

Analiza 2017/18L
Tydzień 1

Zamiana zmiennych w całkach wielu zmiennych

Zad. 1. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Zad. 2. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Zad. 3. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywymi: $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $0 < p < q$, $0 < a < b$

Zad. 4. Obliczyć moment bezwładności:

- jednorodnej kuli względem osi symetrii
- jednorodnego walca względem osi symetrii
- jednorodnego walca względem osi prostopadłej do osi symetrii, przechodzącej przez środek masy

Zad. 5. Obliczyć objętość bryły uzyskanej z przecięcia kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ i walca $(x - \frac{1}{2}a)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}a^2$

Zad. 6. Wykorzystując współrzędne biegunowe policzyć całkę $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy e^{-x^2-y^2}}$

Całkowa reguła Leibniza

Zad. 7. Policzyć pochodne funkcji $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin xt}{t} dt$, $g(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \operatorname{tg} t dt$

Zad. 8. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze, policzyć całki

- $\int_0^1 x^a \ln^n x dx, \quad a > 0 \quad \left(= \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^n \int_0^1 x^a dx \right)$
- $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a)^n} dx, \quad a > 0 \quad \left(= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a} dx \right)$

Zad. 9. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze, policzyć całki

- $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log x} dx, \quad a, b > 0$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(\xi \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$

Zad. 10. Wprowadzając odpowiednio parametr, policzyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-t}}{t} \cos t dt$$

Zad. 11. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze policzyć całkę $\int_0^\infty \cos(tx) e^{-x^2} dx$.

Tydzień 2

Krzywe, całki krzywoliniowe

Zad. 12. Znaleźć parametryzację krzywej w $\mathbb{R}^3$ zadanej równaniami $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x + z - 1 = 0$.

Zad. 13. Znaleźć parametryzację krzywej w $\mathbb{R}^3$ powstałej z przecięcia płaszczyzny $z = 0$ z prostymi stycznymi do helisy $\vec{r}(u) = (\cos u, \sin u, u)$

Zad. 14. Znaleźć długość spirali logarytmicznej zadanej parametryzacją $\vec{r}(u) = (e^u \cos u, e^u \sin u)$ dla $u \in (-\infty, 0]$.

Zad. 15. Znaleźć całkowitą masę i całkowitą energię potencjalną cienkiego, jednorodnego sznura o gęstości liniowej λ zwisającego w kształcie krzywej o równaniu $y = \frac{1}{k} \cosh(kx)$, $x \in [-a, a]$, $k > 0$ w jednorodnym polu grawitacyjnym o potencjale $\phi(\vec{r}) = gy$.

Zad. 16. Znaleźć parametryzację krzywej określanej przez punkt leżący na obwodzie koła tocącego się bez poślizgu po prostej (cykloida). Wykorzystując znalezioną parametryzację, znaleźć długość łuku cykloidy i pole powierzchni pod łukiem (licząc całkę $\int_K y dx$).

Zad. 17. Wyznaczyć bezpośrednim rachunkiem całkę $\int_K \omega$ dla $\omega = (y - x)dx + xdy$ oraz K będącego półokręgiem $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ (wybrać jedną z orientacji). Obliczyć tę samą całkę dla K będącego półokręgiem $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, y \leq 0\}$ oraz odcinkiem $[-1, 1] \times \{0\}$.

Zad. 18. (Fichtenholz, tom III, s. 25) Znaleźć pole powierzchni pętli liścia Kartezjusza, tj. obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą wyznaczoną równaniem $x^3 + y^3 = 3axy$. (Wskazówka: by znaleźć parametryzację podstawić do równania $y = tx$ by znaleźć $x(t)$ i $y(t)$; pole powierzchni najłatwiej liczy się ze wzoru $S = \frac{1}{2} \oint_K (xdy - ydx)$)

Powierzchnie, całki powierzchniowe pierwszego rodzaju

Zad. 19. Znaleźć pole powierzchni zadanej parametryzacją $\vec{r}(\varrho, \varphi) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi)$, $\varrho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Zad. 20. Znaleźć pole powierzchni wyciętej walcem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ z paraboloidy $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ (wykorzystać uogólnione współrzędne biegunowe).

Zad. 21. Znaleźć pole elektrostatyczne wytworzone w punkcie $(0, 0, 0)$ przez półsferę $\{x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0\}$ naładowaną jednorodnie z gęstością powierzchniową σ .

