Analiza 2018/19L
Seria 1

Zamiana zmiennych w całkach wielu zmiennych

Zad. 1. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

Zad. 2. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywą

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Zad. 3. Obliczyć pole powierzchni obszaru ograniczonego krzywymi: $y^2 = px$, $y^2 = qx$, $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $0 < p < q$, $0 < a < b$

Zad. 4. Obliczyć moment bezwładności:

- jednorodnej kuli względem osi symetrii
- jednorodnego walca względem osi symetrii
- jednorodnego walca względem osi prostopadłej do osi symetrii, przechodzącej przez środek masy

Zad. 5. Obliczyć objętość bryły uzyskanej z przecięcia kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ i walca $(x - \frac{1}{2}a)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}a^2$

Zad. 6. Wykorzystując współrzędne biegunowe policzyć całkę $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^\infty \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}}$

Całkowa reguła Leibniza

Zad. 7. Policzyć pochodne funkcji $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin xt}{t}\,\mathrm{d}t$, $g(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\mathrm{tg}(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$

Zad. 8. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze, policzyć całki

- $\int_0^1 x^a \ln^n x \mathrm{d}x, \quad a > 0 \qquad \left(= (\frac{\partial}{\partial a})^n \int_0^1 x^a \mathrm{d}x \right)$
- $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a)^n}\mathrm{d}x, \quad a > 0 \qquad \left(= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} (\frac{\partial}{\partial a})^{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+a}\mathrm{d}x \right)$

Zad. 9. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze, policzyć całki

- $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\log x}\mathrm{d}x, \quad a, b > 0$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{arctg}(\xi \,\mathrm{tg}\, x)}{\mathrm{tg}\, x}\mathrm{d}x$

Zad. 10. Wprowadzając odpowiednio parametr, policzyć całkę

$$\int_0^\infty \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} \cos t \,\mathrm{d}t$$

Zad. 11. Wykorzystując różniczkowanie po parametrze policzyć całkę $\int_0^\infty \cos(tx)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Seria 2

Krzywe, całki krzywoliniowe

Zad. 12. Znaleźć parametryzację krzywej w $\mathbb{R}^3$ zadanej równaniami $x^2+y^2-z^2=0$, $x+z-1=0$.
Zad. 13. Znaleźć parametryzację krzywej w $\mathbb{R}^3$ powstałej z przecięcia płaszczyzny $z=0$ z prostymi stycznymi do helisy $\vec{r}(u)=(\cos u, \sin u, u)$
Zad. 14. Znaleźć długość spirali logarytmicznej zadanej parametryzacją $\vec{r}(u) = (\mathrm{e}^u\cos u, \mathrm{e}^u \sin u)$ dla $u \in (-\infty, 0]$.
Zad. 15. Znaleźć całkowitą masę i całkowitą energię potencjalną cienkiego, jednorodnego sznura o gęstości liniowej λ zwisającego w kształcie krzywej o równaniu $y=\frac{1}{k}\cosh(kx)$, $x\in[-a,a]$, $k>0$ w jednorodnym polu grawitacyjnym o potencjale $\phi(\vec{r})=gy$.
Zad. 16. Znaleźć parametryzację krzywej zakreślanej przez punkt leżący na obwodzie koła toczącego się bez poślizgu po prostej (cykloida). Wykorzystując znalezioną parametryzację, znaleźć długość łuku cykloidy i pole powierzchni pod łukiem (licząc całkę $\int_K y\mathrm{d}x$).
Zad. 17. Wyznaczyć bezpośrednim rachunkiem całkę $\int_K \omega$ dla $\omega=(y-x)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ oraz K będącego półokręgiem $\{(x,y): x^2+y^2=1, y\geq 0\}$ (wybrać jedną z orientacji). Obliczyć tą samą całkę dla K będącego półokręgiem $\{(x,y): x^2+y^2=1, y\leq 0\}$ oraz odcinkiem $[-1,1]\times\{0\}$.
Zad. 18. (Fichtenholz, tom III, s. 25) Znaleźć pole powierzchni pętli liścia Kartezjusza, tj. obszaru w $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą wyznaczoną równaniem $x^3+y^3=3axy$. (Wskazówka: by znaleźć parametryzację podstawić do równania $y=tx$ by znaleźć $x(t)$ i $y(t)$; pole powierzchni najłatwiej liczy się ze wzoru $S=\frac{1}{2}\oint_K(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$)

