GRUPY ORAZ ICH REPREZENTACJE
Z ZASTOSOWANIAMI W FIZYCE

Wydanie czwarte rozszerzone

Andrzej Trautman

Instytut Fizyki Teoretycznej
Uniwersytet Warszawski

Warszawa 2011

Spis treści

Wstęp i oznaczenia

Wstęp

Niniejszy tekst był początkowo przygotowany jako skrypt dla studentów w związku z prowadzonymi przeze mnie w latach 1994, 1997 i 1998 wykładami *Metod Matematycznych Fizyki* na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Jest on przeznaczony głównie dla studentów drugiego roku, którzy zaliczyli wykłady Algebry i Analizy Matematycznej. W roku akademickim 1999-2000 prowadziłem wykład *Zastosowania teorii grup w fizyce*. Dołączyłem wtedy rozdział X, obejmujący część materiału tego wykładu i zmieniłem także układ i materiał zawarty w innych rozdziałach; w szczególności, rozszerzyłem rozdział I, zatytułowany teraz *Wstępne wiadomości z algebry*, do którego włączyłem krótki ustęp o algebrach Clifforda.

Wiele cennych rad udzielił mi Paweł Nurowski, któremu zawdzięczam niektóre dowody. Pisząc skrypt wykorzystałem zadania przygotowane przez Jacka Tafla do wykładu w 1994 r. Pomogali mi także Andrzej Okołów, Jacek Pliszka i Adam Szereszewski.

Jesienią 2011 roku Paweł Nurowski poradził mi, abym złożył ten tekst w Redakcji Księgozbioru Matematycznego, wydawanego przez Instytut Matematyczny PAN. Po dłuższym czasie, dostałem recenzje, których autorzy zwracali moją uwagę na liczne błędy i niedociągnięcia oraz sugerowali zmiany. Z wdzięcznością zastosowałem się do większości tych uwag. Nie mogłem – jako fizyk – przyjąć zalecenia, aby iloczyn skalarny definiować jako dodatnio określony. Pozostałem też przy terminologii swobodnego (a nie wolnego) działania grupy, odwzorowania półliniowego (a nie antyliniowego) i przy „polonizmach” takich jak forma zwyrodniała (a nie zdegenerowana).

∗Materiał∗ oznaczony w ten sposób wykracza poza program wykładu i nie był wymagany na egzaminie.

Oznaczenia

$x \Rightarrow y$	jeśli x, to y
$x \Leftrightarrow y$	x wtedy, i tylko wtedy, gdy y
$\{x \in X \mid w(x)\}$	podzbiór zbioru X, zawierający wszystkie jego elementy, które posiadają własność w
$\{x_1, x_2, \dots\}$	zbiór składający się z elementów $x_1, x_2, \dots$

$\varnothing$, $\#X$	zbiór pusty, liczba elementów zbioru skończonego X
$X \cap Y$, $X \cup Y$	przecięcie, suma mnogościowa zbiorów X i Y
$X \times Y$, $X \smallsetminus Y$	iloczyn kartezjański, różnica zbiorów
$X \subset Y$	X jest podzbiorem Y
$f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$	f jest odwzorowaniem X w Y, x przechodzi w $f(x)$
$f \circ g$ lub fg	złożenie odwzorowań
$\mathcal{F}(X, Y)$	zbiór wszystkich odwzorowań X w Y
$f\|Z$	ograniczenie odwzorowania f do $Z \subset X$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych
$\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$	zbiory kwaternionów, oktonionów
$\Bbbk$	$\mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$
$\prod_{i=1}^n a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 a_2 \dots a_n$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\ker f$, $\operatorname{img} f$	jądro, obraz homomorfizmu f
$\mathsf{Hom}(V, W)$	zbiór homomorfizmów przestrzeni wektorowej V w W
$\mathsf{End}\, V = \mathsf{Hom}(V, V)$	przestrzeń endomorfizmow
$G/H = \{aH \mid a \in G\}$	zbiór lewych warstw grupy G względem H
$H \backslash G = \{Ha \mid a \in G\}$	zbiór prawych warstw grupy G względem H
e	podstawa logarytmów naturalnych

$\exp a$	e^a, $a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ albo $\mathsf{End}\, V$
$V^* = \mathsf{Hom}(V, K)$	przestrzeń dualna względem przestrzeni V nad ciałem K
$V \times V^* \to K$, $(v, \alpha) \mapsto \langle v, \alpha \rangle$	odwzorowanie obliczania
$(u\|v)$	iloczyn skalarny wektorów u i v
$f^* : V_2^* \to V_1^*$	odwzorowanie dualne (transponowane) względem $f : V_1 \to V_2$
$V^\times$	$V \smallsetminus \{0\}$ (0 jest elementem neutralnym struktury grupy abelowej V)
$X \cong Y$	zbiory X i Y są izomorficzne ze względu na ich strukturę
$\mathsf{Aut}\, X$	grupa automorfizmów zbioru X ze względu na jego strukturę
$\mathrm{Ad}(a)$, $\mathrm{Ad}(a)b = aba^{-1}$	automorfizm wewnętrzny grupy G
G' albo $\mathfrak{g}$	algebra Liego grupy Liego G
$h' : G' \to H'$	homomorfizm algebr Liego indukowany przez homomorfizm $h : G \to H$ grup Liego
$\mathrm{ad} : G \to \mathsf{GL}(G')$, $\mathrm{ad}(a) = \mathrm{Ad}(a)'$	reprezentacja dołączona grupy w jej algebrze Liego
$\mathrm{ad}' : G' \to \mathsf{GL}(G')' = \mathsf{End}\, G'$ $\mathrm{ad}'(A)B = [A, B]$, $A, B \in G'$	reprezentacja dołączona algebry Liego; zwykle pisze się $\mathrm{ad}(A)B$ zamiast $\mathrm{ad}'(A)B$

Jeśli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to $[x] = \{y \in X \mid yRx\}$ oznacza klasę równoważności zawierającą x, a $X \to X/R$, $x \mapsto [x]$, jest odwzorowaniem kanonicznym na iloraz.

Zamiast xRy zwykle pisze się $x \equiv y \bmod R$. Równoważność reprezentacji (grup, algebr) zapisuje się w postaci $\rho_1 \sim \rho_2$.

Literatura

Przygotowując wykłady i pisząc skrypt, korzystałem głównie z następujących książek:

[BR] A. O. Barut and R. Rączka, *Theory of group representations and applications*, PWN, Warszawa 1977.

