Analiza I v.02, 6.10.2020

Dokument ten nie jest przeznaczony dla studentów i proszę go młodzieży nie udostępniać.

1. Technikalia:

   Strona www wykładu: www wydziałowe -> dla studentów -> materiały dydaktyczne -> analiza I

2. Źródła zadań:

   (H) R. Hajłasz, „Metodyka rozwiązywania zadań z analizy matematycznej”

   (G) B.Gdowski, E.Pluciński, „Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie”,

   (M) W. Leksiński, B. Macukow „Matematyka w zadaniach dla kandydatów na wyższe uczelnie”,

   (J) T. Jurewicz, Z. Skoczylas „Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania” (tytuły mówią same za siebie),

   (MO) W.Marek, J.Onyszkiewicz, „Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach”

   (F) G. M. Fichtenholtz, „Rachunek różniczkowy i całkowy”

   (GC) śp. Grześ Cieciura

   (KN) W. Kaczor, M. Nowak, „Zadania z analizy matematycznej, t.2”

   (KN1) W. Kaczor, M. Nowak, „Zadania z analizy matematycznej, t.1”

   (BW) J. Banaś, S. Wędrychowicz, „Zbiór zadań z analizy matematycznej"

   (TR) T. Radożycki, „Rozwiązujemy zadania z analizy matematycznej, część 1"

   (BNS) „Biblioteczka opracowań matematycznych - szeregi"

   (BNC) „Biblioteczka opracowań matematycznych - ciągi"

   (KL) S. Klymchuk, „Counter-examples in Calculus"

   (Gel) B. R. Gelbaum, „Counterexamples in Analysis"

   (I) Inne

Szkic próby programu, semestr pierwszy

1. Wykład, 20.10 (nieco beletrystyczny)
   Kres, definicja.Zbiór ograniczony bez elementu największego (przykład z Rudina). Zbiory: Suma zbiorów, różnica, diagramy Venna, zbiory i podzbiory, zbiór pusty, dopełnienie, (uporządkowana para), iloczyn kartezjański, zdania logiczne, tautologie itp., $\forall$,$\exists$, zdania logiczne powiązane z rachunkiem zbiorów. Prawa de Morgana.
   Ćwiczenia:

   1.1 Narysować sumę i przecięcie zbiorów $A := \{x \in \mathbb{R}; x > 2\}$ oraz $B := \{x \in \mathbb{R}; x \leq 8\}$,

   1.2 ■ ⓜ Badania rynkowe wykazały, że gazetę P czyta 60 procent badanych, gazetę Q czyta 50 procent badanych, gazetę R czyta 50 procent badanych, 30 procent czyta P i Q, 20 procent czyta Q i R, 30 procent czyta P i R, 10 procent czyta wszystkie gazety. Narysuj diagram Venna ilustrujący ww. badania. Jaki procent czyta dokładnie dwie gazety? Jaki procent czyta przynajmniej dwie gazety? Jaki procent nie czyta jakiejkolwiek gazety?

1.3 ■ Niech A i B będą podzbiorami U. Niech $C = A \cap B$, $D = A' \cup B$ i $E = A \cup B$. Zaznacz na diagramach Venna zbiory C, D i E. Korzystając z praw de Morgana pokaż, że $A = D' \cup C$. Udowodnij, że $B = D \cap E$.

1.4 (G29) Zilustrować przy pomocy diagramu Venna zdania:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

1.5 ■ Niech p oznacza zdanie „idę do szkoły" zaś q odpowiada zdaniu „słońce świeci". Napisz korzystając z symboli logicznych: a) Jeżeli słonce świeci to idę do szkoły, b) Jeżeli nie idę do szkoły to słońce nie świeci. Podaj (słowami) zdanie przeciwne do „Jeżeli słońce świeci to idę do szkoły". Sporządź tabelkę logiczną dla zdań: $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$. Jak określimy zdanie: $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$?

1.6 Rozważmy zdanie: „Jeżeli coś jest kwadratem, to jest też rombem". Napisz jak powinno brzmieć: zaprzeczenie, zdanie przeciwne i zdanie przeciwstawne. Które z nich jest zdaniem prawdziwym?

1.7 ■ Niech $S = \{x : 1 \leq x \leq 17, x \in \mathbb{N}\}$ a P , Q i R to podzbiory S takie, że:
$P :=$ {liczby podzielne przez cztery},
$Q :=$ {dzielniki 36},
$R :=$ {liczby będące kwadratem innej liczby}. Wypisz elementy zbiorów:
S, $P \cap Q \cap R$, opisz słowami zbiór $P \cup Q$, narysuj diagram Venna pokazujący zależność między zbiorami P, Q, R, zaznacz na diagramie zbiór S.
Niech p, q, r będą zdaniami: p : x jest wielokrotością czterech
q : x jest podzielnikiem 36, r : x jest kwadratem innej liczby. Napisz słowami następujące zdanie: $(p \vee r) \wedge \neg q$. Pokaż na diagramie Venna obszar reprezentujący $(p \vee r) \wedge \neg q$. Wypisz tabelkę logiczną dla zdania $(p \vee r) \wedge \neg q$, podaj wartość x, dla której to zdanie jest prawdziwe.

1.8 ■ (MO1.1) Zdefiniować koniunkcję za pomocą alternatywy i negacji.
Odpowiedź: $\neg(\neg p \vee \neg q)$.

1.9 (MO1.2) Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.
Odpowiedź: $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

1.10 (MO1.3) Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.
Odpowiedź: $\neg p \Rightarrow q$

1.11 ■ (MO1.62) Sprawdzić, czy zdanie $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ jest tautologią. Czy jest prawdziwe zdanie: Jeżeli liczba naturalna a jest liczba pierwszą, to o ile a jest liczbą złożoną, to a równa się cztery. (Widać tu jak logika matematyczna ma się do tzw. codzienności)

1.12 (MO2.135) Narysować w układzie kartezjańskim zbiory: $A \times B$ i $B \times A$, jeżeli
$A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

1.13 ■ (MO3.27) Narysuj zbiór $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniający warunek: $x \leq y$, $\{x \leq 0\} \vee \{y \leq 0\}$.

1.14 ■ Wykres $|x| = |y|$, $|x - y| = 1$, $\sup(x, y) = 1$

1.15 ■ ⓜ (MO3.35) Narysuj zbiór $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniający warunek: $xy = 1$, $xy = 0$, $xy < 1$, $x < |y|$, $(ax)^2 + (by)^2 \leq 1$, $\{x \geq y\} \vee \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $y^2 + 2y - 3 \leq 0$ (warunek jest tylko na y więc na wykresie dostaniemy poziome pasy).

1.16 (MO3.56) Narysuj zbiór $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ spełniający warunek: $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $x+y = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $\{x^2 + y^2 < 4\} \wedge \{|z| < 1\}$, $\{|x| < 1\} \wedge \{|y| < 1\} \wedge \{|z| < 1\}$.

