

Andrzej Trautman
Instytut Fizyki Teoretycznej UW

Algebry Clifforda i spinory: trochę historii, fizyki i geometrii

Konwersatorium Matematyczne
Wydziału MIM UW
26 lutego 2010

The orthogonal transformations are the automorphisms of Euclidean vector space. Only with the spinors do we strike that level in the theory of its representations on which Euclid himself, flourishing ruler and compass, so deftly moves in the realm of geometric figures.

Hermann Weyl *The Classical Groups* (Princeton U. P. 1946)

Spinory zostały odkryte przez Starożytnych Greków

Euklides i Diofantos znali ogólne rozwiązanie równania Pitagorasa

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Jeśli $x, y, z \in \mathbb{Z}$, to przynajmniej jedna z liczb x, z jest parzysta; niech z parzysta, to rozwiązanie

$$x = \eta^2 - \xi^2, \quad y = \xi^2 + \eta^2, \quad z = 2\xi\eta, \quad \xi, \eta \in \mathbb{Z}$$

można zapisać w postaci

$$(G1) \quad \begin{pmatrix} y - x & z \\ z & x + y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}$$

i zinterpretować, w dziedzinie liczb rzeczywistych, jako

wektor **zerowy** względem formy o sygnaturze $(1, 2) = (\text{spinor})^2$

(Matematycy mówią zwykle o kierunkach izotropowych, co jest niefortunnym uogólnieniem spostrzeżenia, że w **dwóch** wymiarach takie kierunki są niezmiennicze względem obrotów).

Mnożąc (G1) z lewej strony przez macierz $a \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ i z prawej przez macierz transponowaną a^* , obliczając $\det$ otrzymuje się

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} \text{Spin}_0(1, 2) \rightarrow \text{SO}_0(1, 2) \rightarrow 1.$$

Mnożąc (G1) z lewej strony przez macierz

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i podnosząc do kwadratu,

$$(G2) \quad \begin{pmatrix} z & x+y \\ x-y & -z \end{pmatrix}^2 = (x^2 - y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

otrzymuje się linearyzację formy kwadratowej oraz $\mathbb{R}(2)$ (zbiór rzeczywistych macierzy 2 na 2) jako część parzystą algebry Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Macierze Pauliego (1927)

Wprowadzając liczby zespolone i zastępując w (G2) liczbę y przez $-iy$ otrzymuje się

$$(P) \quad \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z, \quad (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})^2 = (x^2 + y^2 + z^2)I.$$

Macierz $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}$ jest hermitowska, więc $a\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}a^\dagger$ też; jeśli $a \in \text{SU}(2)$, to $a^\dagger a = I$, więc $(a\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}a^\dagger)^2 = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r})^2$, a stąd $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$.

Spinory przestrzeni Minkowskiego $\mathcal{M}$

Uzupełniając (P) o czas t , otrzymuje się przedstawienie spinorowe wektora $X = (t, x, y, z)$, $t > 0$, $-t < z < t$, zerowego, tzn $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, w postaci

$$\sigma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} t + z & x - iy \\ x + iy & t - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}$$

i wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

kierunki zerowe w $\mathcal{M} \longleftrightarrow$ kierunki w $\mathbb{C}^2$ czyli

$$\mathbb{S}_2 = \mathbb{C}P_1$$

Definiując, dla $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$a\sigma(X)a^\dagger = \sigma(\rho(a)X)$$

otrzymuje się ciąg dokładny

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{SO}_0(3, 1) \rightarrow 1$$

czyli: $\mathrm{Spin}_0(3, 1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

EULER znalazł nakrycie $SO(3)$ przez $SU(2)$?

Leonhard Euler opublikował w 1770 roku wymierne przedstawienie obrotu $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ przy pomocy wzoru równoważnego

$$(E) \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r} \mapsto \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r}' = (p^2 + q^2 + r^2 + s^2)^{-1} U \boldsymbol{\sigma} \mathbf{r} U^\dagger,$$

$$U = \begin{pmatrix} p + \mathrm{i}s & r + \mathrm{i}q \\ -r + \mathrm{i}q & p - \mathrm{i}s \end{pmatrix}, \quad \det U = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 \neq 0,$$

więc $a = U / \sqrt{p^2 + q^2 + r^2 + s^2} \in SU(2)$ i równanie (E) określa $SU(2)$ jako podwójne nakrycie $SO(3)$.

Praca Eulera, napisana po łacinie, dostępna jest w jego
Opera Omnia:

PROBLEMA ALGEBRAICUM OB AFFECTIONES PRORSUS SINGULARES MEMORABILE

Commentatio 407 indicis ENESTROEMIANI

Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 1771, p. 75—106

Summarium ibidem p. 13—15

SUMMARIUM

Problema, quod in hac dissertatione resolvitur, cum quadratis magicis multum habet affinitatis, sed ob affectiones prorsus singulares longe magis est memorabile. Inveniendae nimirum sunt novem quantitates A, B, C, D etc., quae sint eius indolis, ut in quadratum hoc modo dispositae

$$\begin{array}{ccc} A, & B, & C, \\ D, & E, & F, \\ G, & H, & I \end{array}$$

duodecim his conditionibus satisfaciant

1. $A^2 + D^2 + G^2 = 1,$	4. $AB + DE + GH = 0,$
2. $B^2 + E^2 + H^2 = 1,$	5. $AC + DF + GI = 0,$
3. $C^2 + F^2 + I^2 = 1,$	6. $BC + EF + HI = 0,$
7. $A^2 + B^2 + C^2 = 1,$	10. $AD + BE + CF = 0,$
8. $D^2 + E^2 + F^2 = 1,$	11. $AG + BH + CI = 0,$
9. $G^2 + H^2 + I^2 = 1,$	12. $DG + EH + FI = 0.$

Prima observatio, quam Ill. Auctor de hoc problemate affert, in eo consistit, ut id ad classem problematum indeterminatorum referat; id quod eo magis paradoxum videri omnino debet, cum numerus conditionum adimplendarum superet numerum quantitatum incognitarum, unde problema potius pro plus quam determinato habendum foret; verum natura

PROBLEMATIS INITIO PROPOSITI SOLUTIO GENERALIS IN NUMERIS RATIONALIBUS

33. Coronidis loco solutionem problematis nostri e methodo DIOPHANTEA petitam subiungam, quae sequenti modo satis concinne exhiberi potest.

Sumantur pro lubitu quatuor numeri p, q, r, s ac posita quadratorum eorum summa

$$pp + qq + rr + ss = u$$

novem numeri quaesiti ita determinati reperiuntur¹⁾

$$\begin{aligned} A &= \frac{pp + qq - rr - ss}{u}, & B &= \frac{2qr + 2ps}{u}, & C &= \frac{2qs - 2pr}{u}, \\ D &= \frac{2qr - 2ps}{u}, & E &= \frac{pp - qq + rr - ss}{u}, & F &= \frac{2pq + 2rs}{u}, \\ G &= \frac{2qs + 2pr}{u}, & H &= \frac{2rs - 2pq}{u}, & I &= \frac{pp - qq - rr + ss}{u}. \end{aligned}$$

1) Solutiones sequentes ex formulis § 34 exhibitis oriuntur ponendo $a = p, b = q, c = -r, d = -s$ et per $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = u$ dividendo. Falso igitur A. CAYLEY (*Sur quelques propriétés des déterminants gauches*, Journal für r. u. a. Mathematik 32, 1846, p. 119, praesertim p. 121; vide etiam eiusdem *Collected mathematical papers*, vol. 1, Cambridge 1889, p. 332) asseruit O. RODRIGUES primum has formas invenisse (*Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide*, Journal de mathématiques 5₁, 1840, p. 380, praesertim p. 405). Debemus quidem illi methodum directam expressiones EULERIANAS obtinendi. Sed etiam hic viam ingressus est, quam EULERUS straverat in commentatione 478 (indicis ENESTROEMIANI): *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 20 (1775), 1776, p. 189; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series II, vol. 6. P. St.