[Bi] A. Białynicki-Birula, *Zarys algebry,* Biblioteka Matematyczna t. 63, PWN, Warszawa 1987.

[Br] H. Boerner, *Representations of groups,* North-Holland, Amsterdam 1963.

[Bb] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie,* Ch. 1–9, Hermann, Masson, Paris 1960-82.

[BJ] M. Bryński i J. Jurkiewicz, *Zbiór zadań z algebry,* Wyd. III, PWN, Warszawa 1985.

[Ch] C. Chevalley, *Theory of Lie groups I,* Princeton University Press, Princeton 1946.

[FH] W. Fulton and J. Harris, *Representation theory*, GTM 129, Springer, Berlin 1991.

[Ja] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience, New York 1962.

[Ki] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва 1972.

[Ko] A. I. Kostrykin, *Wstęp do algebry* (tłum. z ros.), PWN, Warszawa 1984.

[Kz] A. I. Kostrikin (red.), *Zbiór zadań z algebry* (tłum. z ros.), PWN, Warszawa 1995.

[La] S. Lang, *Algebra,* Wyd. II (tłum. z ang.), PWN, Warszawa 1984.

[SA] J-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes,* Benjamin, New York 1966.

[SF] ——, *Représentations linéaires des groupes finis,* Hermann, Paris 1967.

[SL] ——, *Lie algebras and Lie groups,* (Harvard Lectures), Benjamin, New York 1965

[Si] B. Simon, *Representations of finite and compact groups,* Graduate Studies in Mathematics 10, AMS, Providence 1996.

[We] H. Weyl, *The theory of groups and quantum mechanics*, tłumaczenie H. P. Robertsona z drugiego, niemieckiego wydania (1930), Dover, New York.

[Wy] ——, *The classical groups,* Princeton University Press, Princeton 1946.

[Wo] W. Wojtyński, *Grupy i algebry Liego,* Biblioteka Matematyczna t. 60, PWN, Warszawa 1986.

Odnośniki do tych książek są w tekście oznaczane odpowiednimi literami. Liczbami są oznaczane odwołania do innych pozycji literatury, których spis jest na końcu skryptu.

I

Wstępne wiadomości z algebry

1. Definicje: grupy, pierścienia, ciała i modułu

1.1. Grupy.

1.1.1. *Grupa* jest to zbiór G z odwzorowaniem

$$G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b \tag{1.1}$$

takim, że

(i) zachodzi prawo *łączności*: jeśli $a, b, c \in G$, to $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(ii) istnieje element *neutralny* $e \in G$ taki, że $a \cdot e = e \cdot a = a$ dla każdego $a \in G$;

(iii) dla każdego $a \in G$ istnieje element *odwrotny* $b \in G$ taki, że $a \cdot b = b \cdot a = e$.

Odwzorowanie (1.1) nazywa się *składaniem* elementów; $a \cdot b$ jest złożeniem a i b. Zdanie „G jest grupą ze składaniem (1.1)" skraca się często do „$(G\ \cdot)$ jest grupą". Znak „$\cdot$" złożenia często się opuszcza i pisze ab zamiast $a \cdot b$. Zamiast wyrażenia „składanie" elementów używa się także nazwy „mnożenie"; element neutralny oznacza się wtedy zwykle przez 1, a element odwrotny do a — przez a^{-1} (notacja multyplikatywna). Jeśli elementy G są bijekcjami pewnego zbioru na siebie, to złożenie a i b bywa zapisywane jako $a \circ b$.

Jeśli $ab = ba$ dla każdej pary (a, b) elementów grupy G, to G nazywa się grupą *przemienną* lub *abelową*; złożenie a i b zapisuje się wtedy często jako $a + b$, element neutralny oznacza zerem; zamiast „element odwrotny" mówi się „element *przeciwny*" i zapisuje go jako $-a$ (notacja addytywna).

Przykład 1.1. Zbiory liczb: całkowitych $\mathbb{Z}$, wymiernych $\mathbb{Q}$, rzeczywistych $\mathbb{R}$ i zespolonych $\mathbb{C}$ są grupami przemiennymi ze względu na dodawanie; zbiory liczb dodatnich: wymiernych $\mathbb{Q}^+$ i rzeczywistych $\mathbb{R}^+$ są grupami przemiennymi ze względu na mnożenie; zbiór $\mathbb{C}^\times$ różnych od zera liczb zespolonych jest grupą przemienną ze względu na mnożenie. Wszystkie te grupy są nieskończone.

Jeśli G jest grupą skończoną, to liczbę $\#G$ jej elementów nazywa się *rzędem* grupy. Grupa rzędu 1 zawiera tylko element neutralny i nazywa się *grupą trywialną*; bywa oznaczana symbolem 1 (notacja multyplikatywna) albo 0 (notacja addytywna).

Przykład 1.2. Zbiór $\mathbb{Z}_n$ n-tych pierwiastków zespolonych z 1 jest grupą przemienną rzędu n.

Grupy pojawiły się początkowo jako grupy przekształceń zbiorów. Mówi się, że grupa G jest grupą przekształceń zbioru X, lub że G działa w X, jeśli dane jest odwzorowanie

$$G \times X \to X, \quad (a, x) \mapsto ax,$$

takie, że

$$ex = x, \quad a(bx) = (ab)x,$$

dla wszystkich $x \in X$ i $a, b \in G$.

W szczególności, dla każdego zbioru X jest grupa $\mathfrak{S}(X)$ wszystkich bijekcji X na siebie. Elementem neutralnym w tej grupie jest odwzorowanie tożsamościowe id_X zbioru X na siebie.