1.17 (G27) Niech U będzie zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 1$, B będzie zbiorem punktów, dla których $x^2 + y^2 < 4$, C będzie zbiorem punktów, dla których $(x - 1)^2 + y^2 < 1$, Znaleźć zbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$.

1.18 (BW, 26.26) Niech $A := \left\{ \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{N}_+, m < n \right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru A.

1.19 (BW, 27.27) Niech $A := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_+\right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru A.

1.20 (KN1, 1.1.10) Niech $A := \left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N}_+\right\}$. Wyznaczyć kresy zbioru A.

2. Wykład, 21.10

Konstrukcja zbioru liczb naturalnych wg von Neumanna, liczby całkowite, wymierne, niewymierność $\sqrt{2}$ (struktura dowodu matematycznego, dowód niewprost,), liczby rzeczywiste (beletrystycznie, jako wymierne i niewymierne). Nieograniczoność zbioru liczb naturalnych. Zasada indukcji (bez mocnej zasady indukcji)- trzy kontrprzykłady (dwa z Kazia, jeden z Wojciechowskiej str 64) , Relacje: relacja jako dowolny dwuelementowy podzbiór, $< . >, <=, >=$, wykres relacji $x + y >= 2$, równanie okręgu. Wstęp do klas abstrakcji, liczby całkowite.

Ćwiczenia:

2.1 ■ Dowód niewymierności $\sqrt{3}$

2.2 Udowodnić indukcyjnie, że: $(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \cdots + (n)(n!) = (n + 1)! - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}^+$.

2.3 ■ (GC) Indukcyjnie nierówność Bernoulliego czyli $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N} : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2.4 ⓜ (MO1.11) Udowodnić indukcyjnie, że: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2.5 ■ ⓜ (MO1.12) Udowodnić indukcyjnie, że: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.6 (MO1.13) Udowodnić indukcyjnie, że: $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2.7 ■ ⓜ Indukcyjnie $q^0 + q^1 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

2.8 Przykład Kazia Napiórkowskiego przypominający o tym, że bez sprawdzenia warunku dla $T(1)$, można udowodnić rzeczy nieprawdziwe (`www.fuw.edu.pl/~ajduk/FUW/matnkf/matematyka01_nkf.pdf`, str 17): Ciąg (a_n) spełnia warunki: $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Pokazać, że jest rosnący. Skoro $a_{k-1} < a_k$, to $a_k = \sqrt{2 + a_{k-1}}$, $a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}$, więc $a_k < a_{k+1}$, co kończy dowód. Zauważmy jednak, że $a_2 \approx 2.45$, $a_3 \approx 2.11$ itd. czyli ciąg jest malejący. Nie jest zatem spełniony warunek dla $T(1)$, czego wcześniej nie sprawdziliśmy.

2.9 ■ ⓜ (G35) Udowodnić indukcyjnie, że liczba postaci $n^3 - n$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielna przez 6.

2.10 ■ (GC) Udowodnić indukcyjnie, że jeżeli $a, b \geq 0$, to $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

2.11 (G43) Udowodnić indukcyjnie, że wielomian $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$, $n \in \mathbb{N}$ jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.

3. Wykład, 27.10

Relacje cd. liczby wymierne. Odwzorowania - iniekcja, surjekcja, bijekcja. Równoliczność zbiorów, okrąg i prosta, przeliczalność $\mathbb{Q}$, nieprzeliczalność zbioru wszystkich zbiorów. Dowód nieprzeliczalności $\mathbb{R}$ wg Cantora. Kresy cd., własności sup, inf. Zbiór nieograniczony.

Ćwiczenia: coś na mocną zasadę indukcji. (Na wykładzie nie omawiana).

3.1 ■ Punkty $(x, y), (p, q) \in \mathbb{R}^2$ należą do relacji R jeżeli $x^2 - y^2 = p^2 - q^2$. Opisz geometrycznie zbiór punktów będących w relacji z punktem $(1, 1)$.

3.2 (GC) Wyliczyć: $\bigcup_{n=1^{+\infty}} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$. $\bigcap_{n=1^{+\infty}} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$

3.3 (GC) $\bigcup_{t\in[2,3]A_t}$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]A_t}$, gdzie: $A_t = [t, 2t] \times [-t, t]$.

3.4 ■ ⓜ (GC) Pokazać, że funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X =]0,1[$, $Y = [-2,2] \setminus \{-1,1\}$
$f(x) = \begin{cases} -3x-1, x \in]0, \frac{1}{3}], \\ 3x, x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 6x-5, x \in]\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$ jest bijekcją. Znaleźć $f^{-1}(x)$.

3.5 ■ (MO7.10) Udowodnić, że zbiór $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$ jest przeliczalny. Odpowiedz: rozważyć funkcję $f(x) = 10x, x \in \mathbb{N}$ i pokazać, że jest ona surjekcją i injekcją.

3.6 ■ (MO7.22) Korzystając z funkcji $f(x) = \begin{cases} 2x, x \in \mathbb{N}, \\ -2x-1, x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$
pokazać przeliczalność zbioru $\mathbb{Z}$.

3.7 (MO7.26) Dowieść, że każdy zbiór rozłącznych, położonych na prostej odcinków jest przeliczalny. Odpowiedź: zauważmy, że w każdym odcinku znajduje się liczba wymierna.

3.8 ■ (I) Omówić po raz $n$ty dowód przekątniowy Cantora (argumentacja wykładowa zazwyczaj nie starcza) nieprzeliczalności odcinka $]0,1[$.

3.9 ■ (H8) Pokazać, że zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$ jest nieograniczony. Rozwiązanie: z definicji, $\forall_M \exists_{x \in \mathbb{R}} f(x) > M$ czyli bierzemy dowolne M i pokazujemy, ze istnieje takie $x(M)$, że warunek jest spełniony. x zazwyczaj zależeć będzie od M.

3.10 (H11) Pokazać, że zbiór liczb postaci $m\sqrt{5} - n, \quad m, n \in \mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry. (Dowód jw.)

3.11 ■ Pokazać, że funkcja $f(x) = x \sin x, x \in]0, +\infty[$ nie jest ograniczona z góry ani z dołu. Dowód przez sprzeczność. Zakładamy, że f jest ograniczona z góry przez jakieś M i pokazujemy, że dla np. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$ tego warunku utrzymać się nie da. Podobnie robimy z ograniczeniem z dołu dla np. $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}$

3.12 ■ (H12) Wykaż, że kres górny zbioru liczb postaci $\frac{x}{1+x}, x \in \mathbb{R}$ jest równy 1. Rozwiązanie: a) Zauważamy, że $\frac{x}{1+x} < 1, x > 0$. b) pokazujemy, że dla każdej liczby postaci $1 - \epsilon, \epsilon > 0$ istnieje x_0 takie, że $\frac{x_0}{1+x_0} > 1 - \epsilon$.