Kwaterniony i grupy Spin: HAMILTON 1844 i CAYLEY 1855

Niech $X = u + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$, to
 $X\bar{X} = u^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Niech a i b będą jednostkowymi
kwaternionami, $a\bar{a} = 1$ i $b\bar{b} = 1$.

Hamilton zauważył, że jeśli X jest czysto urojone, tzn
 $u = 0$, to $X' = aX\bar{a}$ też i $X'\bar{X}' = X\bar{X}$, co pokazuje, że

$$\text{Spin}(3) = \text{Sp}(1).$$

Wiadomo teraz, że $\text{Sp}(1) = \text{SU}(2)$.

Cayley pokazał więcej: dla dowolnego $X \in \mathbb{H}$ oraz
 $X' = aX\bar{b}$ jest $X'\bar{X}' = X\bar{X}$, co daje

$$\text{Spin}(4) = \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1).$$



- (i) Our space is perhaps really possessed of a curvature varying from point to point, which we fail to appreciate because we are acquainted with only a small portion of space. . .
- (ii) Our space may be really the same (of equal curvature), but its degree of curvature may change as a whole with time. . .
- (iii) We may conceive our space to have everywhere a nearly uniform curvature, but that slight variations of the curvature may occur from point to point, and themselves vary with the time. . . We might even go so far as to assign to this variation of curvature of space 'what really happens in that phenomenon which we term the motion of matter'.

W. K. Clifford: *The Common Sense of the Exact Sciences*

D. Appleton and Co., New York 1885

Algebry Clifforda i grupy: CLIFFORD 1878 i LIPSCHITZ 1886

William Kingdon Clifford (1845-1879) wprowadził swoje „geometryczne algebry” jako uogólnienie: z jednej strony algebr $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, a z drugiej - algebr Grassmanna.

Mnożenie zewnętrzne wektorów x, y , spełniające $xy + yx = 0$ w $\wedge V$ zastępuje się przez mnożenie takie, że $xy + yx = 2h(x, y)$, gdzie h jest iloczynem skalarnym w rzeczywistej lub zespolonej, przestrzeni wektorowej V .

Wzorując się na algebrach $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$, Clifford zakładał, że przestrzeń V jest rzeczywista, a forma kwadratowa $h(x, x)$ – ujemnie określona. ($V = \text{Im } \mathbb{C}$ i $\text{Im } \mathbb{H}$).

Rudolf Lipschitz, jako pierwszy, wprowadził grupy zbudowane z „liczb Clifforda”, ale jego prace na ten temat z lat 1880-1886 były mało znane; zostały przypomniane przez **André Weila** w postaci „listu” do Redakcji *Annals of Mathematics* **69** (1959) 247–251, podpisanego: R. Lipschitz (który zmarł w 1903 r.).

CORRESPONDENCE

We have received the following letter, purporting to come from an ultramundane correspondent:

SIR,

It is sometimes a matter of wonder, to us in Hades, that what we had believed to be our best work remains buried under thick layers of dust in your libraries, while the very talented young men in the mathematical world of the present day strive manfully against problems which are by no means as novel as they think.

For instance, it is not so long ago that the very remarkable algebraic systems discovered by my friend Professor Clifford shortly before leaving your world have again attracted the attention of your algebraists after many years of oblivion. When, during my lifetime, I first became interested in them, I, too, fancied that they were new; I soon found out my mistake, and hastened to acknowledge Professor Clifford's prior discovery. It is now a matter of great satisfaction to me to hear that his name has been given to them, as a fitting tribute to his memory among the living.

On the other hand, as Professor Clifford has told me himself, it had not occurred to him to apply these algebraic systems to the study of the substitutions which transform a sum of squares into a sum of squares (or, as my young friend and colleague Hermann Weyl would say, of the orthogonal group); he kindly insists that this idea was wholly mine. As you may well believe, we have often discussed this topic since I had the honour of joining the distinguished company of the mathematicians in the Elysian Fields; incidentally, without the many delightful conversations which I have had with him, I should hardly be able now to write to you in English (a feat which I could have accomplished only with great difficulty during my lifetime).

It is not, however, in order to assert my claims to fame in this matter that I am now asking for the hospitality of your journal. In what you

List ten był zapewne reakcją na książkę **Claude Chevalleya** *The Algebraic Theory of Spinors* (1954), w której wprowadził on pojęcie *grupy Clifforda*, ale nie wspomniał o Lipschitzu.

Ze względów historycznych ważny jest artykuł **É. Cartan'a** *Nombres Complexes* w *Encyclop. Sciences Math.* (1908) będący istotnym rozszerzeniem (z 34 stron do 138) artykułu **E. Study'ego** z pierwotnego, niemieckiego wydania tej encyklopedii (1898). Cartan pisze o *les systèmes de Clifford et de Lipschitz*; podaje strukturę rzeczywistych algebr Clifforda, dla dowolnej sygnatury.

Powołując się na prace **R.Lipschitza** i **K. Th. Vahlena**, Cartan opisuje grupy dziś znane jako grupy Clifforda, definiując elementy tych grup jako iloczyny wektorów o kwadratach niezerowych.

Vahlen (1902) wyraził przy pomocy liczb Clifforda konformne przekształcenie Möbiusa $\mathbb{S}_n$ (uogólnienie $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ dla $n = 2$).

Élie CARTAN 1913:

fundamentalne reprezentacje algebr $\mathfrak{so}(n)$

Cartan opisał reprezentacje algebr Liego $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ oraz ich form rzeczywistych (1914) i pokazał, że są wśród nich takie, które nie podnoszą się do reprezentacji grup ortogonalnych.

Np. reprezentacja spinorowa algebry $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$

$$[e_x, e_y] = e_z \text{ itd, } e_x \mapsto \sigma_x/2i \text{ itd.}$$

Algebra prosta $B_l = \mathfrak{so}(2l + 1, \mathbb{C})$, $l \geq 2$ ma reprezentacje fundamentalne w przestrzeniach

$$V = \mathbb{C}^{2l+1}, \wedge^2 V, \dots, \wedge^{l-1} V \text{ i } S, \dim S = 2^l.$$

Algebra prosta $D_l = \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$, $l \geq 3$ ma reprezentacje fundamentalne w przestrzeniach

$$V = \mathbb{C}^{2l}, \wedge^2 V, \dots, \wedge^{l-2} V \text{ i } S_+, S_-, \dim S_+ = \dim S_- = 2^{l-1}.$$

Wszystkie skończone wymiarowe reprezentacje można otrzymać ze spinorowych; np w wymiarze 6: $V = \wedge^2 S_{\pm}$

Ale Cartan nie wspomina o związku reprezentacji S i $S_{\pm}$ z algebrami Cliforda. Łączy spinory z algebrami Cliforda dopiero w książce z 1938 roku *Leçons sur la théorie des spineurs*.