Powierzchnie, całki powierzchniowe pierwszego rodzaju

Zad. 19. Znaleźć pole powierzchni zadanej parametryzacją $\vec{r}(\varrho,\varphi)=(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2\sin\varphi\cos\varphi)$, $\varrho\in[0,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$
Zad. 20. Znaleźć pole powierzchni wyciętej walcem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ z paraboloidy $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$ (wykorzystać uogólnione współrzędne biegunowe).
Zad. 21. Znaleźć pole elektrostatyczne wytworzone w punkcie $(0,0,0)$ przez półsferę $\{x^2+y^2+z^2=R^2, z\leq 0\}$ naładowaną jednorodnie z gęstością powierzchniową σ.

Seria 3

Dokończyć zadania z poprzedniego tygodnia, oraz

Gradient, rotacja, dywergencja

Zad. 22. Znaleźć dywergencję i rotację podanych pól wektorowych:

$$\vec{A} = xz\vec{e_x} + yz\vec{e_y} - (x^2+y^2)\vec{e_z}, \qquad \vec{B} = \frac{x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha}$$

Zad. 23. Sprawdzić, że podane pola wektorowe są polami potencjalnymi, znaleźć ich potencjały.

$$\vec{A} = (x\vec{e_x}+y\vec{e_y}+z\vec{e_z})\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \vec{B} = yz\vec{e_x}+(4y^3-12yz^2+xz)\vec{e_y}+(4z^3-12y^2z+xy)\vec{e_z}$$

Zad. 24. Sprawdzić, że podane pola wektorowe są polami bezźródłowymi, znaleźć ich potencjały wektorowe.

$$\vec{A} = \vec{e_z}, \qquad \vec{B} = yz\vec{e_x} + (4y^3 - 12yz^2 + xz)\vec{e_y} + (4z^3 - 12y^2z + xy)\vec{e_z}$$

Twierdzenie Greena i Twierdzenie Stokesa

Zad. 25. Sprawdzić twierdzenie Greena w $\mathbb{R}^2$ dla pola wektorowego

$$\vec{F} = \frac{1}{x+y}\vec{e_x} + \vec{e_y}$$

i obszaru

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \quad \wedge \quad 1 \le x+y \le 5\}$$

Zad. 26. Sprawdzić twierdzenie Stokesa w $\mathbb{R}^3$ dla pola wektorowego

$$\vec{F} = y^2\vec{e_x} + x^2\vec{e_y}$$

i powierzchni

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x,y,z \ge 0\}$$

Seria 4

Twierdzenie Gaussa

Zad. 27. Sprawdzić twierdzenie Gaussa dla pola wektorowego

$$\vec{F} = y^2 z\vec{e_x} + y^3\vec{e_y} + xz\vec{e_z}$$

i obszaru

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 2\}$$

Zad. 28. Niech S będzie powierzchnią sparametryzowaną przez

$$\vec{r}(u, \phi) = \big(\cos u \cos\phi, \cos u \sin\phi, \sin(2u)\big), \qquad u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \phi \in [0, 2\pi]$$

Wykorzystując twierdzenie Gaussa, znaleźć objętość obszaru ograniczonego tą powierzchnią. Wskazówka: użyć $\vec{F} = z\vec{e_z}$.