3.13 ■ (H18) Wykaż, że liczba 2 nie jest kresem górnym zbioru liczb postaci $\frac{3n+1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Dowód: wystarczy pokazać, że każda liczba tej postaci jest np. mniejsza od $\frac{3}{2}$.

3.14 (H19) Pokaż, że kres dolny zbioru liczb postaci $\frac{-x^2}{1+x^4}, x \in \mathbb{R}$ wynosi $-\frac{1}{2}$.

3.15 ■ (H24) Podaj przykład zbioru A, dla którego: a) $\sup A \in A$,$\sup A \notin A$, $\inf A \in A$,$\inf A \notin A$,$\sup A = \inf A$. (Mogą to być np. $[0,1], [0,1[\ldots$).

4. Wykład 28.10
Ciąg liczb rzeczywistych. Granica ciągu, własności granic (dodawanie, mnożenie, dzielenie). Zbieżność a ograniczoność. Przykłady obliczania granic
Ćwiczenia:

4.1 (GC) Wyliczyć (i bardzo dokładnie i powoli omówić, bo na wykładzie tego nie będzie): a) $\bigcap_n A_n$, b) $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$, c) $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k$, d) $\bigcup_n A_n$, jeśli: $A_n = \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}_+$.

4.2 ■ (H28) Zbadać, czy ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest monotoniczny i ograniczony. (Przypominam, że nie mamy jeszcze ciągłości funkcji!).

4.3 ■ (H29) Wykaż, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ jest ograniczony z góry przez 1. Rozwiązanie: rozłożyć $\frac{1}{k(k+1)}$ na różnicę dwóch ułamków i samo wyjdzie.

4.4 (H30) Wykaż, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ jest malejący i ograniczony. Rozwiązanie: Pokazać, że jest malejący, ograniczony z góry a potem skorzystać z poprzedniego zadania oraz nierówności $\frac{1}{2k(2k+1)} < \frac{1}{k(k+1)}$ by pokazać, że jest ograniczony z dołu.

4.5 ■ Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

4.6 ■ (H39) Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$

4.7 (H44) Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$

4.8 ■ Bezpośrednio z definicji pokazać, że $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 3 = +\infty$

5. Wykład 3.11
Przykłady obliczania granic. Tw. o trzech ciągach. Rekurencja, Ciąg Cauchy. Konstrukcja Cantora zbioru liczb rzeczywistych.
Ćwiczenia: metoda stycznych jako przykład rekurencji (oprócz ślicznych zadań z Grzesia)

5.1 ■ (K,2.17-2.40) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (tutaj nie liczymy z definicji lecz korzystamy z twierdzeń o iloczynie, ilorazie itp ciągów, których granice już znamy): m $u_n = \frac{n}{n+1}$, $u_n = \frac{n^2-1}{3-n^2}$, m $u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}$, m $u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$, $u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1}\right)^3$, $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$, $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{2n-1}$, $u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}$, $u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$, $u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}$, $u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n^2-n}}$.

5.2 ■ (K,2.41-2.46) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, m $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$, $u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$, m $u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$.

5.3 ■ (K,2.48-2.53) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \frac{4^{n-1}-5}{2^{2n-7}}$, $u_n = \frac{53^{2n}-1}{49^n+7}$, $u_n = \frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}$, m $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1}-1}{3^{n+1}-1}$.

5.4 ■ (K,2.54-2.57) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (typowe na trzy ciągi): $u_n = \sqrt[n]{3^n+2^n}$, m $u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}$, m $u_n = \sqrt[n]{(\frac{2}{3})^n + (\frac{3}{4})^n}$.

5.5 Niech $T_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1,1], n \in \mathbb{N}_+$. Znaleźć $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$ pokazać,że $T_2(x) = 2x^2 - 1$ oraz, że $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. Udowodnić indukcyjnie lub nie, że $T_n(x)$ jest wielomianem stopnia n (to też jest zadanie maturalne, maj 2004)

5.6 ■ m (H79) Oblicz granicę ciągu określonego rekurencyjnie: $a_1 = \sqrt{2}$, $\quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Rosnący i ograniczony.

5.7 ■ (GC) Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$. Odpowiedź: z równania $f(x) = x$ wynika, że jedynym kandydatem na punkt stały dla $x \in]0,+\infty[$ jest $\hat{x} = \sqrt{2}$. Badamy $f(x) - x = \begin{cases} \leq 0, x \in]0,\sqrt{2}], \\ \geq 0, x \in [\sqrt{2},+\infty[\end{cases}$ oraz $f(x) - \hat{x} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}$. Zatem $x_n \in [\sqrt{2},+\infty[$, dla $n \geq 1$ więc ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ jest nierosnący i ograniczony z dołu przez $\sqrt{2}$, czyli jest zbieżny i $\lim x_n = \sqrt{2}$.

5.8 (GC) Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = \frac{6}{2a_n+1}$, $a_0 > 0$. (oscylujący)

5.9 (K.29) Na wykładzie

6. Wykład 4.11
Przykłady obliczania granic. Tw. Bolzano-Weierstrassa. Twierdzenie Stolza (jeżeli się wyrobię, jak nie to na ćwiczenia).
Ćwiczenia:

6.1 ■ (H77) Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $\{\frac{1}{n}\}$ jest zbieżny.

6.2 ■ (H78) Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ jest zbieżny.

6.3 ■ Policzyć granicę $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$.

6.4 (TR) Znaleźć granicę ciągu danego wzorem rekurencyjnym: $a_{n+1} = \frac{1}{a_n^2}, a_1 > 0, a_1 \neq 1$.

6.5 (TR) Zbadać zbieżność ciągu: $a_n = \cos\left(\frac{\pi n^3}{2n^2+n}\right)$.

6.6 (TR) Zbadać zbieżność ciągu: $\frac{n}{2n+1} \sin\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$.

6.7 (TR) Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. (na trzy ciągi)

6.8 (TR) Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę: $a_n = \sqrt[n]{\lambda_1^n + \lambda_2^n + \ldots + \lambda_k^n}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, a $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \ldots, k$. (na trzy ciągi).

6.9 ■ (K,2.64-2.69) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym: $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$, $u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$, $u_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$, ⓜ $u_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$, $u_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$, ⓜ $u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

6.10 ■ (K,2.71-2.90) Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym ⓜ $u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$, $u_n = \sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}$, $u_n = n(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1})$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$, $u_n = 2^{-n} a \cos n\pi$, $u_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}$, ⓜ $u_n = n(\ln(n+1) - \ln n)$, $u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$, ⓜ $u_n = \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}$, $u_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$, ⓜ $u_n = \frac{n!}{n^n}$, $u_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$.