Wchodzą fizycy: **PAULI 1927 DIRAC 1928**

Po odkryciu spinu elektronu (Uhlenbeck i Goudsmit 1925) był okres intensywnej pracy najwybitniejszych teoretyków (Heisenberg, Jordan, Kronig...), którego kulminacją był artykuł **Wolfganga Pauliego**

Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons (1927), w którym wprowadza do opisu elektronu funkcję falową o dwóch składowych, macierze sigma i operatory (Tutaj i w dalszym ciągu $\hbar = 1$, $c = 1$.)

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} + e\phi, \quad \mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}.$$

Wartości własne składowej (np) $l_z = i\partial/\partial\varphi$ orbitalnego momentu pędu to liczby całkowite

$-l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l$; wartości własne $\frac{1}{2}\sigma_z$ to liczby $\pm\frac{1}{2}$.

Problem współczynnika żyromagnetycznego: cząstka o masie m i ładunku e poruszająca się z prędkością $\mathbf{v}$ ma

moment pędu $m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$

moment magnetyczny $\frac{1}{2}e\mathbf{r} \times \mathbf{v}$

Klasyczny stosunek żyromagnetyczny $e/2m$ był potwierdzony w obserwacjach zjawisk kwantowych (efekt Zeemana) w stosunku do orbitalnego momentu pędu; dla spinu elektronu ten stosunek jest e/m . W równaniu Pauliego współczynnik żyromagnetyczny e/m postulowany na podstawie obserwacji.



Związek spinu ze statystyką

Zapoczątkowany przez Pauliego postulatem (“exclusion principle”, zakaz Pauliego 1925) mówiącym, że w każdym stanie kwantowym może znajdować się nie więcej niż jeden elektron; wyjaśnia np budowę tablicy Mendelejewa, ma podstawowe znaczenie dla wiązań atomowych, w chemii, astrofizyce (białe karły i gwiazdy neutronowe)

Później (1940) Pauli podał twierdzenie o związku spinu ze statystyką, mówiące o zachowaniu układów wielu jednakowych cząstek.

Stany takich układów są opisywane w kwantowej teorii pola w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ zbudowanej z przestrzeni stanów jednocząstkowych $\mathcal{H}_1$.

Dla bozonów – cząstek o spinie całkowitym – funkcje falowe stanów wielocząstkowych są symetryczne (statystyka Bosego–Einsteina),

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \bigotimes_{\text{sym}}^k \mathcal{H}_1$$

dla fermionów – o spinie połówkowym – są antysymetryczne (statystyka Fermi–Diraca),

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \bigwedge^k \mathcal{H}_1$$

Zakaz Pauliego jest konsekwencją $\psi \wedge \psi = 0$ dla $\psi \in \mathcal{H}_1$.

P. A. M. Dirac

w pracy *The quantum theory of the electron* (1928)
wprowadza relatywistyczne równanie na funkcję falową ψ o 4
składowych; w oznaczeniach Pauliego

$$(D) \quad (\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\psi = 0$$

Macierze $\gamma_\mu \in \mathbb{C}(4)$, spełniają $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} I$.

Motywacja w duchu Clifforda (ale bez powołania się na jego
prace): zastąpić operator $\square$ przez kwadrat operatora
różniczkowego pierwszego rzędu. Uwaga: równanie Diraca
wymaga reprezentacji algebry Clifforda, grupa Spin nie
wystarcza.

Macierze $\gamma_\mu \in \mathbb{C}(4)$, spełniające $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2h_{\mu\nu}$, można wyrazić przez macierze Pauliego,

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \tau_\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = -\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Sukcesy:

wyjaśnienie współczynnika żyromagnetycznego e/m ,

widmo energii atomu wodoru (struktura subtelna),

przewidzenie antycząstek: wprowadzając $C : S \rightarrow \bar{S}$ takie, że $\bar{\gamma}^\mu = C\gamma^\mu C^{-1}$ i sprzężoną ładunkowo funkcję falowa $\psi_c = C^{-1}\bar{\psi}$, sprzęgając (D) otrzymuje się

$$(\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m)\psi_c = 0.$$

Nagroda Nobla wraz ze Schrödingerem 1933



Paul Adrien Maurice Dirac w Warszawie (1962)

Niezależnie od Diraca, w kilka miesięcy po jego pracy, **D. D. Ivanenko i L. D. Landau** zaproponowali inny operator różniczkowy pierwszego rzędu, zamiast operatora Diraca, a mianowicie (we współczesnych oznaczeniach) $d+\delta$, gdzie $\delta = \star d\star$ jest „koróżniczką”. Jest $(d+\delta)^2 = 0$. Wobec sukcesów równania Diraca, ta praca nie wywarła żadnego wpływu; operator $d+\delta$ został ponownie odkryty przez **Ericha Kählera** (1960).

Według **B. L. van der Waerdena** nazwa *spinor* była użyta po raz pierwszy przez **Paula Ehrenfesta** w 1929 r.

Hermann WEYL

w pracy *Elektron und Gravitation* (1929) podał lokalną teorię spinorów w geometrii Riemanna, opartą na reperach ortonormalnych; zwrócił uwagę na to, że dla cząstek o masie $m = 0$ równanie Diraca można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \partial_\mu \\ \tau^\mu \partial_\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = 0,$$

więc sprowadza się ono do równania Weyla $\sigma^\mu \partial_\mu \psi = 0$

Krytyka Pauliego: równanie Weyla wyróżnia orientację;
później: neutrino (przewidziane przez Pauliego).

Richard Brauer i Hermann Weyl (1935) połączyli podejście Cartana z konstrukcjami fizyków i znaleźli reprezentacje grup spinorowych (nie używając tej nazwy).

Erwin SCHRÖDINGER

w pracy *Diracsches Elektron im Schwerefeld* (1932) w inny sposób opisał spinory na rozmaitościach i wyprowadził wzór na kwadrat operatora Diraca (z polem e.m., spin^c)

$$(\gamma^\mu \nabla_\mu)^2 = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \frac{1}{4} R$$

zwany teraz wzorem Schrödingera–Lichnerowicza.

Zastosowanie do oceny wartości własnych operatora Diraca na rozmaitościach zwartych (**Thomas Friedrich** 1980).

Elementarz algebr Clifforda

Przestrzeń kwadratowa (V, h) nad ciałem przemennym $\mathbb{k}$ o charakterystyce $\neq 2$ (zwykle $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$; ale można też rozpatrywać algebry Clifforda nad pierścieniami);

odwzorowanie Clifforda (V, h) w algebrę z jednością $\mathcal{A}$ to liniowe $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ takie, że $f(v)^2 = h(v)1_{\mathcal{A}}$. Uwaga: używam litery h także do oznaczenia iloczynu skalarnego, powstającego z formy kwadratowej przez polaryzację.

Przykład: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}(2)$, $v = (x, y, z)$

$$f(v) = \begin{pmatrix} z & x + y \\ x - y & -z \end{pmatrix}, \quad f(v)^2 = (x^2 - y^2 + z^2)I$$

Algebra Clifforda przestrzeni kwadratowej (V, h) to algebra $\mathcal{C}$ z jednością uniwersalna ze względu na odwzorowania Clifforda, tzn taka, że jest iniektywne odwzorowanie Clifforda $\boxed{l : V \rightarrow \mathcal{C}}$, a jeśli $f : V \rightarrow \mathcal{A}$ jest odwzorowaniem Clifforda, to istnieje homomorfizm algebr z jednością $\tilde{f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ taki, że jest przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & \mathcal{A} \\ l \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathcal{C} & & \end{array}$$

Uwaga i ostrzeżenie: algebra $\mathbb{R}(2)$ **nie** jest algebrą Clifforda przestrzeni $\mathbb{R}^3$ bo odwzorowanie f nie ma własności uniwersalności. (Wystarczy wziąć pod uwagę $v \mapsto -f(v)$.)