Jeśli $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, to pisze się $\mathfrak{S}_n$ zamiast $\mathfrak{S}(X)$; jest to grupa *symetryczna* (lub grupa permutacji) zbioru n elementów. Grupa $\mathfrak{S}_n$ jest rzędu $n!$. Permutację

$$\pi \in \mathfrak{S}_n, \ \ i \mapsto \pi(i), \ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

zapisuje się często jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Grupa $\mathfrak{S}_n$ działa w zbiorze X_n wszystkich funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Mianowicie, jeśli $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest taką funkcją i $\pi \in \mathfrak{S}_n$, to

$$(\pi.f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Funkcja $f \in X_n$ jest symetryczna, wtedy i tylko wtedy, gdy $\pi.f = f$ dla każdego $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Niech

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j) \tag{1.2}$$

będzie w pełni antysymetrycznym, jednorodnym wielomianem n zmiennych. Dla każdej permutacji π wielomian $\pi.f_0$ różni się od f_0 co najwyżej o znak,

$$\pi.f_0 = \operatorname{sgn} \pi f_0, \quad \operatorname{sgn} \pi \in \{1, -1\}. \tag{1.3}$$

Liczbę $\operatorname{sgn} \pi$ nazywa się parzystością permutacji. Permutacja π jest parzysta (nieparzysta), jeśli $\operatorname{sgn} \pi = 1$ ($\operatorname{sgn} \pi = -1$). Permutację $\pi \in \mathfrak{S}_n$ taką, że $\pi(a_i) = a_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, k-1$, $\pi(a_k) = a_1$ oraz $\pi(j) = j$ dla $j \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$ zapisuje się tutaj jako $\lfloor a_1, \ldots, a_k \rfloor$ i nazywa *cyklem*[1] o długości k (albo: k-*cyklem*). Cykl o długości 2 nazywa się *transpozycją*. Transpozycja jest permutacją nieparzystą.

Łatwo pokazać (zob. Zadanie 1.4), że wszystkie grupy rzędu mniejszego niż 6 są przemienne.

Przykład 1.3. Grupa $\mathfrak{S}_3$ jest nieprzemienna. Istotnie, transpozycje $\lfloor 1, 2 \rfloor$ i $\lfloor 2, 3 \rfloor$ są nieprzemienne:

$$\lfloor 1, 2 \rfloor \lfloor 2, 3 \rfloor = \lfloor 1, 2, 3 \rfloor, \quad \lfloor 2, 3 \rfloor \lfloor 1, 2 \rfloor = \lfloor 1, 3, 2 \rfloor.$$

[1] Większość autorów zapisuje taki cykl w postaci $(a_1 \ldots a_k)$, co może prowadzić do nieporozumień ze względu na podobieństwo do oznaczeń dla ciągów.

1.1.2. *Podgrupy i morfizmy.* Niepusty podzbiór H grupy G jest jej podgrupą jeśli $a, b \in H$ pociąga $ab^{-1} \in H$. Podgrupa jest grupą.

Przykład 1.4. Zbiór permutacji parzystych

$$\mathfrak{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \operatorname{sgn} \sigma = 1\}$$

jest podgrupą grupy $\mathfrak{S}_n$, zwaną *grupą alternującą* (bo jej elementy zachowują formę „alternującą” (1.2)).

Jeśli G i H są grupami, to odwzorowanie $h : G \to H$ takie, że $h(ab) = h(a)h(b)$ dla każdych $a, b \in G$ nazywa się *homomorfizmem* grup.

Stwierdzenie 1.1. *Niech e_G i e_H będą elementami neutralnymi grup G i H, odpowiednio. Jeśli $h : G \to H$ jest homomorfizmem, to $h(e_G) = e_H$,* obraz *h,*

$$\operatorname{img} h = h(G),$$

jest podgrupą grupy H, a jądro *h,*

$$\ker h = \{a \in G \mid h(a) = e_H\},$$

jest podgrupą grupy G.

Rzeczywiście, dla każdego $a \in G$ mamy $h(e_G)h(a) = h(a) = h(a)h(e_G)$ oraz $h(a^{-1})h(a) = h(e_G)$, więc $h(e_G) = e_H$ i $h(a)^{-1} = h(a^{-1})$; jeśli $a, b \in G$, to $h(a)h(b)^{-1} = h(ab^{-1}) \in \operatorname{img} h$; jeśli $a, b \in \ker h$, to $h(ab^{-1}) = h(a)h(b)^{-1} = e_H$, więc $ab^{-1} \in \ker h$.

Homomorfizm grupy w siebie nazywa się *endomorfizmem.* Różnowartościowy homomorfizm $h : G \to H$ nazywa się *monomorfizmem. Epimorfizm* to homomorfizm G *na* H. Homomorfizm wzajemnie jednoznaczny to *izomorfizm. Automorfizm* grupy G to izomorfizm G na G.

Przykład 1.5. Niech $\mathbb{R}^+$ oznacza grupę multyplikatywną liczb rzeczywistych dodatnich. Odwzorowanie wykładnicze $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ jest izomorfizmem grup.

Przykład 1.6. Niech $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ oraz $0 < n \in \mathbb{N}$. Odwzorowanie

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \quad k \mapsto \exp(2\pi k\mathrm{i}/n)$$

jest epimorfizmem; jądrem tego odwzorowania jest podgrupa $n\mathbb{Z}$ składająca się z liczb całkowitych podzielnych przez n.

1.1.3. *Iloczyny grup.* Mając grupy G i H można utworzyć ich *iloczyn* (prosty, kartezjański): jest to grupa, której zbiorem elementów jest $G \times H$, a składanie określone jest wzorem

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb'),$$

gdzie $a, a' \in G$ oraz $b, b' \in H$. „Dzielenie” grup wymaga nieco subtelniejszych rozważań.

1.1.4. *Warstwy.* Niech H będzie podgrupą grupy G; można wprowadzić w G relację kładąc

$$a \equiv b \iff a^{-1}b \in H.$$

Tak zdefiniowana relacja jest relacją równoważności: jest ona symetryczna ($a \equiv a$), zwrotna (jeśli $a \equiv b$, to $b \equiv a$) oraz przechodnia (jeśli $a \equiv b$ i $b \equiv c$, to $a \equiv c$, bo $a^{-1}c = a^{-1}b \cdot b^{-1}c$). Klasy równoważności ze względu na tę relację nazywają się *lewymi warstwami* względem H. Lewą warstwę zawierającą $a \in G$ zapisuje się jako

$$aH = \{ab \in G \mid b \in H\}.$$

Zbiór wszystkich lewych warstw grupy G ze względu na podgrupę H oznacza się przez G/H. Podobnie definiuje się *prawe warstwy*: są to klasy równoważności ze względu na relację $a \equiv b \;\Leftrightarrow\; ab^{-1} \in H$. Prawa warstwa zawierająca a to zbiór $Ha = \{ba \in G \mid b \in H\}$. Na ogół $aH \neq Ha$. Zbiór wszystkich prawych warstw grupy G ze względu na podgrupę H oznacza się przez $H\backslash G$. Podgrupa H jest równocześnie lewą i prawą warstwą zawierającą element neutralny. Na mocy samej definicji relacji równoważności jest

$$aH \cap bH = \begin{cases} aH & \text{jeśli } a^{-1}b \in H, \\ \varnothing & \text{jeśli } a^{-1}b \notin H. \end{cases}$$

Odwzorowanie $H \to aH$ dane przez $b \mapsto ab$, $b \in H$, jest bijekcją. Wszystkie warstwy są więc zbiorami tej samej mocy. Zachodzi

Twierdzenie (Lagrange). *Jeśli grupa G jest skończona, to*

$$\#(G/H) = \#G/\#H.$$

Zatem rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy.