Tydzień 3

Dokończyć zadania z poprzedniego tygodnia, oraz

Gradient, rotacja, dywergencja

Zad. 22. Znaleźć dywergencję i rotację podanych pól wektorowych:

$$\vec{A} = xze_x + yze_y - (x^2 + y^2)e_z, \quad \vec{B} = \frac{xe_x + ye_y + ze_z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\alpha}$$

Zad. 23. Sprawdzić, że podane pola wektorowe są polami potencjalnymi, znaleźć ich potencjały.

$$\vec{A} = (xe_x + ye_y + ze_z) \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vec{B} = yze_x + (4y^3 - 12yz^2 + xz)e_y + (4z^3 - 12y^2z + xy)e_z$$

Zad. 24. Sprawdzić, że podane pola wektorowe są polami bezźródłowymi, znaleźć ich potencjały wektorowe.

$$\vec{A} = e_z, \quad \vec{B} = yze_x + (4y^3 - 12yz^2 + xz)e_y + (4z^3 - 12y^2z + xy)e_z$$

Twierdzenie Greena i Twierdzenie Stokesa

Zad. 25. Sprawdzić twierdzenie Greena w $\mathbb{R}^2$ dla pola wektorowego

$$\vec{F} = \frac{1}{x+y}e_x + e_y$$

i obszaru

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \quad \wedge \quad 1 \leq x + y \leq 5\}$$

Zad. 26. Sprawdzić twierdzenie Stokesa w $\mathbb{R}^3$ dla pola wektorowego

$$\vec{F} = y^2e_x + x^2e_y$$

i powierzchni

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x, y, z \geq 0\}$$

Tydzień 4

Twierdzenie Gaussa

Zad. 27. Sprawdzić twierdzenie Gaussa dla pola wektorowego

$$\vec{F} = y^2 z \vec{e}_x + y^3 \vec{e}_y + xz \vec{e}_z$$

i obszaru

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 2\}$$

Zad. 28. Niech S będzie powierzchnią sparametryzowaną przez

$$\vec{r}(u, \phi) = (\cos u \cos \phi, \cos u \sin \phi, \sin(2u)), \quad u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, 2\pi]$$

Wykorzystując twierdzenie Gaussa, znaleźć objętość obszaru ograniczonego tą powierzchnią. Wskazówka: użyć $\vec{F} = z \vec{e}_z$.

Inne układy współrzędnych

Zad. 29. Znaleźć metrykę, gradient, rotację, dywergencję i laplasjan w następujących układach współrzędnych:

- cylindrycznym $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$
- sferycznym $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$
- parabolicznym $x = 2ut \cos \phi$, $y = 2ut \sin \phi$, $z = u^2 - t^2$

wykorzystując wzory $g_{ab} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^b}$, $(\vec{\nabla} f)^a = g^{ab} \partial_b f$, $(\vec{\nabla} \times \vec{A})^a = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \epsilon^{abc} \partial_b (g_{cd} A^d)$,
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_a (\sqrt{\det g} A^a)$

Zad. 30. Wykorzystując sferyczny układ współrzędnych, znaleźć rozwiązania równania

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\sin r}{r}$$

Wskazówka: jedno rozwiązanie można znaleźć zakładając $F^\theta = F^\phi = 0$, pozostałe: $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Tydzień 5

Wstęp do funkcji zespolonych

Zad. 31. Sprawdzić, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zespolonym
 $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

- $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) - 2ixy$

Zad. 32. Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna. Jeśli tak, zapisać je jako zmienne zmiennej zespolonej.

- $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$
- $f(x, y) = (x^2 + 3xy^2) + i(2xy + y^3)$
- $f(x, y) = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x)$
- $f(x, y) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

Zad. 33. Sprawdzić, czy podane funkcje mogą być częścią rzeczywistą jakiejś funkcji holomorficznej. Jeśli tak, znaleźć tę funkcję wykorzystując warunki Cauchy'ego-Riemanna.

- $u(x, y) = y - x$
- $u(x, y) = xy - x$
- $u(x, y) = \sin x - \sin y$
- $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$

Zad. 34. Znaleźć zbiór punktów nieciągłości podanej funkcji (= znaleźć cięcia płaszczyzny zespolonej niezbędne by funkcja była jednoznacznie określona). Znaleźć granicę funkcji po obu stronach cięcia.

- $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
- $f(z) = (z^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$
- $f(z) = (\log z)^{\frac{1}{2}}$

Zad. 35. Policzyc całkę krzywoliniową z danej funkcji zespolonej po danej krzywej.

