\pi i) \end{aligned}$$

A zatem

$$I_1 + I_3 = \int_0^\infty g(x) \ln x dx - \int_0^\infty g(x)(\ln x + 2\pi i) dx = -2\pi i \int_0^\infty g(x) dx$$

Przy założeniu, że $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gdzie $q(0) \neq 0$, $n = \deg p$, $m = \deg q$, oraz $q(x)$ nie ma pierwiastków na dodatniej półosi rzeczywistej, całka $\int_0^\infty g(x) dx$ jest zbieżna gdy $m > n + 1$. Mamy w tym przypadku

$$\begin{aligned} |f(Re^{it})| &= \\ &= |g(Re^{it})| |\ln R + it| \leq \\ &\leq |g(Re^{it})| |\ln R + 2\pi i| \leq \text{dla dostatecznie dużych } R \\ &\leq CR^{n-m} \cdot 2 \ln R = 2CR^{n-m} \ln R & |f(re^{it})| = \\ &= |g(re^{it})| |\ln r + it| \leq \\ &\leq |g(re^{it})| |\ln r + 2\pi i| \leq \text{dla dostatecznie małych } r \\ &\leq C \cdot 2 |\ln r| = 2C |\ln r| \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) i R e^{it} dt \right| &\leq \text{dla dostatecznie dużych } R \\ &\leq 4\pi C R^{1+n-m} \ln R \\ \left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) i r e^{it} dt \right| &\leq \text{dla dostatecznie małych } r \\ &\leq 4\pi C r |\ln r| \end{aligned}$$

Skoro $m > n + 1$, to $1 + n - m < 0$ więc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{1+n-m} \ln R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln R}{R^{m-n-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{-1}}{(m-n-1)R^{m-n-2}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^{1+n-m}}{m-n-1} = 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \ln r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln r}{r^{-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^{-1}}{-r^{-2}} = \lim_{r \rightarrow 0} (-r) = 0$$

Z czego wynika, że

$$I_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(Re^{it}) iRe^{it} dt = 0$$

$$I_4 = - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) ire^{it} dt = 0$$

Mamy więc w sumie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln z dz = -2\pi i \int_0^\infty g(x) dx$$

Z drugiej strony, licząc tą całkę przez residua mamy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln z dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(g(z) \ln z, z_k)$$

gdzie sumujemy po wszystkich miejscach zerowych funkcji g (bo założyliśmy, że żadne z nich nie leży na dodatniej półosi rzeczywistej). Porównując te wzory otrzymujemy

$$\int_0^\infty g(x) dx = - \sum_{z_k} \text{Res}(g(z) \ln z, z_k)$$

Podsumujemy to w formie twierdzenia:

Twierdzenie:

Niech p i q będą wielomianami takimi, że wielomian q nie posiada miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej (łącznie z zerem), oraz $\deg q > 1 + \deg p$. Niech $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \ln z$, z cięciem na dodatniej półosi rzeczywistej. Wtedy

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} dx = - \sum_{z_k} \text{Res}(f, z_k)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji $\frac{p(z)}{q(z)}$.

Dobrze jest w tym miejscu podkreślić, że choć ostatecznie otrzymujemy wzór na całkę z funkcji wymiernej $g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, to po konturze zespolonym całkujemy funkcję $g(z) \ln z$, i to tej funkcji residua musimy liczyć. Liczenie residuów samej funkcji $g(z)$ jest częstym błędem wśród studentów.

Ćwiczenia wykładowe 10: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych, część 2

Zacznijmy od przykładów na wzory przedstawione na ostatnim wykładzie. Policzmy najpierw całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1} dx$$

Jest to całka postaci

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^{\alpha} dx$$

gdzie $p(x) = 1$, $q(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$, $\alpha = \frac{1}{2}$. Na wykładzie pojawił się twierdzenie na liczenie takich całek tej postaci, ale żeby z niego skorzystać, musimy sprawdzić założenia. Znajdźmy najpierw miejsca zerowe q :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= 0 && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} &= 0 && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 &= -\frac{3}{4} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z + \frac{1}{2} &= \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Niech $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

- $p(0) \neq 0 \neq q(0)$; **spełnione**: mamy $p(0) = q(0) = 1 \neq 0$
- q nie ma miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej; **spełnione**: miejsca zerowe q leżą poza prostą rzeczywistą
- $\alpha \notin \mathbb{Z}$; **spełnione**: mamy $\alpha = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $-1 < \alpha < -1 - \deg p + \deg q$; **spełnione**: mamy $\deg p = 0$, $\deg q = 2$, $-1 < \frac{1}{2} < 1 = -1 - 0 + 2$

Założenia twierdzenia są spełnione, możemy więc skorzystać ze wzoru

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} x^{\alpha} dx = -e^{-i\pi\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \sum_{z_k} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} z^{\alpha}, z_k \right)$$

Mamy $z^2 + z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, więc

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)(z - z_2)}, z_1 \right) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)(z - z_2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z - z_2} = \frac{z_1^{\frac{1}{2}}}{z_1 - z_2} = \\
&= \frac{(e^{i\frac{2\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}}{i\sqrt{3}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{i\sqrt{3}} = \\
&= \frac{1}{i\sqrt{3}} \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} \left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)(z - z_2)}, z_2 \right) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) \frac{z^{\frac{1}{2}}}{(z - z_1)(z - z_2)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z - z_1} = \frac{z_2^{\frac{1}{2}}}{z_2 - z_1} = \\
&= \frac{(e^{i\frac{4\pi}{3}})^{\frac{1}{2}}}{-i\sqrt{3}} = \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{-i\sqrt{3}} = \\
&= \frac{1}{-i\sqrt{3}} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Podkreślę tu, że należy być ostrożnym jak liczymy potęgi z_k^α . twierdzenie wymaga, aby cięcie z^α było na dodatniej półosi rzeczywistej, co oznacza, że musimy zapisać bieguny w postaci $z_k = re^{i\varphi}$, gdzie $\varphi \in (0, 2\pi)$, aby skorzystać ze wzoru $(re^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi}$. Choć więc moglibyśmy napisać $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, to $z_2^{\frac{1}{2}} \neq e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Wracając do obliczeń. Mamy

$$\sum_{z_k} \operatorname{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} z^\alpha, z_k \right) = \frac{\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}} + \frac{-\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}} = \frac{-i}{\sqrt{3}}$$

więc

$$\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)} x^\alpha dx = -e^{-i\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} \frac{-i}{\sqrt{3}} = -(-i) \frac{\pi}{1} \frac{-i}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Jako drugi przykład, policzmy

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

Można tą całkę policzyć bez użycia liczb zespolonych, wykonując rozkład na ułamki proste:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+3} \\
\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \ln(x+1) - \ln(x+2) + \frac{1}{2} \ln(x+3) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} \Big|_{x=0}^\infty = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4} - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \\
&= \frac{1}{2} \ln 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Sprawdźmy jednak również dwie metody przedstawione na wykładzie.
Pierwsza polegała na policzeniu

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$$

mamy $p(x) = 1$, $q(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$. Sprawdzając założenia:

- $p(0) \neq 0 \neq q(0)$; **spełnione:** mamy $p(0) = 1$, $q(0) = 6$
- q nie ma miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej; **spełnione:** miejsca zerowe q to $z_1 = -1$, $z_2 = -2$ i $z_3 = -3$
- $\alpha \notin \mathbb{Z}$; **spełnione:** ostatecznie będziemy liczyć granicę $\alpha \rightarrow 0$, ale przed wykonaniem tej granicy $\alpha \notin \mathbb{Z}$
- $-1 < \alpha < -1 - \deg p + \deg q$; **spełnione:** mamy $\deg p = 0$, $\deg q = 3$, co daje warunek $-1 < \alpha < 2$; jeżeli $\alpha \rightarrow 0$, to α będzie spełniało ten warunek

Założenia są spełnione, możemy więc skorzystać ze wzoru. Liczymy więc reszta:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -1 \right) &= \\
&= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^\alpha}{(z+2)(z+3)} = \\
&= \frac{(-1)^\alpha}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} (e^{i\pi})^\alpha = \frac{1}{2} e^{i\alpha\pi} \\
\operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -2 \right) &= \\
&= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{z^\alpha}{(z+1)(z+3)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-2)^\alpha}{-1 \cdot 1} = -(2e^{i\pi})^\alpha = -2^\alpha e^{i\alpha\pi} \\
\operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -3 \right) &= \\
&= \lim_{z \rightarrow -3} (z+3) \frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{z^\alpha}{(z+1)(z+2)} = \\
&= \frac{(-3)^\alpha}{-2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2} (3e^{i\pi})^\alpha = \frac{1}{2} 3^\alpha e^{i\alpha\pi}
\end{aligned}$$

Mamy więc

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = -\frac{e^{-i\alpha\pi}\pi}{\sin \alpha\pi} \left(\frac{e^{i\alpha\pi}}{2} - 2^\alpha e^{i\alpha\pi} + \frac{3^\alpha e^{i\alpha\pi}}{2} \right) = \frac{\pi(-1+2^\alpha-3^\alpha)}{2 \sin \pi\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi(-1+2 \cdot 2^\alpha - 3^\alpha)}{2 \sin \pi\alpha} \stackrel{H}{=} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\pi(2 \ln 2 \cdot 2^\alpha - \ln 3 \cdot 3^\alpha)}{2\pi \cos \pi\alpha} = \\
&= \frac{\pi(2 \ln 2 - \ln 3)}{2\pi} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano równość $\frac{d}{d\alpha} x^\alpha = \frac{d}{d\alpha} e^{\alpha \ln x} = \ln x e^{\alpha \ln x} = \ln x x^\alpha$. Jak widzimy, wynik jest tak sam jak używając oryginalnej metody.

Ostatnia metoda polega na wykorzystaniu całki konturowej z funkcji $\frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)}$ i odpowiedniego twierdzenia. Sprawdźmy założenia twierdzenia

- q nie ma miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej; **spełnione:** miejsca zerowe q to $z_1 = -1$, $z_2 = -2$ i $z_3 = -3$
- $\deg q > 1 + \deg p$; **spełnione:** mamy $\deg p = 0$, $\deg q = 3$, $3 > 1 + 0$

Mamy wzór

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx = -\sum_{z_k} \operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)}, z_k \right)$$

Liczmy więc residua:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -1 \right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\ln z}{(z+2)(z+3)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln(-1)}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \ln(e^{i\pi}) = \frac{1}{2} i\pi \\
\operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -2 \right) &= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\ln z}{(z+1)(z+3)} = \\
&= \frac{\ln(-2)}{-1 \cdot 1} = -\ln(2e^{i\pi}) = -(\ln 2 + i\pi) \\
\operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)}, -3 \right) &= \lim_{z \rightarrow -3} (z+3) \frac{\ln z}{(z+1)(z+2)(z+3)} = \\
&= \lim_{z \rightarrow -3} \frac{\ln z}{(z+1)(z+2)} = \\
&= \frac{\ln(-3)}{-2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2} \ln(3e^{i\pi}) = \frac{1}{2} (\ln 3 + i\pi)
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx &= - \left(\frac{1}{2} i\pi - (\ln 2 + i\pi) + \frac{1}{2} (\ln 3 + i\pi) \right) = \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Wykład 20: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych, część 4

Całki $\int_0^\infty g(x) \ln^n x dx$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz g jest funkcją wymierną

Jak było pokazane na poprzednich wykładzie, całkowanie funkcji $g(z)z^\alpha$ po dziurce od klucza pozwala obliczyć całkę $\int_0^\infty g(x)x^\alpha dx$. Jednak całkowanie funkcji $g(z)\ln z$ po tym konturze pozwala jedynie policzyć całkę $\int_0^\infty g(x)dx$. Jak więc policzyć całkę $\int_0^\infty g(x)\ln x dx$? Przedstawię dwa sposoby.

Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu równości

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha = x^\alpha \ln x$$

Mamy więc

$$\ln x = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} x^\alpha \right) \Big|_{\alpha=0}$$

co, przy założeniu że obie całki występujące we wzorze poniżej są zbieżne, daje nam

$$\int_0^\infty g(x) \ln x dx = \left(\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty g(x)x^\alpha dx \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Całkę po prawej stronie możemy już policzyć wykorzystując metodę przedstawioną na poprzednim wykładzie.

Drugi sposób polega na całkowaniu po dziurce od klucza funkcji $g(z) \ln^2 z$. Zauważmy, że dla $x > 0$ mamy

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln^2(x - i\epsilon) = (\ln x + 2\pi i)^2 = \ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2$$

Mamy więc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln^2 z dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty g(x) \ln^2 x dx \\ I_2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} g(Re^{it}) (\ln R + it)^2 i Re^{it} dt \\ I_3 &= - \int_0^\infty g(x) (\ln^2 x + 4\pi i \ln x - 4\pi^2) dx \\ I_4 &= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) (\ln r + it)^2 i re^{it} dt \end{aligned}$$

Jeżeli więc całki I_2 i I_4 znikają w granicy $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ (na co warunki są takie same jak w przypadku całki $\oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln z dz$; dowód tego faktu już pominię, ponieważ jest analogiczny do tamtego przypadku), otrzymujemy

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln^2 z dz = -4\pi i \int_0^\infty g(x) \ln x dx + 4\pi^2 \int_0^\infty g(x) dx$$

lewą stronę otrzymujemy z twierdzenia o residuach

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln^2 z dz = 2\pi i \sum_{z_k} \text{Res}(g(z) \ln^2 z, z_k)$$

Porównując powyższe równości, otrzymujemy

$$\sum_{z_k} \text{Res}(g(z) \ln^2 z, z_k) = -2 \int_0^\infty g(x) \ln x dx - 2\pi i \int_0^\infty g(x) dx$$

Jeśli więc funkcja g jest funkcją wymierną o rzeczywistych współczynnikach, mamy

$$\int_0^\infty g(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \text{Re} \left(\sum_{z_k} \text{Res}(g(z) \ln^2 z, z_k) \right)$$

Zapisując to w formie twierdzenia:

Twierdzenie:

Niech p i q będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych takimi, że wielomian q nie posiada miejsc zerowych na dodatniej półosi rzeczywistej (łącznie z zerem), oraz $\deg q > 1 + \deg p$. Niech $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \ln^2 z$, z cięciem na dodatniej półosi rzeczywistej. Wtedy

$$\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \ln x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{z_k} \operatorname{Res}(f, z_k) \right)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji $\frac{p(z)}{q(z)}$.

Mamy też przy okazji nowy wzór na $\int_0^{\infty} g(x) dx$:

$$\int_0^{\infty} g(x) dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\sum_{z_k} \operatorname{Res}(g(z) \ln^2 z, z_k) \right)$$

Nawet jeśli $g(x)$ jest funkcją wymierną o współczynnikach zespolonych (np. $g(x) = \frac{1}{(x+i)^2}$), wciąż mamy

$$\int_0^{\infty} g(x) \ln x dx = -\frac{1}{2} \sum_{z_k} \operatorname{Res}(g(z) \ln^2 z, z_k) - i \int_0^{\infty} g(x) dx$$

W tym przypadku musimy jednak najpierw policzyć $\int_0^{\infty} g(x) dx$ używając wcześniej przedstawionych metod.

Zauważmy, że powyższe metody można uogólnić na licznik całek $\int_0^{\infty} g(x) \ln^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$. Aby uogólnić pierwszą metodę, zauważmy, że

$$\ln x = \left(\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x^\alpha \right) \Big|_{\alpha=0}$$

A zatem

$$\int_0^{\infty} g(x) \ln^n x dx = \left(\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^{\infty} g(x) x^\alpha dx \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Druga metoda wykorzystuje całkę konturową po dziurce od klucza z funkcji $g(z) \ln^{n+1} z$. Ponieważ mamy, dla $x > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln^{n+1}(x - i\epsilon) &= (\ln x + 2\pi i)^{n+1} = \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} (2\pi i)^{n+1-m} \ln^m x = \\ &= \ln^{n+1} x + 2\pi(n+1)i(\ln x)^n + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} (2\pi i)^{n+1-m} \ln^m x \end{aligned}$$

Z czego (przy identycznych założeniach odnośnie funkcji g jak poprzednio), że

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(R,r,\epsilon)} g(z) \ln^{n+1} z dz = \\ & = \int_0^\infty g(x) \ln^{n+1} x dx - \int_0^\infty g(x) (\ln x + 2\pi i)^{n+1} dx = \\ & = -2\pi(n+1)i \int_0^\infty g(x) (\ln x)^n dx - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} (2\pi i)^{n+1-m} \int_0^\infty g(x) \ln^m x dx \end{aligned}$$

Licząc tą całkę konturową z twierdzenia o residuach otrzymujemy

$$\begin{aligned} & -2\pi(n+1)i \int_0^\infty g(x) (\ln x)^n dx - \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} (2\pi i)^{n+1-m} \int_0^\infty g(x) \ln^m x dx = \\ & = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res}(g(z) \ln^{n+1} z, z_k) \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x) (\ln x)^n dx & = -\frac{1}{n+1} \sum_{z_k} \operatorname{Res}(g(z) \ln^{n+1} z, z_k) + \\ & - \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n+1}{m} (2\pi i)^{n-m} \int_0^\infty g(x) \ln^m x dx \end{aligned}$$

Ta metoda opiera się na rekurencji; aby policzyć całkę $\int_0^\infty g(x) (\ln x)^n dx$ musimy znać najpierw całki $\int_0^\infty g(x) (\ln x)^m dx$ dla $m \leq n-1$.

Całki $\int_a^b g(x) (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx$ **gdzie** $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}$, $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$

To będzie już ostatnia klasa funkcji, których całki liczy się za pomocą standardowych konturów zespolonych, i które omówimy na wykładzie. Rozważmy całkę postaci

$$I = \int_a^b g(x) (x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$ oraz g jest funkcją wymierną. Aby całka była zbieżna, musimy założyć, że funkcja g nie ma ona osobliwości wewnątrz odcinka (a, b) . Bez starty ogólności możemy też założyć, że na końcach odcinka (w punktach a i b) funkcja g nie ma biegunów ani miejsc zerowych; gdyby jakieś miała, możemy je usunąć z funkcji g przez wyciągnięcie z niej odpowiednich czynników $(x-a)^n$ lub $(b-x)^n$, które te czynniki możemy następnie wcielić do $(x-a)^\alpha$ lub $(b-x)^\beta$. Zaczniemy od spostrzeżenia, że można ją zapisać jako

$$I = \int_a^b g(x) (b-x)^{\alpha+\beta} \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^\alpha dx =$$

$$= \int_a^b g(x)(b-x)^n \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^\alpha dx$$

gdzie $n = \alpha + \beta$. Będziemy oznaczać $g(x)(b-x)^n = h(x)$.

Podam dwie metody na liczenie takich całek. W pierwszej metodzie dokonujemy podstawienia

$$\xi = \frac{x-a}{b-x}$$

czyli, co łatwo sprawdzić,

$$x = \frac{\xi b + a}{\xi + 1}$$

Jeżeli $x \in (a, b)$ to przy tym przekształceniu $\xi \in (0, \infty)$. Mamy też

$$dx = \frac{b-a}{(\xi+1)^2} d\xi$$

Całka I przy tym przekształceniu przyjmuje więc postać

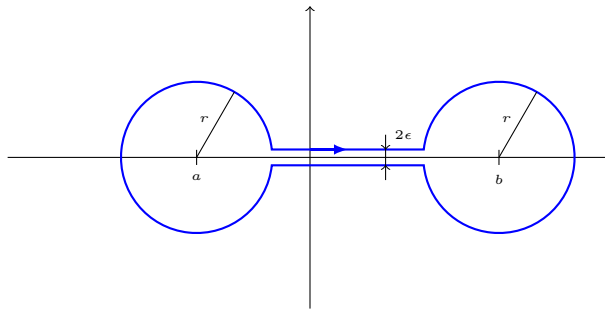
$$I = \int_0^\infty h\left(\frac{\xi b + a}{\xi + 1}\right) \xi^\alpha \frac{b-a}{(\xi+1)^2} d\xi = \int_0^\infty u(x) x^\alpha dx$$

gdzie

$$u(x) = \frac{b-a}{(\xi+1)^2} h\left(\frac{\xi b + a}{\xi + 1}\right)$$

Jeżeli h jest funkcją wymierną, to u również jest funkcją wymierną; a zatem, przy założeniu że całka ta jest odpowiednio zbieżna, można ją policzyć wykorzystując kontur dziurkę od klucza.

Druga metoda wykorzystuje nowy kontur, tzw. *kość*:



Kontur ten sparametryzowany jest poprzez położenia środków dwóch okręgów (a oraz b), promień r oraz odstęp pomiędzy odcinkami 2ϵ . Będzie nas interesowała granica $r \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$.

Będziemy po tym konturze całkować funkcję

$$f(z) = h(z) \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha$$

gdzie cięcie funkcji potęgowej jest wybrane na dodatniej półosi rzeczywistej; oznacza to, że funkcja f ma cięcie tam, gdzie

$$\frac{x-a}{b-x} \in \mathbb{R}_+$$

Rozwiązując ten warunek otrzymujemy

$$\exists t > 0 : \frac{x-a}{b-x} = t$$

$$\exists t > 0 : x = \frac{tb+a}{t+1}$$

$$x \in \left\{ \frac{tb+a}{t+1} : t > 0 \right\}$$

$$x \in (a, b)$$

czyli funkcja f ma cięcie na odcinku pomiędzy punktami a i b ; niezależnie od parametrów r i ϵ konturu, odcinek ten zawiera się w całości w obszarze ograniczonym konturem; co jest ważne nie przecina konturu, więc funkcja f jest ciągła na konturze.

Cały kontur składa się z dwóch odcinków i dwóch okręgów, sparametryzowanych przez

$$z_1(x) = t + i\epsilon \quad \text{w granicy } t \text{ zmienia się od } a \text{ do } b$$

$$z_2(t) = b - re^{it} \quad \text{w granicy } t \text{ zmienia się od } +\pi \text{ do } -\pi$$

$$z_3(t) = t - i\epsilon \quad \text{w granicy } t \text{ zmienia się od } b \text{ do } a$$

$$z_4(t) = a + re^{it} \quad \text{w granicy } t \text{ zmienia się od } 2\pi \text{ do } 0$$

Mamy również, dla $x \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x+i\epsilon)-a}{b-(x+i\epsilon)} \right)^\alpha = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x+i\epsilon-a)(b-x+i\epsilon)}{(b-x-i\epsilon)(b-x+i\epsilon)} \right)^\alpha = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x-a)(b-x) + i\epsilon(b-a) - \epsilon^2}{(b-x)^2 + \epsilon^2} \right)^\alpha = \left[\delta = \frac{\epsilon(b-a)}{(b-x)^2 + \epsilon^2} \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-a}{b-x} + i\delta \right)^\alpha = \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x - i\epsilon) - a}{b - (x - i\epsilon)} \right)^\alpha = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x - i\epsilon - a)(b - x - i\epsilon)}{(b - x + i\epsilon)(b - x - i\epsilon)} \right)^\alpha = \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{(x - a)(b - x) - i\epsilon(b - a) - \epsilon^2}{(b - x)^2 + \epsilon^2} \right)^\alpha = \left[\delta = \frac{\epsilon(b - a)}{(b - x)^2 + \epsilon^2} \right] \\
& = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\frac{x - a}{b - x} - i\delta \right)^\alpha = \left(\frac{x - a}{b - x} \right)^\alpha e^{2\pi\alpha i}
\end{aligned}$$

A zatem całkę konturową można (po wykonaniu granic $r \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$) zapisać jako:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(r, \epsilon)} h(z) \left(\frac{z - a}{b - z} \right)^\alpha dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

gdzie

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^b h(x) \left(\frac{x - a}{b - x} \right)^\alpha dx = I \\
I_2 &= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^{-\pi} h(b + re^{it}) \left(\frac{(b + re^{it}) - a}{b - (b + re^{it})} \right)^\alpha ire^{it} dt = \\
&= - \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^{-\pi} h(b + re^{it}) \left(\frac{b - a + re^{it}}{-re^{it}} \right)^\alpha ire^{it} dt = \\
&= -i \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\pi}^\pi h(b + re^{it}) (-r - (b - a)e^{-it})^\alpha r^{1-\alpha} e^{it} dt \\
I_3 &= \int_b^a h(x) \left(\frac{x - a}{b - x} \right)^\alpha e^{2\pi\alpha i} dx = \\
&= -e^{2\pi\alpha i} \int_a^b h(x) \left(\frac{x - a}{b - x} \right)^\alpha dx = -e^{2\pi\alpha i} I \\
I_4 &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^{-\pi} h(a + re^{it}) \left(\frac{(a + re^{it}) - a}{b - (a + re^{it})} \right)^\alpha ire^{it} dt = \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \int_\pi^{-\pi} h(a + re^{it}) \left(\frac{re^{it}}{b - a - re^{it}} \right)^\alpha ire^{it} dt = \\
&= -i \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} \int_{-\pi}^\pi h(a + re^{it}) (-r + (b - a)e^{-it})^{-\alpha} e^{it} dt
\end{aligned}$$

Zakładamy tu, że funkcja h nie ma osobliwości na odcinku (a, b) , czyli że możemy zapisać $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(x + i\epsilon) = h(x)$.