Podstawowe twierdzenie: dla każdej (V, h) istnieje algebra Clifforda $\mathcal{C}\ell(V, h)$ zdefiniowana jako iloraz algebry tensorowej

$$\mathcal{T}V = \bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V$$

przez ideał generowany w tej algebrze przez wszystkie elementy postaci $v \otimes v - h(v)$, $v \in V$.

Odwzorowanie Clifforda $V \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, h)$, $v \mapsto -v$, przedłuża się do **automorfizmu** α algebry, określającego jej gradację,

$$\mathcal{C}\ell(V, h) = \mathcal{C}\ell^0(V, h) \oplus \mathcal{C}\ell^1(V, h)$$

$$\mathcal{C}\ell^\epsilon(V, h) = \{a \in \mathcal{C}\ell(V, h) \mid \alpha(a) = (-1)^\epsilon a\} \quad \epsilon \in \{0, 1\}$$

Często pisze się $\mathcal{C}\ell^0(V, h) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, h)$.

Odwzorowanie Clifforda $V \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, h)^{\text{opp}}, v \mapsto v$, przedłuża się do involutywnego **antyautomorfizmu** β ,
 $\beta(ab) = \beta(b)\beta(a)$, który określa gradację, ale tylko struktury wektorowej $\mathcal{C}\ell(V, h)$.

Antyautomorfizm β określa grupę

$$\mathcal{G} = \{a \in \mathcal{C}\ell(V, h) \mid \beta(a)a = 1\}$$

Jest **naturalny izomorfizm przestrzeni wektorowych**
 $\wedge V \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, h)$, co pozwala sprowadzić mnożenie Clifforda do działań w algebrze Grassmanna.

Grupy spinorowe

Jeśli $u \in V$, $u^2 \neq 0$, to można rozłożyć

$$v = v^\perp + v^\parallel, \quad v^\parallel = (uv + vu)u/2u^2$$

więc odbicie w hiperpłaszczyźnie $u^\perp$ ma postać

$$v \mapsto v^\perp - v^\parallel = v - 2v^\parallel = -uvu^{-1} = \alpha(u)vu^{-1}$$

Wektory u i λu , $\lambda \neq 0$, dają to samo odbicie, więc wystarczy ograniczyć się do wektorów jednostkowych (czyli $u^2 = 1$ albo $u^2 = -1$ dla $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oraz $u^2 = 1$ dla $\mathbb{C}$). Wiadomo (Cartan–Dieudonné), że z odbić można złożyć każdy element grupy $O(V, h)$.

Grupa $\text{Pin}(V, h)$ zawiera wszystkie elementy $\mathcal{C}(V, h)$, które

są iloczynami wektorów jednostkowych.

$$\mathrm{Spin}(V, h) = \mathrm{Pin}(V, h) \cap \mathcal{C}\ell^0(V, h)$$

Są ciągi dokładne ($\mathrm{Ad}(a)v = \alpha(a)va^{-1}$)

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathrm{Pin}(V, h) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{O}(V, h) \rightarrow 1$$

Podobnie dla $\mathrm{Spin}(V, h)$. Składowa spójna $\mathrm{Spin}_0(V, h)$ jest podgrupą $\mathcal{G}$.

Wygoda posługiwania się algebrami Clifforda: algebra $\mathcal{C}\ell(V, h)$ przestrzeni o wymiarze n zawiera, w naturalny sposób, jako podzbiory:

$$V, [V, V] = \wedge^2 V = \text{spin}(V, h), \\ \wedge^3 V, \dots, \wedge^n V, \text{Pin}(V, h), \text{Spin}(V, h)$$

Z reprezentacji algebr Clifforda otrzymuje się reprezentacje spinorowe tych grup.

Oznaczenia: $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n, h) = \mathcal{C}\ell(n, \mathbb{C})$; jeśli h ma sygnaturę $(\underset{-}{p}, \underset{+}{q})$ to $\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{p+q}, h) = \mathcal{C}\ell(p, q)$; podobnie dla grup. Grupy $\text{Spin}(p, q)$ i $\text{Spin}(q, p)$ są izomorficzne; zamiast $\text{Spin}(n, 0)$ pisze się $\text{Spin}(n)$.

Spinory na rozmaitościach

Teoria lokalna, różniczkowanie kowariantne pól spinorowych, dziełem **H. Weyla** i **V.A. Focka** (1929); później Pauli i Schrödinger, rozpatrując spinory na sferach, napotkali trudności (dwuznaczne pola spinorowe). Właściwe sformułowanie przyszło w połowie ubiegłego wieku, w języku wiązek.

W najprostszym przypadku zorientowanej rozmaitości Riemanna M struktura spin to przedłużenie („redukcja”) wiązki reperów ortonormalnych P do grupy $\text{Spin}(n)$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(n) & \rightarrow & Q \\
\mathrm{Ad} \downarrow & & \downarrow \chi \\
\mathrm{SO}(n) & \rightarrow & P \xrightarrow{\pi} M
\end{array}$$

gdzie $\chi(qa) = \chi(q) \mathrm{Ad}(a)$, $q \in Q$, $a \in \mathrm{Spin}(a)$,
 $n = \dim M$.

Znikanie klasy Stiefela–Whitneya w_2 jako w.k i w. istnienia
(André Haefliger 1956).

Np przestrzenie rzutowe $\mathbb{R}P_5$ i $\mathbb{C}P_2$ nie mają struktury spin.

Na nieorientowalnych rozmaitościach Riemanna można
rozpatrywać struktury pin; np wszystkie przestrzenie rzutowe
 $\mathbb{R}P_{2n}$ mają po dwie nierównoważne struktury pin.

Przykład sfer:

$$\mathrm{Spin}(n) \rightarrow \mathrm{Spin}(n+1) = Q \xrightarrow{\chi} P = \mathrm{SO}(n+1) \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}_n,$$

okrąg ma jeszcze drugą strukturę spin, trywialną:

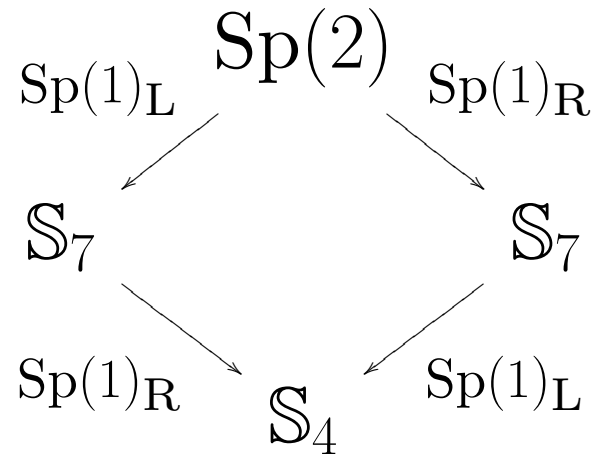
$$Q = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{Z}_2$$

Koneksja Levi–Civita na P podnosi się do koneksji spinorowej na Q .