7. Wykład 10.11
Zbieżność ciągu a ograniczoność, podciągi zbieżne. Metryka. Punkt skupienia. Zbiory otwarte i domknięte, definicje, własności. Gęstość.
Ćwiczenia: (parę zadań na kryterium Stolza)

7.1 $\exp(x)$ - definicja (jako granica), dowód zbieżności, własności (związek z e^x?).

7.2 (TR) Zbadać zbieżność ciągu i znaleźć granicę: $a_n = \frac{1^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}} + \cdots + (2n+1)^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{5}{4}}}$

7.3 (GC) Sprawdzić, korzystając z Tw. Stolza, że: ⓜ $\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)$.

7.4 (GC) Wykazać, że jeżeli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to: $\lim_{n\to\infty} \frac{na_1+(n-1)a_2+\ldots a_n}{n+(n-1)+\ldots+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

7.5 Narysować dla metryk L^1 oraz L^∞ z $\mathbb{R}^2$ d-odcinki, czyli zbiory $[a,b] := \{x \in \mathbb{R}^2; d(a,x) + d(x,b) = d(a,b)\}$ (kółka będą na wykładzie)

7.6 Narysować kule i d-odcinki w metryce „rzymskiej" w $\mathbb{R}^2$ czyli $d(x,y) = \begin{cases} |x| + |y|, x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0 \\ |x-y|, x_1y_2 - x_2y_1 = 0 \end{cases}$ gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

7.7 Niech $X := K(0,1)$ (czyli $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$) zaś: $d(x,y) := \min(|x-y|, 2 - |x| - |y|)$. Sprawdzić, że $d(x,y)$ jest metryką

8. Wykład 12.11
Zbiory otwarte i domknięte, definicje, własności. Gęstość.
Ćwiczenia:

8.1 (TR) Zbadać, czy zbiory: $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$, $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{n}{n-1}\right[$, są otwarte bądź domknięte.

8.2 (TR) Zbadać, czy zbiory: $A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$, $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-2+\frac{2}{n+2}, 1+\frac{2}{n+1}\right[$, są otwarte bądź domknięte.

8.3 (TR) Załóżmy, że w przestrzeni $X = [1, +\infty[$ wprowadzono metrykę daną wzorem: $d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1+\frac{1}{xy}, & x \neq y \end{cases}$ Zbadać, czy zbiór $A = [2, 3[$ jest otwarty bądź domknięty.

8.4 (GC) Pokazać, że (X, d), gdzie d - metryka z ostatniego zadania poprzedniej serii, jest przestrzenią metryczną niezupełną.

9. Wykład 17.11
Zupełność. Granica funkcji w punkcie. Funkcje ciągłe, własności, działania. Funkcje nieciągłe, przykłady.
Ćwiczenia:

9.1 ■ (H, str.1) Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Pokazać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $]1, 2]$. Rozwiązanie: a) pokazujemy, że $\forall x \in \mathbb{R}, 1 < f(x) \leq 2$. b) Pokazujemy, że dla każdego $c \in]1, 2]$ istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = c$. Straszna robota, dlatego warto wprowadzić pojęcie funkcji ciągłej.

9.2 ■ Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Pokazać, że zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $]-1, 1[$. Rozwiązanie: a) pokazujemy, że $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f(x) < 1$. b) Pokazujemy, że dla każdego $c \in]-1, 1[$ istnieje taki $x\mathbb{R}$, że $f(x) = c$. Po raz drugi i ostatni agitujemy za pojęciem funkcji ciągłej.

9.3 ■ (H210) Zapisać w języku Heinego i Cauchy'ego zdanie: $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

9.4 (H211) Wykazać z definicji, że $\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Dowód Heine: szacujemy |funkcje| przez $|x|$ więc gdy x zbiega do zera to funkcja też. Cauchy w podobny sposób tzn. $\delta = \epsilon$

9.5 ■ (H212) Wykazać z definicji (Heine i Cauchy), że $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$. Dowód: szacujemy |funkcje| przez $|\frac{1}{x}|$ i wychodzi.

9.6 ■ (H216) Niech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \\ x^2, & \text{dla } x \text{ wymiernych} \end{cases}$.
Wykazać z def. Cauchy'ego, że $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

9.7 ■ (H219) Wykaż, że nie istnieje granica $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$. Dowód: bierzemy ciągi $a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ oraz $b_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ i wychodzi.

9.8 ■ ⓜ (H235) Sporządź wykres funkcji: $f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h^2}{h+x^2}$. Odp: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

9.9 ⓜ (H236) Oblicz $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha^3-\alpha^2}$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

9.10 ■ Ciągłość funkcji. Wykaż opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

9.11 ■ (H243) Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 1, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$.
Odpowiedź: Ciągła nie jest.

9.12 (H245) Zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{\sin x}{x}, & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$.
Odpowiedź: korzystamy z ciągu dla (H219).

10. Wykład 18.11
Ciągłość jednostajna funkcji. Własność Darboux (jak się wyrobię, to zacznę pochodne).
Ćwiczenia:

10.1 ■ (H256) Ciągłość jednostajna: opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$

10.2 (H257) opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$

10.3 ■ (H260) opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$

10.4 (H261) opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$

11. Wykład 24.11
Zbiory spójne. Własność Darboux. Rachunek różniczkowy. Def. pochodnej jako granicy ilorazu różnicowego. Własności pochodnej, pochodna superpozycji.
Ćwiczenia: Pochodne, policzyć nieco pochodnych z definicji

11.1 (TR) Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x^n, & x \le 0 \end{cases}$

11.2 ■ (H269) Pochodna z definicji: zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = |x|$ w punkcie $x = 0$.

11.3 (H270) zbadać, czy istnieje pochodna funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x$ w punkcie $x = 0$.

11.4 ■ ⓜ (H273) Dane są funkcje: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > 0 \\ 2, x = 0 \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$.
Oblicz $f'(0^+)$.

11.5 ■ (H276) Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$. Zbadaj dla jakich $x \in \mathbb{R}$ istnieje pochodna $f(x)$.

11.6 (H292) Dla jakiego a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dla } x > -1 \text{ i } x \neq 0, \\ a, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.
jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$? Odpowiedź: f musi być ciągła, stąd $a = 1$ a dla takiej wartości a pochodna istnieje i jest skończona.

11.7 (Gel36) Zbadać różniczkowalność funkcji: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.
Przykład dosyć istotny, funkcja jest różniczkowalna w zerze, jak policzymy z definicji, chociaż jej pochodna, policzona poza zerem, w zerze ciągła nie jest.

11.8 Pochodne wszystkich podstawowych funkcji

11.9 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.45-6.74): $y(x) = a^3x^3 + b^2x + c$, $y(b) = ax^3 + b^2x + c$,
$y(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{-\frac{13}{4}} + \frac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}} + 7^{\frac{3}{2}}$, $y(x) = 5\sqrt[3]{x^7}$, $y(x) = \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$, $x(t) = t^3\sqrt{t}$, $y(x) = \frac{3}{3x-2}$,
$z(t) = \frac{3t^2}{7t^5-t-2}$, $y(x) = 2\frac{x-1}{x+1}$, ⓜ $z(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1+2\sqrt{t}}$, $y(t) = \left(\frac{1}{t} + 4\right)^4$.