Przyjrzyjmy się I_2 oraz I_4 bliżej. Mamy

$$I_2 = -i \int_{-\pi}^\pi \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) \right) (-(b - a)e^{-it})^\alpha e^{it} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= -i \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) \right) \left((b-a)e^{i(\pi-t)} \right)^{\alpha} e^{it} dt = \\
&= -i(b-a)^{\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) \right) e^{i\alpha(\pi-t)} e^{it} dt \\
I_4 &= -i \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} h(a + re^{it}) \right) \left((b-a)e^{-it} \right)^{-\alpha} e^{it} dt = \\
&= -i(b-a)^{-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} h(a + re^{it}) \right) e^{i\alpha t} e^{it} dt
\end{aligned}$$

Jeżeli więc założymy, że

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) = 0$$

oraz

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} h(a + re^{it}) = 0$$

to

$$I_2 = I_4 = 0$$

Przypomnijmy, mamy

$$h(z) = (b-z)^n g(z)$$

gdzie $n = \alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, a funkcja g nie ma miejsc zerowych ani biegunów w punktach a i b , czyli $g(a)$ oraz $g(b)$ są skończone i różne od 0. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} (-re^{it})^n u(b + re^{it}) = \\
&= u(b) e^{int} (-1)^n \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+n-\alpha} \\
\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} h(a + re^{it}) &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} (b-a - re^{it})^n u(a + re^{it}) = \\
&= u(a) (b-a)^n \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha}
\end{aligned}$$

Aby więc mieć

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\alpha} h(b + re^{it}) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} h(a + re^{it}) = 0$$

potrzebujemy

$$1 + n - \alpha = 1 + \beta > 0$$

$$1 + \alpha > 0$$

czyli

$$\alpha, \beta > -1$$

Przy tych założeniach mamy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(r, \epsilon)} h(z) \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^{\alpha} dz =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_a^b h(x) \left(\frac{x-a}{b-x} \right)^\alpha dx = \\
&= (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_a^b g(x)(x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx
\end{aligned}$$

Z drugiej strony możemy użyć twierdzenia o residuach by policzyć tą całkę konturową. Nie możemy jednak użyć osobliwości wewnątrz konturu: osobliwość wewnątrz konturu jest cięciem, a twierdzenie zakłada, że wewnątrz konturu funkcja jest holomorficzną za wyjątkiem skończonej liczby punktów. Zamiast tego, musimy użyć osobliwości na zewnątrz konturu - wliczając w to residuum w nieskończoności. Mamy

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \oint_{K(r,\epsilon)} h(z) \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha dz = \\
&= (-1)^2 \cdot 2\pi i \left(\sum_{z_k} \operatorname{Res} \left(h(z) \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha, z_k \right) + \operatorname{Res} \left(h(z) \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha, \infty \right) \right)
\end{aligned}$$

Dwa czynniki -1 , które się kasują, biorą się z tego, że z po pierwsze używamy biegunów na zewnątrz konturu, a po drugie, kontur, tak jak został narysowany, jest obiegany w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, czyli w kierunku ujemnym.

Porównując oba wzory, i wykorzystując równość

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} = \frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)}$$

otrzymujemy twierdzenie:

Twierdzenie:

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Niech g będą funkcją wymierną nie posiadającą osobliwości na odcinku $[a, b]$ oraz nie posiadającą miejsc zerowych w punktach a i b . Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ spełniają warunki $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, $\alpha, \beta > -1$. Niech $f(z) = g(z)(b-z)^{\alpha+\beta} \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha$, gdzie cięcie funkcji potęgowej jest na dodatniej półosi rzeczywistej (czyli funkcja f ma cięcie na odcinku (a, b)). Wtedy

$$\int_a^b g(x)(x-a)^\alpha (b-x)^\beta dx = \frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \left(\sum_{z_k} \operatorname{Res}(f, z_k) + \operatorname{Res}(f, \infty) \right)$$

gdzie sumowanie po prawej stronie odbywa się po wszystkich punktach osobliwych funkcji g .

Wykład 21: Faktoryzacja Weierstrassa

Na zakończenie tego działu (analizy zespolonej) chciałbym jeszcze przedstawić parę wzorów które wyprowadza się przy użyciu metod analizy zespolonej, ale

często znajdują zastosowanie w innych działach.

Zacznijmy od przypomnienia podstawowego twierdzenia algebry, które mówi, że każdy wielomian o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek na płaszczyźnie zespolonej. Konsekwencją tego twierdzenia jest gwarancja, że każdy wielomian można zapisać w postaci

$$w(z) = a(z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \dots (z - z_k)^{n_k}$$

gdzie z_i są pierwiastkami tego wielomianu, a $n_i \in \mathbb{N}$ są krotnościami tych pierwiastków. Dalej wynika z tego, że każdy wielomian jest jednoznacznie wyznaczony z dokładnością do stałej multiplikatywnej przez swoje miejsca zerowe i ich krotności. Może pojawić się pytanie, czy w podobny sposób można wyznaczać inne funkcje zespolone.

Niestety, w ogólności jest to niemożliwe. Na przykład funkcje $h(z) = e^{g(z)}$, gdzie $g(z)$ jest dowolną funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej, jest sama funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej, i na dodatek nie posiada żadnych miejsc zerowych (bo funkcja wykładnicza nigdy się nie zeruje, nawet dla zespolonych argumentów). Oznacza to, że jeśli rozważamy dowolne funkcje holomorficzne, a nie tylko wielomiany, to podając jej miejsca zerowe i krotności funkcji możemy określić funkcję co najwyżej z dokładnością do czynnika $e^{g(z)}$.

Istnieją jednak przypadki, gdy ten czynnik jest znany. Zdefiniujmy funkcję

$$S(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

czyli

$$S(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z)$$

gdzie

$$S_N(z) = z \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(przypomnienie: \prod oznacza iloczyn podanych czynników). Póki co zakładamy, że ta granica istnieje, ale zamierzam to udowodnić. Zauważmy, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}$ mamy $S_N(k\pi) = 0$ dla $N \geq |k|$. Zatem w szczególności

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(k\pi) = 0$$

$$S(k\pi) = 0$$

A zatem funkcja S ma miejsca zerowe w punktach $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Znamy już jedną funkcję o tej własności, funkcję sinus. I faktycznie, okazuje się, że $S(z) = \sin z$, czyli

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

jest to tak zwana **faktoryzacja Weierstrassa**. Udowodnijmy ten wzór.

Zacznijmy od udowodnienia, że nieskończony iloczyn który wypisaliśmy powyżej jest w ogóle dobrze zdefiniowany, czyli że granica $N \rightarrow \infty$ istnieje dla dowolnego z (a nie tylko dla $z_k = k\pi$).

Rozważmy $|z| < R$ gdzie R jest dowolną liczbą dodatnią. Wykorzystując oszacowanie

$$1 + x \leq e^x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}$$

możemy otrzymać oszacowanie

$$\left| 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right| \leq 1 + \frac{|z|^2}{n^2\pi^2} \leq e^{\frac{|z|^2}{n^2\pi^2}} \leq e^{\frac{R^2}{n^2\pi^2}}$$

A zatem

$$\left| \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right) \right| \leq \prod_{n=1}^N e^{\frac{R^2}{n^2\pi^2}} = e^{\frac{R^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}}$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny mamy zatem oszacowanie

$$|S_N(z)| \leq e^{\frac{R^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = M(R)$$

To, że wszystkie funkcje $S_N(z)$ mają wspólne ograniczenie $M(R)$ na kole $|z| < R$, gwarantuje istnienie granicy, na podstawie twierdzenia o zbieżności ograniczonej. Ponieważ promień R był wybrany dowolnie, oznacza to że zbieżność zachodzi na całej płaszczyźnie zespolonej.

Udowodnijmy też, że funkcja $S(z)$ nie ma miejsc zerowych innych niż $k\pi$ (co jest teoretycznie możliwe, bo iloczyn nieskończonej liczby niezerowych czynników może być w granicy równy 0). Załóżmy więc, że $z \neq k\pi$ i weźmy $N > |z|$. Rozpiszmy

$$S(z) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right) \cdot \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right)$$

Pierwszy czynnik jest skończonym iloczynem, więc przy założeniu, że $z \neq k\pi$ mamy

$$\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right) \neq 0$$

Co do drugiego czynnika, zauważmy, że gdy $n > N > |z|$ mamy $0 < \frac{|z|^2}{n^2\pi^2} < \frac{1}{\pi^2}$ a dla $|x| < \frac{1}{\pi^2}$ mamy

$$|1 - x| \geq 1 - |x| \geq e^{-2|x|}$$

Mamy więc

$$\left| 1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right| \geq e^{-\frac{2|z|^2}{n^2\pi^2}}$$

$$\left| \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \right| \geq e^{-\frac{2|z|^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

Ponieważ suma $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest skończona, mamy

$$-\frac{2|z|^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > -\infty$$

a zatem

$$e^{-\frac{2|z|^2}{\pi^2} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} > 0$$

i w konsekwencji

$$|S(z)| > 0$$

Dowodzi to, że funkcja $S(z)$ nie ma innych miejsc zerowych niż $k\pi$.

Rozważmy więc funkcję

$$f(z) = \frac{\sin z}{S(z)}$$

Ponieważ wiemy już, że we wszystkich punktach w których, w których sinus ma miejsce zerowe funkcja $S(z)$ również ma miejsce zerowe, to oznacza, że funkcja f nie będzie miała żadnych osobliwości, będzie funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej. Wiemy też, że funkcja f nigdzie się nie zeruje, bo wszystkie zera funkcji S są kasowane przez zera funkcji $\sin z$. Oznacza to, że jeśli weźmiemy funkcję $\ln f(z)$ to nigdzie nie będzie miała on punktu rozgałęzienia (bo to wymagałoby $f(z) = 0$), a więc będzie jednoznacznie zdefiniowana na całej płaszczyźnie zespolonej. Policzmy pochodną $(\ln f(z))'$. Zaczniemy od

$$\begin{aligned} S'(z) &= \left(z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \right)' = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) + z \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)' \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \right) = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2z^2}{k^2 \pi^2} \prod_{n \neq k} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right) \right) \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} \frac{S'(z)}{S(z)} &= \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2z^2}{k^2 \pi^2}}{1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}} = \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2 \pi^2} \end{aligned}$$

oraz

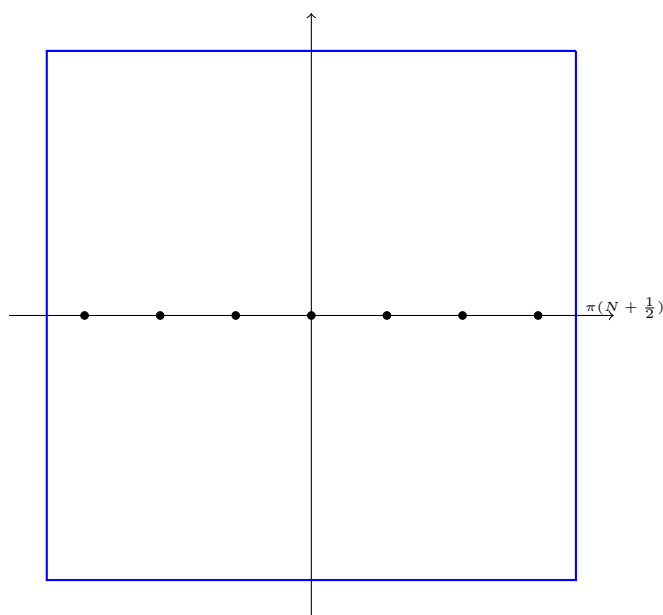
$$f'(z) = \frac{\cos z}{S(z)} - \frac{\sin z}{(S(z))^2} S'(z) =$$

$$= \frac{\cos z}{S(z)} - \frac{\sin z}{S(z)} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \right)$$

$$(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - k^2\pi^2}$$

Podkreślmy, że wbrew pozorom funkcja $(\ln f(z))'$ nie ma żadnych osobliwości; wszystkie bieguny funkcji cotangens są kasowane przez odpowiednie wyrazy z pozostałej części.

Rozważmy teraz kwadrat o środku w 0 i boku $2\pi(N + \frac{1}{2})$ dla dużego N :



Dodanie do N składnika $\frac{1}{2}$ gwarantuje, że kwadrat nie będzie przechodził przez żadną z osobliwości funkcji cotangens.

Oszacujmy wartości funkcji $(\ln f)'$ na tym kwadracie. Będziemy osobno szacować $|\operatorname{ctg} z|$ i pozostałą część.

Weźmy najpierw $|\operatorname{ctg} z|$. Dla pionowych boków mamy

$$z = \pi(N + \frac{1}{2}) + iy$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \operatorname{ctg} \left(\pi(N + \frac{1}{2}) + iy \right) = \\ &= -\tan(iy) = \tanh y \end{aligned}$$

a zatem na tych bokach mamy $|\operatorname{ctg} z| < 1$ Dla poziomych boków mamy

$$z = x \pm i\pi(N + \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))} = \\ &= \frac{\cos x \cos(i\pi(N + \frac{1}{2})) \mp \sin x \sin(i\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin x \cos(i\pi(N + \frac{1}{2})) \pm \cos x \sin(i\pi(N + \frac{1}{2}))} = \\ &= \frac{\cos x \cosh(\pi(N + \frac{1}{2})) \mp i \sin x \sinh(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin x \cosh(\pi(N + \frac{1}{2})) \pm i \cos x \sinh(\pi(N + \frac{1}{2}))} = \\ &= \frac{\cos x \mp i \sin x \tanh(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin x \pm i \cos x \tanh(\pi(N + \frac{1}{2}))} \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg} z|^2 &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin^2 x + \cos^2 x \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} = \\ &= 1 + \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 - \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2})))}{\sin^2 x + \cos^2 x \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1 - \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\sin^2 x + \cos^2 x \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} \leq \\ &\leq 1 + \frac{1 - \tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))}{\tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} = \\ &\leq \frac{1}{\tanh^2(\pi(N + \frac{1}{2}))} \end{aligned}$$

Dla dużych N mamy

$$\tanh(\pi(N + \frac{1}{2})) \rightarrow 1$$

, a więc dla dostatecznie dużych N mamy

$$\tanh(\pi(N + \frac{1}{2})) > \frac{1}{2}$$

$$|\operatorname{ctg}(x \pm i\pi(N + \frac{1}{2}))| < 2$$

Dla pozostałej części $(\ln f)'$ mamy, na pionowych bokach

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} &= \\ &= \frac{1}{z} + \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{z + k\pi} \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M \frac{1}{z - k\pi} =$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M \frac{1}{(N - k + \frac{1}{2})\pi + iy} =$$

rozbijamy sumę na dwa kawałki

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-M}^N \frac{1}{(N - k + \frac{1}{2})\pi + iy} + \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{(N - k + \frac{1}{2})\pi + iy} \right) =$$

w drugiej sumie podstawiamy $n = N - k$; w trzeciej sumie podstawiamy $n = k - N - 1$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^{M+N} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} + \sum_{n=0}^{M-N-1} \frac{1}{(-n - \frac{1}{2})\pi + iy} \right) =$$

inaczej organizujemy sumy

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=M-N}^{M+N} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} + \sum_{n=0}^{M-N-1} \left(\frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} + \frac{1}{-(n + \frac{1}{2})\pi + iy} \right) \right) =$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=M-N}^{M+N} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} + \sum_{n=0}^{M-N-1} \frac{2iy}{(n + \frac{1}{2})^2\pi^2 + y^2} \right)$$

Mamy oszacowanie (zakładając $M > N$)

$$\left| \sum_{n=M-N}^{M+N} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} \right| \leq \sum_{n=M-N}^{M+N} \frac{1}{(M - N + \frac{1}{2})\pi} = \frac{2N + 1}{(M - N + \frac{1}{2})\pi} \rightarrow^{M \rightarrow \infty} 0$$

więc

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=M-N}^{M+N} \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi + iy} = 0$$

Mamy też

$$\left| \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{M-N-1} \frac{2y}{(n + \frac{1}{2})^2\pi^2 + y^2} \right| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|y|}{(n + \frac{1}{2})^2\pi^2 + y^2} \leq$$

ponieważ funkcja $\frac{2|y|}{t^2\pi^2 + y^2}$ jest malejąca dla $t > 0$

$$\leq \int_{1/2}^{\infty} \frac{2|y|}{t^2\pi^2 + y^2} dt =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi} \arctan \frac{\pi t}{|y|} \right) \Big|_{t=\frac{1}{2}}^{\infty} =$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\pi}{2|y|} \leq 1$$

Na poziomych bokach można skonstruować podobne oszacowanie (choć jest to nieco bardziej skomplikowane, tę część pominię).

W każdym razie, oszacowując oba składniki $|(\ln f)'|$ na wszystkich bokach dowodzimy, że $(\ln f)'$ jest funkcją ograniczoną na kwadracie; Ponadto to ograniczenie jest wspólne dla wszystkich kwadratów o dostatecznie dużym boku. Wynika z tego, że funkcja $(\ln f)'$ jest funkcją ograniczoną na całej płaszczyźnie, a ponieważ jest ponadto holomorfozna na całej płaszczyźnie, to z twierdzenia Liouville'a wynika, że jest funkcją stałą:

$$(\ln f(z))' = c$$

a zatem

$$\ln f(z) = cz + d$$

$$f(z) = e^{cz+d}$$

Mamy jednak

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{S(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{S'(z)} = \frac{1}{1} = 1$$

A zatem

$$e^d = 1$$

$$d = 0$$

Ponieważ ponadto $f(z)$ jest funkcją parzystą (ponieważ zarówno $\sin z$ jak i $S(z)$ są funkcjami nieparzystymi) to $f(z) = f(-z)$, z czego wynika, że $c = 0$. Mamy zatem $f = 1$, czyli

$$\sin z = S(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

Podobne rozwinięcie można skonstruować dla funkcji cosinus. Podam, już bez dowodu:

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n + \frac{1}{2})^2 \pi^2}\right)$$

Można używać tych rozwinięć do znajdowania sum pewnych szeregów. Jeśli na przykład rozwiniemy funkcję $\sin z$ do wyrazów rzędu z^3 otrzymujemy

$$z - \frac{z^3}{6} + \mathcal{O}(z^5) = z - \frac{z^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(z^5)$$

Porównując obie strony, znajdujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Otrzymane przy okazji rozwinięcia

$$\operatorname{ctg} z = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M \frac{1}{z - k\pi}$$

lub

$$\operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-M}^M \frac{1}{\pi} \frac{1}{z - k}$$

również ma swoje zastosowania; jeżeli mamy na przykład dowolną funkcję holomorficzną f która nie ma osobliwości dla $z \in \mathbb{Z}$, możemy spróbować policzyć szereg

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)$$

wykorzystując całkę konturową z funkcji $\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z)$. Mamy bowiem

$$\operatorname{Res}(\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z), n) = \operatorname{Res}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{z - k}, n\right) = f(n)$$

Jeżeli wybierzemy odpowiedni kontur całkowania, mamy więc

$$\oint_k \pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_n f(n) + \sum_{z_m} \operatorname{Res}(\pi \operatorname{ctg}(\pi z) f(z), z_m) \right)$$

gdzie sumowanie po n obejmuje wszystkie liczby całkowite okrążane przez dany kontur, a z_m są punktami osobliwymi funkcji f , również okrążanymi przez kontur. Użyteczność tej metody zależy jednak od tego, czy uda się znaleźć odpowiedni kontur dla którego jesteśmy w stanie policzyć powyższą całkę konturową, przynajmniej w jakiejś granicy.

Ćwiczenia wykładowe 11: zastosowania całek zespolonych do liczenia całek rzeczywistych, część 3

Policzmy całkę

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3 + 1} dx$$

Używając przedstawionych na wykładzie metod.

Pierwsza metoda polegała na zapisaniu tej całki za pomocą pochodnej po parametrze:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^3 + 1} dx = \left(\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{x^3 + 1} dx \right) \Big|_{\alpha=0}$$

Łatwo sprawdzić, że dla $\alpha \approx 0$ całka jest zbieżna, więc do jej policzenia można użyć całki konturowej po dziurce od klucza:

$$\oint_K \frac{z^\alpha}{z^3 + 1} dz = (1 - e^{2\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3 + 1} dx$$

oraz z drugiej strony

$$\oint_K \frac{z^\alpha}{z^3 + 1} dz = 2\pi i \sum_{z_k} \operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{z^3 + 1}, z_k \right)$$

Punktami osobliwymi są miejsca zerowe wielomianu $z^3 + 1$:

$$\begin{aligned} z^3 + 1 &= 0 && \Rightarrow \\ z^3 &= -1 = e^{i\pi} && \Rightarrow \\ z &= e^{\frac{i\pi + i2\pi k}{3}} = e^{\frac{i\pi(2k+1)}{3}}, \quad k \in \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\frac{i\pi}{3}}, & z_2 &= e^{\frac{i3\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1, & z_3 &= e^{\frac{i5\pi}{3}} \\ z^3 + 1 &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{z^3 + 1}, z_k \right) &= \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z - z_k) z^\alpha}{z^3 + 1} = 0/0, \text{ używając reguły de l'Hospitala} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{z^\alpha + (z - z_k) \alpha z^{\alpha-1}}{3z^2} = \\ &= \frac{z_k^\alpha}{3z_k^2} = \frac{1}{3} z_k^{\alpha-2} = \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)(2k+1)}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res} \left(\frac{z^\alpha}{z^3 + 1}, z_k \right) &= \\ &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)(2k+1)}{3}} = \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} \left(1 + e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}} + e^{\frac{i4\pi(\alpha-2)}{3}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ze wzoru na skończoną sumę szeregu geometrycznego } 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} \frac{1 - e^{i2\pi(\alpha-2)}}{1 - e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}}} = \frac{1}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} \frac{1 - e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}}} \end{aligned}$$

a zatem

$$\oint_K \frac{z^\alpha}{z^3 + 1} dz = \frac{2\pi i}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} \frac{1 - e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}}}$$

$$(1 - e^{2\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3 + 1} dx = \frac{2\pi i}{3} e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} \frac{1 - e^{i2\pi\alpha}}{1 - e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3 + 1} dx &= \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}}}{1 - e^{\frac{i2\pi(\alpha-2)}{3}}} = \\ &= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{-\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}} - e^{\frac{i\pi(\alpha-2)}{3}}} = \\ &= \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{-2i \sin \frac{\pi(\alpha-2)}{3}} = \\ &= \frac{-\pi}{3 \sin \frac{\pi(\alpha-2)}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3 + 1} dx &= \\ &= \left(\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3 + 1} dx \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \left(\frac{d}{d\alpha} \frac{-\pi}{3 \sin \frac{\pi(\alpha-2)}{3}} \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \left(\frac{-\pi}{3} \frac{-1}{\sin^2 \frac{\pi(\alpha-2)}{3}} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi(\alpha-2)}{3} \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\pi^2 \cos \frac{-2\pi}{3}}{9 \sin^2 \frac{-2\pi}{3}} = \\ &= \frac{\pi^2}{9} \frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-2\pi^2}{27} \end{aligned}$$

Druga przedstawiona metoda bezpośrednio wykorzystuje całkę konturową po dziurce od klucza z funkcji $\frac{\ln^2 z}{z^3+1}$ oraz wzór

$$\oint_K \frac{\ln^2 z}{z^3 + 1} dz = -4\pi i \int_0^\infty \frac{\ln z}{x^3 + 1} dx + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Z którego otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{\ln z}{x^3 + 1} dx = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Im} \left(\oint_K \frac{\ln^2 z}{z^3 + 1} dz \right)$$

lub

$$\int_0^\infty \frac{\ln z}{x^3 + 1} dx = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{4\pi i} \oint_K \frac{\ln^2 z}{z^3 + 1} dz \right)$$

Mamy

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{z^3+1}, z_k\right) &= \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{(z-z_k) \ln^2 z}{z^3+1} \stackrel{0/0, \text{używając reguły de l'Hospitala}}{=} \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{\ln^2 z + (z-z_k) \frac{2}{z} \ln z}{3z^2} = \\
 &= \frac{\ln^2 z_k}{3z_k^2} = \frac{\ln^2 e^{\frac{i\pi(2k+1)}{3}}}{3\left(e^{\frac{i\pi(2k+1)}{3}}\right)^2} = \\
 &= \frac{\left(\frac{i\pi(2k+1)}{3}\right)^2}{3e^{\frac{i\pi(4k+2)}{3}}} = \frac{-\pi^2(2k+1)^2}{27e^{\frac{i\pi(4k+2)}{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_K \frac{\ln^2 z}{z^3+1} dz &= \\
 &= 2\pi i \sum_{k=0}^2 \operatorname{Res}\left(\frac{\ln^2 z}{z^3+1}, z_k\right) = \\
 &= 2\pi i \left(\frac{-\pi^2}{27e^{\frac{i2\pi}{3}}} + \frac{-9\pi^2}{27e^{\frac{i6\pi}{3}}} + \frac{-25\pi^2}{27e^{\frac{i10\pi}{3}}} \right) = \\
 &= 2\pi i \frac{-\pi^2}{27} \left(e^{\frac{-i2\pi}{3}} + 9 + 25e^{\frac{i2\pi}{3}} \right) = \\
 &= 2\pi i \frac{-\pi^2}{27} \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + 9 + 25 \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right) = \\
 &= 2\pi i \frac{-\pi^2}{27} (-4 + i12\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^3+1} dx &= \\
 &= \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{4\pi i} 2\pi i \frac{-\pi^2}{27} (-4 + i12\sqrt{3}) \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\pi^2}{27} (-2 + i6\sqrt{3}) \right) = \\
 &= \frac{-2\pi^2}{27}
 \end{aligned}$$

Drugą całką, którą policzymy, będzie

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Jest to szczególny przypadek całki

$$\int_a^b g(x)(x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx$$

z $a = 0$, $b = 1$, $g(x) = 1$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Parametry te spełniają podane na wykładzie warunki, więc możemy skorzystać z przedstawionych na wykładzie metod.

