Matematyka III 2019/20Z
Zadania domowe , seria 1

Zad. 1. Znaleźć długość krzywej zadanej parametryzacją

- $\vec{r}(u) = (4\sqrt{2}\sin u, \sin 2u)$, $u \in [0, 2\pi]$
- $\vec{r}(u) = (\frac{1-e^{2u}}{1+e^{2u}}\cos u, \frac{1-e^{2u}}{1+e^{2u}}\sin u, \frac{2e^{u}}{1+e^{2u}})$, $u \in [0, 2\pi]$
- $\vec{r}(u) = (\frac{\cos(2u)}{\cos u}, \frac{\sin(2u)}{\cos u}, \frac{\sqrt{3}}{\cos u})$, $u \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
- $\vec{r}(u) = (\sinh u \cos u, \sinh u \sin u, u)$, $u \in [0, \pi]$

Odpowiedzi: 8π, 2π, 4, $\sqrt{2}\sinh\pi$.

Zad. 2. Znaleźć długość krzywej powstałej z przecięcia powierzchni $3x^2 + y^2 - z^2 = 1$ płaszczyzną $x = z$.
Odpowiedź: 2π.

Zad. 3. Znaleźć pole obszaru $\mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.
Odpowiedź: $\frac{3\pi}{8}$

Zad. 4. Znaleźć pole ograniczonej krzywą zadaną parametryzacją $\vec{r}(u) = (2\cos u - \cos 2u, 2\sin u - \sin 2u)$, $u \in [0, 2\pi]$
Odpowiedź: 6π

Zad. 5. Znaleźć pole powierzchni wyciętej z paraboloidy obrotowej $z = x^2 + y^2$ walcem $x^2 + y^2 = 1$
Odpowiedź: $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

Zad. 6. Znaleźć pole powierzchni zadanej parametryzacją

- $\vec{r}(u, \varphi) = (\sqrt{1 + u^2}\cos\varphi, \sqrt{1 + u^2}\sin\varphi, u)$, $u \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
- $\vec{r}(\varrho, \varphi) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \varrho^2\cos(2\varphi))$, $\varrho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

Odpowiedzi: $2\pi(\sqrt{3} + \frac{\operatorname{arsinh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}})$, $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$.

Zad. 7. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $2z = x^2 + y^2$ oraz $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
Odpowiedź: $\frac{4}{3}\pi$.

Zad. 8. Znaleźć objętość bryły wyciętej ze stożka $0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ walcem $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$.
Odpowiedź: $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}$.

Zad. 9. Znaleźć całkę skierowaną z podanego pola wektorowego po krzywej o danej parametryzacji

- $\vec{V} = (x^2y - z^3, x^3 + y^3, xz^2)$, $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
- $\vec{V} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$, $\vec{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, \varphi)$, $\varphi \in [0, 4\pi]$
- $\vec{V} = (x, y, z)$, $\vec{r}(u) = (\cos u, \cos^2 u, \cos^3 u)$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Odpowiedzi: $\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\ln(1 + 16\pi^2)$, $-\frac{3}{2}$

Zad. 10. Znaleźć strumień podanego pola wektorowego przez powierzchnię o danej parametryzacji

- $\vec{V} = (x^2y - z^3, x^3 + y^3, xz^2)$, $\vec{r}(u, \varphi) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi, u\cos\varphi)$, $u \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$
- $\vec{V} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$, $\vec{r}(\varphi, u) = (\cos\varphi, \sin\varphi, u)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $u \in [-1, 1]$
- $\vec{V} = (y, -x, z)$, $\vec{r}(u, t) = (u^2 - t^2, 2ut, u^2 + t^2)$, $u \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$

Odpowiedzi: 0,π^2, $\frac{112}{45}$

Zad. 11. Znaleźć strumień pola $\vec{V} = (x^2, y^2, z^2)$ przez powierzchnię sfery o środku w punkcie $(1, 0, 0)$ i promieniu 2.
Odpowiedź: $\frac{64}{3}\pi$

Zad. 12. Znaleźć strumień pola $\vec{V} = (x^3, x^2y, -2x^2z)$ przez powierzchnię ograniczającą obszar $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$
Odpowiedź: $\frac{4\pi}{15}(-5 + 4\sqrt{2})$

Zad. 13. Znaleźć, jeśli istnieje, potencjał skalarny pól

- $\vec{V} = (x^2y - z^3, x^3 + y^3, xz^2)$
- $\vec{V} = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$
- $\vec{V} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy)$
- $\vec{V} = \big((x + y + z)z + 2x\cos y, xz - x^2\sin y + y^2, 2xz + xy\big)$
- $\vec{V} = (\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2})$

Odpowiedzi: nie istnieje,$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$,$\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3-6xyz)$,nie istnieje,$\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$.

Zad 14. Znaleźć, jeśli istnieje, taką funkcję holomorficzną $f(z)$ aby $P(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y)$

- $P(x, y) = \cosh x \sin y$
- $P(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}$

- $P(x,y) = \mathrm{e}^{-x}(x\cos y + y\sin y)$
- $P(x,y) = \frac{x^3+xy^2+y}{x^2+y^2}$

Odpowiedzi: $-\mathrm{i}\sinh z + \mathrm{i}C$, nie istnieje, $z\mathrm{e}^{-z} + \mathrm{i}C$, $z + \frac{\mathrm{i}}{z} + \mathrm{i}C$.

Zad 14. Policzyć całkę krzywoliniową z podanej funkcji zespolonej, po podanej krzywej

- $f(z) = \overline{z}$, $z(t) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$
- $f(z) = \ln z$, $z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$
- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z(t) = t + \mathrm{i}\epsilon$, $\epsilon > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$
- $f(z) = \frac{1}{z}$, $z(t) = t + \mathrm{i}\epsilon$, $\epsilon < 0$, $t \in (-\infty, \infty)$

Odpowiedzi: $32\pi\mathrm{i}$, $2\pi\mathrm{i}$,$-\mathrm{i}\pi$,$\mathrm{i}\pi$.