11.10 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.75-6.91): $s(t) = \frac{1}{\sqrt{6t-t^2}}$, $y(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(ax+bx)^p}}$, $v(z) = \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}$, $y(x) = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$, $s(t) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}}$, ⓜ $u(v) = \frac{\sqrt{1+v}-\sqrt{1-v}}{\sqrt{1+v}+\sqrt{1-v}}$.

11.11 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.93-6.119): $y(x) = \sin\frac{a}{x}$, $v(t) = \frac{5}{\sin^3 2t}$, $y(x) = \frac{x \sin x}{1+\operatorname{tg} x}$, $y(t) = \operatorname{tg}^4\sqrt{t}$, $y(x) = e^x(a \sin x - \cos x)$, $y(x) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)}$.

11.12 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.120-6.143): $y(x) = \operatorname{arctg} 3x$, $y(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$, ⓜ $y(t) = \frac{\operatorname{arctg} 2t}{\operatorname{arcctg} 2x}$, $z(t) = \frac{\arcsin 4y}{1-4y}$, $y(x) = \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)\right] - x$, $y(x) = \frac{1}{a^2-b^2}\arcsin\frac{a\cos x+b}{a+b\cos x}$ (te dwa ostatnie to raczej z przymrużeniem oka)

11.13 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.144-6.181): $f(x) = e^{\cos^2 x}$, $g(x) = (x + k\sqrt{1-x^2})e^{k\arcsin x}$, $z(t) = 2 \times 7^t - 1$, $y(x) = a^{2x}x^n$,$y(x) = \ln\sin x$, $z(t) = \ln\frac{30}{x+3}$,ⓜ $y(x) = \ln(\ln x)$, $f(x) = \ln(\cos\frac{1}{2}x)^2$,$y(x) = \ln(\ln(\ln x))$, ⓜ $z(x) = \log_x \ln x$.

11.14 ■ Obliczyć pochodne następujących funkcji (K6.182-6.200): $y(x) = x^{5x}$, $y(x) = x^{\sin x}$, $z(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $y(x) = a^{\ln x}$, $y(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$, $y(x) = (\sin x)^{\cos x}$, $y(x) = x^{e^x}$, $y(x) = x^{x^x}$.

11.15 ■ (K6.251-256) Podać wzór ogólny na pochodna rzędu n następujących funkcji: $y(x) = \cos x$, $y(x) = \ln x$, $z(x) = \frac{1}{ax+b}$.

11.16 ■ (K6.261) Wykazać, że funkcja $x(t) = a\sin(\omega t+\varphi_0)$ spełnia równanie: $\ddot{x}+\omega^2 x = 0$.

11.17 (TR) Znaleźć pochodne funkcji $f(x) = \log_x \cos(\frac{\pi x}{2})$, $g(x) = x^{\sin(x^x)}$.

11.18 ■ (I) Niech $\phi(x) = f(x+vt) + g(x-vt)$, zaś $\psi(t) = f(x+vt) + g(x-vt)$, f, g są dwukrotnie różniczkowalne. Pokazać, że $\psi'' = v^2\phi''$. Podać interpretację wyrażenia $f(x+vt) + g(x-vt)$.

12. Wykład 25.11

Tw. Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego. Tw. o wartości średniej. Funkcje styczne, klasy $C^k([a,b])$.

Ćwiczenia:

12.1 (TR) Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość: $x^n - nx + n - 1 \geq 0$, jeśli $n \in \mathbb{N}_+$ i n jest parzyste.

12.2 (TR) Pokazać, że wielomian $w_n(x) = x^n - x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, może mieć co najwyżej dwa rzeczywiste miejsca zerowe.

12.3 (TR) Która z liczb jest większa: e^π, czy π^e?

12.4 ■ ⓜ Znaleźć współrzędne punktu wykresu funkcji $f(x) = x^2 - x$, w którym styczna jest równoległa do funkcji $g(x) = 5x$.

12.5 ■ ⓜ Znaleźć równanie stycznej do krzywej: $2x^2 - 3xy + y^2 = 4$ w punkcie $(3, 2)$.

12.6 ■ ⓜ Udowodnij, że linia $y = mx + c$ jest styczna do elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ jeżeli $c^2 = a^2m^2 + b^2$.

12.7 (H279) Napisz równanie stycznej do krzywej $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x = 0$.

12.8 Jeżeli $f'(x) = \cos x$ oraz $f(\frac{\pi}{2}) = -2$, znajdź $f(x)$.

12.9 ■ Pas do lądowania ma 2 km. Samolot ląduje na pasie. Odległość między hamującym samolotem a początkiem pasa opisuje wzór: $s = c + 100t - 4t^2$, gdzie t mierzymy w sekundach od momentu lądowania a c jest odległością miedzy punktem przyziemienia a początkiem pasa. Niech $c = 800m$. Znajdź odległość, jaką przebył samolot po 5. sekundach. Znajdź wzór na prędkość samolotu. Znajdź punkt P, w którym prędkość samolotu wynosiła 36 m/s. okaż, że jeżeli samolot wyląduje przed punktem P, to zatrzyma się przed końcem pasa startowego.

12.10 Dla funkcji $f(x) = \frac{x(x-3)(x-8)}{7}$, $x \in [2, 9]$. znaleźć najmniejszą i największą wartość (rozwiązujemy badając monotoniczność funkcji, bo nie mamy jeszcze twierdzeń o drugiej pochodnej).

12.11 ■ ⓜ Dla $x \in [0, 2\pi]$ znaleźć przedziały, dla których funkcja $y(x) = x - 2\sin x$ jest rosnąca.

12.12 ■ ⓜ Suma obwodów kwadratu o boku a i koła o promieniu r wynosi 240. Ile wynosi r, jeżeli suma pól powierzchni osiąga wtedy minimum?

12.13 Krzywą definiujemy jako zbiór punktów (x, y), gdzie $x := t^2 + \sin(2t)$ a $y = t + \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Znaleźć równanie stycznej do krzywej w punkcie, dla którego $t = 0$

12.14 Znaleźć wartości a, dla których prosta $9x - y = 14$ jest styczna do krzywej $y(x) = x^3 - 3x + a$ w punkcie $x = a$.

12.15 Narysować wykres funkcji mając wykres pochodnej (np. podobną do paraboli) i informację, że funkcja przechodzi przez jakiś punkt

12.16 (KL,94) Pokaż, że równanie: $x^2 - \sqrt{x} - 1 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $[1, 2]$.

12.17 (KL,94) Pokaż, że równanie: $\frac{x^2+x+1}{x-\frac{3}{2}} = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $[1, 2]$.