Pierwsza metoda polega na zamianie zmiennych:

$$\xi = \frac{x}{1-x}, \quad x = \frac{\xi}{\xi+1}, \quad dx = \frac{d\xi}{(\xi+1)^2}$$

Przy tej transformacji otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{\xi+1} \cdot \frac{1}{\xi+1}}} \frac{d\xi}{(\xi+1)^2} = \int_0^\infty \frac{\xi^{-\frac{1}{2}}}{\xi+1} d\xi$$

Całkę tę liczymy za pomocą całki konturowej po dziurce od klucza

$$(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2\pi i}) \int_0^\infty \frac{\xi^{-\frac{1}{2}}}{\xi+1} d\xi = \oint \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z+1}, -1 \right)$$

czyli

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\xi^{-\frac{1}{2}}}{\xi+1} d\xi &= \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\pi i}} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{z+1}, -1 \right) = \\ &= \frac{1}{1 - (-1)} 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} (z^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i (e^{i\pi})^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \pi i e^{-\frac{i\pi}{2}} = \pi i \cdot (-i) = \pi \end{aligned}$$

Druga metoda polega na wykorzystaniu całki konturowej po kości i wzoru

$$\oint_K g(z)(b-z)^{\alpha+\beta} \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^\alpha dz = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_a^b g(x)(x-a)^\alpha(b-x)^\beta dx$$

w tym przypadku

$$\oint_K \frac{1}{1-z} \left(\frac{z}{1-z} \right)^{-\frac{1}{2}} dz = (1 - e^{-\pi i}) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Funkcja $\frac{1}{1-z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}}$ nie posiada na płaszczyźnie zespolonej osobliwości poza obszarem objętym konturem, więc do policzenia całki konturowej potrzebujemy jedynie residuum w nieskończoności:

$$\begin{aligned}
 \oint_K \frac{1}{1-z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}} dz &= \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{1-z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}}, \infty \right) = \\
 &\quad \text{używając wzoru } \operatorname{Res}(f(z), \infty) = \operatorname{Res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \left(\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0 \right) = \\
 &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{-1}{z(z-1)} \left(\frac{1}{z-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, 0 \right) = \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-1}{z-1} \left(\frac{1}{z-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= 2\pi i (-1)^{-\frac{1}{2}} = 2\pi i (e^{i\pi})^{-\frac{1}{2}} = 2\pi i e^{-\frac{i\pi}{2}} = 2\pi i \cdot (-i) = 2\pi
 \end{aligned}$$

A zatem

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{1-e^{-\pi i}} \oint_K \frac{1}{1-z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$

Podkreślę, że przy liczeniu całek z wykorzystaniem dziurki od klucza lub kości należy być ostrożnym przy obliczaniu wartości potęg i logarytmów. Są to funkcje wieloznaczne, więc ważne jest, by przy ich liczeniu używać rozkładu $z = re^{i\varphi}$ z $\varphi \in (0, 2\pi)$, który pozwala wybrać konkretną wartość pierwiastka i logarytmu. Należy również unikać dokonywania uproszczeń opierających się na własnościach potęg, bo może to prowadzić do złego wyniku. Na przykład w przykładzie powyżej mieliśmy

$$\left(\frac{1}{z-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \Big|_{z=0} = (-1)^{-\frac{1}{2}} = -i$$

gdybyśmy dokonali "uproszczenia" mieliśmy

$$(z-1)^{\frac{1}{2}} \Big|_{z=0} = (-1)^{\frac{1}{2}} = +i$$

i otrzymalibyśmy błędny wynik. Wynika to z tego, że po wprowadzeniu cięcia i skonkretyzowaniu wartości funkcji potęgowej wzór $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ przestaje być zawsze spełniony.

Wykład 22: Funkcja Gamma

Dotąd zajmowaliśmy się niemal wyłącznie tzw. funkcjami elementarnymi: są to funkcje, które można zbudować za pomocą podstawowych operacji algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie) oraz funkcji: wykładniczej oraz logarytm. Istnieje jednak wiele funkcji mających zastosowanie w fizyce, które nie dają się wyrazić jako funkcje elementarne. Funkcje te zazwyczaj są definiowane jako rozwiązania szczególnych równań różniczkowych (np. tzw. /it funkcje Bessela) lub za pomocą całki z parametrem. Zajmiemy się dziś jedną z najczęściej spotykanych funkcji tej drugiej kategorii, tzw. /it funkcją gamma (Γ) Eulera.

Funkcja Γ Eulera jest zdefiniowana wzorem

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Zbadajmy zbieżność tej całki. Nie ma problemu ze zbieżnością dla $t \rightarrow \infty$, ponieważ funkcja e^{-t} rośnie szybciej niż dowolna funkcja potęgowa t^z , co czyni powyższą całkę zbieżną w nieskończoności dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$. Jest jednak problem dla $t \rightarrow 0$. Ponieważ e^{-t} zbiega do 1 dla $t \rightarrow 0$, to powyższa całka jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy całka

$$\int_0^1 t^{z-1} dt = \left(\frac{t^z}{z} \right) \Big|_{t=0}^{t=1}$$

jest zbieżna, co zachodzi gdy $\operatorname{Re} z > 0$, (bo wtedy $(t^z)_{z=0} = 0$). Oznacza to, że funkcja Γ może być zdefiniowana powyższym wzorem tylko na półpłaszczyźnie wyznaczonej tym warunkiem. Można ją zdefiniować też na pozostałej części płaszczyzny (za wyjątkiem izolowanych punktów) ale do tego dojdziemy za chwilę. Najpierw udowodnimy parę własności.

Po pierwsze pokażemy, że jest ona funkcją holomorficzną. W tym celu potrzebujemy pokazać, że całka

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (t^{z-1} e^{-t}) dt = \int_0^{\infty} \ln t t^{z-1} e^{-t} dt$$

jest zbieżna; wtedy funkcja Γ będzie miała pochodną równą tej całce. Zbieżność tej całki pokazuje się podobnie jak zbieżność całki definiującej samą funkcję gamma, jedynie zamiast zbieżności całki $\int_0^1 t^{z-1} dt$ musimy zbadać zbieżność całki

$$\int_0^1 \ln t t^{z-1} dt$$

Całkując przez części z $u' = t^{z-1}$, $v = \ln t$, mamy

$$\int_0^1 \ln t t^{z-1} dt = \left(\ln t \frac{t^z}{z} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{1}{t} \frac{t^z}{z} dt = \left(\ln t \frac{t^z}{z} - \frac{t^z}{z^2} \right) \Big|_{t=0}^{t=1}$$

Jak poprzednio, granica w $t = 0$ istnieje wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{Re} z > 0$. Zatem w obszarze, na którym funkcja Γ jest zdefiniowana jest ona różniczkowalna, więc jest funkcją holomorficzną.

Po drugie, udowodnijmy wzór rekurencyjny na funkcję Γ :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad \text{dla } \operatorname{Re} z > 0$$

Mamy

$$\begin{aligned} \Gamma(z + 1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \\ &\quad \text{całkując przez części } u' = e^{-t}, v = t^z, u = -e^{-t}, v' = z t^{z-1} \\ &= (-t^z e^{-t}) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = \\ &= 0 + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \\ &= z\Gamma(z) \end{aligned}$$

Zauważmy też, że

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Oznacza to, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) + n(n - 1)\Gamma(n - 1) = \dots = n(n - 1) \dots 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

Oznacza to, że funkcję $\Gamma(z + 1)$ możemy traktować jako uogólnienie funkcji silnia na liczby niecałkowite, a nawet na liczby zespolone.

Relacja $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ pozwala nam też rozszerzyć definicję funkcji Γ na większy obszar. Możemy bowiem zdefiniować

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z + 1) := \frac{1}{z} \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

i ten ostatni wzór jest dobrze określony dla $\operatorname{Re} z > -1$, $z \neq 0$. Możemy też kontynuować tą metodę; używając wielokrotnie wzoru $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ otrzymujemy

$$\Gamma(z + n) = (z + n - 1)(z + n - 2) \dots z\Gamma(z)$$

co pozwala nam zdefiniować

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z(z + 1)(z + 2) \dots (z + n - 1)} \int_0^\infty t^{z+n-1} e^{-t} dt$$

co pozwala zdefiniować funkcję Γ dla $\operatorname{Re} z > -n$, $z \neq 0, -1, -2, \dots, n - 1$. Po przez całkowanie przez części można pokazać, że różne te definicje dają ten sam

wynik na obszarach gdzie obie mają zastosowanie. Dzięki temu, i ponieważ n mogą wybrać dowolnie duże, można w ten sposób zdefiniować funkcję Γ na całej płaszczyźnie zespolonej, poza punktami $z \in \{0, -1, -2, \dots\}$, w których to punktach funkcja Γ ma osobliwości.

Kolejna własność funkcji Γ wynika ze wzoru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t) = e^{-t}, \quad \text{dla } t \geq 0$$

gdzie $\mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ jest funkcją charakterystyczną przedziału $[0, n]$, czyli

$$\mathbf{1}_{[0,n]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [0, n] \\ 0 & \text{dla } t \notin [0, n] \end{cases}$$

Jest to zbieżność jednostajna, co pozwala nam zapisać

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(t) dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \\ &\quad \text{zamiana zmiennej całkowania } t = ns \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (ns)^{z-1} (1-s)^n n ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \int_0^1 s^{z-1} (1-s)^n ds = \\ &\quad \text{używając wielokrotnie całkowania przez części} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \left(\left(\frac{s^z}{z} (1-s)^n \right) \Big|_{s=0}^{s=1} + \frac{n}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^z \frac{n}{z} \int_0^1 s^z (1-s)^{n-1} ds = \\ &\quad \text{kontynuując całkowanie przez części} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot n(n-1) \dots (n-k+1)}{z(z+1) \dots (z+k-1)} \int_0^1 s^{z+k-1} (1-s)^{n-k} ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot n(n-1) \dots 1}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \int_0^1 s^{z+n-1} ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z \cdot n!}{z(z+1) \dots (z+n)} \end{aligned}$$

Ten ostatni wzór można traktować jako alternatywną definicję funkcji Γ ; jest to definicja dobra dla wszystkich $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Definiuje się również tzw. *funkcję digamma*:

$$\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

Wykorzystując wyżej wyprowadzony wzór na funkcję Γ mamy

$$\ln \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(z \ln n + \ln(n!) - \sum_{k=0}^n \ln(z+k) \right)$$

a zatem

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (\ln \Gamma(z))' = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k} \right) \end{aligned}$$

W szczególności

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{1+k} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) = \\ &\quad \text{ponieważ ostatni wyraz szeregu dąży do 0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Okazuje się, że wartość $\psi(1)$ nie daje się wyrazić za pomocą operacji algebraicznych i liczb takich jak e czy π . Jest ona równa

$$\psi(1) = -\gamma$$

gdzie

$$\gamma \approx 0.5772156649 \dots$$

jest nową stałą niewymierną, nazywaną *stałą Eulera-Mascheroniego*. Pojawia się ona czasem w fizyce. Wyraża ona różnicę pomiędzy całką $\int \frac{1}{x} dx$ a sumą $\sum \frac{1}{n}$:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x} \right)$$

Funkcję digamma można też wykorzystać do zapisywania sum pewnych szeregów. Na przykład, dla $a, b \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, $a \neq b$ mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)(k+b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+a} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+b} \right) = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \left(\left(\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+b} \right) - \left(\ln n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+a} \right) \right) = \\
&= \frac{\psi(b) - \psi(a)}{b-a}
\end{aligned}$$

W podobny sposób można zapisać sumę dowolnego zbieżnego szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} q(k)$$

gdzie q jest funkcją wymierną której pierwiastki są jednokrotne; gdy q ma pierwiastki wielokrotne, można użyć podobnej metody, ale trzeba wykorzystać pochodne funkcji ψ .

Rozważmy teraz iloczyn

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \int_0^{\infty} s^{\beta-1} e^{-s} ds = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-t-s} ds \right) dt = \\
&\quad \text{zamieniając zmienne } s = u-t \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_t^{\infty} t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} e^{-u} du \right) dt = \\
&\quad \text{zamieniając kolejność całkowania} \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^u t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} e^{-u} dt \right) du = \\
&\quad \text{zamieniając zmienne } t = ux \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 (ux)^{\alpha-1} (u-ux)^{\beta-1} e^{-u} u dx \right) du = \\
&= \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\
&= \Gamma(\alpha + \beta) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem wzór

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

funkcję $B(\alpha, \beta)$ nazywa się *funkcją beta Eulera*; jak widzimy, można ją wyrazić za pomocą funkcji Γ . Pozwala to szybko policzyć całki typu

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = B(n+1, m+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+2)} = \frac{n! \cdot m!}{(n+m+1)!}$$

Mamy również

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \Gamma(1) \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dz$$

licząc tą całkę używając całki konturowej po kości otrzymujemy (dla $\alpha \in (0, 1)$):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dz &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}} \oint (1-z) \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha-1} dz = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \operatorname{Res} \left((1-z) \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\alpha-1}, \infty \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \operatorname{Res} \left(-\left(1 - \frac{1}{z}\right) \left(\frac{1}{z-1}\right)^{\alpha-1}, 0 \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \lim_{z \rightarrow 0} (1-z) \left(\frac{1}{z-1}\right)^{\alpha-1} = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} (-1)^{\alpha-1} = \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} (-e^{\pi i\alpha}) = \\ &= \frac{2\pi i}{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}} = \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc wzór

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

Choć udowodniliśmy go jedynie dla $\alpha \in (0, 1)$, można udowodnić że jest on spełniony dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Szczególnym przypadkiem jego zastosowania jest $\alpha = \frac{1}{2}$, które daje nam

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$$

czyli

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Używając wzoru rekurencyjnego otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{(2n-1) \cdots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^n}\end{aligned}$$

czyli nie tylko $n!$ ale i $(1n-1)!!$ można zapisać za pomocą funkcji Γ . Nawet więcej: dowolny iloczyn postaci

$$\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)$$

można dla $\alpha \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ zapisać jako

$$\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdots (\alpha + n) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha)}$$

Założmy teraz $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$. Zapiszmy funkcję Γ w postaci

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \\ &\quad \text{zamieniamy zmienną } t = zs \\ &= \int_0^\infty (zs)^z e^{-zs} z ds = \\ &= z^{z+1} \int_0^\infty s^z e^{-zs} ds = \\ &= z^{z+1} \int_0^\infty e^{z \ln s} e^{-zs} ds = \\ &= z^{z+1} \int_0^\infty e^{-z(s - \ln s)} ds\end{aligned}$$

Przyjrzyjmy się funkcji $f(s) = s - \ln s$, zbadajmy jej przebieg. Ponieważ $f'(s) = 1 - \frac{1}{s}$, funkcja f ma ekstremum w $s = 1$; dalsze badanie pokazałoby, że jest to jedyne minimum. Jeżeli zatem liczymy całkę $\int_0^\infty e^{-zf(s)} ds$ dla dużego $z \gg 1$, to główny wkład do tej całki będzie pochodził od $s \approx 1$: dla punktów odległych od $s = 1$ mamy $zf(s) \gg zf(1)$ a zatem $e^{-zf(s)} \ll e^{-zf(1)}$. Rozwijając funkcję f w szereg Taylora wokół $s = 1$ do wyrazów kwadratowych mamy

$$\begin{aligned}f(s) &= f(1) + f'(1)(s-1) + \frac{1}{2}f''(1)(s-1)^2 + r(s) = \\ &= 1 + \frac{1}{2}(s-1)^2 + r(s)\end{aligned}$$

Pozwala nam to zrobić przybliżenie

$$\int_0^{\infty} e^{-z(s-\ln s)} ds \approx \int_0^{\infty} e^{-z(1+\frac{(s-1)^2}{2})} ds \approx e^{-z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\frac{(s-1)^2}{2}} ds$$

Mamy z kolei, z całki Gaussa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\frac{(s-1)^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{2}s^2} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}$$

W sumie dostajemy, dla dużych z :

$$\Gamma(z+1) \approx z^{z+1} e^{-z} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} = z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z}$$

czyli w szczególności

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Jest to tak zwany *wzór Stirlinga*. Ścisły dowód może pokazać, że

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Wykład 23: Szereg Fouriera

Założmy, że funkcja g jest holomorficzną na pierścieniu o środku w $z = 0$ i zawierającym okrąg $|z| = 1$. W tym pierścieniu może ona być rozwinięta w szereg Laurenta:

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$$

Gdy podstawimy $z = e^{i\varphi}$ otrzymujemy

$$g(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$$

oraz

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\varphi})}{(e^{i\varphi})^{n+1}} i e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi$$

Oznaczmy $g(e^{i\varphi}) = f(\varphi)$. Z konstrukcji f jest funkcją ciągłą (a nawet gładką) na \mathbb{R} , okresową z okresem 2π . Mamy dla niej

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$$

gdzie

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$$

Takie przedstawienie nazywamy funkcji okresowej nazywamy *szeregiem Fouriera*. Choć powyżej zostało ono wyprowadzone jedynie dla funkcji postaci $f(\varphi) = g(e^{i\varphi})$ gdzie g jest funkcją holomorficzną, okazuje się, że można je uogólnić na funkcje okresowe o dowolnym okresie, i nawet niekoniecznie ciągłe (choć pewne warunki wciąż będą musiały spełniać).

Twierdzenie o szeregu Fouriera:

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że

- jest kawałkami gładka, czyli przedział $(-\pi, \pi)$ można podzielić na skończoną liczbę przedziałów (x_i, x_{i+1}) na których funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną
- na każdym przedziale gładkości pochodna funkcji f jest ograniczona
- w punktach nieciągłości x_i granice lewostronna i prawostronna funkcji f są skończone i spełniają one warunek

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_{i-}} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_{i+}} f(x) \right)$$

Wtedy dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$ całki

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

są zbieżne i dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Dowód.

Jeśli f jest kawałkami gładka, a na końcach przedziałów gładkości ma skończone granice, to na każdym przedziale gładkości jest ograniczona. Skoro tych przedziałów gładkości jest skończona ilość, to funkcja f jest ograniczona na całym \mathbb{R} . Z tego wynika, że $|f(x)e^{-inx}| \leq M$ a zatem całki c_n spełniają relację

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dx = M$$

czyli te całki są zbieżne.

Udowodnimy teraz, że wzór

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

jest spełniony dla $x = 0$. Żeby potem udowodnić spełnianie tego wzoru dla $x = a \neq 0$ wystarczy rozważyć funkcję $f_a(x) = f(x + a)$; jeżeli szereg Fouriera funkcji f_a jest zbieżny do $f_a(x)$ dla $x = 0$, to szereg Fouriera funkcji f będzie zbieżny do $f(x)$ dla $x = a$.

Chcemy więc pokazać, że

$$f(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$$

Rozważmy

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-N}^N e^{-inx} dx = \end{aligned}$$

korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{iNx} - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} dx \end{aligned}$$

Rozpiszmy tę całkę w postaci

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\frac{x}{2}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin((N+\frac{1}{2})x) dx$$

gdzie

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} f(x) \left(\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2}{x} \right)$$

Zwróćmy uwagę, że funkcja $\frac{1}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{2}{x}$ jest gładka na przedziale $[-\pi, \pi]$, ponieważ osobliwości obu wyrazów w $x = 0$ się kasują. Zatem funkcja $g(x)$ jest kawałkami gładka.

Udowodnijmy, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin((N+\frac{1}{2})x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

Wiemy, że $g(x)$ jest kawałkami gładka; na każdym przedziale gładkości mamy, z całkowania przez części

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x) \sin(\lambda x) dx = \left(g(x) \frac{-\cos(\lambda x)}{\lambda} \right) \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} + \frac{1}{\lambda} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x) \cos(\lambda x) dx$$

Ponieważ funkcja f i jej pochodna są ograniczone (co przenosi się na funkcję g), mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(g(x) \frac{-\cos(\lambda x)}{\lambda} \right) \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} &= 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x) \cos(\lambda x) dx &= 0 \end{aligned}$$

czyli

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$$

Potrzebujemy zatem pokazać, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\frac{x}{2}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} dx = f(0)$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} dx &= \\ \text{podstawienie } t = \lambda x & \\ = \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{\sin t}{\pi \frac{t}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} dt &= \\ = \int_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{\sin t}{\pi t} dt &= \\ = \int_{-\lambda\pi}^0 f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{\sin t}{\pi t} dt + \int_0^{\lambda\pi} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \frac{\sin t}{\pi t} dt & \end{aligned}$$

Dla $t > 0$ mamy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \lim_{x \rightarrow 0_+} f(x)$$

z kolei dla $t < 0$ mamy

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \lim_{x \rightarrow 0_-} f(x)$$

A zatem

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} dx &= \\ = \int_{-\infty}^0 \left(\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) \right) \frac{\sin t}{\pi t} dt + \int_0^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) \right) \frac{\sin t}{\pi t} dt &= \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) \int_{-\infty}^0 \frac{\sin t}{\pi t} dt + \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} dt$$

Ponieważ $\frac{\sin t}{\pi t}$ jest funkcją parzystą, mamy

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin t}{\pi t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{\pi t} dt = \frac{1}{2}$$

gdzie wykorzystano otrzymany wcześniej na ćwiczeniach za pomocą całki konturowej wynik

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$$

Mamy zatem

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{\pi x} dx = \frac{1}{2} \left(\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \right)$$

Jeżeli funkcja f jest ciągła w $x = 0$ jest to oczywiście równe $f(0)$; jeśli jest nieciągła, to również jest $f(0)$ ponieważ założyliśmy, że w punktach nieciągłości funkcja f spełnia

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \right)$$

Podsumowując, pokazaliśmy w ten sposób, że

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n = f(0)$$

co było do pokazania.

Założenia tego twierdzenia można trochę osłabić (można np. w niektórych przypadkach dopuścić, by pochodna była nieograniczona), ale dowód staje się wtedy bardziej skomplikowany.

Szereg Fouriera zapisuje się też czasem w inny sposób. Definiując

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{dla } n \geq 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{dla } n > 0$$

czyli

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 & \text{dla } n = 0 \\ \frac{1}{2} (a_n - i b_n) & \text{dla } n > 0 \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + i b_{-n}) & \text{dla } n < 0 \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{inx} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + ib_n) e^{-inx} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))
 \end{aligned}$$

Jest to inne rozwinięcie funkcji f w szereg, ale również nazywamy je szeregiem Fouriera. Mówimy odpowiednio o *wykładniczej* i *trygonometrycznej* postaci szeregu Fouriera.