Interesujący jest przypadek $n = 4$. Tutaj

$$Q = \mathrm{Spin}(5) = \mathrm{Sp}(2), \quad \mathrm{Spin}(4) = \mathrm{Sp}(1)_L \times \mathrm{Sp}(1)_R;$$

można dzielić $\mathrm{Sp}(2)$ przez „lewą” i „prawą” grupę
 $\mathrm{Sp}(1) = \mathrm{SU}(2)$,



Koneksja spinorowa na $\text{Sp}(2) \rightarrow \mathbb{S}_4$ mająca wartości w algebrze Liego $\mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(1)$ schodzi do koneksji na obu wiązках $\mathbb{S}_7 \rightarrow \mathbb{S}_4$; można je interpretować jako dwa pola Yanga–Millsa na $\mathbb{S}_4$ o grupie cechowania $\text{SU}(2)$; odpowiednie pola Y–M są samo- i antysamodualne (tzw instantony BPST).

Pole spinorowe to przekrój wiązki spinorów stowarzyszonej z wiązką główną $\text{Spin}(n) \rightarrow Q \rightarrow M$ przez reprezentację $\gamma : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{GL}(S)$. Trochę nieoczekiwany wynik: wiązki spinorów na sferach są trywialne. Ogólniej:

Stwierdzenie. Hiperpowierzchnia (M, f) , gdzie $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ to immersja, ma strukturę $\text{Pin}(n, 0)$, a stowarzyszona z nią wiązka spinorów jest trywialna.

Te spostrzeżenia pozwalają łatwo znaleźć widmo operatora Diraca na sferach, podobnie do tego jak to się robi dla operatora Laplace'a. Wprowadzając w $\mathbb{R}^{n+1}$ współrzędną

$r = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2}$ mamy

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} = r^{-2} \Delta_{\mathbb{S}_n} + r^{-n} \frac{\partial}{\partial r} r^n \frac{\partial}{\partial r}$$

więc jeśli φ jest harmonicznym wielomianem jednorodnym stopnia l zmiennych $x^1, \dots, x^{n+1}$, to
 $0 = \Delta_{\mathbb{S}_n} \varphi + l(l + n - 1) \varphi = 0$, co daje widmo
 $\{-l(l + n - 1) \mid l = 0, 1, 2, \dots\}$ operatora Laplace'a na $\mathbb{S}_n$.

Podobnie, kładąc $N = x^\mu \gamma_\mu / r$, $\mu = 1, \dots, n + 1$ wprowadzając operator Diraca D na $\mathbb{S}_n$ mamy

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = r^{-1} D + N r^{-n/2} \frac{\partial}{\partial r} r^{n/2}$$

Jeśli $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S$ jest wielomianem harmonicznym stopnia $l + 1$, to $\psi = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi$ jest stopnia l oraz $\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi = 0$.

Stąd widmo $\pm(l + n/2)$, $l = 0, 1, 2, \dots$

Dla $n = 1$ to daje widmo dla struktury nie trywialnej; dla trywialnej jest $\pm l$.

Do opisu naładowanych fermionów powinno się używać struktur spin^c , tzn przedłużeń wiązki reperów do grupy

$$\text{Spin}^c(n) = (\text{Spin}(n) \times \text{U}(1))/\mathbb{Z}_2$$

W pracy **M. F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro** *Clifford modules* (1964) jest konstrukcja podniesienia

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spin}^c(2n) & \\ & \downarrow & \\ \text{U}(n) & \longrightarrow & \text{SO}(2n) \end{array}$$

Wynika stąd, że każda rozmaitość prawie hermitowska (=rozmaitość Riemanna z ortogonalną strukturą prawie zespoloną) posiada strukturę spin^c ; np $\mathbb{C}P_{2n}$.

Reprezentacje algebr Clifforda

Niech (V, h) - przestrzeń kwadratowa i S - przestrzeń wektorowa nad przemiennym ciałem $\mathbb{k}$ o charakterystyce $\neq 2$; homomorfizm $\gamma : \mathcal{C}\ell(V, h) \rightarrow \text{End } S$ jest reprezentacją algebry Clifforda w przestrzeni spinorów S . Algebry Clifforda są proste lub półproste; mają mało reprezentacji. (Jednolity opis w kategorii algebr z gradacją: wszystkie algebry Clifforda są proste i (super)centralne w tej kategorii).

Reprezentację γ można zrealizować – tak robi Claude Chevalley w swojej książce – wybierając jako S lewy minimalny ideał algebry Clifforda. (Ta konstrukcja nie jest naturalna).

Niech $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ albo $\mathbb{R}$; w przestrzeni V jest reper ortonormalny $(e_1, \dots, e_n)$; element objętości $\eta = e_1 \dots e_n$ komutuje (antykomutuje) z wektorami jeśli wymiar n jest nieparzysty (parzysty).

Niech γ będzie reprezentacją nieprzywiedlną $\mathcal{Cl}(V, h)$ w zespolonej przestrzeni spinorów S .

Jeśli n nieparzyste, to η należy do centrum algebry, więc (Schur) $\gamma(\eta)$ jest liczbą.

Jeśli n parzyste to $\gamma(\eta)$ daje rozkład tej przestrzeni $S = S_+ \oplus S_-$ na przestrzenie spinorów Weyla (chiralnych, 'semi-spinors'...). Rozkład analogiczny do rozkładu biwektorów na części samodualne i antysamodualne.

Pokazuje się, że jeśli $\dim V = 2l$, to algebra jest prosta i centralna, więc reprezentacja dualna

$$\check{\gamma} : \mathcal{Cl}(V, h) \rightarrow \text{End } S^*, \quad \check{\gamma}(a) = \gamma(\beta(a))^*$$

jest równoważna γ . Istnieje izomorfizm $B : S \rightarrow S^*$ taki, że

$$\gamma(\beta(a))^* = B\gamma(a)B^{-1}$$

Forma **biliniowa**

$$S \times S \rightarrow \mathbb{k}, \quad (s_1, s_2) \mapsto \langle s_1, Bs_2 \rangle$$

jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy $\mathcal{G}$,

$$\langle \gamma(a)s_1, B\gamma(a)s_2 \rangle = \langle s_1, Bs_2 \rangle \quad \text{dla każdego } a \in \mathcal{G}$$

Takie formy mają duże znaczenie w fizyce, pozwalają konstruować wielkości mierzalne (skalary, tensory) ze spinorów.

Symetria B

i pierwsza „okresowość” algebr Clifforda nad $\mathbb{k}$

Wobec $\beta^2 = \text{id}$ jest rozkład (gradacja struktury wektorowej)

$$\mathcal{C}\ell(V, h) = \mathcal{C}\ell_+(V, h) \oplus \mathcal{C}\ell_-(V, h)$$

$$\mathcal{C}\ell_{\pm}(V, h) = \{a \in \mathcal{C}\ell(V, h) \mid \beta(a) = \pm a\}$$

Obliczając transpozycję obu stron $\gamma(\beta(a))^* B = B\gamma(a)$ otrzymuje się, że $B^{-1}B^*$ jest w centrum algebry $\text{End } S$, więc jest liczbą, więc $B^* = B$ albo $B^* = -B$. Aby określić znak, zauważamy że

$$a \in \mathcal{C}\ell_{\pm}(V, h) \Rightarrow B\gamma(a) = \pm(B^*\gamma(a))^*$$

więc dla takich a tensor $B\gamma(a) \in S \otimes S$ jest symetryczny albo antysymetryczny. Obliczając wymiary $\mathcal{C}\ell_{\pm}(V, h)$ i

porównując je z wymiarami przestrzeni $\Lambda^2 S$ i $\otimes_{\text{sym}}^2 S$ otrzymuje się

$$B^* = (-1)^{\frac{1}{2}l(l+1)} B$$

Dla $\gamma_{2l+1} = \gamma_1 \dots \gamma_{2l}$ otrzymuje się

$$\gamma_{2l+1}^* = (-1)^l B \gamma_{2l+1} B^{-1}$$

Stąd postać B w funkcji wymiaru $2l$:

$$l \equiv 1 \qquad l \equiv 2 \qquad l \equiv 3 \qquad l \equiv 4 \pmod{4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{B}^* \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{A}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{B}^* \\ \mathcal{B} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{S}_+ & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_- \end{pmatrix}$$

gdzie

$$\mathcal{B} = \mathbf{B} \mid S_+, \quad \mathcal{A}_{\pm} = \mathbf{B} \mid S_{\pm} \quad \mathcal{S}_{\pm} = \mathbf{B} \mid S_{\pm}$$

oraz

$$\mathcal{A}_{\pm}^* = -\mathcal{A}_{\pm} \text{ oraz } \mathcal{S}_{\pm}^* = \mathcal{S}_{\pm}$$

Własności B nie zmieniają się jeśli wymiar $2l$ zastąpić przez $2l + 8$.