12.18 ■ ⓜ (K10.131) W koło o promieniu r wpisano prostokąt, Zbadać przebieg zmienności pola S tego prostokąta.

12.19 (K10.133) W półkole o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku koła. Zbadać przebieg zmienności pola S tego trójkąta.

13. Wykład 1.12

Ciągłość i różniczkowalność a funkcja odwrotna (cztery własności). Funkcja pierwotna.

Ćwiczenia:

13.1 (TR) wykazać, że dla dowolnego $x \in]-1, +\infty[$ spełniona jest równość: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.

13.2 ■ (I) Wiedząc, że $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, wyprowadzić wzory na pochodne funkcji odwrotnych do ⓜ x^2, e^x, $\sin(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\cosh(x)$, $\sinh(x)$, $\operatorname{tgh} x$.

13.3 ■ (K) Korzystając ze znajomości pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji (nie mamy jeszcze symbolu $\int$) x^a, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, x^2, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$, $\cos x$, $\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\sinh x$, $\frac{1}{\cosh(x)}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

13.4 ■ (K15.22-15.33) Korzystając z własności pochodnych, znaleźć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = 5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}$, $f(x) = \frac{(x^2-1)^3}{x}$, $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}$.

13.5 ■ (K15.34-15.51) Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji złożonej policzyć funkcję pierwotną dla następujących funkcji: $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $f(x) = \sqrt{a+bx}$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \frac{x}{3-5x^2}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[5]{x^3+1}}$, $f(x) = xe^{-x^2}$, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, $f(x) = \cos x e^{\sin x}$, $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $f(x) = \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)}$.

14. Wykład 2.12

Przykłady funkcji pierwotnych. Reguły de l'Hospitala, typy i przykłady. Legalizacja $\exp(x)$, jeżeli nie weszła na ćwiczenia.

Ćwiczenia:

14.1 ■ Obliczyć granice (K12.15-12.45): ⓜ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2\cos x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{\ln x}}{x^c}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x}$, ⓜ $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{2x-1}$, $\lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2\alpha}\right)\left(e^{\sin\alpha - e^{\sin x}}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$, $\lim_{x\to 0^-} (1-x)\ln(1-x)$

14.2 ■ Obliczyć granice (K12.46-12.65): ⓜ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$, $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin x}\right)$, $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$, ⓜ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

14.3 (TR) Obliczyć granicę: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$

14.4 (KN) Obliczyć granice: $\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{arctg}\,\frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1}$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x-1}{x(a-1)}\right)^{\frac{1}{x}}$, $\quad a>0, a\neq 1$.

15. Wykład 8.12
Nierówność Jensena. Funkcje wypukłe, własności. Niewymierność e.
Ćwiczenia:

15.1 Dokończenie zadań z poprzednich serii.

15.2 (KN47) Czy można zastosować regułę de l'Hospitala do obliczenia następujących granic? $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{2x+\sin x}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin(2x)+1}{(2x+\sin(2x))(\sin x+3)^2}$, $\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$.

15.3 (KN49) Udowodnić, że prawdziwa jest nierówność (Jensen dla $f(x)=\frac{1}{x}$): $\frac{n^2}{x_1+\cdots+x_n}\le\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}$, $\quad x_1,\ldots,x_n>0$

16. Wykład 9.12
Funkcje wypukłe cd. Wzór Taylora z resztą Lagrange'a.
Ćwiczenia:

16.1 ■ (H194) Wykaż, że $\forall_{x\neq 0},\quad e^x>1+x$ Odpowiedź: korzystamy ze wzoru Taylora z resztą drugiego rzędu.

16.2 ■ (H196) Wykaż, że $\forall_{x\neq 0},\quad e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$

16.3 ■ (H197) Rozwiń wielomian $f(x)=x^2-5x+6$: a) wokół punktu $x=1$, b) wokół punktu $x=-5$.

16.4 ■ (I) Rozwiń za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0=0$ do n-tego stopnia włącznie następujące funkcje: e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^m$, $\frac{1}{1+x}$, $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (te ostatnie podstawiając odpowiednie m do wzoru ogólnego).

16.5 (I) Rozwiń za pomocą wzoru Taylora w otoczeniu $x_0=0$ do n-tego stopnia włącznie następujące funkcje: $\ln(x)$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{arctg}\, x$, $e^{\frac{1}{x}}$.

16.6 ■ (I) Napisać rozwinięcie funkcji $e^{\sin x}$ do wyrazów z x^3. Odpowiedź: najpierw rozwinięcie e^x „karmimy" $\sin(x)$ a potem $\sin x$ zastępujemy rozwinięciem do x^3 włącznie.

16.7 ■ ⓜ (I) Napisać rozwinięcie funkcji $\ln(\cos x)$ do wyrazów z x^6

16.8 ■ (H192,193) Oblicz za pomocą wzoru Taylora (przypominam, że chodzi tu o wzór Taylora a nie szereg Taylora:): $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1+x)}$,$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

16.9 ■ Oblicz za pomocą wzoru Taylora (K 12.66-12.75): ⓜ $\lim_{x\to 0}\frac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^4}-\frac{\cos x+2}{x^3\sin x}\right)$, ⓜ $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$

16.10 (TR) Korzystając ze wzoru Taylora oblicz granice: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cosh x+x^2}{x^3\sin^3 x}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{tg}(x)\right)^{\mathrm{tg}(2x)}$.

17. Wykład 15.12
Wzór Taylora cd. Ekstrema lokalne. Asymptoty, badanie funkcji.
Ćwiczenia:

17.1 ■ (H298) Wykaż, że równanie $x^3-kx+1=0, k<0$ nie może mieć dwóch różnych pierwiastków rzeczywistych. Odpowiedź: funkcja jest rosnąca etc..

17.2 Niech $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ Wykaż, że równanie $f'(x)=0$ ma dokładnie trzy różne pierwiastki. Odpowiedź: da się to zrobić na wiele sposobów, można się też wykpić przy pomocy Tw. Rolle'a.

17.3 ■ (H291) Zbadaj liczbę rozwiązań równania $x^x = a^a, x > 0, a > 0$. Odpowiedź: Sporządzamy wykres funkcji x^x, znajdujemy minimum etc... Dla $a \geq 1$ oraz dla $a = \frac{1}{e}$ mamy dokładnie jedno rozwiązanie. Dla $a \in \{]0,1[\backslash \frac{1}{e}\}$ mamy dokładnie dwa rozwiązania.

17.4 ■ (H301,302) Ćwiczenie na definicję minimum: dane są funkcje:
$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, x > 0 \\ |x| - 1, x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, x \geq 0 \\ |x| - 1, x < 0 \end{cases}$
Zbadać, czy f i g posiadają ekstremum w punkcie $x = 0$. Odpowiedź: $f$ma a g nie ma.