Liczbę $\#(G/H)$ nazywa się *indeksem* podgrupy $H \subset G$. Moc zbioru G/H może być skończona nawet wtedy, gdy grupa G jest nieskończona. Np. grupa $\mathsf{GL}^+(n,\mathbb{R})$ macierzy n-tego stopnia o dodatnim wyznaczniku jest podgrupą o indeksie 2 grupy $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ wszystkich nieosobliwych macierzy o rzeczywistych elementach.

1.1.5. *Dzielniki normalne.* Czy można i w jaki sposób zdefiniować strukturę grupy w zbiorze G/H? W tym celu należy zdefiniować odwzorowanie $G/H \times G/H \to G/H$ tak, aby odwzorowanie kanoniczne $G \to G/H$, $a \mapsto aH$, było homomorfizmem, więc

$$a'H \cdot aH = a'aH. \tag{1.4}$$

Trzeba najpierw sprawdzić, czy składanie warstw (1.4) jest dobrze określone, tzn. czy wynik nie zależy od wyboru reprezentantów a i a' w warstwach. Zastępując a przez ab, gdzie $b \in H$, otrzymuje się $a'abH = a'aH$, ale zastępując a' przez $a'b$ otrzymuje się $a'baH$; żądanie, aby ta warstwa była równa $a'aH$ oznacza istnienie $b' \in H$ takiego, że $a'ba = a'ab'$ czyli: dla każdego $a \in G$ i $b \in H$ istnieje $b' \in H$ takie, że $ba = ab'$. Stąd $Ha = aH$: lewe i prawe warstwy są jednakowe; jest to równoważne warunkowi

$$\text{dla każdego } a \in G \text{ zachodzi } aHa^{-1} = H,$$

który, jak łatwo widać, wystarcza na to, aby (1.4) określało w zbiorze G/H strukturę grupy. Podgrupę H o tej własności nazywa się *dzielnikiem normalnym*, a zbiór G/H ze składaniem elementów danym przez (1.4) – *grupą ilorazową*. Każda podgrupa grupy przemiennej jest dzielnikiem normalnym.

STWIERDZENIE 1.2. *Jeśli $h : G \to H$ jest homomorfizmem grup, to* $\ker h$ *jest dzielnikiem normalnym grupy G, a odwzorowanie*

$$G/\ker h \to \operatorname{img} h, \quad a \ker h \mapsto h(a),$$

jest izomorfizmem grup.

Dowód. Jeśli $a \in G$ i $b \in \ker h$, to $aba^{-1} \in \ker h$, więc $\ker h$ jest dzielnikiem normalnym; odwzorowanie $a \ker h \mapsto h(a)$ jest homomorfizmem, bo $a \ker h \cdot a' \ker h = aa' \ker h \mapsto h(aa') = h(a)h(a')$; odwzorowanie to jest injektywne, gdyż jeśli $h(a) = h(a')$, to $a^{-1}a' \in \ker h$, czyli $a \ker h = a' \ker h$. □

Ważnym przykładem dzielnika normalnego grupy jest jej *centrum*,

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \text{ dla każdego } b \in G\}.$$

Jeśli grupa G jest nieskończona, to iloraz G/H może być izomorficzny G nawet wtedy, gdy dzielnik normalny H jest nietrywialny. Niech np. G będzie grupą $\mathsf{U}(1)$ liczb zespolonych o module 1; dla każdego $n = 2, 3, \ldots$ niech $h_n : \mathsf{U}(1) \to \mathsf{U}(1)$ będzie endomorfizmem takim, że $h_n(z) = z^n$. Zachodzi $\operatorname{img} h_n = \mathsf{U}(1)$ oraz $\ker h_n = \mathbb{Z}_n$, więc na podstawie stw. 1.2 odwzorowanie $z\mathbb{Z}_n \mapsto z^n$ jest izomorfizmem ilorazu $\mathsf{U}(1)/\mathbb{Z}_n$ na $\mathsf{U}(1)$.

Jeśli element a grupy ma tę własność, że dla każdej liczby naturalnej n jest $a^n \neq e$, to mówi się, że a jest *nieskończonego rzędu*. W przeciwnym razie istnieje najmniejsza dodatnia liczba naturalna n taka, że $a^n = e$; mówi się wtedy, że a jest *rzędu n*. Zbiór $\{a, a^2, \ldots, a^n = e\}$ jest wtedy podgrupą grupy G.

1.1.6. Na mocy Twierdzenia Lagrange'a, wynika stąd, że w grupie skończonej rząd każdego elementu jest dzielnikiem rzędu grupy.

1.1.7. Grupę G nazywa się *prostą* jeśli jedynymi jej dzielnikami normalnymi są: G i grupa trywialna $\{e\}$. Z Twierdzenia Lagrange'a wynika, że grupa skończona G, której rząd jest liczbą pierwszą, nie ma podgrup innych niż G i $\{e\}$, więc jest prosta. Np. jeśli p jest liczbą pierwszą, to grupa $\mathbb{Z}_p$ jest prosta. Co więcej, zachodzi

STWIERDZENIE 1.3. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to każda grupa rzędu p jest izomorficzna $\mathbb{Z}_p$.*

Dowód. Istotnie, jeśli p jest liczbą pierwszą, a G jest grupą rzędu p, to na podstawie uwagi 1.1.6 każdy jej element $a \neq e$ jest rzędu p. Zatem $G = \{a, a^2, \ldots, a^p = e\}$, a odwzorowanie

$$G \to \mathbb{Z}_p, \quad a^k \mapsto \exp 2\pi \mathrm{i} k/p, \quad k = 1, \ldots, p$$

jest izomorfizmem. □

∗ Wielkim osiągnięciem matematyki XX wieku było zakończenie klasyfikacji i opisu wszystkich *skończonych grup prostych*. Lista tych grup zawiera nieskończone ciągi obejmujące

$\mathbb{Z}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą,
$\mathfrak{A}_n$, $n \geqslant 5$,
grupy proste typu grup Liego,

oraz

26 „sporadycznych” grup prostych.