Dla $2l = 8$ są trzy 8-wymiarowe przestrzenie kwadratowe: (V, h) , $(S_+, \mathcal{S}_+)$ i $(S_-, \mathcal{S}_-)$. Troistość dla $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ oraz dla $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ i formy h określonej albo neutralnej.

Informacja o reprezentacjach nieprzywiedlnych, skończenie wymiarowych grupy spin w 4 wymiarach

$\text{Spin}(4, \mathbb{C}) = \text{SL}(S_+) \times \text{SL}(S_-)$, gdzie $S_{\pm}$ dwuwymiarowe zespolone przestrzenie spinorów Weyla.

Wprowadzając oznaczenie $S_{\pm}^k = \bigotimes_{\text{sym}}^k S$ i utożsamiając reprezentacje z ich nośnikami mamy: każda taka reprezentacja jest postaci $S_+^k \otimes S_-^l$, $k, l = 0, 1, \dots$ i ma wymiar $(k+1)(l+1)$.

Niech $S = S_+$ albo S_- , jest rozkład iloczynu tensorowego reprezentacji

$$S^m \otimes S^n = S^{m+n} \oplus S^{m+n-1} \oplus \dots \oplus S^{|m-n|}$$

znany fizykom jako prawo składania momentów pędu.

$$\text{Np } V = S_+ \otimes S_-, \quad \Lambda^2 V = S_+^2 \oplus S_-^2,$$

przestrzeń symetrycznych tensorów bezśladowych = $S_+^2 \otimes S_-^2$

przestrzeń tensorów o symetriach tensora krzywizny

konforemnej (**Weyla**); tensor krzywizny Riemanna

$$R_{[\mu\nu][\rho\sigma]} = R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}, \quad \underline{R_{[\mu\nu\rho\sigma]} = 0}, \quad \frac{1}{2}6 \cdot 7 \underline{-1} = 5 + 5 + 9 + 1:$$

Postać spinorowa rozkładu tensora Riemanna

$$(S_+^2 \oplus S_-^2) \otimes_{\text{sym}} (S_+^2 \oplus S_-^2) = \underline{S_+^4 \oplus S_-^4} \oplus \underline{S_+^2 \otimes S_-^2} \oplus S_+^0 \oplus S_-^0$$

postać tensorowa ($E = Ric - \frac{1}{4}Rg$)

$$Riem = \underline{W_+ + W_-} + \underline{E} + R$$

Zastosowanie spinorów w OTW; **Roger Penrose**; w

formalizmie Newman–Penrose’a opisuje się koneksję i

krzywiznę jako formy o wartościach w $\text{spin}(3, 1) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Konstrukcja reprezentacji. Niech $l \in \mathbb{N}$, $K = \mathbb{k}^l$, to w $2l$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej $V = K \oplus K^*$ można wprowadzić naturalną neutralną formę kwadratową h_{neutr} :
jeśli $v = k + k'$, $k \in K, k' \in K^*$, to

$$h_{\text{neutr}}(v) = \langle k, k' \rangle$$

Przestrzenie K i K^* są całkowicie zerowe względem formy h_{neutr} , która ma sygnaturę (l, l) ..

Przestrzeń wektorowa $S = \wedge K$ ma wymiar 2^l i niesie reprezentację algebry $\mathcal{C}\ell(K \oplus K^*, h_{\text{neutr}})$ będącą rozszerzeniem odwzorowania Clifforda

$$\gamma : K \oplus K^* \rightarrow \text{End } S, \quad \gamma(k + k')s = k \wedge s + k' \lrcorner s, \quad s \in S.$$

Naturalna gradacja $S_+ = \bigoplus_r \wedge^{2r} K$, $S_- = \bigoplus_r \wedge^{2r+1} K$
 $\gamma(v)S_\pm \subset S_\mp$.

Dodając jeden wymiar, $K \oplus K^* \oplus \mathbb{k}e_{2l+1}$, i rozszerzając formę kwadratową h_{neutr} tak, aby wektor e_{2l+1} był jednostkowy i $\perp$ do $K \oplus K^*$, można rozszerzyć reprezentację γ na algebrę Clifforda przestrzeni $2l + 1$ -wymiarowej definiując $\gamma_{2l+1} \in \text{End } S$ tak: jeśli $s_\pm \in S_\pm$, to $\gamma_{2l+1}(s_+ + s_-) = s_+ - s_-$. Widać, że γ_{2l+1} antykomutuje z $\gamma(v)$, $v \in K \oplus K^*$.

Spostrzeżenie Clifforda: jeśli istnieje $u \in V$ taki, że $h(u) = -1$, odwzorowanie $u^\perp \rightarrow \mathcal{C}^0(V, h)$, $v \mapsto vu$, ma własność Clifforda (bo $(vu)^2 = -v^2u^2 = v^2$) i przedłuża się do izomorfizmu algebr $\mathcal{C}(u^\perp, h|_{u^\perp}) \rightarrow \mathcal{C}^0(V, h)$.

Algebry Clifforda przestrzeni rzeczywistych i druga okresowość

Spostrzeżenie Clifforda implikuje izomorfizm $\mathcal{C}(p-1, q) \rightarrow \mathcal{C}^0(p, q)$. Preferencja dla form ujemnie określonych.

Przykłady konstrukcji

$$\mathcal{C}\ell^0(1, 0) \rightarrow \mathcal{C}\ell(1, 0) \text{ to } \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{C}}$$

$$\mathcal{C}\ell^0(2, 0) \rightarrow \mathcal{C}\ell(2, 0) \text{ to } \boxed{\mathbb{C}} \rightarrow \boxed{\mathbb{H}}$$

bo $1, e_1, e_2, e_1e_2$ rozpina $\mathbb{H}$, a $1, e_1e_2$ rozpina $\mathbb{C}$

$$\mathcal{C}\ell^0(3, 0) \rightarrow \mathcal{C}\ell(3, 0) \text{ to } \boxed{\boxed{\mathbb{H}}} \rightarrow 2\mathbb{H}$$

Wykorzystując spostrzeżenie Clifforda można te trzy algebry połączyć

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow 2\mathbb{H} \dots \text{ itd}$$

Algebry $\mathcal{C}\ell(p, q)$ i $\mathcal{C}\ell(p + 1, q + 1)$ są tego samego typu, w tym sensie, że

$$\mathcal{C}\ell(p + 1, q + 1) = \mathcal{C}\ell(p, q) \otimes \mathbb{R}(2)$$

co widać z odwzorowania Clifforda

$$\mathbb{R}^{p+q} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}\ell(p, q) \otimes \mathbb{R}(2)$$

$$(v, \lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} v & \lambda \\ \mu & -v \end{pmatrix}$$