Inne układy współrzędnych

Zad. 29. Znaleźć metrykę, gradient, rotację, dywergencję i laplasjan w następujących układach współrzędnych:

- cylindrycznym $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$
- sferycznym $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$
- parabolicznym $x = 2ut\cos\phi$, $y = 2ut\sin\phi$, $z = u^2 - t^2$

wykorzystując wzory $g_{ab} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^a}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^b}$, $(\vec{\nabla} f)^a = g^{ab}\partial_b f$, $(\vec{\nabla}\times\vec{A})^a = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\epsilon^{abc}\partial_b(g_{cd}A^d)$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_a(\sqrt{\det g}A^a)$

Zad. 30. Wykorzystując sferyczny układ współrzędnych, znaleźć rozwiązania równania

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\sin r}{r}$$

Wskazówka: jedno rozwiązanie można znaleźć zakłądając $F^\theta = F^\phi = 0$, pozostałe: $\vec{F'} = \vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{A}$

Seria 5

Wstęp do funkcji zespolonych

Zad. 31. Sprawdzić, czy podane funkcje są różniczkowalne w sensie zaspolonym $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

- $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3)$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) - 2\mathrm{i}xy$

Zad. 32. Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają warunki Cauchy'ego-Riemanna. Jeśli tak, zapisać je jako zmienne zmiennej zespolonej.

- $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + \mathrm{i}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
- $f(x, y) = (x^2 + 3xy^2) + \mathrm{i}(2xy + y^3)$
- $f(x, y) = (x^2 - y^2 + y) + \mathrm{i}(2xy - x)$
- $f(x, y) = \sinh x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \sin y$

Zad. 33. Sprawdzić, czy podane funkcje mogą być częścią rzeczywistą jakiejś funkcji holomorficznej. Jeśli tak, znaleźć tę funkcję wykorzystując warunki Cauchy'ego-Riemanna.

- $u(x, y) = y - x$
- $u(x, y) = xy - x$
- $u(x, y) = \sin x - \sin y$
- $u(x, y) = \frac{x}{x^2+(y+1)^2}$

Zad. 34. Znaleźć zbiór punktów nieciągłości podanej funkcji (= znaleźć cięcia płaszczyny zespolonej niezbędne by funkcja była jednoznacznie określona). Znaleźć granicę funkcji po obu stronach cięć.

- $f(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$
- $f(z) = (z^3 + 1)^{\frac{1}{3}}$
- $f(z) = (\log z)^{\frac{1}{2}}$

Zad. 35. Policzyć całkę krzywoliniową z danej funkcji zespolonej po danej krzywej.

- $f(z) = z^2$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$
- $f(z) = z^3$, krzywa jest łamaną łączącą punkty kolejno -0, 1, i $1 + \mathrm{i}$
- $f(z) = \frac{1}{z^2}$, krzywa jest złożona z półprostej $(-\infty, -1] \times \{0\}$, półokręgu od punktu $z = -1$ do punktu $z = 1$ w górnej częci płaszczynzy zepolonej, i półprostej $[1, \infty) \times \{0\}$

Seria 6

Zad. 36. Znaleźć punkty osobliwe funkcji i zbadać, czy są to punkty osobliwe izolowane/nieizolowane, punkty rozgałęzienia, bieguny (dla biegunów znaleźć rząd bieguna). Uwaga: punkty cięcia nie muszą być punktami osobliwymi, jeśli cięcie można wybrać inaczej.

- $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2-1)^2}$
- $f(z) = \tan z$
- $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z+1}$
- $f(z) = \frac{1}{\sinh(\log z)}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(\log z)}$

Zad. 37. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{z^2-1} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K z \tan(\pi z)\, \mathrm{d}z$, K: brzeg prostokąta $[0, n] \times [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$

Zad. 38. Korzystając ze wzoru Cauchy'ego dla pochodnych, policzyć całki

- $I = \oint_K \frac{z^5}{(z-1)^3} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 2$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\cos z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 2.
- $I = \oint_K \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z \sin z} \mathrm{d}z$, K: okrąg o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu 4.

Zad. 39. Rozwinąć podaną funkcję w szereg Taylora wokół podanego punktu i znaleźć jego promień zbieżności. Zaznaczyć obszar zbieżności na płaszczyźnie zespolonej.

- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3 + 2\mathrm{i}$
- $f(z) = \frac{1}{(z-2\mathrm{i})^2}$, $z_0 = 1 - \mathrm{i}$
- $f(z) = \log z$, $z_0 = \mathrm{i}$
- $f(z) = \sqrt{z+1}$, $z_0 = \mathrm{i}$

Seria 7

Zad. 40. Znaleźć obszar zbieżności szeregów Laurenta

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n (z-z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{|n|} (z-z_0)^n$ w zależności od q
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh n} z^n$

Zad. 41. Dla funkcji $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ znaleźć rozwinięcie w szereg Laurenta

- wokół $z_0 = 0$ dla $0 < |z| < 1$
- wokół $z_0 = 0$ dla $1 < |z| < 2$
- wokół $z_0 = 0$ dla $2 < |z|$
- wokół $z_0 = 1$ dla $0 < |z-1| < 1$
- wokół $z_0 = 1$ dla $1 < |z-1|$

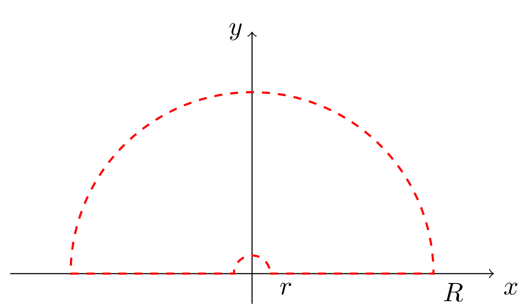
Zad. 43. Znaleźć położenia i wartości residuów funkcji

- $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$
- $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}$
- $f(z) = \frac{\pi g(z)}{\sin(\pi z)}$, gdzie g jest dowolną funkcją holomorficzną na całym $\mathbb{C}$
- $f(z) = \pi g(z) \mathrm{ctg}(\pi \mathrm{z})$, gdzie g jest dowolną funkcją holomorficzną na całym $\mathbb{C}$

Zad. 44. Znaleźć wartości residuum w nieskończoności dla funckji

- $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$
- $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z^2-1}$

Zad. 45. Całkując funkcję $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ po konturze naszkicowanym poniżej, znaleźć wartość całki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$



Seria 8

Zad. 46. Wykorzystując kontur z poprzedniego zadania policzyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x$, (rozważyć $f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{2iz}}{2z^2}$).

Zad. 47. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po okręgu)

- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2-b^2\cos^2\varphi} \mathrm{d}\varphi$, $a > b > 0$
- $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4\varphi}{1+\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi$

Zad. 48. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po półkolu)

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1} \mathrm{d}x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} \mathrm{d}x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} \mathrm{d}x$, $a > 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2} \mathrm{d}x$, $a > 0$

Zad. 49. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po 'dziurce od klucza')

- $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \mathrm{d}x$
- $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+3x+2} \mathrm{d}x$
- $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+a)^2+b^2} \mathrm{d}x$, $a, b > 0$

Zad. 50. Wykorzystując metodę całkowania po konturze, policzyć całki (całkowanie po 'kości')

- $\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x$
- $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{-1} \mathrm{d}x$

Seria 9

Zad. 51. Policzyć szereg Fouriera następujących funkcji (poza przedziałem $(-\pi, \pi)$ zdefiniowanych przez okresowość z okresem 2π):

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$,
- $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = |x|$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = x^3$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = |\sin x|$ dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = \sin(\alpha x)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$
- $f(x) = \cosh(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dla $x \in (-\pi, \pi)$

Zad. 52. Dla funkcji z poprzedniego zadania, zapisać wartość $f(\frac{\pi}{2})$ w postaci szeregu i wykorzystać otrzymane wzory do policzenia szeregów

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, (wykorzystując $f(x) = \operatorname{sgn} x$ lub $f(x) = x$)
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$, (wykorzystując $f(x) = |\sin x|$)

Podobnie postępując, wykorzystując wartość $f(\pi)$ policzyć

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, (wykorzystując $f(x) = |x|$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$, (wykorzystując $f(x) = \cosh(\alpha x)$)

Zad. 53. Wykorzystując wzór Parsevala dla funkcji z poprzedniego zadania, policzyć szeregi

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$, (wykorzystując $f(x) = |\sin x|$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\alpha^2}$, (wykorzystując $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, (wykorzystując $f(x) = x^3 - \pi^2 x$)

Seria 10

Zad 54. Znaleźć transformatę Fouriera funkcji

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{dla } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}$
- $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{sgn}(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$
- $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{\cosh(ax)}$, $a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x}{\sinh(ax)}$, $a \in \mathbb{R}$

Zad 55. Opisać podane dystrybucje g za pomocą dystrybucji $\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)$ i $\theta(x)$. Znaleźć ich transformaty Fouriera.