Pięć pierwszych grup sporadycznych zostało znalezionych przez Emila Mathieu w XIX wieku. Następne zostały znalezione w drugiej połowie XX wieku, a ostatnia – największa wśród sporadycznych grupa *Monster* – była przewidziana i opisana dopiero w końcu XX wieku, dzięki zastosowaniu komputerów. Ma ona

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 =$$

$808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \approx 8 \cdot 10^{53}$
elementów [**13**]. Robert Griess skonstruował tę grupę jako podgrupę grupy obrotów w przestrzeni o wymiarze 196883 [**26**].$*$

1.2. Pierścienie i ciała.

1.2.1. *Pierścienie.* Pierścień jest to grupa przemienna $(K+)$, w której określone jest łączne *mnożenie* elementów (1.1), rozdzielne względem dodawania, tzn. takie, że dla każdych $a, b, c \in K$ zachodzi

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Pierścień z jednością jest to pierścień K posiadający element 1, różny od elementu neutralnego 0 struktury grupy przemiennej w K i taki, że $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ dla każdego $a \in K$. Pierścień z jednością posiada przynajmniej dwa elementy: 0 i 1.

Niech K będzie pierścieniem z jednością. Dla każdego $a \in K$ jest $a \cdot 0 + a = a \cdot (0+1) = a \cdot 1 = a$, więc $a \cdot 0 = 0$; podobnie pokazuje się, że $0 \cdot a = 0$. O pierścieniu mówi się, że jest przemienny, jeśli mnożenie jest przemienne. Np. zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ jest pierścieniem przemiennym. Elementy $a \neq 0$ i $b \neq 0$ takie, że $ab = 0$ nazywa się *dzielnikami zera.* Pierścień $\mathbb{Z}(2)$ wszystkich macierzy drugiego stopnia o elementach całkowitych ma dzielniki zera.

1.2.2. *Ciała.* Ciało jest to pierścień z jednością taki, że zbiór $K^\times = K \setminus \{0\}$ jest grupą ze względu na mnożenie. Ciało nie ma dzielników zera. Pierścień $\mathbb{Z}$ nie ma dzielników zera, ale nie jest ciałem. „Najmniejszy” pierścień $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – w którym $1 + 1 = 0$ – jest ciałem.

Zbiory $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{C}$ są ciałami przemiennymi.

Zbiór kwaternionów $\mathbb{H}$ jest ciałem nieprzemiennym: każdy element $\mathbb{H}$ jest postaci $q = v + x\mathrm{i} + y\mathrm{j} + z\mathrm{k}$, gdzie $v, x, y, z \in \mathbb{R}$, a jednostki kwaternionowe $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ spełniają

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} + \mathrm{ji} = 0, \quad \mathrm{k} = \mathrm{ij}. \tag{1.5}$$

Wprowadzając sprzężenie $q \mapsto \bar{q} = v - x\mathrm{i} - y\mathrm{j} - z\mathrm{k}$, mamy $\bar{q}q = q\bar{q} = v^2 + x^2 + y^2 + z^2$. Jeśli $q \neq 0$, to q ma odwrotność $q^{-1} = \bar{q}/\bar{q}q$.

Jeśli K jest ciałem, to zbiór $K(n)$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n o elementach należących do K jest pierścieniem, którego jednością jest macierz jednostkowa I.

Przykład 1.7. Każde ciało K jest grupą przemienną ze względu na dodawanie; zbiór $K^\times$ jest grupą ze względu na mnożenie. Zbiór $\mathbb{H}^\times$ różnych od zera kwaternionów jest grupą nieprzemienną ze względu na mnożenie.

Przykład 1.8. *Grupy liniowe.* Niech K będzie ciałem. Zbiór

$$\mathsf{GL}(n, K) \subset K(n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

wszystkich macierzy odwracalnych n-tego stopnia o elementach należących do K jest grupą ze względu na mnożenie macierzy; grupa ta jest nieprzemienna dla $n > 1$.

1.2.3. *Ideały.* Jeśli L jest podgrupą pierścienia $(K + \cdot)$ ze względu na jego strukturę grupy abelowej, to można utworzyć grupę ilorazową K/L, która też jest przemienna. Niech $k + L$ oznacza warstwę zawierającą $k \in K$, a

$$LK = \{lk \mid k \in K, l \in L\}, \quad KL = \{kl \mid k \in K, l \in L\}.$$

Czy można w ilorazie K/L określić strukturę pierścienia w ten sposób, aby odwzorowanie kanoniczne $K \to K/L$ było homomorfizmem pierścieni? Do tego potrzeba i wystarcza, aby podgrupa L była *dwustronnym ideałem* w K, tzn, aby było $LK \subset L$ i $KL \subset L$. Istotnie, wtedy wzór $(k + L) \cdot (k' + L) = kk' + L$ poprawnie określa w K/L mnożenie elementów definiujące w tym zbiorze strukturę pierścienia. Niech $K = \mathbb{Z}$ będzie pierścieniem liczb całkowitych; podgrupa $L = n\mathbb{Z}$ liczb podzielnych przez $n \in \mathbb{N}$ jest dwustronnym ideałem pierścienia $\mathbb{Z}$. Pierścień $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jest przemienny i ma n elementów; jako grupa jest on izomorficzny grupie $\mathbb{Z}_n$ pierwiastków stopnia n z 1.

1.2.4. *Ciała $\mathbb{F}_p$.* Kiedy pierścień $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ jest ciałem? Aby to rozstrzygnąć, można posłużyć się następującym stwierdzeniem, będącym konsekwencją *algorytmu Euklidesa* znajdowania największego wspólnego dzielnika pary liczb całkowitych:

Stwierdzenie 1.4. *Jeśli $p, q \in \mathbb{Z}$, to równanie*

$$px + qy = 1 \tag{1.6}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y wtedy, i tylko wtedy, gdy liczby p i q są względnie pierwsze.

Dowód. Przypomnijmy, że jeśli $m, n \in \mathbb{Z}$ i $n > 0$, to reszta z dzielenia m przez n jest liczbą całkowita r taką, iż $0 \leqslant r < n$ i $m = ns + r$, gdzie $s \in \mathbb{Z}$. (Np. jeśli $m = -7$ i $n = 3$, to $r = 2$.) Jeśli $r = 0$, to n dzieli m, co zapisuje się w postaci $n \mid m$.