Pokazuje się, że

$$\mathcal{C}\ell(p + 8, q) = \mathcal{C}\ell(p, q + 8) = \mathcal{C}\ell(p, q) \otimes \mathbb{R}(16)$$

Łącząc te spostrzeżenia otrzymuje się następujący

Fakt: Algebry Clifforda $\mathcal{C}\ell^0(p, q) \rightarrow \mathcal{C}\ell(p, q)$ można znaleźć z „zegara spinorowego”, którego „godziny” to reszty z dzielenia $p - q$ przez 8:

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{7} & 2\mathbb{R} & \xrightarrow{0} & \mathbb{R} \\
 \uparrow 6 & & & & \downarrow 1 \\
 \mathbb{C} & & & & \mathbb{C} \\
 \uparrow 5 & & & & \downarrow 2 \\
 \mathbb{H} & \xleftarrow{4} & 2\mathbb{H} & \xleftarrow{3} & \mathbb{H}
 \end{array}$$

Np. dla $\mathcal{C}\ell^0(3, 1) \rightarrow \mathcal{C}\ell(3, 1)$ jest $p - q = 2$, stąd algebra Clifforda przestrzeni Minkowskiego $\mathbb{C}(2) \rightarrow \mathbb{H}(2)$.

Twierdzenie Chevalley'a:

$$\mathcal{C}\ell(p_1, q_1) \otimes_{\text{gr}} \mathcal{C}\ell(p_2, q_2) = \mathcal{C}\ell(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$$

gdzie $\otimes_{\text{gr}}$ oznacza iloczyn algebr z **gradacją**,

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot_{\text{gr}} (b_1 \otimes b_2) = (-1)^{\deg a_2 \deg b_1} a_1 b_1 \otimes a_2 b_2$$

Grupa Brauera–Walla typów prostych (super)centralnych algebr z gradacją względem $\mathbb{Z}_2$; mnożenie indukowane przez $\otimes_{\text{gr}}$; $\text{GBrW}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_8$; prościej dla algebr nad $\mathbb{C}$ bo są tylko dwa typy algebr

$$\mathbb{C} \rightarrow 2\mathbb{C} \quad \text{i} \quad 2\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}(2)$$

stąd: $\text{GBrW}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}_2$.

Inny przykład konstrukcji reprezentacji:

Twistery. Niech (T, vol) będzie zespoloną 4-wymiarową przestrzenią unimodularną, tzn $0 \neq \text{vol} \in \wedge^4 T^*$, więc vol definiuje izomorfizm Hodge'a $\star : \wedge^2 T \rightarrow \wedge^2 T^*$ oraz formę kwadratową na 6-wymiarowej przestrzeni $V = \wedge^2 T$, $\text{Pf}(v) = \langle v, \star v \rangle$, $v \in V$. Definiując

$$\gamma : V \rightarrow \text{End}(T \oplus T^*), \quad \gamma(v) = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \star v & 0 \end{pmatrix}$$

pokazuje się, γ jest odwzorowaniem Clifforda i przedłuża się do izomorfizmu

$$\mathcal{C}(\wedge^2 T, \text{Pf}) \rightarrow \text{End}(T \oplus T^*)$$

Jeśli $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, to **kwadryka** (Kleina)

$$\mathbb{C}Q_4 = \{\text{dir } v \in P(V) \mid \text{Pf}(v) = 0\} \subset \mathbb{C}P_5$$

jest 4-wymiarową zespoloną rozmaitością zwartą i ma geometrię konforemną (w języku **Rogera Penrose'a**: konforemne uzwarcenie zespolonej przestrzeni Minkowskiego).

Jeśli $\text{dir } v \in \mathbb{C}Q_4$ to wobec $\text{Pf}(v) = 0 \Leftrightarrow v \wedge v = 0$ istnieje 2-wymiarowa podprzestrzeń $p(\text{dir } v) \subset T$ taka, że jeśli $p(\text{dir } v) = \text{span}\{t_1, t_2\}$, to $\text{dir } v = \text{dir}(t_1 \wedge t_2)$. Jest więc bijekcja $p : \mathbb{C}Q_4 = \text{Gr}_2(T)$. Punkt wyjścia programu Penrose'a.

Liczby Radona–Hurwitza

Można skonstruować rzeczywiste nieprzywiedlne reprezentacje

$$\rho : \mathcal{Cl}(n, 0) \rightarrow \mathbb{R}(2^{\chi(n)})$$

używając do tego iloczynów tensorowych macierzy $I, \sigma_x, \epsilon, \sigma_z$; np. dla $n = 4$ jest $\chi(4) = 3$

$$\rho_1 = \sigma_z \otimes I \otimes \epsilon$$

$$\rho_2 = \sigma_z \otimes \epsilon \otimes \sigma_x$$

$$\rho_3 = \sigma_z \otimes \epsilon \otimes \sigma_z$$

$$\rho_4 = \sigma_x \otimes \epsilon \otimes I$$

Posługując się taką jawną konstrukcją można pokazać, że

$$\rho_\mu \rho_\nu + \rho_\nu \rho_\mu = -2\delta_{\mu\nu} I, \quad \rho_\mu^* = -\rho_\mu$$

oraz znaleźć liczby Radona–Hurwitza

$$\begin{array}{cccccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \chi(n) = & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{array}$$

oraz $\chi(n + 8) = \chi(n) + 4$. Przy pomocy reprezentacji ρ można znaleźć pola wektorowe na sferach, których wartości są liniowo niezależne w każdym punkcie

Rozpatrujemy sferę $\mathbb{S}_N \subset \mathbb{R}^{N+1}$, gdzie N jest nieparzyste. Niech n będzie największą liczbą taką, że $N + 1 = 2^{\chi(n)}p$ i p jest nieparzyste.

Dla $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, kładziemy $\rho'(v) = \rho(v) \otimes I$, gdzie $I \in \mathbb{R}(p)$ jest macierzą jednostkową.

Antysymetria $\rho(v)$ pociąga antysymetrię $\rho'(v) \in \mathbb{R}(N + 1)$. Stąd: dla każdego $x \in \mathbb{S}_N$, wektor $\rho'(v)x$ jest prostopadły do x . Odwzorowanie $x \mapsto \rho'(v)x$ określa pole wektorowe na $\mathbb{S}_N$, które nigdzie nie znika: sfera $\mathbb{S}_N$ posiada n stycznych pól wektorowych, których wartości w każdym punkcie są liniowo niezależne.

J.F. Adams (1962) pokazał, że nie ma ich więcej.

Spinory proste

Wprowadzone przez Cartana; ważną rolę odegrało seminarium **Oswalda Veblena** (Princeton 1936); Chevalley nazywał je *czystymi*. Mając reprezentację $\gamma : \mathcal{Cl}(V, h) \rightarrow \text{End } S$ w zespolonej przestrzeni spinorów, dla każdego $0 \neq s \in S$ przestrzeń wektorowa

$$N(s) = \{v \in \mathbb{C} \otimes V \mid \gamma(v)s = 0\}$$

jest *całkowicie zerowa* bo $\gamma(v)^2 = h(v, v)$. Jeśli $N(s)$ jest maksymalnego wymiaru (tzn l jeśli V jest $2l$ lub $(2l + 1)$ -wymiarowa), to s nazywa się *spinorem prostym*.