- $\langle g, f \rangle = \sum_{n=-N}^{N} f(n), \qquad N \in \mathbb{N}$
- $\langle g, f \rangle = \sum_{n=0}^{N} f^{(n)}(0), \qquad N \in \mathbb{N}$
- $\langle g, f \rangle = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Zad 56. Znaleźć takie czynniki normalizacyjne $\mathcal{N}$ aby podane funkcje miały w normę równą 1 w podanej przetrzeni Hilberta

- $f(x) = \mathcal{N}x^n$ w przestrzeni $L^2([0, 1])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n$ w przestrzeni $L^2([-1, 1])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n\mathrm{e}^{-x}$ w przestrzeni $L^2([0, \infty])$
- $f(x) = \mathcal{N}x^n\mathrm{e}^{-x^2}$ w przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$

Zad 57. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $\mathcal{H} = \{w(x)\mathrm{e}^{-x^2} : w(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq 2\} \subset L^2(\mathbb{R})$

Zad 58. Znaleźć rzut ortogonalny funkcji $f \in L^2\big([0, \infty)\big)$ na podprzestrzeń $\mathcal{H} = \{w(x)\mathrm{e}^{-x} : w(x)$ jest wielomianem stopnia $\leq 1\} \subset L^2\big([0, \infty)\big)$ dla

- $f = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < a \\ 0 & \\ \text{dla } x > a & \end{cases}, \qquad a > 0$
- $f = \mathrm{e}^{-ax}, \qquad a > 0$

(Znaleźć najpierw bazę ortonormalną $\mathcal{H}$.)

Seria 11

Zad. 59. Znaleźć wartości i wektory własne operatora $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} t+z & x-\mathrm{i}y \\ x+\mathrm{i}y & t-z \end{bmatrix}, \qquad x,y,z,t \in \mathbb{R}$$

Zad. 60. Pokazać, że w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 z iloczynem skalarnym $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)^* g(x)\mathrm{d}x$ operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ można zapisać jako

$$\big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big)(x) = \int_{-1}^{1} \big(\frac{3}{2}y - \frac{15}{4}x + \frac{45}{4}xy^2\big) f(y)\mathrm{d}y$$

Zad. 61. Korzystając z definicji $\langle A^\dagger f|g\rangle = \langle f|Ag\rangle$, w przestrzeni $L^2[\mathbb{R}]$ z niestandardowym iloczynem skalarnym $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ znaleźć sprzężenie hermitowskie operatorów

- $A : f(x) \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$
- $B : f(x) \mapsto f(x+a), \qquad a \in \mathbb{R}$
- $C : f(x) \mapsto \big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x^2\big) f(x) \in \mathbb{R}$
- $D : f(x) \mapsto f(|x|)$
- $E : f(x) \mapsto f(ax), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

(Odp.: $A^\dagger : f(x) \mapsto -\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{-x^2} f(x)\big) = \big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2x\big) f(x)$, $B^\dagger : f(x) \mapsto \mathrm{e}^{2xa-a^2} f(x-a)$, $C^\dagger = C$, $D^\dagger : f(x) \mapsto \big(f(x)+f(-x)\big)\theta(x)$, $E^\dagger : f(x) \mapsto \frac{1}{a} f\big(\frac{x}{a}\big)$)

Zad. 62. Znaleźć, jeśli istnieją, wektory i wartości własne operatora $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

- $(Af)(x) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + xf(x)$
- $(Af)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) + xf(x)$
- $(Af)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) - xf(x)$
- $(Af)(x) = f(|x|)$

Zad. 63. Niech $A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$,

$$(Af)(x) = z_1 f(x) + z_2 f(-x), \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Znaleźć wektory i wartości własne A. Rozstrzygnąć, czy A jest operatorem ograniczonym, jeśli tak, znaleźć jego normę. Rozstrzygnąć, dla jakich $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ operator A jest operatorem hermitowskim.