- $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$
- $f(z) = z^3$, krzywa jest łamaną łączącą punkty kolejno -0 , 1 , i $1 + i$
- $f(z) = \frac{1}{z^2}$, krzywa jest złożona z półprostej $(-\infty, -1] \times \{0\}$, półokręgu od punktu $z = -1$ do punktu $z = 1$ w górnej części płaszczyzny zespolonej, i półprostej $[1, \infty) \times \{0\}$

Tydzień 6

Zad. 36. Znaleźć punkty osobliwe funkcji i zbadać, czy są to punkty osobliwe izolowane/nieizolowane, punkty rozgałęzienia, bieguny (dla biegunów znaleźć rząd bieguna). Uwaga: punkty cięcia nie muszą być punktami osobliwymi, jeśli cięcie można wybrać inaczej.

- $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2-1)^2}$
- $f(z) = \tan z$
- $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z+1}$
- $f(z) = \frac{1}{\sinh(\log z)}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(\log z)}$

Zad. 37. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{z^2-1} dz$, K : okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{e^z}{z^2+1} dz$, K : okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K z \tan(\pi z) dz$, K : brzeg prostokąta $[0, n] \times [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$

Zad. 38. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnych, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{(z-1)^3} dz$, K : okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\cos z}{(z^2+1)^2} dz$, K : okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{e^{2z}}{z \sin z} dz$, K : okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 4.

Zad. 39. Rozwinąć podaną funkcję w szereg Taylora wokół podanego punktu i znaleźć jego promień zbieżności. Zaznaczyć obszar zbieżności na płaszczyźnie zespolonej.

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3 + 2i$
- $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2}$, $z_0 = 1 - i$
- $f(z) = \log z$, $z_0 = i$
- $f(z) = \sqrt{z+1}$, $z_0 = i$

Tydzień 7

Zad. 40. Znaleźć obszar zbieżności szeregów Laurenta

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n (z - z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{|n|} (z - z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh n} z^n$

Zad. 41. Dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta

- wokół $z_0 = 0$ dla $0 < |z| < 1$
- wokół $z_0 = 0$ dla $1 < |z| < 2$
- wokół $z_0 = 0$ dla $2 < |z|$
- wokół $z_0 = 1$ dla $0 < |z - 1| < 1$
- wokół $z_0 = 1$ dla $1 < |z - 1|$

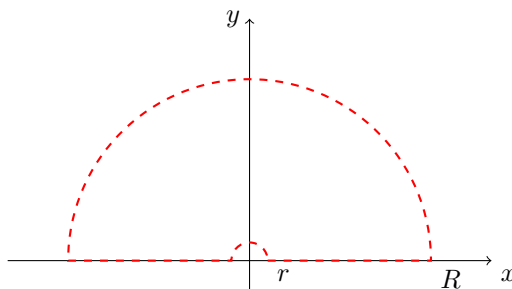
Zad. 43. Znaleźć położenia i wartości residuów funkcji

- $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$
- $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$
- $f(z) = \frac{\pi g(z)}{\sin(\pi z)}$, gdzie g jest dowolną funkcją holomorficzną na całym $\mathbb{C}$
- $f(z) = \pi g(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$, gdzie g jest dowolną funkcją holomorficzną na całym $\mathbb{C}$

Zad. 44. Znaleźć wartości residuum w nieskończoności dla funkcji

- $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$
- $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$

Zad. 45. Całkując funkcję $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ po konturze naszkicowanej poniżej, znaleźć wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$



Tydzień 8

Zad. 46. Wykorzystując kontur z poprzedniego zadania policzyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$, (rozważyć $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{2z^2}$).

Zad. 47. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po okręgu)

- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 - b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi, a > b > 0$
- $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi$

Zad. 48. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po półkolu)

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^3} dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx, a > 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2} dx, a > 0$

Zad. 49. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po 'dziurce od klucza')

- $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 + 3x + 2} dx$
- $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2 + b^2} dx, a, b > 0$

Zad. 50. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po 'kości')

- $\int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$
- $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} (1-x)^{\frac{2}{3}} (x+1)^{-1} dx$

Tydzień 9

Zad. 51. Policzyc szereg Fouriera następujących funkcji (poza przedziałem $(-\pi, \pi)$ zdefiniowanych przez okresowość z okresem 2π):

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,
- $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = x^3$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = \sin(\alpha x)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = \cosh(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$

Zad. 52. Dla funkcji z poprzedniego zadania, zapisać wartość $f(\frac{\pi}{2})$ w postaci szeregu i wykorzystać otrzymane wzory do policzenia szeregów

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, (wykorzystując $f(x) = \operatorname{sgn} x$ lub $f(x) = x$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, (wykorzystując $f(x) = |\sin x|$)