Niech p i q będą liczbami całkowitymi, z których przynajmniej jedna $\neq 0$; istnieje wtedy ich *największy wspólny dzielnik*, tzn. taka liczba naturalna d, która dzieli p i q oraz ma tę własność, że jeśli $d' \mid p$ i $d' \mid q$, to $d' \mid d$. Zbiór $Z = \{px' + qy' \mid x', y' \in \mathbb{Z}\}$ zawiera liczby dodatnie; niech

$$d = px + qy \tag{1.7}$$

będzie najmniejszą z nich. Dzieląc p przez d otrzymuje się

$$p = ds + r, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant r < d,$$

czyli

$$r = p - ds = p(1 - xs) - qys \in Z;$$

ale $0 \leqslant r < d$, więc $r = 0$. Zatem $d \mid p$. Zupełnie podobnie pokazuje się, że $d \mid q$. Jeśli d' jest dowolnym dzielnikiem p i q, to d' dzieli (1.7), więc d jest największym wspólnym dzielnikiem p i q. W szczególności, jeśli p i q są względnie pierwsze, to $d = 1$ i równość (1.7) daje (1.6). □

Wniosek. Pierścień $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jest ciałem wtedy, i tylko wtedy, gdy p jest liczbą pierwszą; rzeczywiście, jeśli p jest liczbą pierwszą, to odwrotnością elementu $q + p\mathbb{Z}$, gdzie $q \not\equiv 0 \bmod p$, jest element $y + p\mathbb{Z}$ taki, że zachodzi (1.6). Jeśli p nie jest liczbą pierwszą, $p = rs$, $1 < r, s \in \mathbb{N}$, to

$$(r + p\mathbb{Z})(s + p\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}.$$

Jeśli p jest liczbą pierwszą, to ciało $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oznacza się przez $\mathbb{F}_p$. O ciele K mówi się, że ma *charakterystykę* p jeśli p jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $ps = 0$ dla każdego $s \in K$. Np. ciało $\mathbb{F}_p$ ma charakterystykę p. Jeśli nie ma takiej liczby $p \neq 0$, że $ps = 0$ dla każdego $s \in K$, to mówi się, że ciało K ma charakterystykę 0.

1.2.5. *Zbiory uporządkowane.* Zbiór E z relacją $\preccurlyeq$ taką, że dla każdych $x, y, z \in E$ zachodzi:

jeśli $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq z$, to $x \preccurlyeq z$ oraz jeśli $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq x$, to $x = y$,

nazywa się zbiorem (częściowo) uporządkowanym. Zbiór jest *doskonale uporządkowany* jeśli dla każdej pary $x, y \in E$ jest $x \preccurlyeq y$ lub $y \preccurlyeq x$. Jeśli $X \subset E$, to element $a \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$ jest $a \preccurlyeq x$ nazywa się *najmniejszym* elementem X. Element *minoryzujący* zbiór X to taki element $a \in E$, że dla każdego $x \in X$ jest $a \preccurlyeq x$. Podobnie definiuje się elementy *największe* i *majoryzujące. Kres dolny* zbioru X to element $\inf X$ największy spośród elementów minoryzujących X. Podobnie definiuje się *kres górny* $\sup X$. *Krata* jest to zbiór uporządkowany, którego każdy skończony podzbiór posiada oba kresy. Każdy zbiór doskonale uporządkowany jest kratą.

1.2.6. *Pierścienie Boole'a.* Ważnym przykładem kraty jest pierścień Boole'a, tzn. taki pierścień $(E + \cdot)$, którego każdy element a jest idempotentny, $a^2 = a$. Rozwijając równość $(a + b)^2 = a + b$, $a, b \in E$, otrzymuje się

$$a + a = 0 \quad \text{oraz} \quad ab = ba.$$

W pierścieniu Boole'a w naturalny sposób wprowadza się relację uporządkowania, kładąc

$$a \preccurlyeq b \;\Leftrightarrow\; ab = a.$$

Łatwo sprawdza się następujące fakty:

(i) $\inf\{a, b\} = ab$ oraz $\sup\{a, b\} = a + ab + b$,

(ii) 0 jest najmniejszym elementem E,

(iii) a jeśli pierścień ma jedność 1 (E jest „algebrą Boole'a") to 1 jest największym elementem.

Ważnym przykładem pierścienia Boole'a jest rodzina E podzbiorów zbioru Z taka, że jeśli $X, Y \in E$, to zbiory $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ oraz $X \cdot Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cap Y$ także należą do E. Tutaj 0 oznacza $\varnothing$, $\preccurlyeq$ oznacza $\subset$, $\inf\{X, Y\} = X \cap Y$, itd.

1.3. Moduły i przestrzenie wektorowe.

1.3.1. *Moduły.* Grupa przemienna $(V\,+)$ jest *lewym modułem* nad pierścieniem $(K\,+\,\cdot)$, jeśli dane jest odwzorowanie

$$K \times V \to V, \quad (a, v) \mapsto a.v,$$

takie, że dla każdych $a, b \in K$ oraz $u, v \in V$ zachodzi

$$a.(u+v) = a.u + a.v, \quad (a+b).u = a.u + b.u, \quad a.(b.v) = (a \cdot b).v, \quad 1.u = u.$$

Wynika stąd, że $a.0 = 0$, $a.(-u) = -a.u$. Podobnie definiuje się prawy moduł: mnożenie $V \times K \to V$, $(v, a) \mapsto v.a$ jest rozdzielne względem dodawania i $(v.a).b = v.(a \cdot b)$. Oznaczające mnożenie kropki $\cdot$ i . zwykle się pomija.

1.3.2. *Przestrzenie wektorowe.* Lewy (prawy) moduł nad ciałem nazywa się lewą (prawą) przestrzenią wektorową. W przypadku gdy ciało jest przemienne, mówi się po prostu o przestrzeni wektorowej. Niech V będzie lewą przestrzenią wektorową nad K; o ciągu elementów $(e_1, \ldots, e_k)$ tej przestrzeni mówi się, że jest liniowo niezależny, jeśli $\mu_1 e_1 + \ldots \mu_k e_k = 0$, gdzie $\mu_1, \ldots, \mu_k \in K$, pociąga $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$. Jeśli V zawiera liniowo niezależny ciąg $(e_1, \ldots, e_n)$, a każdy ciąg zawierający więcej niż n wyrazów jest liniowo zależny, to mówi się, że przestrzeń V jest n-wymiarowa i że $(e_1, \ldots, e_n)$ jest *bazą* (inaczej: *reperem*) w V. Jeśli ciało K jest przemienne, a macierz $(a^\mu{}_\nu)$, $a^\mu{}_\nu \in K$, $\mu, \nu \in \{1, \ldots, n\}$ jest odwracalna, to

$$(e'_1, \ldots, e'_n), \quad \text{gdzie} \quad e'_\nu = e_\mu a^\mu{}_\nu, \tag{1.8}$$

też jest bazą i każdą bazę można tak otrzymać z bazy $(e_1, \ldots, e_n)$. W równaniu (1.8) zastosowano *umowę sumacyjną* (Einsteina) względem wskaźnika μ; umowa ta jest w tym tekście stale stosowana. Każdy wektor $v \in V$ jest postaci $v = v^\mu e_\mu$, gdzie $v^\mu \in K$ jest μtą składową wektora względem tej bazy. Zwykle zapis bazy $(e_1, \ldots, e_n)$ skraca się do $(e_\mu)_{\mu=1,\ldots,n}$ lub (e_μ).