17.5 ■ (H306) W jakim punkcie funkcja $f(x) = 2 + \operatorname{tg} x \cos x$ osiąga ekstremum? Odpowiedź: w żadnym.

17.6 ■ (K10.41) Promień świetlny wybiega z punktu A z prędkością v_1, pada na prostą p, załamuje się i biegnie z prędkością v_2 do punktu B po drugiej stronie prostej p. Jaki musi być stosunek sinusów kąta padania α i kąta załamania β, by czas potrzebny na przejście z A do B był jak najkrótszy? (Wydaje się skomplikowane ale wychodzi błyskawicznie z zerowania pierwszej pochodnej, trzeba tylko uzasadnić, że rzeczywiście dostajemy minimum)

17.7 (TR) Znaleźć stożek o największej objętości wpisany w kulę o promieniu R.

17.8 Znaleźć objętość najmniejszego (największego?) stożka opisanego na walcu o promieniu R (wysokość walca nie wpływa na końcowe rozwiązanie)

17.9 (TR) Dana jest parabola $y = ax^2$, gdzie $a > 0$. Znaleźć taki punkt na paraboli, że odcinek normalnej wystawionej w tym punkcie, zawarty wewnątrz paraboli jest najkrótszy.

17.10 Zbadać przebieg zmienności funkcji (nie zapomnieć o równaniach asymptot) (K10.73-10.80): $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$, ■ ⓜ $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$, $f(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$, ■ ⓜ $f(x) = 4x - \operatorname{tg}(x), x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

17.11 Zbadać przebieg zmienności funkcji (K10.82-10.114): $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 1$, ■ ⓜ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{2}{3}}$, $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

17.12 Zbadać przebieg zmienności funkcji (K10.115-10.124): $f(x) = \cos^2 x + 2\sin^2 x$, $f(x) = \sin x \cos 2x$, ■ ⓜ $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

17.13 Zbadać przebieg zmienności funkcji (K13.10-13.39): ■ $f(x) = x^2 \ln x$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $f(x) = \ln(\sin x)$, ■ $f(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$, $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$, $f(x) = e^{\operatorname{tg}(x)}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

17.14 (GC14) Pokazać, że jeżeli $f(x) : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ jest ciągła i ma asymptotę dla $x \to +\infty$, czyli $\exists A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - Ax - B) = 0$, to f jest jednostajnie ciągła. Odpowiedź: rozważamy funkcję $g(x) = f(x) - Ax - B$ i pokazujemy, że jest ona jednostajnie ciągła. Z faktu, że $g(x)$ zbiega do zera wiemy, że $\forall \epsilon > 0\ \exists x_0 > a$, że $|g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, x \geq x_0$. Wiemy też, że $g(x)$ jest ciągła jednostajnie na $[a, x_0]$, bo funkcja ciągła na zbiorze domkniętym jest też ciągła jednostajnie, zatem $\exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, x_0], |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Wówczas dla dowolnych $x_1, x_2 \in [a, +\infty[$ mamy $|x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2) \leq \epsilon$, bowiem dla $x_1 < x_0 < x_2$ mamy $|g(x_1) - g(x_2) \leq |g(x_1) - g(x_0)| + |g(x_0) - g(x_2)|$.

17.15 (GC16) (Polecam ;) Zbadać przebieg funkcji oraz jednostajną ciągłość jeżeli $f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

17.16 (KN,55) Znaleźć ekstrema funkcji: $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_+$

17.17 (KN,55) Znaleźć ekstremum funkcji $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

18. Wykład 16.12
Szeregi liczbowe. Kryteria zbieżności (Cauchy, d'Alembert, porównawcze, zagęszczeniowe).
Ćwiczenia:

18.1 (H115) Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Odpowiedź: liczymy S_n rozkładając ułamek na dwie części a potem przechodzimy do granicy.

18.2 ■ ⓜ (H118) Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7n+7n^2}$. Odpowiedź: ciąg sprowadzamy do poprzedniego.

18.3 ■ ⓜ (H120) Policz $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

18.4 (H121) Policz $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad |q| < 1$.

18.5 ■ ⓜ (K3.29-3.39) Zbadać zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

18.6 (K3.40-3.55) Zbadać zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, ⓜ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

18.7 ■ (FII,230) Korzystając z kryterium porównawczego, zbadać zbieżność szeregów: ⓜ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^n)^p}$ (szacujemy przez $\frac{2}{n^2}$), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
($\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} < \frac{1}{n^2}$, dla dostatecznie dużych n), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ (tak samo jak w poprzednim), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ $\left(\frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}\right)$.

18.8 (K3.85) Rozważmy ciąg trójkątów prostokątnych równoramiennych, takich, że przyprostokątna poprzedniego jest przeciwprostokatną następnego trójkąta. Przeciwprostokątna pierwszego wynosi 1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie a_n jest długością przyprostokątnej n-tego trójkąta

19. Wykład 22.12
Szeregi naprzemienne, przestawienie kolejności sumowania. Tw. Riemanna (o przestawianiu). Zbieżność bezwzględna. Kryterium ilorazowe.
Ćwiczenia:

19.1 (K3.40-3.55) Zbadać zbieżność następujących szeregów: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3n+1}{4n+1}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, ⓜ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

19.2 (FII,262) Zbadać zbieżność szeregów w zależności od parametru s: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^s n}$, ■ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n (\ln \ln n)^s}$.

19.3 (TR, 274) Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - n \sin\frac{1}{n}\right]^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

19.4 (TR, 282) Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+a^2}), \quad a > 0$.

19.5 (TR, 286) Zbadać zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}\right], \quad a, b > 0$.

20. Wykład 8.01
Zbieżność bezwzględna cd. Tw. Riemanna (o przestawianiu).
Ćwiczenia:

20.1 REZERWA

21. Wykład 12.01
Mnożenie szeregów (przykład z exp). Szeregi potęgowe. Promień zbieżności. (Sporo czasu zejdzie na badanie szeregów na krańcach przedziału zbieżności):
Ćwiczenia:

21.1 (FII,390) Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora, pokazać, że $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$

21.2 ■ (K11.28-11.55) Obliczyć promień zbieżności szeregu i zbadać jego zbieżność na krańcach przedziału zbieżności:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}x^n$, ⓜ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n 4^{n+1}}x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n}x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)x^n$.

21.3 (H152) Podać przykład szeregu potęgowego, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, zbieżnego:
a) tylko dla $x = 0$ (np. $n!x^n$, b) tylko w przedziale $]-a, a[$, c) tylko w przedziale $[-a, a]$, d) tylko w przedziale $[-a, a[$, e) tylko w przedziale $]-a, a]$, f) dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Przykładowe odpowiedzi: a) $n!x^n$, b) $\frac{1}{a^n}$, c) $\frac{x^n}{a^n(n+1)(n+2)}$, d) $\frac{x^n}{a^n\sqrt{n+1}}$, e) $\frac{(-1)^n x^n}{a^n\sqrt{n+1}}$, f) $\frac{x^n}{n!}$.