W przypadku funkcji o dowolnym okresie T wzory na współczynniki szeregu Fouriera (i sam szereg) mają postać:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) dx$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{x}{T}\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \frac{x}{T}}$$

Można też zwrócić uwagę, że chociaż w powyższych wzorach całkowanie zawsze robimy od $-T/2$ do $T/2$, to ponieważ całkowane funkcje są okresowe, przedział całkowania można przesunąć, np. na od 0 do T ; ważne jest jedynie, by zawsze całkować po pełnym okresie.

Ćwiczenia wykładowe 12: szeregi Fouriera

Policzmy kilka szeregów Fouriera i zobaczmy co można z nich uzyskać.

Zacznijmy od funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in [-\pi, \pi] \\ \text{okresowa z okresem } 2\pi & \text{poza tym przedziałem} \end{cases}$$

Jest to funkcja ciągła, kawałkami gładka, pochodna jest ograniczona, więc spełnia założenia twierdzenia o szeregu Fouriera.

Dla tej funkcji mamy, dla $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx} dx = \end{aligned}$$

całkując przez części

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{x^2 e^{-inx}}{-in} \right|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2xe^{-inx}}{-in} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} - \frac{2xe^{-inx}}{(-in)^2} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2e^{-inx}}{(-in)^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} - \frac{2xe^{-inx}}{(-in)^2} + \frac{2e^{-inx}}{(-in)^3} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2(e^{-in\pi} - e^{in\pi})}{-in} - \frac{2\pi(e^{-in\pi} + e^{in\pi})}{(-in)^2} + \frac{2(e^{-in\pi} - e^{in\pi})}{(-in)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi^2((-1)^n - (-1)^n)}{-in} - \frac{2\pi((-1)^n + (-1)^n)}{(-in)^2} + \frac{2((-1)^n - (-1)^n)}{(-in)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{4\pi(-1)^n}{n^2} = \\ &= \frac{2(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

Przypadek $n = 0$ jest przypadkiem szczególnym:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Mamy więc szereg Fouriera w postaci wykładniczej

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

Współczynniki a_n i b_n można policzyć ze współczynników c_n , lub można policzyć je bezpośrednio. W ramach prezentacji policzę je bezpośrednio. Ponieważ

funkcja $f(x)$ jest funkcją parzystą, a funkcje $\sin(nx)$ są funkcjami nieparzystymi, czyli iloczyn $f(x)\sin(nx)$ jest funkcją nieparzystą, możemy bez liczenia stwierdzić, że współczynniki b_n będą równe 0: całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym (w tym przypadku $[-\pi, \pi]$) jest zawsze równa 0. Z kolei współczynniki a_n są dla $n \neq 0$ równe

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx =$$

całkując kilkakrotnie przez części

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right) \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi))}{n} + \frac{2\pi(\cos(n\pi) + \cos(-n\pi))}{n^2} - \frac{2(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi))}{n^3} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{4\pi(-1)^n}{n^2} = \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

Jak poprzednio, $n = 0$ jest szczególnym przypadkiem

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2}{3} \pi^3 = \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Mamy zatem (pamiętając że wyraz wolny jest równy $\frac{a_0}{2}$):

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Z tej równości możemy wyciągnąć parę interesujących wniosków. Jeżeli na przykład podstawimy $x = 0$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n0) \\ 0 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} &= -\frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Jeżeli natomiast podstawimy $x = \pi$ otrzymujemy

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Można też próbować podstawiać inne punkty, by dostać inne szeregi.

Weźmy teraz funkcję podobną jak poprzednio, ale zdefiniowaną jako

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in (0, 2\pi) \\ 2\pi^2 & \text{dla } x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \text{okresowa z okresem } 2\pi & \text{poza tym} \end{cases}$$

Ta funkcja jest kawałkami gładka, nieciągła w punktach $x = 2n\pi$, ale jej wartość w tych punktach została tak dobrana, by funkcja spełniała założenia twierdzenia o szeregu Fouriera. Ta funkcja pokrywa się z poprzednią na przedziale $(0, \pi)$, ale np. na przedziale $(\pi, 2\pi)$ jej wartości są różne od wartości poprzedniej funkcji.

Zamiast całkować od $-\pi$ do π , przedział całkowania wybierzemy od 0 do 2π ; nie zmieni to wartości całki (bo funkcja jest okresowa), ale dzięki temu obliczenia będą prostsze. Mamy dla $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-inx} dx = \end{aligned}$$

całkując przez części jak poprzednio

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x^2 e^{-inx}}{-in} - \frac{2xe^{-inx}}{(-in)^2} + \frac{2e^{-inx}}{(-in)^3} \right) \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi^2 e^{-i2n\pi} - 0}{-in} - \frac{4\pi e^{-i2n\pi} - 0}{(-in)^2} + \frac{2(e^{-i2n\pi} - 1)}{(-in)^3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi^2}{-in} - \frac{4\pi}{(-in)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(i \frac{4\pi^2}{n} + \frac{4\pi}{n^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2}$$

a dla $n = 0$

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi 2x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=2\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{8}{3} \pi^3 = \frac{4\pi^2}{3} \end{aligned}$$

A zatem

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) e^{inx}$$

Tym razem policzmy współczynniki a_n i b_n ze współczynników c_n . Mamy

$$a_n = c_n + c_{-n} = \left(i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) + \left(-i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) = \frac{4}{n^2}$$

dla $n \neq 0$ oraz

$$a_0 = 2c_0 = \frac{8\pi^2}{3}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \left(\left(i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) - \left(-i\frac{2\pi}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \right) = -\frac{4\pi}{n}$$

Co daje nam przedstawienie funkcji f w postaci

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} \sin(nx)$$

Z tego szeregu również możemy wyciągnąć informacje o sumie pewnych szeregów. Jeśli podstawimy $x = 0$ otrzymujemy

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a z podstawienia $x = \pi$ otrzymujemy

$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n = -\frac{\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Możemy jeszcze podstawić na przykład $x = \frac{\pi}{2}$. Korzystając z tego, że

$$\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 2k + 1 \\ (-1)^k & \text{dla } n = 2k \end{cases}$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n-1}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k)^2} (-1)^k - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} (-1)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} (-1)^{n-1} = \frac{13\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

wykorzystując wcześniej otrzymany rezultat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n} (-1)^{n-1} = \frac{13\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{12} = \pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{\pi}{4}$$

Zróbmy jeszcze jeden przypadek, w którym funkcja ma inny okres. Niech $0 < \tau < T$, i niech funkcja f będzie dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \tau) \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x \in \{0, \tau\} \\ 0 & \text{dla } x \in (t, T) \\ \text{okresowa z okresem } T & \text{poza tym} \end{cases}$$

Mamy dla tej funkcji, dla $n \neq 0$:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \left(\int_0^\tau 1 e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx + \int_\tau^T 0 e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx \right) = \\
&= \frac{1}{T} \left. \frac{e^{-2\pi i n \frac{x}{T}}}{-\frac{2\pi i n}{T}} \right|_0^\tau = \\
&= \frac{1}{T} \frac{e^{-2\pi i n \frac{\tau}{T}} - 1}{-\frac{2\pi i n}{T}} = \\
&= \frac{e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} - e^{\pi i n \frac{\tau}{T}}}{-2\pi i n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} = \\
&= \frac{-2i \sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{-2\pi i n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} = \\
&= \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}}
\end{aligned}$$

dla $n = 0$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^\tau 1 dx = \frac{\tau}{T}
\end{aligned}$$

czyli

$$f(x) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} e^{2\pi i n \frac{x}{T}}$$

Wzory wyrażające a_n i b_n za pomocą c_n są takie same jak w przypadku okresu 2π :

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} + \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{\pi i n \frac{\tau}{T}} = \frac{2 \sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} \cos(\pi n \frac{\tau}{T})$$

dla $n \neq 0$ oraz

$$a_0 = 2c_0 = \frac{2\tau}{T}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{-\pi i n \frac{\tau}{T}} - i \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} e^{\pi i n \frac{\tau}{T}} = \frac{2 \sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} \sin(\pi n \frac{\tau}{T})$$

czyli

$$f(x) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n} \left(\cos(\pi n \frac{\tau}{T}) \cos(2\pi n \frac{x}{T}) + \sin(\pi n \frac{\tau}{T}) \sin(2\pi n \frac{x}{T}) \right)$$

Chcę na koniec zwrócić uwagę na kilka faktów:

1. Jeśli funkcja f ma wartości rzeczywiste, to a_n i b_n są rzeczywiste (c_n niekoniecznie).
2. Jeśli funkcja f jest funkcją parzystą, to $b_n = 0$.

3. Jeśli funkcja f jest funkcją nieparzystą, to $a_n = 0$.

Świadomość tych faktów pozwala czasem uprościć obliczenia lub rozpoznać błędny wynik (jeśli na przykład dla funkcji o wartościach rzeczywistych policzymy a_n i b_n z c_n i nie wychodzą rzeczywiste, wiemy, że gdzieś w obliczeniach musiał wystąpić błąd).

Wykład 24: Właściwości szeregu Fouriera

Liczenie szeregu Fouriera można traktować jako odwzorowanie ze zbioru funkcji spełniających odpowiednie warunki w zbór ciągów¹¹ (w cudzysłowie, bo numerowanych liczbami całkowitymi, więc o indeksie od $-\infty$ do $+\infty$):

$$f \mapsto S_T[f] := (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

gdzie T jest okresem funkcji której szereg Fouriera liczymy, oraz

$$(S_T[f])_n = c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx$$

W przypadku, gdy $T = 2\pi$ będą pomijał indeks T , czyli $S[f] := S_{2\pi}[f]$.

Odwzorowanie to ma kilka ważnych własności.

Po pierwsze, jest liniowe, co wynika z liniowości całki ze względu na funkcję podcałkową. Jeśli $g(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, to

$$\begin{aligned} (S_T[g])_n &= \frac{1}{T} \int_0^T (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx = \\ &= \lambda_1 \frac{1}{T} \int_0^T f_1(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx + \lambda_2 \frac{1}{T} \int_0^T f_2(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx = \\ &= \lambda_1 (S_T[f_1])_n + \lambda_2 (S_T[f_2])_n \end{aligned}$$

Jeżeli więc mamy skomplikowaną funkcję, co do której możemy jednak zauważyć, że daje się ją rozpisać jako sumę dwóch prostszych funkcji, możemy obliczyć szereg Fouriera dla każdej składowej oddzielnie i zsumować je dopiero po obliczeniu.

Weźmy teraz $g(x) = f(x - a)$ (czyli wykres funkcji g jest wykresem funkcji f przesuniętym poziomo o odległość a). Mamy

$$\begin{aligned} (S_T[g])_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(x + a) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx \stackrel{y:=x+a}{=} \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{T+a} f(y) e^{-2\pi i n \frac{y-a}{T}} dy = \end{aligned}$$

ponieważ funkcja podcałkowa jest okresowa, przedział całkowania mogę przesunąć

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e^{-2\pi i n \frac{y}{T}} e^{2\pi i n \frac{a}{T}} dy = \\
&= e^{2\pi i n \frac{a}{T}} (S_T[f])_n
\end{aligned}$$

Jeżeli więc przesuniemy argument funkcji o stałą, powoduje to przemnożenie współczynników szeregu Fouriera o czynniki $e^{2\pi i n \frac{a}{T}}$.

Możemy też odwrócić sytuację i przesunąć szereg Fouriera. Załóżmy, że $(S_T[g])_n = (S_T[f])_{n-m}$, $m \in \mathbb{Z}$. Oznacza, to, że

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S_T[g])_n e^{2\pi i n \frac{x}{T}} = \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S_T[f])_{n-m} e^{2\pi i n \frac{x}{T}} \stackrel{k:=n-m}{=} \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_T[f])_k e^{2\pi i (k+m) \frac{x}{T}} = \\
&= e^{2\pi i m \frac{x}{T}} f(x)
\end{aligned}$$

Czyli aby otrzymać szereg Fouriera o przesuniętych współczynnikach, potrzebujemy przemnożyć funkcję f przez czynnik $e^{2\pi i m \frac{x}{T}}$.

Możemy też wziąć $g(x) = f(ax)$, $a > 0$, ale musimy zwrócić uwagę, że w tym przypadku okres funkcji się zmienia. Jeżeli funkcja f miała okres T , to funkcja g będzie miała okres $\frac{T}{a}$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
(S_{\frac{T}{a}}[g])_n &= \frac{a}{T} \int_0^{\frac{T}{a}} f(ax) e^{-2\pi i n \frac{ax}{T}} dx \stackrel{y:=ax}{=} \\
&= \frac{a}{T} \int_0^T f(y) e^{-2\pi i n \frac{y}{T}} \frac{dy}{a} = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e^{-2\pi i n \frac{y}{T}} dy = \\
&= (S_T[f])_n
\end{aligned}$$

Przeskalowanie argumentu funkcji nie zmienia zatem współczynników szeregu Fouriera. Trzeba jednak pamiętać, że żeby odzyskać funkcję z szeregu Fouriera musimy użyć innych wzorów, w zależności od docelowego okresu:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \frac{x}{T}} \\
g(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n \frac{ax}{T}}
\end{aligned}$$

To że możemy przeskalowywać okres funkcji bez zmiany szeregu współczynników szeregu Fouriera pokazuje, że do wielu zastosowań (np. do liczenia szeregów)

wystarczy rozważać funkcje okresowe o okresie 2π .

Jeżeli weźmiemy $g(x) = f(-x)$, mamy

$$\begin{aligned}(S_T[g])_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(-x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx \stackrel{y:=-x}{=} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{-T} f(y) e^{2\pi i n \frac{y}{T}} (-dy) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(y) e^{-2\pi i (-n) \frac{y}{T}} dy = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(y) e^{-2\pi i (-n) \frac{y}{T}} dy = \\ &= (S_T[f])_{-n}\end{aligned}$$

Łącząc ten przypadek z poprzednim, możemy znaleźć szereg Fouriera dla $g(x) = f(ax)$ dla dowolnego $a \neq 0$.

Rozpatrzmy teraz $g(x) = (f(x))^*$ (sprzężenie zespolone funkcji). Mamy

$$\begin{aligned}(S_T[g])_n &= \frac{1}{T} \int_0^T (f(x))^* e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx = \\ &= \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{2\pi i n \frac{x}{T}} dx \right)^* = \\ &= ((S_T[f])_{-n})^*\end{aligned}$$

Weźmy następnie $g(x) = f'(x)$; założmy przy tym, że pochodna $f'(x)$ istnieje wszędzie, i również spełnia warunki twierdzenia o szeregu Fouriera. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}(S_T[g])_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f'(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx \stackrel{\text{całkując przez części}}{=} \\ &= \left(\frac{1}{T} f'(x) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} \right) \Big|_{x=0}^{x=T} - \frac{1}{T} \int_0^T f(y) \left(-\frac{2\pi i n}{T} e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} \right) dx = \\ &= \frac{1}{T} (f'(T) e^{-2\pi i n} - f'(0)) + \frac{2\pi i n}{T^2} \int_0^T f(y) e^{-2\pi i n \frac{x}{T}} dx = \\ &\quad \text{z okresowości funkcji } f' \text{ pierwszy składnik się zeruje} \\ &= \frac{2\pi i n}{T} (S_T[f])_n\end{aligned}$$

Ważne jest tu, aby pochodna f' istniała wszędzie; jeżeli istnieje tylko prawie wszędzie (z wyjątkiem pojedynczych punktów) powyższy wzór nie musi być

spełniony. Takim przykładem, gdy ten wzór nie działa, jest np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \\ 0 & \text{dla } x \in \{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\} \\ \text{jest okresowa z okresem } T & \end{cases}$$

której pochodna jest równa 1 prawie wszędzie, za wyjątkiem punktów $x = \frac{T}{2} + nT$, gdzie pochodna nie istnieje; jednak szereg Fouriera funkcji $g(x) = 1$ stale równej jeden ma współczynniki

$$(S_T[g])_0 = 1, \quad (S_T[g])_n = 0 \text{ dla } n \neq 0$$

i nawet bez liczenia szeregu funkcji f można łatwo zauważyć, że jest niemożliwe, aby $(S_T[g])_n = \frac{2\pi in}{T}(S_T[f])_n$.

Znajdźmy teraz taką funkcję g , dla której

$$(S_T[g])_n = (S_T[f_1])_n(S_T[f_2])_n$$

gdzie f_1 i f_2 są danymi funkcjami. Mamy

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f_1(y) e^{-2\pi i n \frac{y}{T}} dy \right) (S_T[f_2])_n e^{2\pi i n \frac{x}{T}} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_1(y) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (S_T[f_2])_n e^{2\pi i n \frac{x-y}{T}} \right) dy = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f_1(y) f_2(x-y) dy \end{aligned}$$

Wyprowadzenie to zakłada, że można zamieniać nieskończone sumowanie z całkowaniem; w ogólności nie jest to zawsze dopuszczalne, ale jeśli szeregi i całki są odpowiednio dobrze zbieżne, nie ma z tym wielkiego problemu.

Używając tych wyrażeń możemy konstruować funkcje o żądanych szeregach Fouriera - przydatne, gdy mamy do obliczenia konkretną sumę szeregu liczbowego i potrzebujemy znaleźć odpowiednią funkcję umożliwiającą znalezienie wartości danego szeregu.

Rozpatrzmy szczególny przypadek ostatniego wzoru, gdy $x = 0$, $T = 2\pi$. Z jednej strony, mamy

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(y) f_2(-y) dy$$

a z drugiej

$$g(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S[g])_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S[f_1])_n (S[f_2])_n$$

Daje nam to równość

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x) f_2(-x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S[f_1])_n (S[f_2])_n$$

Zmieńmy teraz oznaczenia: niech $f(x) = f_1(x)$ oraz $f_2(x) = (g(-x))^*$. Na podstawie wcześniej wyprowadzonych wzorów mamy

$$(S[f_2])_n = (S[g^*])_{-n} = (S[g])^*$$

a zatem otrzymujemy równość

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (g(x))^* dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (S[f_1])_n ((S[g])_n)^*$$

Ten wzór jest znany jako twierdzenie Plancherela:

Twierdzenie Plancherela dla szeregu Fouriera:
 Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami okresowymi o okresie 2π takimi, że całki $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ i $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx$ są zbieżne. Jeśli

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n e^{inx} = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n \cos(nx) + \tilde{b}_n \sin(nx))$$

to

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) (g(x))^* dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (\tilde{c}_n)^* = \frac{a_0 (\tilde{a}_0)^*}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n (\tilde{a}_n)^* + b_n (\tilde{b}_n)^*)$$

Warunek, że całki $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ i $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx$ są zbieżne, jest potrzebny by zagwarantować zbieżność całek i szeregów występujących w tezie. Część tezy dotycząca szeregu Fouriera w postaci trygonometrycznej wynika ze wzorów

$$c_0 \tilde{c}_0 = \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\tilde{a}_0}{2}$$

$$\begin{aligned} c_n (\tilde{c}_n)^* + c_{-n} (\tilde{c}_{-n})^* &= \frac{a_n - ib_n}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{a}_n - i\tilde{b}_n}{2} \right)^* + \frac{a_n + ib_n}{2} \cdot \left(\frac{\tilde{a}_n + i\tilde{b}_n}{2} \right)^* = \\ &= \frac{1}{2} (a_n (\tilde{a}_n)^* + b_n (\tilde{b}_n)^*) \quad \text{dla } n \geq 1 \end{aligned}$$

Szczególny przypadek twierdzenia Plancherela, dla $g = f$, nosi nazwę twierdzenia Parsewala:

Twierdzenie Parsewala dla szeregu Fouriera:

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją okresową o okresie 2π taką, że całka $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ jest zbieżna. Jeśli

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

to

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_n (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

Twierdzenia Plancherela i Parsewala również można wykorzystywać do liczenia szeregów. Są one o tyle pomocne, że żeby policzyć np. szereg $\sum \frac{1}{n^4}$ Nie potrzebujemy funkcji, której szereg Fouriera ma współczynniki proporcjonalne do $\frac{1}{n^4}$. Ponieważ we wzorze Parsewala współczynniki te są podnoszone do kwadratu, wystarczy nam funkcja o szeregu ze współczynnikami proporcjonalnymi do $\frac{1}{n^2}$.

Wykład 25: Transformata Fouriera

Rozważmy dowolną funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, niekoniecznie okresową, ale taką, że na każdym skończonym przedziale spełnia pozostałe założenia twierdzenia o szeregu Fouriera (czyli jest kawałkami gładka, ograniczona na każdym przedziale itd.). Zdefiniujmy dla niej funkcje $f_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ następująco:

$$f_T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}) \\ \frac{f(\frac{T}{2}) + f(-\frac{T}{2})}{2} & \text{dla } x \in \{-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\} \\ \text{jest okresowa z okresem } T & \end{cases}$$

Funkcje f_T spełniają założenia twierdzenia o szeregu Fouriera dla funkcji okresowej z okresem T , można je więc przedstawić jako:

$$F_T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(T) e^{2\pi i \frac{x}{T}}$$

Ponieważ dla $T > 2|x|$ mamy $f_T(x) = f(x)$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$f(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(T) e^{2\pi i n \frac{x}{T}}$$

Okazuje się, że jeśli użyjemy odpowiednich przekształceń, to tą granicę sumy można przedstawić jako całkę (podobnie jak to się robi w całce Riemanna). W tym celu wybierzmy $T_N = 2\pi N$ zdefiniujmy

$$k_n(N) = \frac{2\pi n}{T_N} = \frac{n}{N}$$

$$\Delta k(N) = k_{n+1}(N) - k_n(N) = \frac{1}{N}$$

Zdefiniujmy też funkcje

$$\tilde{f}_N : \frac{1}{N}\mathbb{Z} = \left\{ \frac{n}{N} : n \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$$

następująco:

$$\tilde{f}_N(k) = T_N c_{kN}(T_N) = T_N \cdot \frac{1}{T_N} \int_{-\frac{T_N}{2}}^{\frac{T_N}{2}} f(x) e^{-2\pi i k N \frac{x}{2\pi N}} dx = \int_{-\frac{T_N}{2}}^{\frac{T_N}{2}} f(x) e^{-ikx} dx$$

Mamy wówczas

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(T_N) e^{2\pi i n \frac{x}{2\pi N}} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} c_{kN}(T_N) e^{ikx} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \frac{f_N(k)}{T_N} e^{ikx} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} f_N(k) e^{ikx} \frac{\Delta k(N)}{2\pi} \end{aligned}$$

W granicy $N \rightarrow \infty$ mamy $\Delta k(N) \rightarrow 0$, więc dyskretne wartości zmiennej $k \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ stają się wartościami ciągłej zmiennej $k \in \mathbb{R}$, a sumowanie po $K \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}$ zamienia się w całkowanie po $k \in \mathbb{R}$, i otrzymujemy

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

gdzie \tilde{f} jest funkcją która dla $k = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ jest wyznaczona przez granica funkcji $f_{Nm}(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{f}_{Nm}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{f}_{Nm}\left(\frac{n}{m}\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}T_{Nm}}^{\frac{1}{2}T_{Nm}} f(x) e^{-i\frac{n}{m}x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

Ten ostatni wzór można obliczyć również dla $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, i definiuje on $\tilde{f}(k)$ dla tych argumentów.

Mamy więc

Twierdzenie o transformacie Fouriera:

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że

- jest kawałkami gładka, czyli każdy skończony przedział (a, b) można podzielić na skończoną liczbę przedziałów (x_i, x_{i+1}) na których funkcja f jest ciągła i ma ciągłą pochodną
- na każdym przedziale gładkości pochodna funkcji f jest ograniczona
- w punktach nieciągłości x_i granice lewostronna i prawostronna funkcji f są skończone i spełniają one warunek

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_{i-}} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_{i+}} f(x) \right)$$

- całka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ jest zbieżna

Wtedy dla wszystkich $k \in \mathbb{R}$ całki

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

są zbieżne i dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

Przekształcenie funkcji $f \mapsto \tilde{f}$ nazywamy *transformatą Fouriera*, a przekształcenie odwrotne $\tilde{f} \mapsto f$ nazywamy adekwatnie *odwrotną transformatą Fouriera*.

Uwaga: istnieją też inne konwencje

Powyższą procedurę wyprowadzenia wzorów na transformatę Fouriera można przeprowadzić nieco inaczej, i wtedy dostaniemy nieco inne wzory na transformatę Fouriera i odwrotną transformatę Fouriera. Wyżej przedstawione są wzory używane przez większość fizyków; mają one tę zaletę, że pod pewnymi względami są najprostsze: we wzorach końcowych wyrażenie 2π pojawia się tylko w jednym miejscu i jak zobaczymy, w kolejnych wzorach też będzie pojawiać się tylko w tym jednym miejscu (zawsze gdy będzie całkowanie po k , różniczka dk będzie dzielona przez 2π). Są też w użyciu też inne konwencje.