Przykład 1.9. Niech $\Bbbk$ oznacza jedno z dwóch ciał: $\mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$. Zbiór $\Bbbk^n$ ma strukturę n-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad $\Bbbk$. *Kanoniczna baza* w tej przestrzeni składa się z wektorów

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Zbiór $\mathbb{H}^n$ jest lewą (a także prawą) przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{H}$ o wymiarze $\dim_{\mathbb{H}} \mathbb{H}^n = n$. Można także rozpatrywać zbiór $\mathbb{H}^n$ jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ o wymiarze $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^n = 4n$.

1.3.3. *Iloczyny skalarne i formy kwadratowe.* Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$. Odwzorowanie biliniowe i symetryczne

$$h : V \times V \to \Bbbk,$$

które jest nieosobliwe, tzn. takie, że jeśli $h(u, v) = 0$ dla każdego $u \in V$, to $v = 0$, nazywać będziemy *iloczynem skalarnym* w przestrzeni V. Funkcję $v \mapsto h(v, v)$ nazywamy *formą kwadratową* odpowiadającą temu iloczynowi skalarnemu. [2] Parę (V, h) nazywa się *przestrzenią kwadratową*. Dla każdego $u \in V$, odwzorowanie $V \to \Bbbk$, $u \mapsto h(u, v)$ jest liniowe; wygodna jest

Umowa. Jeśli $v \in V$, to oznaczamy przez $h(v)$ element V^* taki, że

$$\langle u, h(v)\rangle = h(u, v) \quad \text{dla każdego } u \in V.$$

Odwzorowanie $h : V \to V^*$ jest izomorfizmem. Wprowadzając bazę (e_μ) w V i bazę dualną (e^μ) możemy napisać

$$h(e_\mu, e_\nu) = h_{\mu\nu}, \quad h(e_\nu) = e^\mu h_{\mu\nu},$$

co usprawiedliwia używanie tej samej litery do oznaczania iloczynu skalarnego w V i odpowiadającego temu iloczynowi izomorfizmu $V \to V^*$.

Jeśli (V, h) jest $(p+q)$-wymiarową rzeczywistą przestrzenią kwadratową, to istnieje *baza ortonormalna* taka, że jeśli $\mu \neq \nu$, to $h_{\mu\nu} = 0$,

$$h_{\mu\mu} = 1 \text{ dla } 1 \leqslant \mu \leqslant p, \quad h_{\mu\mu} = -1 \text{ dla } p + 1 \leqslant \mu \leqslant p + q.$$

Parę (p, q) nazywa się *sygnaturą* formy h. (Poprawność tej definicji wynika z twierdzenia Sylvestera o bezwładności form kwadratowych, zob. np. Rozdz. XIV w [**41**].) Liczbę $p - q$ nazywa się *indeksem* formy kwadratowej h.

1.3.4. *Podprzestrzenie.* Jeśli U jest podzbiorem przestrzeni wektorowej V nad K i przestrzenią wektorową ze względu na działania w V, to mówi się, że U jest *podprzestrzenią wektorową* V. Można wtedy utworzyć iloraz V/U, którego elementy to klasy

$$[v] = \{v' \in V \mid v' - v \in U\};$$

często wygodnie jest pisać $v + U$ zamiast $[v]$. Iloraz V/U jest przestrzenią wektorową ze względu na działania

$$[v] + [v'] = [v + v'], \quad \lambda[v] = [\lambda v], \quad v, v' \in V,\ \lambda \in K.$$

Niech wymiary V i U będą, odpowiednio, m i $n \leqslant m$. Można wybrać w V *bazę* (e_μ) *dostosowaną* do U, tzn. taką, że $(e_1, \dots, e_n)$ jest bazą w U; wtedy ciąg $([e_{n+1}], \dots, [e_m])$ jest bazą w V/U, więc $\dim V/U = \dim V - \dim U$. Ciąg homomorfizmów

$$0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{p} V/U \to 0, \quad p(v) = [v],$$

jest *dokładny*, co oznacza tu, że odwzorowanie i jest iniekcją, zachodzi $\operatorname{img} i = \ker p$, a homomorfizm p jest surjekcją.

[2] Matematycy, definiując iloczyn skalarny w rzeczywistych przestrzeniach wektorowych, zwykle zakładają, że stowarzyszona z nim forma kwadratowa jest *dodatnio określona*. Nadając szczególnej teorii względności postać matematyczną, Hermann Minkowski [**48**] wprowadził w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ iloczyn skalarny i formę kwadratową o sygnaturze $(1, 3)$. Od tego czasu takie ogólniejsze iloczyny skalarne odgrywają ważną role w fizyce.

1.3.5. *Suma i suma prosta przestrzeni wektorowych.* *Sumą prostą* przestrzeni wektorowych V i W nad K jest przestrzeń $V \oplus W$, której zbiór wektorów jest iloczynem kartezjańskim $V \times W$, a działania są takie, że $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$ i $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ dla wszystkich $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ i $\lambda \in K$. Ogólniej, jeśli $(V_\iota)_{\iota \in I}$ jest rodziną przestrzeni wektorowych, to można utworzyć ich sumę prostą $\bigoplus_{\iota \in I} V_\iota$.

Jeśli V i W są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni wektorowej U, to można utworzyć ich *sumę*

$$V + W = \{v + w \mid v \in V,\ w \in W\},$$

która jest podprzestrzenią wektorową W. Jeśli V i W są skończenie wymiarowe, to

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Jeśli, ponadto, $V \cap W = \{0\}$, to także w tym przypadku mówi się, że suma ta jest prosta i zapisuje ją jako $V \oplus W \subset U$. Ogólniej, jeśli $(V_\iota)_{\iota \in I}$ jest rodziną podprzestrzeni wektorowych przestrzeni U, to można utworzyć ich sumę $\sum_{\iota \in I} V_\iota \subset U$.