21.4 (H159-161) Obliczyć promień zbieżności szeregów: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^{2n+1}$,
$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(3x-4)^{2n+1}$, ■ ⓜ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+2)^{3n}}{1+n^2}$,

21.5 (H162) Zbadaj dziedzinę funkcji $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{\pi^{nx}}$.

21.6 (H163) Zbadaj zbieżność szeregu: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2+x^2}$

21.7 (KN,77) Korzystając z rozwinięcia $f(x) = \mathrm{arctgx}$ w szereg Taylora znaleźć sumę szeregu: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$

21.8 (KN,77) Korzystając z rozwinięcia funkcji $\sin x$ oraz $\cos x$ w szereg Taylora znaleźć sumę szeregu: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$
Odp: zauważamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x)$

22. Wykład 13.01
Szeregi potęgowe Promień zbieżności. Całka Riemanna. Wstęp.
Ćwiczenia:

22.1 Dokończenie zadań na szeregi potęgowe.

23. Wykład 19.01
Podział przedziału, średnica, podział normalny. Całka Riemanna, definicja.
Ćwiczenia:

23.1 (H316) Policzyć całkę Riemanna $\int_0^2 x\,dx$ bezpośrednio z definicji. Odpowiedź: bierzemy dowolny podział normalny, z każdego z nich wybieramy środek, liczymy sumę i przechodzimy do granicy. Potem powołujemy się na twierdzenia.

23.2 ■ (H317) Policzyć całkę Riemanna $\int_0^1 x^2\,dx$ bezpośrednio z definicji. Odpowiedź: bierzemy podział $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$, pokazujemy, ze jest normalny, bierzemy prawy koniec i wychodzi. Potem powołujemy się na twierdzenia.

23.3 ■ (H322a) Dla funkcji $f(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$ pokazać, że jest całkowalna w sensie Riemanna.

23.4 (H322b) Dla funkcji $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \text{ wymiernych}, \\ 0, & \text{dla } x \text{ niewymiernych} \end{cases}$ pokazać, że jest całkowalna w sensie Riemanna.

23.5 Podaj przykład funkcji całkowalnej w sensie Riemanna i nie posiadającej funkcji pierwotnej. Odpowiedź: np. funkcja ciągła, której wykres składa się np. z paru odcinków o różnych nachyleniach.

23.6 (K15.66-15.83) Policzyć całki: $\int x^4(1+x)^3dx$, $\int x^2e^xdx$, $\int x^4e^{2x}$, $\int x\cos x\,dx$,■ ⓜ $\int x^2\cos x\,dx$, ■ ⓜ $\int e^x\cos x\,dx$,■ ⓜ $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$, $\int\ln x\,dx$, $\int x\ln x\,dx$, $\int x^n\ln x\,dx$.

23.7 ■ Policzyć całki: $\int e^{3x^2}x\,dx$, $\int\frac{\sin x}{\sqrt[4]{2+\cos x}}\,dx$,$\int\frac{\log x}{x}\,dx$

23.8 ■ Policzyć całki: $\int\sin^2 x\,dx$, $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$, $\displaystyle\int\arctan x\,dx$, $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx$ (Wstawić $a=0$ $(b=0)$. Odgadnąć wzór $\int e^{ax}\sin bx\,dx$).

23.9 ■ Znaleźć związki rekurencyjne: $I_n=\int x^ne^{ax}\,dx$,

23.10 ■ Omówić rozkład funkcji wymiernych na ułamki proste.

23.11 ■ Znaleźć funkcję pierwotną do funkcji postaci $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

23.12 ■ (K16.10) Policzyć całki: $\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}$, $\int\frac{11x-1}{3x^2-5x-2}dx$, ⓜ $\int\frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx$.

23.13 (K16.15) Policzyć całkę: $\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}$.

23.14 (K16.16) Policzyć całkę (z trudem hamując entuzjazm): $\int\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}dx$.

24. Wykład 20.01
Własności funkcji całkowalnych - dodawanie, podział odcinka, Funkcje niecałkowalne - przykłady (np. 1 dla wymiernych a 0 dla niewymiernych). Podstawowe Tw. rachunku różniczkowego i całkowego. Całkowanie przez części Całka z wartości bezwzględnej, tw. o wartości średniej. Zamiana zmiennych, przykłady
Ćwiczenia: całki c.d.

25. Wykład 26.01 Całkowanie funkcji wymiernych, tw. o rozkładzie na ułamki proste. Funkcja od górnej granicy całkowania, pochodna. Wzór Wallisa.
Ćwiczenia: pochodna funkcji złożonej, gdy złożenie siedzi w także w granicach całkowania. Techniki całkowania, rekurencja, typy całek

25.1 (K19.2) Obliczyć pole ograniczone łukiem paraboli $y^2=2x$ oraz prostą $x=8$.

25.2 ⓜ (K19.37) Obliczyć pole zawarte między parabolami $y=x^2$ i $y^2=x$.

25.3 (K19.51) Obliczyć pole ograniczone funkcją $y(x)=x\sin(4x)$, $x\in[0,\frac{1}{8}\pi]$, osią OX oraz prostą $x=\frac{1}{8}\pi$.

25.4 (K15.66-15.83) Policzyć całki: $\int x^4(1+x)^3dx$, $\int x^2e^xdx$, $\int x^4e^{2x}$, $\int x\cos x\,dx$,ⓜ $\int x^2\cos x\,dx$, ⓜ $\int e^x\cos x\,dx$, ⓜ $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$, $\int\ln x\,dx$, $\int x\ln x\,dx$, $\int x^n\ln x\,dx$.

25.5 (GC) Całkując przez części znaleźć wzór rekurencyjny dla całek $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $\int x^\alpha\ln^n x\,dx$

26. Wykład 27.01
Ciagi funkcyjne. Zbieżność punktowa i jednostajna. Ciągłość a granica ciągu funkcyjnego.
Ćwiczenia:

26.1 (FII,314) Zamieniając zmienne pokazać, że jeżeli $\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ciągła, to $\int_0^\pi x\varphi(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\varphi(\sin x)\,dx$. Odpowiedź: podstawić $x=\pi-t$.

26.2 (GC) Pokazać, że $\int_0^\pi\frac{x\sin x\,dx}{(1+\cos^2 x)^2}=\frac{1}{8}\pi(\pi+2)$. Odpowiedź: skorzystać z poprzedniego zadania.

26.3 (I) Policzyć pochodne funkcji: $f(x)=\int_0^{x^2}\sin t\,dt$, ⓜ $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\operatorname{tg} s\,ds$.

27. Wykład ??
    Całkowanie i różniczkowanie ciągów funkcyjnych.

28. Wykład ??
    Różniczkowanie ciągów funkcyjnych cd. Promień zbieżności a zbieżność jednostajna szeregów potęgowych.