Matematycy zazwyczaj wolą konwencję, w której

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

Ta konwencja ma tę zaletę, że wzory na transformatę i odwrotną transformatę są niemal identyczne, różnica jest jedynie w zamianie i na $-i$ w wykładniku

eksponensa. Ceną za to jest pojawienie się pierwiastków. Podobnie wszystkie pochodne wzory są w tej konwencji podobnie symetryczne.

Czasem też można napotkać konwencję w postaci

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\nu x} dx$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x} d\nu$$

W tej konwencji również wzory są symetryczne, za co płacimy czynnikiem 2π w wykładnikach eksponensów. Ta konwencja jest używana najczęściej przez ludzi zajmujących się obróbką sygnałów czasowych; x (oznaczane wtedy t) pełni wtedy rolę czasu, a ν częstotliwości, odwrotna transformata opisuje rozkład sygnału na fale o różnych częstotliwościach.

Wszystkie wzory dotyczące transformaty Fouriera które jeszcze się pojawią można wyprowadzać w dowolnej konwencji, jednak w różnych konwencjach będą wyglądały różnie. Dlatego czytając książki i inne źródła na temat transformaty Fouriera należy zwrócić uwagę, której konwencji one używają. Różnice we wzorach mogą wynikać z różnic w konwencjach, a niekoniecznie z jakiegoś błędu po której stronie. Na tym wykładzie będę używał pierwszej z podanych konwencji.

Właściwości transformaty Fouriera

Różne właściwości transformaty Fouriera można znaleźć w podobny sposób jak znajdowaliśmy właściwości szeregu Fouriera. Wyprowadzenia są całkowicie analityczne, więc przedstawię tylko wyniki obliczeń:

$g(x)$	$\tilde{g}(k)$
$f(x - a)$	$e^{-ika} \tilde{f}(k)$
$e^{i\lambda x} f(x)$	$\tilde{f}(k - \lambda)$
$f(ax), \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } \tilde{f}\left(\frac{k}{a}\right)$
$f(x)^*$	$(\tilde{f}(-k))^*$
$\frac{df}{dx}(x)$	$ik \tilde{f}(k)$
$\frac{d^2 f}{dx^2} f(x)$	$(ik)^2 \tilde{f}(k)$
$xf(x)$	$i \frac{d}{dk} \tilde{f}(k)$
$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n}{dk^n} \tilde{f}(k)$
$f_1(x)f_2(x)$	$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(k') \tilde{f}_2(k - k') \frac{dk'}{2\pi}$
$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)f_2(x - y)dy$	$\tilde{f}_1(k)\tilde{f}_2(k)$

Mamy też wzory Plancherela i Parsewala dla transformaty Fouriera:

Twierdzenie Plancherela dla transformaty Fouriera:

Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcjami takimi, że całki $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$ są zbieżne. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x))^* dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)(\tilde{g}(k))^* \frac{dk}{2\pi}$$

Twierdzenie Parsewala dla transformaty Fouriera:

Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że całka $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ jest zbieżna. Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi}$$

Udowodnijmy twierdzenie Plancherela (twierdzenie Parsewala jest szczególnym przypadkiem $g = f$):

Mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x))^* dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} \right) (g(x))^* dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (g(x))^* e^{ikx} dx \right) \frac{dk}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \right)^* \frac{dk}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)(\tilde{g}(k))^* \frac{dk}{2\pi} \end{aligned}$$

Na właściwościach transformaty Fouriera opiera się tzw. zasada nieoznaczoności, o ogromnym znaczeniu w fizyce. Jej interpretację fizyczną poznamy na wykładzie z mechaniki kwantowej, na poziomie matematycznym ma ona postać:

Zasada nieoznaczoności:

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będą funkcją posiadającą transformatę Fouriera taką, że $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$. Niech

$$e_x = \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty, \quad e_k = \int_{-\infty}^{\infty} k |\tilde{f}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi} < \infty$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x)^2 |f(x)|^2 dx$$

$$\sigma_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (k - e_k)^2 |\tilde{f}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi}$$

Wówczas

$$\sigma_x^2 \sigma_k^2 \geq \frac{1}{4}$$

Dowód:

Rozważmy funkcję

$$h_\lambda(x) = \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right) + \lambda(x - e_x) f(x)$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h_\lambda(x)|^2 dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right) + \lambda(x - e_x) f(x) \right|^2 dx = \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right|^2 dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right)^* ((x - e_x) f(x)) dx + \\ &\quad + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} ((x - e_x) f(x))^* \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x)^2 |f(x)|^2 dx = \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right|^2 dx + 2\lambda \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right)^* ((x - e_x) f(x)) dx \right] + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x)^2 |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Niech

$$g(x) = \frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x)$$

Korzystając z właściwości transformaty Fouriera, możemy stwierdzić, że

$$\tilde{g}(k) = ik\tilde{f}(k) - ie_k f(x) = i(k - e_k)\tilde{f}(k)$$

Z twierdzenia Parsevala mamy wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (k - e_k)^2 |\tilde{f}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi} = \sigma_k^2$$

Mamy też

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f(x) - ie_k f(x) \right)^* ((x - e_x) f(x)) dx \right] = \\ & = 2\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df(x)^*}{dx} (x - e_x) f(x) - ie_k (x - e_x) |f(x)|^2 \right) dx \right] = \\ & = 2\operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df(x)^*}{dx} (x - e_x) f(x) \right) dx \right] = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x) \left(\frac{df(x)^*}{dx} f(x) + f(x)^* \frac{df(x)}{dx} \right) dx = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x) \frac{d}{dx} (|f(x)|^2) dx = \\ & \quad \text{całkując przez części} \\ & = \left[(x - e_x) \frac{d}{dx} (|f(x)|^2) \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (x - e_x) |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx < \infty$ (z założenia), wymaga to, aby $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x |f(x)|^2 = 0$, czyli wyraz brzegowy jest równy 0. Otrzymujemy zatem

$$(\dots) = - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -1$$

Wreszcie mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - e_x)^2 |f(x)|^2 dx = \sigma_x^2$$

Mamy zatem:

$$0 \leq \lambda^2 \sigma_k^2 - \lambda + \sigma_x^2$$

Ponieważ jest to spełnione dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$, oznacza to że równanie $0 = \lambda^2 \sigma_k^2 - 2\lambda + \sigma_x^2$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie rzeczywiste. W przeciwnym przypadku bowiem istniałby przedział (λ_1, λ_2) , taki, że dla $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ zachodziłoby $\lambda^2 \sigma_k^2 - 2\lambda + \sigma_x^2 < 0$. A zatem wyróżnik Δ tego równania kwadratowego jest mniejszy lub równy 0:

$$\begin{aligned} \Delta & \leq 0 \\ 1 - 4\sigma_k^2 \sigma_x^2 & \leq 0 \\ \sigma_x^2 \sigma_k^2 & \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

co było do udowodnienia.

Na koniec tego wykładu, zwróć jeszcze uwagę, że transformatę Fouriera można uogólnić na funkcje wielu zmiennych. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiujemy $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ następująco:

$$\tilde{f}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-ik_1 x_1 - ik_2 x_2 - \dots - ik_n x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

czyli, używając standardowego iloczynu skalarnego

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^n x$$

Wtedy mamy (odwrotna transformata Fouriera):

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{d^n k}{(2\pi)^n}$$

Ćwiczenia wykładowe 13: transformata Fouriera

Jako przykład obliczenia transformaty Fouriera, znajdziemy transformatę Fouriera funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Używając definicji, mamy

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) e^{-ikx} dx = \text{calkując przez części} \\ &= \left[(1 - x^2) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 (-2x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx = \\ &= \left[(1 - x^2) \frac{e^{-ikx}}{-ik} + 2x \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2} \right]_{x=-1}^{x=1} + \int_{-1}^1 (-2) \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx = \\ &= \left[(1 - x^2) \frac{e^{-ikx}}{-ik} + 2x \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2} - 2 \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \\ &= 2 \frac{e^{-ik} + e^{ik}}{(-ik)^2} - 2 \frac{e^{-ik} - e^{ik}}{(-ik)^3} = \\ &= 2 \frac{2 \cos k}{-k^2} - 2 \frac{-2i \sin k}{ik^3} = \\ &= 4 \frac{\sin k - k \cos k}{k^3} \end{aligned}$$

Używając odwrotnej transformaty Fouriera mamy zatem

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 4 \frac{\sin k - k \cos k}{k^3} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

czyli na przykład

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} 4 \frac{\sin k - k \cos k}{k^3} \frac{dk}{2\pi} \\ 1 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k - k \cos k}{k^3} dk \end{aligned}$$

czyli obliczyliśmy w ten sposób wartość całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k - k \cos k}{k^3} dk = \frac{\pi}{2}$$

Do liczenia transformat Fouriera trzeba często użyć metody całkowania konturowego z analizy zespolonej. Weźmy na przykład

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0$$

Mamy

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} e^{-ikx} dx$$

Możemy użyć konturu po półkolu w górnej płaszczyźnie zespolonej, ale wymaga to $-k \geq 0$ czyli $k \leq 0$. Dla tych k , całka po będącym częścią tego konturu półokręgu dąży do nieskończoności w granicy $R \rightarrow \infty$, mamy więc

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \oint \frac{z}{(z^2 + a^2)^2} e^{-ikz} dz = \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{ze^{-ikz}}{(z^2 + a^2)^2}, ia \right) = \\ &\quad \text{biegun jest drugiego rzędu} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left((z - ia)^2 \frac{ze^{-ikz}}{(z^2 + a^2)^2} \right) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left(\frac{ze^{-ikz}}{(z + ia)^2} \right) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{e^{-ikz} - ikze^{-ikz}}{(z + ia)^2} - 2 \frac{ze^{-ikz}}{(z + ia)^3} \right) = \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{ka} + kae^{ka}}{(2ia)^2} - 2 \frac{iae^{ka}}{(2ia)^3} \right) = \\ &= 2\pi i e^{ka} \left(\frac{1 + ka}{-4a^2} - 2 \frac{ia}{-8ia^3} \right) = \\ &= 2\pi i e^{ka} \frac{-k}{4a} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-i\pi k e^{ka}}{2a}$$

Dla $k \geq 0$ możemy natomiast użyć relacji

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} e^{-ikx} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} e^{ikx} dx \right)^* = (\tilde{f}(-k))^*$$

czyli

$$\tilde{f}(k) = \left(\frac{-i\pi(-k)e^{-ka}}{2a} \right)^* = \frac{-i\pi k e^{-ka}}{2a}$$

Łącząc przypadki $k \leq 0$ i $k \geq 0$ otrzymujemy

$$\tilde{f}(k) = \frac{-i\pi k e^{-|k|a}}{2a}$$

Zwróćmy uwagę, że chociaż funkcja f była funkcją o wartościach rzeczywistych, to funkcja \tilde{f} jest funkcją o wartościach czysto urojonych. Można się tego było spodziewać na podstawie relacji

$$(g(x) = f(-x)) \Rightarrow (\tilde{g}(k) = \tilde{f}(-k))$$

$$(g(x) = (f(x))^*) \Rightarrow (\tilde{g}(k) = (\tilde{f}(-k))^*)$$

W naszym przypadku funkcja f jest nieparzystą funkcją o wartościach rzeczywistych, czyli

$$f(x) = -f(-x) = (f(x))^*$$

z czego wynika, że

$$\tilde{f}(k) = -\tilde{f}(-k) = (\tilde{f}(-k))^*$$

a zatem między innymi

$$(\tilde{f}(k))^* = -\tilde{f}(k)$$

czyli \tilde{f} jest funkcją nieparzystą o czysto urojonych wartościach, tak jak to znaleźliśmy.

Otrzymany wynik można użyć na przykład do policzenia całki

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^4} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 \frac{dk}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi^2 k^2 e^{-2|k|a}}{4a^2} \frac{dk}{2\pi} = \\ &= \frac{\pi}{8a^2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 e^{-2|k|a} dk = \\ &= \frac{\pi}{4a^2} \int_0^{\infty} k^2 e^{-2ka} dk = \frac{\pi}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4a^2} \frac{1}{(2a)^3} \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \\
&= \frac{\pi}{32a^5} \Gamma(3) = \frac{\pi}{16a^5}
\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że gdyby liczyć tę całkę od razu za pomocą całki konturowej, musielibyśmy policzyć residuum w biegunie czwartego rzędu; przy użyciu transformaty Fouriera wystarczyło nam liczyć residuum w biegunie drugiego rzędu.

Policzmy jeszcze jakąś transformatę wielowymiarową. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(\vec{x}) = \frac{e^{-\lambda|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}, \quad \lambda > 0$$

Ta funkcja ma co prawda osobliwość w $x = 0$, ale jest to osobliwość całkowna, więc okazuje się, że transformatę Fouriera wciąż można policzyć. Mamy

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\lambda|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3x$$

aby policzyć tę całkę, wprowadźmy współrzędne sferyczne, choć w nieco nietypowy sposób, mianowicie, zamiast liczyć kąt θ od osi Z, liczymy ten kąt od kierunku wyznaczonego przez wektor \vec{k} . Podobnie kąt φ będzie rozróżniał różne kierunki dookoła osi wyznaczonej przez wektor \vec{k} . Reszty nie zmienamy, więc nadal mamy $|\vec{x}| = r$ oraz $d^3x = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. Mamy też

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = |\vec{k}| |\vec{x}| \cos\theta = |\vec{k}| r \cos\theta$$

A zatem

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\vec{k}) &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin\theta \frac{e^{-\lambda r}}{r} e^{-i|\vec{k}|r \cos\theta} = \\
&= 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-\lambda r} \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-i|\vec{k}|r \cos\theta} = \\
&= 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-\lambda r} \left(\frac{1}{i|\vec{k}|r} e^{-i|\vec{k}|r \cos\theta} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \\
&= \frac{2\pi}{i|\vec{k}|} \int_0^\infty dr e^{-\lambda r} \left(e^{i|\vec{k}|r} - e^{-i|\vec{k}|r} \right) = \\
&= \frac{2\pi}{i|\vec{k}|} \int_0^\infty dr e^{-\lambda r} 2i \sin(|\vec{k}|r) = \\
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \int_0^\infty dr e^{-\lambda r} \sin(|\vec{k}|r) = \\
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda r + i|\vec{k}|r} dr \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-\lambda + i|\vec{k}|} e^{-\lambda r + i|\vec{k}|r} \right) \Big|_{r=0}^{\infty} = \\
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\lambda - i|\vec{k}|} \right) = \\
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \operatorname{Im} \left(\frac{\lambda + i|\vec{k}|}{\lambda^2 + |\vec{k}|^2} \right) = \\
&= \frac{4\pi}{|\vec{k}|} \frac{|\vec{k}|}{\lambda^2 + |\vec{k}|^2} = \\
&= \frac{4\pi}{\lambda^2 + |\vec{k}|^2}
\end{aligned}$$

Jest to przypadek ważny fizycznie, ponieważ tzw. potencjał Yukawy jest wyrażony przez funkcję f , a w granicy $\lambda \rightarrow 0$ otrzymujemy znany potencjał Coulomba. W sensie tej granicy możemy zatem powiedzieć, że transformata Fouriera funkcji

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$$

jest funkcja

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}$$

co jest wykorzystywane w wielu wyprowadzeniach w fizyce.

Wykład 26: Dystrybucje

Przypomnijmy pewną konstrukcję z dziedziny algebry:

Jeśli V jest przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{K} (zazwyczaj $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C}), to zbiór $L(V, \mathbb{K})$ odwzorowań liniowych z V do ciała \mathbb{K} z działaniami zdefiniowanymi jako

$$(\phi_1 + \phi_2)(v) = \phi_1(v) + \phi_2(v) \quad \text{dla wszystkich } \phi_1, \phi_2 \in L(V, \mathbb{K}), \quad v \in V$$

$$(\lambda\phi)(v) = \lambda\phi(v) \quad \text{dla wszystkich } \lambda \in \mathbb{K}, \quad \phi \in L(V, \mathbb{K}), \quad v \in V$$

również jest przestrzenią wektorową nad \mathbb{K} .

Z punktu widzenia analizy najbardziej interesującymi przestrzeniami wektorowymi są przestrzenie, których elementami są funkcje, między innymi

- $C(X, Y)$: zbiór funkcji ciągłych ze zbioru X do zbioru Y ,
- $C^1(X, Y)$: zbiór funkcji ciągłych z X do Y , dla których pochodna istnieje w każdym punkcie i również jest ciągła,

- $C^\infty(X, Y)$: zbiór funkcji gładkich z X do Y ,
- $L^p(X, Y)$: zbiór funkcji f z X do Y dla których tzw. p -norma $\|f\|_p := (\int_X \|f(x)\|^p dx)^{1/p}$ istnieje i jest skończona

Gdy zbiór Y nie jest podany, zazwyczaj przyjmuje się $Y = \mathbb{C}$.

Definicja (funkcjonał):

Niech V będzie pewna przestrzenią funkcji. *Funkcjonałem* na przestrzeni V o wartościach w ciele K nazywamy dowolne odwzorowanie z V do K .

Innymi słowy, funkcjonały to funkcje, których argumentami są inne funkcje. Z tego powodu stosuje się dla nich często wyjątkowe oznaczenie: argument funkcjonału umieszczamy w nawiasach kwadratowych a nie okrągłych. Przykładami funkcjonałów na przestrzeni $V = C^\infty([-1, 1])$ są między innymi

- $I_1[f] = f(0)$
- $I_2[f] = \int_{-1}^1 e^{-f(x)} dx$
- $I_3[f] = \int_{-1}^1 (f'(x)^2 + f(x)^2) dx$

Jeśli funkcjonal jest jednocześnie odwzorowaniem liniowym, nazywamy go *funkcjonałem liniowym* lub *dystrybucją*:

Definicja (dystrybucja):

Niech V będzie pewna przestrzenią funkcji na danym zbiorze X o wartościach w ciele \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub \mathbb{C}). *Dystrybucjami* na przestrzeni funkcyjnej V nazywamy funkcjonały liniowe na przestrzeni V , czyli elementy przestrzeni $L(V, \mathbb{K})$. Przestrzeń V nazywamy wtedy *przestrzenią funkcji próbnych* dla tych dystrybucji.

Weźmy na przykład $V = C^\infty([-1, 1])$. Dystrybucjami na tej przestrzeni są między innymi

- $\phi_1[f] = \int_{-1}^1 f(x) dx$
- $\phi_2[f] = f''(\frac{1}{2})$
- $\phi_3[f] = \int_0^1 f'(x)x^2 dx$

Dystrybucje tworzą przestrzeń wektorową, to znaczy można je do siebie dodawać i mnożyć przez liczby. Jak jednak pokażemy później, można na nich wykonywać też inne operacje.

Z pojęciem dystrybucji wiąże się pojęcie *funkcji uogólnionych*. Zauważmy, że jeśli weźmiemy funkcję $g : X \rightarrow \mathbb{K}$, to odwzorowanie

$$g[f] := \int_X g(x)f(x) dx$$

jest dystrybucją (przy założeniu że powyższa całka jest zbieżna dla wszystkich funkcji $f \in V$). Uwaga: funkcja g i dystrybucja g są, technicznie rzecz biorąc, różnymi obiektami, jedynie powiązanymi powyższą relacją. Tym niemniej często oznacza się je tym samym symbolem, jak zrobiłem to powyżej. W takim przypadku rozróżniamy między funkcją a dystrybucją patrząc, co jest argumentem: $g(x)$ oznacza wartości funkcji w punkcie $x \in X$, a $g[f]$ oznacza wartość dystrybucji na funkcji f .

Istnieje jednak wiele dystrybucji których nie daje się zapisać w powyższy sposób, na przykład, dla $V = C(\mathbb{R})$ mamy dystrybucję

$$\delta[f] = f(0)$$

której nie da się zapisać w postaci

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją. Tym niemniej, wciąż używa się tego zapisu, twierdząc jedynie, że $\delta(x)$ jest *funkcją uogólnioną*. Funkcje uogólnione nie są definiowane przez ich wartości w każdym punkcie zbioru X jak zwykłe funkcje, ale właśnie przez powiązane z nimi dystrybucje. Czyli konkretnie w tym przypadku $\delta(x)$ jest taką funkcją uogólnioną, że dla dowolnej funkcji $f \in C(\mathbb{R})$ zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0)$$

Tą dystrybucję/funkcję uogólnioną nazywa się *deltą Diraca*. Terminy dystrybucja i funkcja uogólniona często stosuje się wymiennie.

Na funkcjach uogólnionych możemy wykonywać wiele działań tak jak na funkcjach. Możemy je do siebie dodawać, jak i dodawać do nich zwykłe funkcje. Możemy je mnożyć przez liczby, a także przez zwykłe funkcje. W ogólności nie możemy jednak mnożyć dwóch funkcji uogólnionych przez siebie. Zobaczmy na przykład co się dzieje, jeśli spróbujemy przemnożyć deltą Diraca przez siebie i policzyć $(\delta(x))^2$. Jeśli wynik byłby również dystrybucją, moglibyśmy policzyć

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(\delta(x)f(x))dx = \delta(0)f(0)$$

ten wynik jednak nie ma sensu, bo $\delta(x)$ nie jest funkcją i nie ma czegoś takiego jak $\delta(0)$. Mnożenie przez zwykłe funkcje jednak działa bezproblemowo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g(x)\delta(x))f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)(g(x)f(x))dx = g(0)f(0)$$

W tym ostatnim wzorze zauważmy jeszcze, że możemy wynik zapisać jako

$$g(0)f(0) = g(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (g(0)\delta(x))f(x)dx$$

Porównując oba wzory, i pamiętając, że równość zachodzi dla dowolnej funkcji f , dostajemy relację

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$$

czyli że mnożenie delty Diraca przez funkcję $g(x)$ jest równoważne mnożeniu przez liczbę $g(0)$. Jest to ważna właściwość delty Diraca umożliwiająca upraszczanie wielu wzorów w których ona się pojawia.

W funkcjach uogólnionych można też wykonywać operacje na argumentach x tych funkcji, przynajmniej niektóre. Zasada jest taka, że funkcja uogólniona z przekształconym argumentem zachowuje się pod całką tak, jakby była zwykłą funkcją. Mamy na przykład

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx \stackrel{\text{podstawienie } y = x-a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(y+a)dy = f(0+a) = f(a)$$

Czyli analogicznie do tego, jak dystrybucja $\delta(x)$ obliczona na funkcji f daje wartość funkcji f w punkcie 0, dystrybucja $\delta(x-a)$ obliczona na funkcji f daje wartość funkcji f w punkcie a .

Możemy też policzyć, dla $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}dy = \frac{1}{\lambda}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{\lambda}f(x)dx$$

czyli

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{\lambda} \quad \text{dla } \lambda > 0$$

Dla $\lambda < 0$ mamy podobnie, ale po zamianie zmiennej granice całkowania się odwracają, co generuje dodatkowy znak minus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda x)f(x)dx = \int_{\infty}^{-\infty} \delta(y)f\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}dy = -\frac{1}{\lambda}f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{-\lambda}f(x)dx$$

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{-\lambda} \quad \text{dla } \lambda < 0$$

Łącząc oba przypadki mamy

$$\delta(\lambda x) = \frac{\delta(x)}{|\lambda|} \quad \text{dla } \lambda \neq 0$$

Możemy też zrobić bardziej skomplikowane przekształcenie argumentu. Założmy, że $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją monotonicznie rosnącą, różniczkowalną, i dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ pochodna $h'(x)$ jest ściśle dodatnia. Oznaczmy $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$. Mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(h(x))f(x)dx = \int_a^b \delta(y)f(h^{-1}(y))d(h^{-1}(y)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \delta(y) f(h^{-1}(y)) (h^{-1})'(y) dy = \\
&= \int_a^b \delta(y) f(h^{-1}(y)) \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} dy
\end{aligned}$$

Tą całkę możemy zapisać jako

$$(\dots) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) g(y) dy = g(0)$$

gdzie

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} & \text{dla } y \in (a, b) \\ 0 & \text{dla } y \notin (a, b) \end{cases}$$

W przypadku, gdy $0 \in (a, b)$ oznaczmy $h^{-1}(0) =: x_0$, czyli x_0 spełnia warunek $h(x_0) = 0$. Mamy

$$g(0) = \begin{cases} f(x_0) \frac{1}{h'(x_0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-x_0)}{h'(x_0)} f(x) dx & \text{gdy } 0 \in (a, b) \\ 0 = \int_{-\infty}^{\infty} 0 f(x) dx & \text{gdy } 0 \notin (a, b) \end{cases}$$

Porównując początkowe wyrażenie z końcowym i pamiętając, że równość zachodzi dla dowolnej funkcji f , dostajemy

$$\delta(h(x)) = \begin{cases} \frac{\delta(x-x_0)}{h'(x_0)} & \text{gdy } 0 \in (\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)) \\ 0 & \text{gdy } 0 \notin (\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)) \end{cases}$$

W tym wyprowadzeniu założyliśmy że h jest funkcją rosnącą, o dodatniej pochodnej. Analogiczne wyprowadzenie można powtórzyć dla h będącego funkcją malejącą, i łącząc oba przypadki możemy znaleźć wzór

$$\delta(h(x)) = \begin{cases} \frac{\delta(x-x_0)}{|h'(x_0)|} & \text{gdy } h(x) \text{ przyjmuje wartość } 0 \text{ dla pewnego } x = x_0 \\ 0 & \text{gdy } h(x) \text{ nie przyjmuje wartości } 0 \text{ dla żadnego } x \end{cases}$$

Możemy też rozważyć funkcję h która nie jest monotoniczna, pod warunkiem że jest kawałkami monotoniczna, czyli możemy rozłożyć całą prostą rzeczywistą \mathbb{R} na sumę przedziałów I_i

$$\mathbb{R} = \bigcup_i I_i$$

takich, że na każdym przedziale funkcja h jest monotoniczna. Mamy wtedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(h(x)) f(x) dx = \sum_i \int_{I_i} \delta(h(x)) f(x) dx$$

Na każdym z przedziałów możemy dokonać zamiany zmiennych tak jak w przypadku funkcji monotonicznej. Dalsze przekształcenia są analogiczne, i ostatecznie otrzymujemy

$$\delta(h(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|h'(x_k)|}$$

gdzie x_k są wszystkimi punktami takimi, że $h(x_k) = 0$.