Istnieją spinory proste; np w przestrzeni $(K \oplus K^*, h_{\text{neutr}})$ spinor $s = e_1 \wedge \cdots \wedge e_l$ jest prosty: $N(s) = K$. Ale spinor $1 + e_1$ nie jest prosty.

Pokazuje się że każdy spinor prosty w $2l$ -wymiarach jest spinorem Weyla (spinory Diraca nie są proste); wszystkie spinory Pauliego i Weyla w wymiarach < 7 są proste. W wymiarach 7 i 8 spinory zerowe względem form kwadratowych B są proste.

Uwaga: powinno się pisać $N(\text{dir } s)$, bo tylko kierunek spinora s jest istotny.

Interpretacja geometryczna (kierunków) spinorów prostych

w rzeczywistej przestrzeni o wymiarze $2l$ z formą o sygnaturze $(2l - \epsilon, \epsilon)$, gdzie $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Jest: $\dim N(s) \cap \overline{N(s)} = \epsilon$.

Jeśli $\epsilon = 0$, to jest rozkład $\mathbb{C} \otimes V = N(s) \oplus \overline{N(s)}$ co definiuje strukturę zespoloną

$$J(s) \in \text{End } V, \quad J(s)|_{N(s)} = \sqrt{-1} \text{id}_{N(s)}.$$

która jest ortogonalna względem h ,

$$h(J(s)u, J(s)v) = h(u, v).$$

Jeśli $\epsilon = 1$ (przestrzeń Lorentza) to kierunek spinora prostego s określa kierunek zerowy $K(s) = N(s) \cap \overline{N(s)}$; ponadto, $K(s)^\perp = N(s) + \overline{N(s)}$ i jest struktura zespolona w przestrzeni **ekranu**

$$K(s)^\perp / K(s)$$

ortogonalna względem iloczynu skalarnego h_0 w tej przestrzeni, indukowanego przez h .

Inaczej: kierunki zerowe (promienie świetlne) i struktury zespolone to dwie formy rzeczywiste jednej struktury geometrycznej określonej przez kierunek zespolonego spinora prostego.

Całkowalne pola spinorów prostych

Niech (M, g) rozmaitość (pseudo)riemannowska z g o sygnaturze $(2l - \epsilon, \epsilon)$ z wiązką spinorów Weyla $\Sigma \rightarrow M$. Pole spinorów prostych $\psi : M \rightarrow \Sigma$ nazywa się całkowalnym, jeśli

$$[\text{Sec}N(\psi), \text{Sec}N(\psi)] \subset \text{Sec}N(\psi), \quad N(\psi) \subset \mathbb{C} \otimes TM$$

(Z prostoty ψ wynika, że wiązka $N(\psi) \rightarrow M$ ma włókna l -wymiarowe). W przypadku $\epsilon = 0$ całkowalne pole ψ określa strukturę zespoloną $J(\psi)$ na M , ortogonalną względem g , więc geometrię Hermite'a.

W przypadku $\epsilon = 1$ pole ψ prowadzi do pola kierunków zerowych $K(\psi)$, stycznych do foliacji F przestrzeni M rodziną geodezyjnych zerowych; strumień (flow) pola wektorowego o wartościach w $K(\psi)$ zachowuje pole tensora metrycznego g_0 indukowanego przez g w wiązce ekranów

$$K(\psi)^\perp / K(\psi)$$

a iloraz M/F (przy założeniu odpowiedniej regularności) jest rozmaitością o wymiarze $2l - 1$ ze strukturą Cauchy'ego–Riemanna.

Twierdzenie GOLDBERGa–SACHSa (1962)

Dotyczy 4-wymiarowych przestrzeni Einsteina, tzn. rozmaitości Riemanna albo Lorentza spełniających $E = 0$, $E = Ric - \frac{1}{4}Rg$. Początkowo w OTW. Przeniesienie do geometrii Riemanna dało nowe wyniki na temat przestrzeni Einsteina–Hermite’a w 4 wymiarach (J. Plebański, M. Przanowski, B. Broda, P. Nurowski).

Tensor krzywizny w 4 wymiarach rozkłada się na części nieprzywiedlne:

$$Riem = W_+ + W_- + E + R$$

gdzie W_+ i W_- to części samo- antysamo-dualne tensora krzywizny konforemnej (Weyla).

Kwadrat elementu objętości $e_1 e_2 e_3 e_4$ w sygnaturze $(3, 1)$ jest -1 , więc $\star^2 = -\text{id}$ i samodualność oznacza $\star F = iF$ albo $-iF$. Stąd: w sygnaturze $(3, 1)$ jest $W_+ = \bar{W}_-$.

(Reprezentacje S_+ i $\bar{S}_-$ są równoważne). Natomiast w sygnaturach $(0, 4)$ i $(2, 2)$ jest $\star^2 = \text{id}$, stąd $W_{\pm} = \bar{W}_{\pm}$.

OTW: sygnatura $(3, 1)$

W OTW pełna informacja o tensorze Weyla jest zawarta w

$W_+ \in S_+^4$, który jest (lokalnie) postaci

$W_+ = \psi\varphi\chi\omega$ (iloczyn tensorowy symetryczny pól spinorów)

Kierunki tych 4 pól określają 4 pola kierunków zerowych; mogą się zlewać; np dla metryki Schwarzschilda są dwa podwójne (É. Cartan 1922).

Te pola spinorów i odpowiadające im pola wektorów zerowych nazywają się polami własnymi tensora Weyla. Klasyfikacja Cartana–Petrowa–Penrose’a tensorów Weyla (I, II, III, D, N). Odegrała rolę w poszukiwaniu i klasyfikacji przestrzeni Einsteina w OTW.

Tw. Goldberga–Sachsa. W 4-wymiarowej geometrii Lorentza, jeśli $E = 0$ i $W \neq 0$, to następujące dwa warunki są równoważne:

- (i) pole ψ jest przynajmniej podwójnym polem spinorów własnych tensora Weyla
- (ii) pole spinorów ψ jest całkowalne

Przestrzeń Riemanna, sygnatura $(0, 4)$

Części W_+ i W_- tensora Weyla są niezależne i rzeczywiste; stąd

$$W_+ = \psi\varphi\bar{\psi}\bar{\varphi} \text{ i podobnie dla } W_-$$

Tensor $W_+ \neq 0$ może być jednego z dwóch typów:

typ I (ogólny, są 4 struktury prawie zespolone

$$J(\psi), J(\varphi), J(\bar{\psi}) = -J(\psi), J(\bar{\varphi}) = -J(\varphi) \text{ oraz}$$

typ D (są dwie podwójne struktury zespolone, $J(\psi) = J(\varphi)$ i $-J(\varphi) = -J(\psi)$). Podobnie dla W_- .

Tw. Plebańskiego–Przanowskiego. W 4-wymiarowej geometrii Riemanna, jeśli $E = 0$ i $W_+ \neq 0$, to następujące dwa warunki są równoważne:

- (i) tensor W_+ jest typu D
- (ii) istnieje całkowalna, ortogonalna struktura zespolona J , określona przez podwójny kierunek własny tensora W_+ ; zatem rozmaitość jest przestrzenią Einsteina–Hermite’a.

Jeśli oba tensory W_+ i W_- są typu D, to istnieją dwie różne struktury zespolone zgodne z metryką.

Zachęcam do udziału w konferencji

Road to reality with Roger Penrose

**The Honorary guest of the conference is
Sir Roger Penrose**

Centrum Banacha Warszawa 17–18 maja 2010
Centrum Kopernika Kraków 20–21 maja 2010