Podobnie postępując, wykorzystując wartość $f(\pi)$ policzyć

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, (wykorzystując $f(x) = |x|$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$, (wykorzystując $f(x) = \cosh(\alpha x)$)

Zad. 53. Wykorzystując wzór Parsewala dla funkcji z poprzedniego zadania, policzyć szeregi

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$, (wykorzystując $f(x) = |\sin x|$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$, (wykorzystując $f(x) = e^{\alpha x}$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, (wykorzystując $f(x) = x^3 - \pi^2 x$)

Tydzień 10

Zad 54. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{dla } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}$
- $f(x) = e^{-a|x|} \operatorname{sgn}(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
- $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$, $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)}$, $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x}{\sinh(ax)}$, $a \in \mathbb{R}$

Zad 55. Opisać podane dystrybucje g za pomocą dystrybucji $\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)$ i $\theta(x)$. Znaleźć ich transformaty Fouriera.

- $\langle g, f \rangle = \sum_{n=-N}^N f(n)$, $N \in \mathbb{N}$
- $\langle g, f \rangle = \sum_{n=0}^N f^{(n)}(0)$, $N \in \mathbb{N}$
- $\langle g, f \rangle = \int_a^b f(x) dx$, $a, b \in \mathbb{R}$

Zad 56. Znaleźć takie czynniki normalizacyjne $\mathcal{N}$ aby podane funkcje miały w normę równą 1 w podanej przestrzeni Hilberta

- $f(x) = \mathcal{N}x^n$ w przestrzeni $L^2([0, 1])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n$ w przestrzeni $L^2([-1, 1])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n e^{-x}$ w przestrzeni $L^2([0, \infty])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n e^{-x^2}$ w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$

Zad 57. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H} = \{w(x)e^{-x^2} : w(x) \text{ jest wielomianem stopnia } \leq 2\} \subset L^2(\mathbb{R})$

Zad 58. Znaleźć rzut ortogonalny funkcji $f \in L^2([0, \infty))$ na podprzestrzeń $\mathcal{H} = \{w(x)e^{-x} : w(x) \text{ jest wielomianem stopnia } \leq 1\} \subset L^2([0, \infty))$ dla

- $f = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases}$, $a > 0$
- $f = e^{-ax}$, $a > 0$

(Znaleźć najpierw bazę ortonormalną $\mathcal{H}$.)

Tydzień 11

Zad. 59. Znaleźć wartości i wektory własne operatora $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{bmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}$$

Zad. 60. Pokazać, że w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 z iloczynem skalarnym $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)^* g(x) dx$ operator $\frac{d}{dx}$ można zapisać jako

$$\left(\frac{d}{dx}f\right)(x) = \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}y - \frac{15}{4}x + \frac{45}{4}xy^2\right)f(y)dy$$

Zad. 61. Korzystając z definicji $\langle A^\dagger f|g \rangle = \langle f|Ag \rangle$, w przestrzeni $L^2[\mathbb{R}]$ z niestandardowym iloczynem skalarnym $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) e^{-x^2} dx$ znaleźć sprzężenie hermitowskie operatorów

- $A : f(x) \mapsto \frac{df}{dx}(x)$
- $B : f(x) \mapsto f(x+a), \quad a \in \mathbb{R}$
- $C : f(x) \mapsto \left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + x^2\right)f(x) \in \mathbb{R}$
- $D : f(x) \mapsto f(|x|)$
- $E : f(x) \mapsto f(ax), \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(Odp.: $A^\dagger : f(x) \mapsto -e^{x^2} \frac{d}{dx}(e^{-x^2} f(x)) = \left(-\frac{d}{dx} + 2x\right)f(x)$, $B^\dagger : f(x) \mapsto e^{2xa-a^2} f(x-a)$, $C^\dagger = C$, $D^\dagger : f(x) \mapsto (f(x)+f(-x))\theta(x)$, $E^\dagger : f(x) \mapsto \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right)$)

Zad. 62. Znaleźć, jeśli istnieją, wektory i wartości własne operatora $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

- $(Af)(x) = i\frac{df}{dx}(x) + xf(x)$
- $(Af)(x) = \frac{df}{dx}(x) + xf(x)$
- $(Af)(x) = \frac{df}{dx}(x) - xf(x)$
- $(Af)(x) = f(|x|)$

Zad. 63. Niech $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$,

$$(Af)(x) = z_1 f(x) + z_2 f(-x), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Znaleźć wektory i wartości własne A . Rozstrzygnąć, czy A jest operatorem ograniczonym, jeśli tak, znaleźć jego normę. Rozstrzygnąć, dla jakich $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ operator A jest operatorem hermitowskim.