Można też liczyć granice ciągów dystrybucji, definiując je poprzez wzór

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n\right)[f] := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n[f]$$

Definicja ta w sposób naturalny przenosi się na liczenie granicy po ciągłym parametrze.

Może się zdarzyć, że pewien ciąg funkcji ma granicę która jest dystrybucją. Rozważmy na przykład

$$g_n(x) = \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

I policzmy granicę $\epsilon \rightarrow 0_+$. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}\right) f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) dx \stackrel{x=\epsilon y}{=} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 y^2 + \epsilon^2} f(\epsilon y) \epsilon dy = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} f(\epsilon y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} f(0) dy = \\ &= \pi f(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \pi \delta(x) f(x) dx \end{aligned}$$

A zatem możemy powiedzieć, że w sensie dystrybucji

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

Podobnie możemy pokazać, że

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{\epsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\epsilon^2}} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{\sin\left(\frac{x}{\epsilon}\right)}{\pi x} \end{aligned}$$

czy nawet ogólnie, dla (prawie) dowolnej funkcji $g(x)$ takiej, że $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

Dystrybucje można również różniczkować; tu zasada jest taka, że całki zawierające pochodną dystrybucji można całkować przez części z wyrazem brzegowym równym 0, czyli dla dystrybucji g na $C(\mathbb{R})$ mamy

$$g'[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f'(x) dx = -g[f']$$

Ten sam wzór możemy otrzymać jeśli zdefiniujemy pochodną jako granicę ilorazu różnicowego:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(x+\epsilon) - g(x)}{\epsilon} \right) f(x)dx = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x+\epsilon)f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \right) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x-\epsilon)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \right) = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{f(x-\epsilon) - f(x)}{\epsilon} dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(-f'(x))dx
 \end{aligned}$$

Można tu zwrócić uwagę, że nawet jeśli g jest dystrybucją zdefiniowaną na funkcjach ciągłych (ze zbioru $C(\mathbb{R})$), to g' jest zdefiniowane jedynie na funkcjach ciągłych o ciągłych pochodnej (ze zbioru $C^1(\mathbb{R})$), ponieważ definicja tej dystrybucji wymaga policzenia pochodnej funkcji f .

W szczególności dla delty Diraca mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)f(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f'(x)dx = -f'(0)$$

Różniczkowanie i całkowanie przez części można powtarzać wielokrotnie, otrzymując wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)f(x)dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

Wreszcie, można liczyć transformatę Fouriera dystrybucji. Jak zawsze, chcemy by pod całą funkcja uogólniona zachowywała się tak samo jak zwykła funkcja. Dla zwykłej funkcji $g(x)$ mamy:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k)\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx \right) \tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi} \right) dx = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(-x)dx
 \end{aligned}$$

Transformatę Fouriera dystrybucji definiujemy tak, aby ta sama relacja była spełniona, czyli transformatą Fouriera dystrybucji $g(x)$ jest dystrybucja $\tilde{g}(k)$ taka, że działając na $\frac{1}{2\pi}\tilde{f}(k)$ daje ten sam wynik co dystrybucja $g(x)$ działająca na funkcję $f(-x)$.

Na przykład, dla delty Diraca $\delta(x)$ mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(k) \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(-x) dx = \\ &= f(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{-ik0} \frac{dk}{2\pi} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \frac{dk}{2\pi} \end{aligned}$$

Porównując obie strony równości znajdujemy

$$\tilde{\delta}(k) = 1$$

Zapisując odwrotną transformatę Fouriera otrzymujemy więc interesujący wzór

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

czyli możemy zapisać

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$$

lub (zamieniając oznaczenia $k \rightarrow x$, $x \rightarrow -k$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = 2\pi\delta(k)$$

Należy tu jednak cały czas pamiętać, że ta równość wyraża jedynie związek pomiędzy dwoma dystrybucjami (delta Diraca i jej transformatą Fouriera); całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$ nie jest zbieżna i nie ma wartości liczbowej, a sens matematyczny ma tylko jako dystrybucja, czyli działając na jakąś funkcję próbną.

Wykład 27: Dystrybucje, cd.

Na poprzednim wykładzie zajmowaliśmy się jedynie bądź ogólną teorią dystrybucji, bądź jej zastosowaniami do dystrybucji delta Diraca. Istnieją jednak również inne ważne dystrybucje.

Dystrybucja zwana *theta Heaviside'a* jest zdefiniowana na funkcjach $f \in L^1(\mathbb{R})$ wzorem

$$\theta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) f(x) dx := \int_0^{\infty} f(x) dx$$

Założenie, że $f \in L^1(\mathbb{R})$ (czyli, że $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$) jest potrzebne, aby zagwarantować, że całka $\int_0^{\infty} f(x) dx$ jest skończona.

W odróżnieniu od delty Diraca, thetę Heaviside'a można traktować jako zwykłą funkcję (choć nieciągłą), przyjmując na przykład

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Wartość tej funkcji w $x = 0$ jest bez znaczenia, ponieważ nie wpływa ona na wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f(x)dx$; zwykle przyjmuje się $\theta(0) = \frac{1}{2}$, ale można też przyjąć $\theta(0) = 0$ lub $\theta(0) = 1$; tak jak powiedziałem, nie ma to znaczenia dla dystrybucji θ . Funkcję tę nazywa się funkcją schodkową Heaviside'a, ponieważ jej wykres ma postać pojedynczego schodka. Przy wyborze $\theta(0) = \frac{1}{2}$ jest ona blisko związana z funkcją signum:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

relacją

$$\text{sgn}(x) = 2\theta(x) - 1$$

Zauważmy też, że

$$\theta(-x) + \theta(x) = 1$$

Ta równość przyda nam się za chwilę.

Używając tej dystrybucji można zapisać także inne dystrybucje, na przykład

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\infty} f(y+a)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y)f(y+a)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x-a)f(x)dx \\ \int_{-\infty}^a f(x)dx &= \int_{-a}^{\infty} f(-y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(y+a)f(-y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(a-x)f(x)dx \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx - \int_b^{\infty} f(x)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\theta(x-a) - \theta(x-b))f(x)dx \end{aligned}$$

Policzmy pochodną thety Heaviside'a w sensie dystrybucji. Zwróćmy uwagę, że oznacza to coś innego, niż liczenie zwykłej pochodnej funkcji schodkowej. Dla zwykłej pochodnej mamy

$$\theta'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ \text{nie istnieje} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zwykłą pochodną jest wszędzie równa 0, poza jednym punktem, gdzie niesitnieje. Przyjęcie $\theta'(x) = 0$ byłoby jednak błędem, jak możemy się przekonać licząc pochodną $\theta(x)$ w sensie dystrybucji:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)f(x)dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)f'(x)dx = - \int_0^{\infty} f'(x)dx = \\ &= - (f(x))\Big|_{x=0}^{x=\infty} = - \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + f(0) = f(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx \end{aligned}$$

gdzie granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ponieważ założyliśmy, że $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$, co może zachodzić tylko wtedy, gdy $|f(x)|$ dąży w nieskończoności do zera.

Z porównania obu stron mamy zatem

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

W sensie dystrybucji pochodną $\theta(x)$ jest dobrze określona i jednoznaczna, widać też, że nie jest równa 0.

Spostrzeżenie, że funkcję schodkową można zróżniczkować w sensie dystrybucji, nawet jeśli jest nieciągła nie można jej zróżniczkować w sensie funkcji, daje nam ideę jak można różniczkować inne funkcje nieciągłe (pod warunkiem że są kawałkami ciągłe). Weźmy na przykład funkcję

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & \text{dla } x < a \\ f_2 & \text{dla } x > a \end{cases}$$

gdzie f_1 i f_2 są funkcjami klasy $C^1(\mathbb{R})$ (ciągłymi i z ciągłą pochodną). Wartość funkcji f w punkcie $x = a$ jest bez znaczenia, jeśli traktujemy ją jako dystrybucję. Taką funkcję możemy zapisać jako

$$f(x) = f_1(x)\theta(a-x) + f_2(x)\theta(x-a)$$

lub

$$f(x) = f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x))\theta(x-a)$$

Używając reguły Leibniza dla iloczynu funkcji (można sprawdzić, że działa ona dla iloczynu funkcji i dystrybucji tak samo jak dla iloczynu dwóch funkcji) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f_1'(x)\theta(a-x) + f_1(x)(\theta(a-x))' + f_2'(x)\theta(x-a) + f_2(x)(\theta(x-a))' = \\ &= f_1'(x)\theta(a-x) + f_1(x)(-\delta(a-x)) + f_2'(x)\theta(x-a) + f_2(x)\delta(x-a) = \\ &= f_1'(x)\theta(a-x) + f_2'(x)\theta(x-a) + (f_2(x) - f_1(x))\delta(x-a) = \\ &= f_1'(x)\theta(a-x) + f_2'(x)\theta(x-a) + (f_2(a) - f_1(a))\delta(x-a) \end{aligned}$$

gdzie ostatnie przekształcenie wynika ze wzoru $g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a)$.

Z drugiego rozpisania funkcji f otrzymujemy równoważny wzór

$$f'(x) = f_1'(x) + (f_2'(x) - f_1'(x))\theta(x-a) + (f_2(a) - f_1(a))\delta(x-a)$$

Podobnie można rozpisać dowolną funkcję $f(x)$ ze skończoną liczbą nieciągłości w punktach $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Funkcję f postaci

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{dla } x < a_1 \\ f_i(x) & \text{dla } a_i x < a_{i+1}, \\ f_n(x) & \text{dla } x > a_n \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

można zapisać w postaci

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_{i-1}(x))\theta(x - a_i)$$

co prowadzi do wzoru na pochodną

$$f'(x) = f'_0(x) + \sum_{i=1}^n (f'_i(x) - f'_{i-1}(x))\theta(x - a_i) + \sum_{i=1}^n (f_i(a_i) - f_{i-1}(a_i))\delta(x - a_i)$$

Traktowanie funkcji jako dystrybucje, i znajdowanie ich pochodnych w sensie dystrybucji pozwala na użycie aparatu analizy matematycznej również do funkcji nieciągłych nawet do funkcji nieciągłych lub do takich, których pochodna jest nieciągła. Jak jeszcze zobaczymy później, ma to zastosowanie np. w rozwiązywaniu niektórych równań różniczkowych (np. w mechanice kwantowej pojawiają się równania przy których ta metoda jest przydatna).

Policzmy jeszcze transformatę Fouriera dystrybucji θ . Nie możemy policzyć jej bezpośrednio ponieważ całki $\int_0^\infty e^{-ikx} dx$ nie są zbieżne. Dlatego przedstawimy dystrybucję $\theta(x)$ jako granicę:

$$\theta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} g_\epsilon(x)$$

gdzie

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ e^{-\epsilon x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Dla funkcji g_ϵ transformatę Fouriera możemy znaleźć bez problemu:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_\epsilon(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\epsilon x} e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{e^{-\epsilon x - ikx}}{-\epsilon - ik} \Big|_{x=0}^{x=\infty} = \\ &= \frac{1}{\epsilon + ik} = \frac{\epsilon - ik}{\epsilon^2 + k^2} \end{aligned}$$

Musimy teraz znaleźć granicę $\epsilon \rightarrow 0_+$. Pamiętać trzeba, że szukamy tej granicy w sensie granicy dystrybucji, a nie jedynie w sensie granicy funkcji.

Jak już zostało pokazane na poprzednim wykładzie,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + k^2} = \pi \delta(k)$$

Z kolei dystrybucja

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{k}{\epsilon^2 + k^2}$$

okazuje się być nową dystrybucją, której jeszcze nie rozważaliśmy. Pokażmy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} \right) f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} \right) f(x) dx - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} f(x) dx - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right) = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \left(\frac{x}{\epsilon^2 + x^2} - \frac{1}{x} \right) f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} f(x) dx = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{-\epsilon^2}{x(\epsilon^2 + x^2)} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} f(x) dx \stackrel{x=\epsilon y}{=} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{-1}{y(1 + y^2)} f(\epsilon y) dy + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{y}{1 + y^2} f(\epsilon y) dy \end{aligned}$$

Ponieważ zarówno całki

$$\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{dy}{y(1 + y^2)}$$

jak i

$$\int_{-1}^1 \frac{y}{1 + y^2} dy$$

są zbieżne, można z granicą $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$ wejść pod całkę, otrzymując

$$(\dots) = \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{-1}{y(1 + y^2)} f(0) dy + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{y}{1 + y^2} f(0) dy = 0$$

gdzie zerowanie się całek wynika z tego, że całkowane są funkcje nieparzyste po zbiorach symetrycznych (ale można też policzyć też te całki normalnie i sprawdzić, że są równe 0).

Wyrażenie

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$$

nazywa się *wartością główną* (ang. *principal value*) całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ i oznacza

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right) =: PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

czasem spotyka się też oznaczenia $P \int_{-\infty}^{\infty}$, $P.V. \int_{-\infty}^{\infty}$, $p.v. \int_{-\infty}^{\infty}$ lub podobne. Na tej podstawie oznaczamy również

$$\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon^2 + x^2} \right) = PV \frac{1}{x}$$

Wracając do transformaty Fouriera dystrybucji θ mamy więc

$$\tilde{\theta}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon - ik}{\epsilon^2 + k^2} = \pi \delta(k) - iPV \frac{1}{k}$$

Przy okazji możemy też znaleźć wzory

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\epsilon} = PV \frac{1}{x} + i\pi \delta(x)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} = PV \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$$

Wzory te znajdują zastosowanie w fizyce (m.in. w mechanice kwantowej), gdzie zdarza się że potrzeba znajdować wartości wyrażeń postaci

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx \right) &= \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(PV \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0) \right) f(x) dx \right) = \\ &= \mp \pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \mp \pi f(x_0) \end{aligned}$$

Na koniec dodam jeszcze, że dystrybucje można konstruować także wielu wymiarach. Mamy na przykład deltę Diraca w trzech wymiarach, zdefiniowaną wzorem

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) d^3r = f(\vec{r}_0)$$

Ponieważ możemy zapisać

$$\begin{aligned} f(\vec{r}_0) &= f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z - z_0) f(x_0, y_0, z) dz = (\dots) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

otrzymujemy relację

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

Ćwiczenia wykładowe 14: dystrybucje

Jak wspomniałem na wykładzie, dystrybucje można stosować do rozwiązywania pewnych równań różniczkowych. Weźmy na przykład równanie

$$f'(x) = \alpha(x)f(x)$$

gdzie

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Nie ma wielkiego problemu, by rozwiązać to równanie osobno dla $x > 0$ i dla $x < 0$. Dla $x < 0$ mamy

$$f'(x) = 0$$

czyli

$$f(x) = \text{const.} = C_1$$

Z kolei dla $x > 0$ mamy

$$f'(x) = xf(x)$$

$$\frac{df}{f} = x dx$$

$$\ln |f| = \frac{1}{2}x^2 + \text{const.}$$

$$f = C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}$$

Jeśli nie używamy języka dystrybucji, musimy w tym momencie dodać dodatkowy warunek na funkcję f , mianowicie, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x=0$. Jeżeli jednak użyjemy języka dystrybucji, możemy zobaczyć, że nie jest to naprawdę dodatkowy warunek, ale konieczność. Jeśli bowiem weźmiemy funkcję

$$f(x) = C_1 \theta(-x) + C_2 e^{\frac{1}{2}x^2} \theta(x)$$

mamy

$$f'(x) = -C_1 \delta(x) + C_2 x e^{\frac{1}{2}x^2} \theta(x) + C_2 e^{\frac{1}{2}x^2} \delta(x) = C_2 x e^{\frac{1}{2}x^2} \theta(x) + (C_2 - C_1) \delta(x)$$

Jeżeli więc podstawimy ten wynik do początkowego równania, otrzymujemy warunek

$$(C_2 - C_1) \delta(x) = 0$$

czyli potrzebujemy $C_2 = C_1$.

W przypadku równań pierwszego stopnia jest tylko uzasadnienie zasady, że rozwiązanie powinno być ciągłe. Są też ciekawsze zastosowania.

Możemy na przykład rozważać równanie

$$f''(x) = \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x)$$

gdzie ϵ jest pewnym parametrem, lecz ostatecznie być zainteresowanymi jedynie przypadkiem, gdy ϵ jest bardzo małe, granicą $\epsilon \rightarrow 0_+$. Bez użycia dystrybucji jest to trudny problem. Jeżeli jednak wykonam już na poziomie równania wykonamy granicę

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x)$$

otrzymujemy równanie

$$f''(x) = \delta(x)f(x)$$

I równanie staje się prostsze. Zarówno dla $x > 0$ jak i dla $x < 0$ mamy $f''(x) = 0$, co daje nam

$$f(x) = (C_1 + C_2x)\theta(x) + (C_3 + C_4x)\theta(x)$$

Aby jednak równanie było spełnione także w $x = 0$, spodziewamy się pewnych związków pomiędzy stałymi C_i . Po pierwsze, aby w ogóle mnożenie $\delta(x)f(x)$ miało sens, funkcja $f(x)$ musi być ciągła w 0 (ponieważ dystrybucja δ jest zdefiniowana jedynie na funkcjach ciągłych w zerze, jedynie przez takie funkcje można ją mnożyć). Otrzymujemy z tego warunek $C_1 = C_3$ i mamy funkcję f w postaci

$$f(x) = C_1 + C_2x\theta(-x) + C_4x\theta(x)$$

$$\delta(x)f(x) = \delta(x)f(0) = C_1\delta(x)$$

Policzmy teraz pochodne

$$f'(x) = C_2(\theta(-x) - x\delta(x)) + C_4(\theta(x) + x\delta(x)) = C_2\theta(-x) + C_4\theta(x)$$

$$f''(x) = C_2(-\delta(x)) + C_4\delta(x) = (C_4 - C_2)\delta(x)$$

Podstawiając te wyniki do równania, otrzymujemy

$$(C_4 - C_2)\delta(x) = C_1\delta(x)$$

czyli

$$C_1 = C_4 - C_2$$

Mamy zatem rozwiązanie

$$f(x) = C_2(-1 + x\theta(-x)) + C_4(1 + x\theta(x))$$

lub równoważnie (dla $D_1 = \frac{C_2+C_4}{2}$, $D_2 = \frac{C_4-C_2}{2}$):

$$f(x) = D_1(x\theta(-x) + x\theta(x)) + D_2(1 + x\theta(x) - x\theta(-x)) = D_1x + D_2(1 + |x|)$$

Inny przypadek, ważny w fizyce, to tzw. funkcje Greena. Załóżmy że mamy do rozwiązania pewne niejednorodne równanie różniczkowe liniowe pierwszego stopnia:

$$a(x)\frac{df(x)}{dx} + b(x)f(x) = c(x)$$

Niech funkcja $G(x, y)$ będzie rozwiązaniem równania

$$a(x)\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} + b(x)G(x, y) = \delta(x - y)$$

Ta funkcja jest nazywana funkcją Greena dla operatora różniczkowego $a(x)\frac{d}{dx} + b(x)$. Jeśli znamy tę funkcję (którą dla konkretnego operatora wystarczy znaleźć raz na zawsze), to wtedy dla dowolnej funkcji c funkcja

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y)c(y)dy$$

jest rozwiązaniem początkowego równania. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} a(x)\frac{df(x)}{dx} + b(x)f(x) &= \left(a(x)\frac{d}{dx} + b(x) \right) \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y)c(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(a(x)\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} + b(x)G(x, y) \right) c(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)c(y)dy = c(x) \end{aligned}$$

Znajomość funkcji Greena dla danego równania różniczkowego pozwala zatem szybko znajdować rozwiązania szczególne równań niejednorodnych z dowolną niejednorodnością. A żeby jednak znaleźć funkcję Greena, trzeba rozwiązać równanie niejednorodne z niejednorodnością postaci $\delta(x - y)$. Przykład znajdowania funkcji Greena będą mieli państwo na ćwiczeniach.

Termin funkcji Greena używa się też w nieco innym ale podobnym kontekście równań różniczkowych cząstkowych. Załóżmy, że mamy do rozwiązania równanie

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathcal{D}(x, t)f(x, t)$$

z warunkiem początkowym

$$f(x, 0) = u(x)$$

gdzie $u(x)$ jest daną funkcją, a $\mathcal{D}(x, t)$ jest pewnym operatorem różniczkowym liniowym zbudowanym z pochodnych $\frac{\partial}{\partial x}$, dowolnego stopnia, np.

$$\mathcal{D}(x, t) = a(x, t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x, t)$$

W tym kontekście funkcją Greena nazywamy funkcję $G(x, y, t)$ spełniającą równanie

$$\frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} = \mathcal{D}(x, t)G(x, y, t)$$

Z warunkiem początkowym

$$G(x, y, 0) = \delta(x - y)$$

Wtedy rozwiązanie początkowego zagadnienia jest dane wzorem

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, t)u(y)dy$$

To łatwo sprawdzić; ponieważ funkcja G spełniała dane równanie różniczkowe, to funkcja f również będzie je spełniać, a dla $t = 0$ mamy

$$f(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0)u(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)u(y)dy = u(x)$$

Ważnym przykładem tego przypadku jest tzw. *swobodne równanie Schrödingera*, leżące u podstawy dużej części mechaniki kwantowej. Ma ono postać

$$i\hbar \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t)$$

gdzie m jest parametrem (oznaczającym masę cząstki elementarnej), a \hbar jest stałą fizyczną. Aby znaleźć funkcję Greena dla tego równania, będziemy jej szukać przy użyciu jej transformaty Fouriera:

$$G(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k, y, t)e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

Mamy wtedy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k, y, t)(-k^2)e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

Podstawiając tą formę funkcji Greena do równania, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} i\hbar \frac{\partial \tilde{G}(k, y, t)}{\partial t} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{G}(k, y, t) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

czyli

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{G}(k, y, t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tilde{G}(k, y, t)$$

które możemy traktować jako równanie zwyczajne (nie cząstkowe) z parametrami k i y . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{G}}{\tilde{G}} &= \frac{\hbar k^2}{2im} dt \\ \Rightarrow \tilde{G}(k, y, t) &= \tilde{G}(k, y, 0) \exp\left(\frac{\hbar k^2 t}{2im}\right) \end{aligned}$$

Warunek początkowy dla funkcji $\tilde{G}(k, y, t)$ ma postać

$$\tilde{G}(k, y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, 0)e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y)e^{-ikx} dx = e^{-iky}$$

A zatem znajdujemy

$$\tilde{G}(k, y, t) = \exp\left(\frac{\hbar k^2 t}{2im} - ik y\right)$$

$$G(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{\hbar k^2 t}{2im} + ik(x - y)\right) \frac{dk}{2\pi}$$

Całka ta nie jest zbieżna w sensie funkcji, co świadczy o tym, że $G(x, y, t)$ nie jest w ogólności zwykłą funkcją, ale dystrybucją. Aby ją znaleźć, dodajmy mały parametr $\epsilon > 0$ i policzmy granicę $\epsilon \rightarrow 0_+$

$$G(x, y, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-k^2 \left(\epsilon - \frac{\hbar t}{2im}\right) + ik(x - y)\right) \frac{dk}{2\pi}$$

występująca tu całka jest postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak^2 + bk} dk$$

gdzie $\text{Re } a > 0$ takie całki są zbieżna, i równe

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak^2 + bk} dk = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

co daje nam wzór na funkcję Greena:

$$G(x, y, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\epsilon - \frac{\hbar t}{2im}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-(x - y)^2}{4\left(\epsilon - \frac{\hbar t}{2im}\right)}\right) =$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im(x - y)^2}{2\hbar t}\right)$$

Tej funkcji Greena można odtąd używać do znajdowania rozwiązań swobodnego równania Schrödingera z dowolnym warunkiem początkowym.

Wykład 28: Przestrzenie Hilberta

Niech V będzie przestrzenią wektorową na $d \mathbb{C}$, której elementami są pewne funkcje $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Na poprzednich wykładach rozważaliśmy operatory liniowe $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$, czyli dystrybucje na zbiorze X . Na tym wykładzie będę chciał rozważyć własności analityczne operatorów liniowe $A : V \rightarrow V$. Najpierw jednak przypomnienie (i wprowadzenie) kilku definicji.

Definicja (iloczyn skalarny, norma):

Iloczynem skalarnym na przestrzeni wektorowej V nad \mathbb{C} nazywamy odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że

- $\forall f, g_1, g_2 \in V \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \langle f | \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \lambda_1 \langle f | g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f | g_2 \rangle$
- $\forall f, g \in V \quad \langle f | g \rangle = (\langle g | f \rangle)^*$
- $\forall f \in V \quad \langle f | f \rangle \geq 0$
- $\forall f \in V \quad (\langle f | f \rangle = 0) \Leftrightarrow (f = 0)$

Przestrzeń V nad \mathbb{C} na której został określony iloczyn skalarny nazywamy *przestrzenią unitarną*.

Iloczyn skalarny spełnia również warunek (wynikający z powyższych, więc nie musi być częścią definicji):

$$\forall f_1, f_2, g \in V \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 | g \rangle = \lambda_1^* \langle f_1 | g \rangle + \lambda_2^* \langle f_2 | g \rangle$$

Definicja (iloczyn skalarny, norma):

Normą na przestrzeni wektorowej V nad \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lub \mathbb{R}) nazywamy odwzorowanie $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

- $\forall f \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- $\forall f \in V \quad \|f\| \geq 0$
- $\forall f \in V \quad (\|f\| = 0) \Leftrightarrow (f = 0)$
- $\forall f, g \in V \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Przestrzeń V nad \mathbb{K} na której została określona norma nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Na przestrzeni unitarnej istnieje naturalna norma zadana wzorem

$$\|f\| := \sqrt{\langle f | f \rangle}$$

To, że ten wzór zadaje normę spełniającą powyższą definicję, wynika z tzw. nierówności Schwarz'a:

Twierdzenie (nierówność Schwarz'a):

Niech V będzie przestrzenią unitarną. Dla dowolnych $f, g \in V$ zachodzi

$$|\langle f | g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

Dowód:

Możemy założyć, że $g \neq 0$ (dla $g = 0$ nierówność jest oczywista). Rozważmy $h = f + \lambda g$, gdzie λ jest dowolną liczbą zespoloną. Mamy

$$0 \leq \|h\|^2 = \langle f + \lambda g | f + \lambda g \rangle = \|f\|^2 + \lambda \langle f | g \rangle + \lambda^* \langle g | f \rangle + |\lambda|^2 \|g\|^2$$

Wybierając

$$\lambda = -\frac{\langle g|f \rangle}{\|g\|^2}, \quad \lambda^* = -\frac{\langle f|g \rangle}{\|g\|^2}$$

otrzymujemy

$$0 \leq \|f\|^2 - \frac{\langle g|f \rangle}{\|g\|^2} \langle f|g \rangle - \frac{\langle f|g \rangle}{\|g\|^2} \langle g|f \rangle + \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^2}$$

Z czego wynika

$$\begin{aligned} |\langle f|g \rangle|^2 &\leq \|f\|^2 \|g\|^2 \\ |\langle f|g \rangle| &\leq \|f\| \|g\| \end{aligned}$$

co było do okazania.

Mając spełnioną nierówność Schwarz'a, mamy

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f|g \rangle + \langle g|f \rangle + \|g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2$$

czyli

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Pozostałe dwie wymagane własności normy wynikają bezpośrednio z algebraicznych właściwości iloczynu skalarnego.

Istnienie normy w przestrzeni wektorowej pozwala również zdefiniować zbieżność ciągów:

Definicja (ciągi zbieżne, ciągi Cauchy'ego, zupełność):

Niech V będzie przestrzenią unormowaną.

Mówimy, że ciąg $f_n \in V$ jest *zbieżny* do granicy g jeśli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0$$

Mówimy, że ciąg $f_n \in V$ jest *ciągą Cauchy'ego* jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N \|f_n - f_m\| < \epsilon$$

Jeśli każdy ciąg Cauchy'ego elementów z danego zbioru X posiada granicę w zbiorze X , zbiór X nazywamy *zupełnym*.

Przestrzenie skończone wymiarowe są zawsze zupełne, ale przestrzenie nieskończone wymiarowych (jakimi często są przestrzenie funkcyjne) zupełne być nie muszą.

Ze zbieżności ciągów można wyprowadzić kolejne liczne definicje (m.in. dotyczące zbieżności szeregów lub ciągłości funkcji z V lub w V) Są one analogiczne do twierdzeń dotyczących funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} , więc nie będę ich tu powtarzał.

Definicja (przestrzeń Banacha, przestrzeń Hilberta):

Zupełną unormowaną przestrzeń wektorową nazywamy *przestrzenią Banacha*.
Zupełną unitarną przestrzeń wektorową nazywamy *przestrzenią Hilberta*.

Większość twierdzeń analizy funkcjonalnej dotyczy przestrzeni Banacha lub przestrzeni Hilberta. W szczególności w fizyce, zwłaszcza w mechanice kwantowej, przestrzenie Hilberta są ważnym narzędziem.

W przestrzeni nieskończenie wymiarowej baza jest definiowana jako

Definicja (baza):

Niech V będzie przestrzenią nieskończonego wymiaru. Ciąg $e_n \in V$ nazywamy *bazą* wektorów z V , jeśli dla dowolnego wektora $v \in V$ istnieje $N < \infty$ oraz ciąg $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $n = 1 \dots N$ taki, że

$$v = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$$

W ogólności, nawet w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowej wymagamy, aby każdy wektor rozpisywał się na skończoną liczbę wektorów bazowych; wynika z tego, że w ogólności nie mamy pojęcia granicy w przestrzeni wektorowej, więc nie możemy liczyć sum nieskończonych szeregów. W przypadku przestrzeni unormowanych jest to jednak możliwe; definiuje się więc:

Definicja (zupełny układ wektorów):

Niech V będzie przestrzenią unormowaną. Ciąg $e_n \in V$ nazywamy *układem zupełnym*, jeśli dla dowolnego wektora $v \in V$ istnieje ciąg $\alpha_n \in \mathbb{C}$ taki, że

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

Zwróćmy uwagę, że układ zupełny nie musi być bazą; dla bazy wymagane jest, aby każdy element przestrzeni wektorowej rozpisywał się jako skończona suma wektorów bazowych; dla układu zupełnego wystarczy, że każdy wektor był granicą pewnego szeregu.

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią Hilberta. Jeśli ciąg $e_n \in V$ jest ortonormalnym układem wektorów (czyli takim, że $\|e_i\| = 1$ oraz $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$) oraz $\alpha_n \in \mathbb{C}$ to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

jest zbieżny.

Dowód: Szereg jest zbieżny gdy ciąg sum częściowych jest zbieżny. Sprawdźmy więc:

$$f_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$$

Dla $m > n$ mamy

$$f_m - f_n = \sum_{k=n+1}^m \alpha_k e_k$$

$$\|f_m - f_n\| = \sqrt{\sum_{k=n+1}^m |\alpha_k|^2} = \sqrt{|s_m - s_n|}$$

gdzie $s_n = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$. Wynika z tego, że ciąg f_n jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy gdy ciąg s_n jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ zarówno przestrzeń Hilberta (w której leżą wartości ciągu f_n) jak i zbiór \mathbb{R} są zbiorami zupełnymi, oznacza to, że ciąg f_n jest ciągiem zbieżnym wtedy i tylko wtedy gdy ciąg s_n jest ciągiem zbieżnym, z czego wynika teza twierdzenia.

Z powyższego twierdzenia mamy wniosek:

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią Hilberta. Jeżeli $e_n \in V$ jest zupełnym ortonormalnym układem wektorów, to każdy wektor $f \in V$ można jednoznacznie zapisać w postaci

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

gdzie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$$

Jednoznaczność wynika z tego, że dla ortonormalnego układu wektorów

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = 0\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = 0)$$

Z tego twierdzenia wynika, że tak jak przestrzenie skończenie wymiarowe można utożsamiać z \mathbb{C}^n (przez wybór bazy), tak nieskończenie-wymiarowe przestrzenie Hilberta można utożsamiać z przestrzenią ciągów sumowalnych z kwadratem (przez wybór zupełnego ortonormalnego układu wektorów).

Zajmijmy się teraz konkretnie przypadkiem przestrzeni funkcji. Najczęściej spotykany iloczyn skalarny wprowadzanych na takich przestrzeniach ma postać

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)^* g(x) w(x) dx$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ są ustalonymi liczbami, a $w(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, np.

$$\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)^* g(x) dx$$

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) dx$$

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{\infty} f(x)^* g(x) e^{-x} dx$$

Przestrzeń v jest wtedy definiowana jako przestrzeń takich funkcji dla których $\langle f|f \rangle < \infty$, czasem spełniających też pewne dodatkowe warunki.

Taka definicja $\langle \cdot | \cdot \rangle$ spełnia pierwsze trzy wymagane własności iloczynu skalarnego:

- $\forall f, g_1, g_2 \in V \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \langle f | \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \rangle = \lambda_1 \langle f | g_1 \rangle + \lambda_2 \langle f | g_2 \rangle$
- $\forall f, g \in V \quad \langle f | g \rangle = (\langle g | f \rangle)^*$
- $\forall f \in V \quad \langle f | f \rangle \geq 0$

Pojawia się jednak pewien problem z czwartym warunkiem, a to z tego powodu, że jeśli zmienimy wartość funkcji w jednym punkcie, nie wpływa to na wartość całki. Na przykład, dla

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \\ 0 & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

mamy

$$\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 0$$

mimo, że $f \neq 0$. Sugeruje to, że $\int_{-1}^1 f(x) * g(x) dx$ nie jest dobrym iloczynem skalarnym. Żeby sobie z tym poradzić, musimy utożsamić ze sobą funkcje f_1 i f_2 takie, że

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|^2 w(x) dx = 0$$

O takich funkcjach mówimy, że są równe *prawie wszędzie*. Choć z punktu widzenia ich wartości nie są one równe, obie są traktowane jako ten sam element przestrzeni unitarnej. Można to uściślić (przez skonstruowanie tzw. klas równoważności i przestrzeni ilorazowej), ale w praktycznych zastosowaniach wystarczy wiedzieć tyle: jeśli funkcje f_1 i f_2 są równe prawie wszędzie, to w przestrzeni unitarnej są jednym elementem.

Pojawia się też problem ze zupełnością tak skonstruowanej przestrzeni. Zdażają się bowiem ciągi funkcji całkowalnych w sensie całki Riemanna, których granica punktowa nie jest całkowalna. Z tym problemem także można sobie poradzić, definiując tzw. całkę Lebesgue'a.

Żeby zdefiniować całkę Lebesgue'a, musimy najpierw zdefiniować tzw. *miarę Lebesgue'a* zbioru. Dla zbioru $X \subset \mathbb{R}$ jest ona zdefiniowana następująco:

$$\mu(X) = \inf \left\{ \sum_k |I_k| : (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ jest ciągiem otwartych przedziałów takim, że } X \subset \bigcup_k I_k \right\}$$

gdzie dla $I_k = (a_k, b_k)$ mamy $|I_k| = |b_k - a_k|$. Tłumacząc wzór: mając dany zbiór X pokrywamy go za pomocą ciągu przedziałów I_k ; dla każdego pokrycia mierzymy $\sum_k |I_k|$, czyli łączną długość wszystkich przedziałów; biorąc wszystkie możliwe pokrycia, tworzymy zbiór $\{\sum_k |I_k|\}$ i znajdujemy jego kres dolny.

Dla zbiorów $X \subset \mathbb{R}^n$ miarę Lebesgue'a definiuje się analogicznie, tylko pokrywa się te zbiory prostopadłościanami, a nie przedziałami, i sumujemy objętości tych prostopadłościanów.

Zbiór X nazywany jest mierzalnym w sensie miary Lebesgue'a jeśli dla dowolnego zbioru Y zachodzi

$$\mu(Y) = \mu(Y \cap X) + \mu(Y \setminus X)$$

Istnienie zbiorów niemierzalnych jest matematyczną ciekawostką wynikającą z tzw. aksjomatu wyboru, ale zbiory te nie są konstruowalne (można udowodnić, że istnieją, ale nie istnieje formuły definiujące takie zbiory). Nie będziemy się więc nimi przejmować. Wszystkie zbiory pojawiające się w fizycznych obliczeniach są mierzalne.

Miara Lebesgue'a wyraża to, co możemy intuicyjnie rozumieć jako żozmiarzbioru:

- Dla dowolnego zbioru $\mu(X) \geq 0$; $\mu(\emptyset) = 0$.

- Jeśli X jest przedziałem (otwartym lub zamkniętym) o końcach a i b to $\mu(X) = |b - a|$.
- Jeśli X jest zbiorem jednopunktowym, to $\mu(X) = 0$.
- Jeśli $Y \subset X$ jest zbiorem mierzalnym, to $\mu(X) = \mu(Y) + \mu(X \setminus Y)$
- Jeśli X jest sumą przeliczalnie wielu rozłącznych zbiorów mierzalnych $X = \bigcup_i X_i$, to $\mu(X) = \sum_i \mu(X_i)$

choć czasem może dawać zaskakujące wyniki, np. $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

Mając miarę Lesbegue'a, definiujemy całkę Lesbegue'a z funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

- Jeśli $f(x) \geq 0$, to

$$\int_X f(x) dx := \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > \lambda\}) d\lambda$$

- Jeśli $f(x) \leq 0$, to

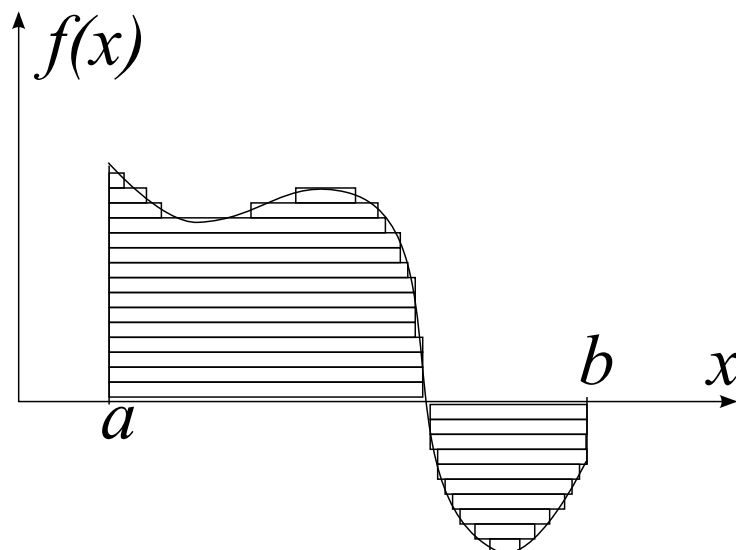
$$\int_X f(x) dx := - \int_X (-f(x)) dx = - \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) < -\lambda\}) d\lambda$$

- Jeśli $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, gdzie $f_+(x) \geq 0$, $f_-(x) \geq 0$ to

$$\int_X f(x) dx := \int_X f_+(x) dx - \int_X f_-(x) dx$$

gdzie całki po λ są zwykłymi całkami Riemanna.

W porównaniu do całki Riemanna, którą można wyobrażać sobie jako granicę sumy pól pionowych prostokątów wypełniających pole pod wykresem funkcji, całkę Lesbegue'a można sobie wyobrażać jako granicę sum poziomych prostokątów wypełniających pole pod wykresem (rys. poniżej).



Może być zastanawiające, co taka zmiana nam daje, ale okazuje się być przydatna w całkowaniu funkcji które są bardzo "postrzępione". Każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest też całkowalna w sensie Lebesgue'a (i obie całki są sobie równe), ale istnieją funkcje całkowalne w sensie Lebesgue'a które nie są całkowalne w sensie Riemanna. Dzięki temu zbiór funkcji na zbiorze x dla których całka

$$\int_X |f(x)|^2 w(x) dx$$

jest skończona okazuje się być przestrzenią zupełną (ale nie będzie to na tym wykładzie dowodzone).

Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem i wagą w na zbiorze X oznaczać będziemy $L^2(X, w)$. W przypadku gdy $w = 1$ będziemy je pomijać i pisać po prostu $L^2(X)$. Mamy zatem np. przestrzenie $L^2([-1, 1])$, $L^2(\mathbb{R})$ czy $L^2([0, \infty), e^{-x})$; wszystkie te wymienione przestrzenie mają zastosowanie w fizyce.

Wykład 29: Operatory na przestrzeni Hilberta

Przejdziemy dziś do rozważania operatorów na przestrzeni Hilberta. Zaczniemy od pewnej ważnej różnicy między przypadkiem skończenie-wymiarowym, a nieskończenie-wymiarowym. W przypadku skończenie wymiarowym wymaga się, aby operator był zdefiniowany na wszystkich wektorach przestrzeni V . Okazuje się, że w przypadku nieskończenie wymiarowym ten warunek wykluczałby całą masę interesujących operatorów. Czasem dlatego, że żadnej operacji nie można na jakimś wektorze wykonać (np. istnieją funkcje nieróżniczkowalne), a czasem dlatego, że wynik operacji nie należałby do docelowej przestrzeni Hilberta (np.

nie jest funkcją całkowalną z kwadratem). Na przykład operator różniczkowania D , $(Df)(x) = f'(x)$, nie jest określony na całej przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, bo ta przestrzeń bowiem funkcje nieróżniczkowalne. Nie możemy tych funkcji po prostu wyrzucić z naszej przestrzeni, ponieważ stanowią one granice ciągów funkcji różniczkowalnych, na przykład

$$|x|e^{-x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} e^{-x^2}$$

Nie możemy się zatem ograniczyć wyłącznie do funkcji różniczkowalnych (jeśli chcemy mieć przestrzeń Hilberta), ale nie chcemy również rezygnować z rozważania operatora różniczkowania. W tym celu dopuszczamy, by operatory miały dziedzinę mniejszą niż cała przestrzeń, z tym ograniczeniem że dziedzina ta powinna być *zbiorem gęstym* w przestrzeni V , tzn. dla dowolnego elementu $v \in V$ istnieje ciąg $x_n \in X$ taki, że $v = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Można udowodnić, że operator różniczkowania spełnia ten warunek; choć nie każda funkcja z $L^2(\mathbb{R})$ jest różniczkowalna, to każda jest granicą pewnego ciągu funkcji różniczkowalnych. Dziedzinę operatora A oznaczamy będziemy $D(A)$.

Rozważa się również wyłącznie operatory ciągłe, czyli posiadające tę własność, że jeśli ciąg x_n elementów z $D(A)$ ma granicę w $D(A)$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

Dla operatorów na przestrzeni Hilberta definiuje się normę następująco:

Definicja (norma operatora, operatory ograniczone i nieograniczone): Normą operatora $A : D(A) \rightarrow W$, $D(A) \subset V$, gdzie V i W są przestrzeniami Hilberta, nazywamy

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Af\|}{\|f\|} : f \in D(A) \setminus \{0\} \right\} = \sup \{ \|Af\|_W : f \in D(A), \|f\|_V = 1 \}$$

Jeśli $\|A\| < \infty$, operator A nazywamy *ograniczonym*. Jeśli $\|A\| = \infty$, operator A nazywamy *nieograniczonym*.

Przykłady:

- operator translacji $T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $(T_a f)(x) = f(x - a)$. Mamy

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - a)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2$$

a zatem $\|A\| = 1$

- operator mnożenia przez x : $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $(Af)(x) = xf(x)$. Weźmy funkcje próbne

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [n, n + 1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Mamy dla nich

$$\|f_n\|^2 = \int_n^{n+1} 1 dx = 1$$

$$(Af_n)(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in [n, n+1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

$$\|Af_n\|^2 = \int_n^{n+1} x^2 dx = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}n^3 = n^2 + n + \frac{1}{3}$$

$$\frac{\|Af_n\|}{\|f_n\|} = \sqrt{n^2 + n + \frac{1}{3}}$$

Ten iloraz może być dowolnie duży, więc $\|A\| = \infty$.

Operatory ograniczone mają lepsze własności, niektóre bardziej zaawansowane twierdzenia są spełnione tylko dla operatorów ograniczonych. Na przykład można udowodnić, że jeśli operator ograniczony A jest ciągły i określony na gęstej dziedzinie, to można go w ciągły sposób rozszerzyć na całą przestrzeń Hilberta V . Weźmy bowiem dowolny wektor $f \in V$ i dowolny ciąg $f_n \in D(A)$ zbieżny do v . Dla tego ciągu mamy

$$\|Af_n - Af_m\| = \|A(f_n - f_m)\| \leq \|A\| \|f_n - f_m\|$$

Ponieważ ciąg f_n był zbieżny, więc był także ciągiem Cauchy'ego, to wynika z tego, że również ciąg Af_n jest ciągiem Cauchy'ego, więc jest ciągiem zbieżnym. Można zatem przez ciągłość zdefiniować $Af := \lim_{n \rightarrow \infty} Af_n$. Ponieważ możemy tak rozszerzać dziedzinę będziemy od teraz zakładać, że dla operatorów ograniczonych $D(A) = V$.

Dla operatorów nieograniczonych, gdy $\|A\| = \infty$ powyższa konstrukcja nie musi działać, bo nie możemy udowodnić, że ciąg Af_n jest zbieżny. Tym niemniej, w fizyce potrzebujemy często także operatorów nieograniczonych.

W przestrzeniach Hilberta można zdefiniować sprzężenie hermitowskie operatora:

Definicja (operator sprzężony):

Operatorem sprzężonym do operatora ograniczonego $A : D(A) \rightarrow V_2$, $D(A) \subset V_1$ gdzie V_1 i V_2 są przestrzeniami Hilberta, nazywamy operator $A^\dagger : D(A^\dagger) \rightarrow V_1$, $D(A^\dagger) \subset V_2$ taki, że

- $D(A^\dagger) = \{f \in V_2 : \exists c < \infty \forall g \in D(A) : \langle f|Ag \rangle \leq c\|g\|\}$
- $\forall f \in D(A), g \in D(A^\dagger) : \langle f|Ag \rangle = \langle A^\dagger g|f \rangle$

Ten pierwszy warunek jest potrzebny aby zapewnić, że $A^\dagger f \in V_1$. Dla operatorów ograniczonych definicja jest nieco prostsza, bo dla nich zawsze mamy $D(A) = V_1$, $D(A^\dagger) = V_2$, i do zdefiniowania operatora A^\dagger wystarczy nam drugi

warunek.

Dla operatorów z jednej przestrzeni Hilberta do tej samej przestrzeni Hilberta mamy dodatkowo pojęcia operatorów hermitowskich i samosprzężonych:

Definicja (operator hermitowski):

Operator $A : D(A) \rightarrow V$, $D(A) \subset V$ gdzie V jest przestrzenią Hilberta, nazywamy *hermitowskim* jeśli dla dowolnych wektorów $f_1, f_2 \in V$ zachodzi

$$\langle f_1 | Af_2 \rangle = \langle Af_1 | f_2 \rangle$$

Definicja (operator samosprzężony):

Operator $A : D(A) \rightarrow V$, $D(A) \subset V$ gdzie V jest przestrzenią Hilberta, nazywamy *samosprzężonym* jeśli $A^\dagger = A$.

W skończonym wymiarze operator jest samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy jest hermitowski. W nieskończonym wymiarze jest tak jedynie dla operatorów ograniczonych; dla operatorów nieograniczonych tak być nie musi. O ile operator samosprzężony jest zawsze hermitowski, to aby operator hermitowski był samosprzężony musi spełniać dodatkowy warunek $D(A^\dagger) = D(A)$. (UWAGA: niektóre źródła nie stosują tego rozróżnienia rygorystycznie, i stosują terminy wymiennie; różnica jednak istnieje, pewne zaawansowane twierdzenia są spełnione tylko dla operatorów samosprzężonych, sama hermitowskość dla nich nie wystarcza).

Skupmy się teraz na operatorach na $L^2(X)$.

Wcześniej rozważane funkcjonały liniowe na przestrzeni funkcji, czyli dystrybucje, przypisują funkcji liczbę i zapisuje się je za pomocą całki:

$$\phi[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)dx$$

Na podobnej zasadzie jest definiowane

Definicja (jądro całkowe):

Jądrem całkowym operatora $A : L^2(X, w) \rightarrow L^2(X, w)$ nazywamy funkcję uogólnioną $A(x, y)$ taką, że

$$(Af)(x) = \int_X A(x, y)f(y)dy$$

Jądro całkowe dla operatora na przestrzeni funkcyjnej pełni rolę analogiczną do macierzy operatora w przestrzeni skończone wymiarowej; powyższy wzór stanowi nieskończenie-wymiarowy odpowiednik wzoru

$$(Av)^i = \sum_j A^i_j v^j$$

dla przypadku skończenie wymiarowego.

Dla przykładu (wszystkie poniższe operatory są zdefiniowane na $L^2(\mathbb{R})$):

- Dla $A = \mathbf{1}$ będącego operatorem identycznościowym:

$$(Af)(x) := f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-x)f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y)$$

$$A(x, y) = \delta(x-y)$$

- Dla $A = T_a$ będącego operatorem przesunięcia:

$$(T_a f)(x) := f(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-(x-a))f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y-a)f(y)$$

$$A(x, y) = \delta(x-y-a)$$

- Dla A będącego operatorem mnożenia przez ustaloną funkcję $g(x)$:

$$(Af)(x) := g(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(y-x)f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x-y)f(y)$$

$$A(x, y) = g(x)\delta(x-y)$$

- Dla $A = \partial_x$ będącego operatorem różniczkowania:

$$(\partial_x f)(x) := f'(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(y-x)f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y)f(y)$$

$$A(x, y) = \delta'(x-y)$$

- Dla $A = \mathcal{F}$ będącego transformacją Fouriera:

$$(\mathcal{F}f)(k) = \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx$$

$$A(k, x) = e^{-ikx}$$

- Dla $A = \mathcal{F}^{-1}$ będącego odwrotną transformacją Fouriera:

$$(\mathcal{F}^{-1}\tilde{f})(x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde{f}(k)\frac{dk}{2\pi}$$

$$A(x, k) = \frac{1}{2\pi}e^{ikx}$$

Niech f_i będzie zupełnym ortonormalnym układem wektorów w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, czyli funkcje f_i spełniają warunek

$$\langle f_i | f_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)^* f_j(x) dx = \delta_{ij}$$

Dowolną funkcję $g \in L^2(\mathbb{R})$ możemy rozpisać w postaci

$$g(x) = \sum_i \alpha_i f_i(x)$$

Zauważmy, że

$$\langle f_j | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)^* \left(\sum_j \alpha_j f_j(x) \right) dx = \sum_j \alpha_j \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)^* f_j(x) dx = \sum_j \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$$

A zatem

$$g(x) = \sum_i \langle f_j | g \rangle f_i(x) = \sum_i f_i(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_i(y)^* g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_i f_i(x) f_i(y)^* \right) g(y) dy$$

Ponieważ $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) g(y) dy$, i wzory te są spełnione dla dowolnej funkcji g , musi zachodzić równość:

$$\delta(x-y) = \sum_i f_i(x) f_i(y)^*$$

To przedstawienie funkcji δ nazywa się *rozkładem jedynek* (bo $\delta(x-y)$ jest jądrem całkowym operatora identycznościowego $\mathbf{1}$), i stosuje się w fizyce w wielu przypadkach, w zależności od sytuacji wybierane są różne układy funkcji f_i .

Operacje algebraiczne na operatorach można przetłumaczyć na operacje na jądrach całkowych. Na przykład

- Jądro całkowe sumy operatorów jest sumą jąder całkowych; jeśli

$$(A_1 f)(x) = \int_X A_1(x, y) f(y) dy, \quad (A_2 f)(x) = \int_X A_2(x, y) f(y) dy$$

to dla $A = A_1 + A_2$ mamy

$$\begin{aligned} (A f)(x) &= (A_1 f)(x) + (A_2 f)(x) = \int_X A_1(x, y) f(y) dy + \int_X A_2(x, y) f(y) dy = \\ &= \int_X (A_1(x, y) + A_2(x, y)) f(y) dy \end{aligned}$$

$$A(x, y) = A_1(x, y) + A_2(x, y)$$

- Jądro całkowe iloczynu operatorów jest splotem jąder całkowych; dla tych samych A_1 i A_2 co poprzednio i $A = A_1 A_2$ mamy

$$\begin{aligned}(Af)(x) &= (A_1 A_2 f)(x) = \int_X A_1(x, y)(A_2 f)(y) dy = \\ &= \int_X A_1(x, y) \left(\int_X A_2(y, z) f(z) dz \right) dy = \\ &= \int_X \left(\int_X A_1(x, y) A_2(y, z) dy \right) f(z) dz \\ A(x, z) &= \int_X A_1(x, y) A_2(y, z) dy\end{aligned}$$

- Dla operatora sprzężonego do operatora $A : L^2(X, w) \rightarrow L^2(X, w)$ mamy warunek

$$\begin{aligned}\langle A^\dagger f_1 | f_2 \rangle &= \langle f_1 | A f_2 \rangle \\ \int_X ((A^\dagger f_1)(x))^* f_2(x) w(x) dx &= \int_X f_1(y)^* (A f_2)(y) w(y) dy \\ \int_X \left(\int_X A^\dagger(x, y) f_1(y) dy \right)^* f_2(x) w(x) dx &= \int_X f_1(y)^* \left(\int_X A(y, x) f_2(x) dx \right) w(y) dy \\ \int_{X \times X} (A^\dagger(x, y))^* w(x) f_1(y)^* f_2(x) dx dy &= \int_{X \times X} A(y, x) w(y) f_1(y)^* f_2(x) dx dy\end{aligned}$$

Dostajemy więc związek

$$(A^\dagger(x, y))^* w(x) = A(y, x) w(y)$$

$$A^\dagger(x, y) = \frac{1}{w(x)} A(y, x)^* w(y)$$

W przypadku $w = 1$ otrzymujemy $A^\dagger(x, y) = A(y, x)^*$ co jest analogiem związku z przestrzeni skończenie wymiarowej $A^\dagger = (A^T)^*$.

- Przeprowadzając podobny rachunek, co w poprzednim przypadku, możemy stwierdzić, że dla operatorów hermitowskich zachodzi

$$A(x, y) = \frac{1}{w(x)} A(y, x)^* w(y)$$

Na podstawie tej ostatniej własności łatwo rozpoznawać operatory hermitowskie. Oczywiście operatorem hermitowskim jest operator identycznościowy (z jądrem $\delta(x - y)$) ale także operator mnożenia przez funkcję rzeczywistą $g(x)$, z jądrem $g(x)\delta(x - y)$, ponieważ

$$(g(y)\delta(y - x))^* = g(x)\delta(x - y)$$

Operator różniczkowania ∂_x , z jądrem $\delta'(x-y)$ hermitowski nie jest; dla niego mamy

$$(\delta'(y-x))^* = -\delta'(x-y)$$

Ale jeśli przemnożymy ten operator przez jednostkę urojoną, otrzymując operator $i\partial_x$ z jądrem $i\delta'(x-y)$ otrzymamy operator hermitowski:

$$(i\delta'(y-x))^* = i^*(-\delta'(x-y)) = i\delta'(x-y)$$

Operatory hermitowskie i samosprężone posiadają szereg kilka przydatnych własności:

- Wszystkie wartości własne operatora hermitowskiego są rzeczywiste. Wynika to z równości (dla $Af = \lambda f$, $f \neq 0$):

$$\lambda \langle f|f \rangle = \langle f|\lambda f \rangle = \langle f|Af \rangle = \langle Af|f \rangle = \langle \lambda f|f \rangle = \lambda^* \langle f|f \rangle$$

jeśli $f \neq 0$, oznacza to, że $\lambda = \lambda^*$.

- Wektory własne operatora hermitowskiego odpowiadające różnym wartościom własnym są prostopadłe. Jeśli $Af_1 = \lambda_1 f_1$, $Af_2 = \lambda_2 f_2$, mamy

$$\lambda_1 \langle f_1|f_2 \rangle = \langle \lambda_1 f_1|f_2 \rangle = \langle Af_1|f_2 \rangle = \langle f_1|Af_2 \rangle = \langle f_1|\lambda_2 f_2 \rangle = \lambda_2 \langle f_1|f_2 \rangle$$

Jeśli $\lambda_1 \neq \lambda_2$, oznacza to, że $\langle f_1|f_2 \rangle = 0$.

- (tzw. *rozkład spektralny* operatora). Jeśli wektory własne tworzą zupełny układ ortonormalny, to operator samosprężony można zapisać w postaci

$$A = \sum_n \lambda_n P_n$$

gdzie P_n jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ_n .

Ta ostatnia własność jest często używana w fizyce, do obliczania wyrażeń postaci $\langle g|Ah \rangle$ używając tej własności mamy

$$\langle g|Ah \rangle = \sum_n \lambda_n \langle g|P_n h \rangle = \sum_n \lambda_n \langle g|P_n^2 h \rangle = \sum_n \lambda_n \langle P_n g|P_n h \rangle$$

Mając zupełny ortonormalny układ wektorów własnych f_n odpowiadających wartościom własnym λ_n wektory g i h można rozpisać jako

$$g = \sum_n \alpha_n f_n, \quad h = \sum_n \beta_n f_n$$

i wtedy

$$\begin{aligned} P_n g &= \alpha_n f_n, & P_n h &= \beta_n f_n \\ \langle P_n g|P_n h \rangle &= \alpha_n^* \beta_n \langle f_n|f_n \rangle = \alpha_n^* \beta_n \end{aligned}$$

a zatem

$$\langle g|Ah\rangle = \sum_n \lambda_n \alpha_n^* \beta_n$$

Znajomość rozkładu g i h na wektory własne operatora A pozwala zatem policzyć $\langle g|Ah\rangle$. Z tego powodu przeważająca większość obliczeń w fizyce jest prowadzonych w układzie wektorów własnych jakiegoś ważnego operatora samosprężonego (układ ten nazywany jest przez fizyków bazą wektorów własnych, choć ściśle rzecz biorąc bazą nie jest, różnica między bazą a zupełnym układem wektorów została podkreślona na poprzednim wykładzie).

Zdarza się, też często, że fizycy nazywają wektorami własnymi operatora A rozwiązania równania $Af = \lambda f$ które nie należą do ustalonej przestrzeni Hilberta, więc ściśle rzecz biorąc, wektorami własnymi nie są. Dzieje się tak na przykład dla operatora

$$-i\partial_x$$

w fizyce znanego jako operator pędu (bo w mechanice kwantowej ma związek z pędem cząstki kwantowej). Jeśli rozwiązujemy równanie

$$-i\partial_x f = \lambda f$$

otrzymujemy rozwiązania

$$\lambda \in \mathbb{C}, f(x) = e^{i\lambda x}$$

żadne z tych rozwiązań (nawet te dla $\lambda \in \mathbb{R}$) nie jest całkowne z kwadratem, czyli nie są one elementami przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$; rozwiązania dla $\lambda \notin \mathbb{R}$ nie stanowią zatem kontrprzykładu do twierdzenia, że wszystkie wartości własne muszą być rzeczywiste. Mimo to fizycy często nazywają funkcje $u_k(x) = e^{ikx}$ dla $k \in \mathbb{R}$ wektorami własnymi lub nienormalnymi wektorami. Nie jest to ściśle matematycznie, ale przydatne z praktycznego punktu widzenia. Na podstawie wyniku otrzymanego wcześniej gdy mówiliśmy o dysytrybucjach

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

można bowiem znaleźć

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)} \frac{dk}{2\pi} \\ -i\delta(x-y) &= \int_{-\infty}^{\infty} k e^{ik(x-y)} \frac{dk}{2\pi} \end{aligned}$$

co jest wzorem analogicznym do rozkładu spektralnego $A = \sum_n \lambda_n P_n$, choć sumę \sum_n trzeba było zastąpić całką $\int \frac{dk}{2\pi}$ (i oczywiście cały wzór jest zapisany na jądrach całkowych).

Teoria operatorów na przestrzeniach Hilberta jest bogata i obejmuje dużo więcej twierdzeń, ale mam nadzieję, że to co przedstawiłem tutaj będzie stanowiło wystarczającą podstawę matematyczną do zastosowań fizycznych które pojawiają się na innych przedmiotach.

Ćwiczenia wykładowe 15: wielomiany ortogonalne

Te ostatnie tematy nie będą już wchodzić w zakres egzaminu pisemnego, więc na tych ćwiczeniach wykładowych chciałbym raczej pokazać jak różne metody poznane w tym semestrze mogą być przydatne w analizie konkretnego zagadnienia.

Rozważmy równanie różniczkowe

$$(x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) - \lambda f(x) = 0$$

Jest to tak zwane *równanie Legendre'a*, pojawiające się czasem w fizyce. Można je traktować jako równanie na wektory własne $Af = \lambda f$ dla operatora

$$(Af)(x) = (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) = ((x^2 - 1)f'(x))'$$

Pokażmy najpierw, że ten operator jest operatorem hermitowskim w przestrzeni $L^2([-1, 1])$, czyli z iloczynem skalarnym zadanym wzorem

$$\langle g|h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)^* h(x) dx$$

Mamy

$$\begin{aligned} \langle g|Ah \rangle &= \int_{-1}^1 g(x)^* ((x^2 - 1)h'(x))' dx = \text{całkując przez części} \\ &= [g(x)^*(x^2 - 1)h'(x)]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 g'(x)^*(x^2 - 1)h'(x) dx = \\ &= - \int_{-1}^1 g'(x)^*(x^2 - 1)h'(x) dx = \text{jeszcze raz całkując przez części} \\ &= [-g'(x)^*(x^2 - 1)h(x)]_{x=-1}^{x=1} + \int_{-1}^1 (g'(x)^*(x^2 - 1))' h(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 ((Ag)(x))^* h(x) dx = \langle Ag|h \rangle \end{aligned}$$

Z czego wynika, że wartości własne tego operatora będą rzeczywiste, a wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym. Spróbujmy znaleźć te wektory/funkcje własne.

Istnieje kilka metod rozwiązywania takich równań. Jedną z częściej stosowanych jest poszukiwanie rozwiązania w postaci szeregu Taylora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Mamy wtedy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$2xf'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_nx^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$x^2f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n$$

Nasze równanie ma więc postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2na_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_nx^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} + 2na_n - \lambda a_n)x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n(n+1) - \lambda)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2})x^n = 0$$

Cały szereg musi być równy 0, co oznacza że współczynniki przy każdej potędze x muszą być równe 0:

$$(n(n+1) - \lambda)a_n - (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

dostajemy więc wzór rekurencyjny

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Zwróćmy uwagę, że jest to rekurencja co drugi krok: Za_0 można wyliczyć a_2 , następnie a_4 itd.; z a_1 można wyznaczyć a_3 , a_5 itd. Są dwie możliwości: albo przynajmniej jedna z tych rekurencji się nie kończy (cały czas dostajemy współczynniki a_n różne od 0), albo w pewnym momencie dostaniemy w obu rekurencjach 0 (wtedy wszystkie kolejne współczynniki również będą 0). W pierwszym przypadku można pokazać (czego nie będę tu robił), że dostajemy w ten sposób funkcję nie należącą do przestrzeni $L^2([-1, 1])$. W drugim przypadku, gdy rekurencja się urywa, wynikiem będzie pewien wielomian (bo szereg Taylora będzie skończony).

Łatwo stwierdzić, kiedy szereg się urywa. Są dwa przypadki:

- jeśli $a_0 \neq 0$, to aby rekurencja na współczynniki o parzystych indeksach się urywała potrzebujemy $\lambda = n(n+1)$ dla pewnego parzystego n ; wtedy $a_{n+1} = 0$ i wszystkie kolejne współczynniki o parzystych indeksach będą równe 0. Wtedy jednak rekurencja na współczynniki o nieparzystych indeksach nigdy by się nie urywała, chyba że już $a_1 = 0$ (i wtedy wszystkie $a_{2k+1} = 0$).

- analogicznie jeśli $a_1 \neq 0$ wtedy potrzebujemy $\lambda = n(n+1)$ dla pewnego nieparzystego n , by urwać rekurencję zaczynającą się od a_1 ; wtedy jednak potrzebujemy $a_0 = 0$, bo inaczej rekurencja zaczynająca się od a_0 byłaby nieskończona.

Podsumowując oba przypadki, zawsze potrzebujemy $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ i zaczynać rekurencję od $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ dla n parzystych lub od $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ dla n nieparzystych. Dla początkowych n możemy znaleźć

n	λ	f
0	0	a_0
1	2	$a_1 x$
2	6	$a_0(1 - 3x^2)$
3	12	$a_1(x - \frac{5}{3}x^3)$
4	20	$a_0(1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4)$

Rozwiązania dla każdego λ są jednoznaczne z dokładnością do normalizacji, czyli do wyboru współczynnika a_0 lub a_1 . Tradycyjnie normalizację tę wykonuje się tak aby $f(1) = 1$. Dostajemy w ten sposób tzw. *wielomiany Legendre'a*:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Jako że są one wektorami własnymi operatora hermitowskiego w $L^2([-1, -1])$ powinny być do siebie ortogonalne. I faktycznie można sprawdzić na przykład, że

$$\int_{-1}^1 P_0(x)P_4(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)dx = \frac{1}{8}(7x^5 - 10x^3 + 3x)|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

Wielomiany Legendre'a mają jednak także wiele innych właściwości. Udowodnijmy najpierw, że

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

Weźmy w tym celu funkcję $h(x) = (x^2 - 1)^n$. Łatwo zauważyć, że spełnia ona równanie

$$(x^2 - 1)h'(x) - 2nxh(x) = 0$$

a zatem także

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left((x^2 - 1)h'(x) - 2nxh(x) \right) = 0$$

Wykorzystując regułę Leibniza dla pochodnej wielokrotnej:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{0} (x^2-1)h^{(n+2)}(x) + \binom{n+1}{1} 2xh^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{2} 2h^{(n)}(x) + \\ & - \binom{n+1}{0} 2n x h^{(n+1)}(x) - \binom{n+1}{1} 2n h^{(n)}(x) = 0 \end{aligned}$$

czyli

$$(x^2-1)h^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xh^{(n+1)}(x) + n(n+1)h^{(n)}(x) - 2n x h^{(n+1)}(x) - 2n(n+1)h^{(n)}(x) = 0$$

$$(x^2-1)h^{(n+2)}(x) + 2xh^{(n+1)}(x) - n(n+1)h^{(n)}(x) = 0$$

czyli $h^{(n)}(x)$ spełnia równanie Legendre'a z $\lambda = n(n+1)$. Ponieważ dla każdej wartości własnej istnieje tylko jedno liniowo niezależne rozwiązanie wielomianowe, oznacza to, że

$$h^{(n)}(x) = cP_n(x)$$

dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$. Policzmy teraz $h^{(n)}(1)$. Mamy

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left((x+1)^n (x-1)^n \right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k (x+1)^n}{dx^k} \frac{d^{n-k} (x-1)^n}{dx^{n-k}} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} (x+1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{k!} (x-1)^k \end{aligned}$$

Dla $x = 1$ tylko jeden składnik z całej tej sumy będzie niezerowy, dla $k = 0$ (ponieważ w przeciwnym przypadku $(x-1)^k$ się zeruje). A zatem

$$h^{(n)}(1) = \binom{n}{0} \cdot \frac{n!}{n!} (1+1)^n \cdot \frac{n!}{0!} 1 = 2^n n!$$

Ponieważ $P_n(1) = 1$ (z definicji P_n), oznacza to, że

$$h^{(n)}(x) = 2^n n! P_n(x)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} h^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right)$$

Przypomnijmy wzór całkowy Cauchy'ego dla pochodnych:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

gdzie K jest dowolnym konturem okrężającym punkt z_0 , a f jest funkcją holomorficzną wewnątrz tego konturu. Używając tego wzoru mamy

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_K \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

jako kontur weźmy okrąg o środku w x i promieniu R sparametryzowany $z = x + Re^{i\varphi}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_{|z-x|=R} \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{((x + Re^{i\varphi})^2 - 1)^n}{Re^{i(n+1)\varphi}} iRe^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} (R^2 e^{2i\varphi} + 2xRe^{i\varphi} + x^2 - 1)^n R^{-n} e^{-in\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} \left(Re^{i\varphi} + 2x + \frac{x^2 - 1}{R} e^{-i\varphi} \right)^n d\varphi \end{aligned}$$

Dla $x \in (-1, 1)$, jeśli weźmiemy $R = \sqrt{x^2 - 1}$ otrzymujemy więc

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{x^2 - 1} e^{i\varphi} + 2x + \sqrt{x^2 - 1} e^{-i\varphi})^n d\varphi = \\ &= \frac{1}{2^n \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} (2\sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi + 2x)^n = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi + x)^n d\varphi \end{aligned}$$

Jeżeli mamy więc całkę postaci

$$\int_0^{2\pi} (a \cos \varphi + b)^n$$

możemy ją zapisać wyrazić za pomocą wielomianu Legendre'a:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (a \cos \varphi + b)^n &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^n = \\ &= 2\pi (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} P_n \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \end{aligned}$$

Rozważmy teraz tzw. *funkcję tworzącą* wielomianów Legendre'a:

$$F(t, x) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$$

Mamy wtedy

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} F(t, x) \right]_{t=0}$$

Korzystając ze wzoru an wielomiany Legendre'a za pomocą całki konturowej, mamy

$$\begin{aligned}
 F(t, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{1}{2^n \cdot 2\pi i} \oint_K \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t(z^2 - 1)}{2(z - x)} \right)^n \frac{1}{z - x} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{1}{1 - \frac{t(z^2 - 1)}{2(z - x)}} \frac{1}{z - x} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{1}{z - x - \frac{t}{2}(z^2 - 1)} dz
 \end{aligned}$$

Dla $|x| < 1$ jako kontur całkowania można wziąć okrąg $|z| = 1$. Używając metody residuów możemy znaleźć dwa punkty osobliwe funkcji podcałkowej

$$z_{1,2} = \frac{1}{t}(1 \pm \sqrt{1 - 2xt + t^2})$$

Tylko jedno z nich będzie leżało wewnątrz konturu; dla $|t| < 1$ będzie to to ze znakiem minus. Mamy więc

$$\begin{aligned}
 F(t, x) &= \text{Res} \left(\frac{1}{z - x - \frac{t}{2}(z^2 - 1)}, \frac{1}{t}(1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2}) \right) = \\
 &= \dots = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}
 \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem jeszcze jeden wzór na wielomiany Legendre'a:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} \right]_{t=0}$$

W fizyce to przedstawienie pojawia się, np. gdy potrzebujemy rozważamy funkcję

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

pojawiającą się w wielu sytuacjach, np. we wzorze na potencjał Coulomba. Mamy bowiem

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \theta + r_0^2}}$$

gdzie $r = |\vec{r}|$, $r_0 = |\vec{r}_0|$, θ jest kątem pomiędzy wektorami \vec{r} i \vec{r}_0 . Dla $r > r_0$ mamy wówczas

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_0}{r} \cos \theta + \frac{r_0^2}{r^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Dla $r < r_0$ mamy podobnie

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \frac{1}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{r_0} \cos \theta + \frac{r^2}{r_0^2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

Te rozwinięcia potencjału Coulomba w szereg są przydatne w wielu sytuacjach.

Jest też wiele innych własności spełnianych przez wielomiany Lagrange'a, i często mają one zastosowanie w fizyce.

Istnieją też inne zestawy tzw. wielomianów ortogonalnych, m.in.

- wielomiany Hermite'a, dane wzorem

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

będące ortogonalne w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$

- wielomiany Laguerre'a dane wzorem

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}$$

będące ortogonalne w przestrzeni $L^2([0, \infty), e^{-x})$

- wielomiany Chebysheva dane wzorami

$$\cos(n\varphi) = T_n(\cos \varphi), \quad \sin(n\varphi) = U_n(\sin \varphi)$$

będące ortogonalne w przestrzeni $L^2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$

Wielomiany ortogonalne często pojawiają się w fizyce jako rozwiązania jakichś równań różniczkowych lub współczynniki rozwinięcia jakichś funkcji, a metody analizy jak pokazano na przykładzie wielomianów Lagrange'a pomagają w znajdowaniu ich własności.