1.3.6. *Odwzorowania liniowe.* Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem przemiennym K o wymiarach m i n, odpowiednio. Odwzorowanie $h : V \to W$ nazywa się K-liniowym jeśli dla każdych $\lambda, \mu \in K$ i $u, v \in V$ zachodzi

$$h(\lambda u + \mu v) = \lambda h(u) + \mu h(v).$$

Mówi się także, że h jest homomorfizmem V w W. Zbiór $\mathsf{Hom}_K(V, W)$ wszystkich takich homomorfizmów jest przestrzenią wektorową nad K o wymiarze mn. Istotnie, mając bazy $(e_\mu)_{\mu=1,\dots,m}$ i $(e_\rho)_{\rho=1,\dots,n}$ w V i W, odpowiednio, bazę w $\mathsf{Hom}_K(V, W)$ można utworzyć w postaci ciągu mn odwzorowań liniowych $j^\mu_\rho : V \to W$ takich, że jeśli $v = v^\mu e_\mu$, to $j^\mu_\rho(v) = v^\mu e_\rho$. Jeśli ciało K jest ustalone w rozważaniach, to zwykle pisze się $\mathsf{Hom}(V, W)$ zamiast $\mathsf{Hom}_K(V, W)$. Homomorfizmy V w V nazywają się *endomorfizmami* tej przestrzeni; $\mathsf{End}\, V = \mathsf{Hom}(V, V)$.

1.3.7. *Przestrzenie i odwzorowania dualne.* Przestrzeń

$$V^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{Hom}(V, K)$$

nazywa się przestrzenią *dualną* względem V lub przestrzenią *form* nad V. Skończenie wymiarowe przestrzenie V i V^* są tego samego wymiaru. Wartość formy $\alpha \in V^*$ na wektorze $v \in V$ oznacza się często przez $\langle v, \alpha \rangle$. Jeśli (e_μ) jest bazą w V, to *baza dualna* (e^μ) względem niej składa się z form e^ν takich, że

$$\langle e_\mu, e^\nu \rangle = \delta^\nu_\mu, \quad \mu, \nu = 1, \dots, m.$$

gdzie *delta Kroneckera*,

$$\delta^\nu_\mu = 1 \text{ dla } \mu = \nu \text{ i } 0 \text{ dla } \mu \neq \nu.$$

Czasami deltę Kroneckera zapisuje się jako $\delta_{\mu\nu}$. Jeśli $h \in \mathsf{Hom}(V, W)$, to $h^* \in \mathsf{Hom}(W^*, V^*)$ zdefiniowane przez

$$\langle v, h^*(\alpha) \rangle = \langle h(v), \alpha \rangle \qquad \text{dla wszystkich } v \in V \text{ i } \alpha \in W^*$$

nazywa się odwzorowaniem *transponowanym* albo *dualnym* względem h. Jeśli $f \in \mathsf{Hom}(V,W)$ i $g \in \mathsf{Hom}(U,V)$, to $f \circ g \in \mathsf{Hom}(U,W)$ oraz

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \quad \text{i} \quad {\mathrm{id}_V}^* = \mathrm{id}_{V^*}\,.$$

1.3.8. W języku *teorii kategorii* [**40, 41**] mówi się, że odpowiedniość

$$f \mapsto f^*, \quad V \mapsto V^*$$

jest *funktorem kontrawariantnym* z kategorii przestrzeni wektorowych nad K w tę samą kategorię.

Iteracja funktora *, tzn. odpowiedniość $f \mapsto f^{**} \overset{\text{def}}{=} (f^*)^*$, $V \mapsto V^{**}$, jest funktorem kowariantnym, $(f \circ g)^{**} = f^{**} \circ g^{**}$. Przestrzenie V, V^* i V^{**} są tego samego wymiaru; ponadto, V i V^{**} można utożsamić, bo dla każdej skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V istnieje *izomorfizm naturalny* $N_V : V \to V^{**}$, zdefiniowany przez

$$\langle \alpha, N_V(v) \rangle = \langle v, \alpha \rangle \quad \text{dla wszystkich } v \in V,\ \alpha \in V^* \tag{1.9}$$

i posiadający tę własność, że jeśli $h \in \mathsf{Hom}(V,W)$, to diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "N_V"'] & W \arrow[d, "N_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "h^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Po utożsamieniu V i V^{**} pomija się N_V; zamiast (1.9) można napisać $\langle \alpha, v \rangle = \langle v, \alpha \rangle$. Często stosuje się takie naturalne utożsamienia także w innych sytuacjach; teoria kategorii została rozwinięta m.in. po to, aby nadać ścisłe znaczenie pojęciu naturalności; zob. str. 48 w [**39**].

1.3.9. *Iloczyny tensorowe.* Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad $\Bbbk$, o wymiarach i z bazami jak w paragrafie 1.3.6. Ich iloczyn tensorowy można zdefiniować jako

$$V \otimes_{\Bbbk} W \overset{\text{def}}{=} \mathsf{Hom}(V^*, W). \tag{1.10}$$

Jeśli ciało $\Bbbk$ jest ustalone w rozważaniach, to zwykle pomija się je w zapisie iloczynu tensorowego. Iloczyn tensorowy nieskończenie wymiarowych przestrzeni wektorowych wymaga innej, ogólniejszej definicji, zob. Rozdz. IX §2 w [**7**].

Stwierdzenie 1.5. *Odwzorowanie*

$$i : V \times W \to V \otimes W, \quad i(v,w)\alpha = \langle v, \alpha \rangle w, \ \ \alpha \in V^*$$

jest biliniowe i uniwersalne ze względu na odwzorowania biliniowe, tzn. jeśli

$$h : V \times W \to U$$

jest biliniowe, to istnieje odwzorowanie liniowe

$$\hat{h} : V \otimes W \to U$$

takie, że

$$h = \hat{h} \circ i.$$

Istotnie, bazy (e_μ) w V i (e_ρ) w W określają bazę $(j_{\mu\rho})$ w $V \otimes W = \mathsf{Hom}(V^*, W)$ taką, że

$$j_{\mu\rho}(\alpha) = \langle e_\mu, \alpha\rangle e_\rho.$$

Mając h, definiuje się $h_{\mu\rho} = h(e_\mu, e_\rho)$ oraz $\hat{h}$ jako odwzorowanie liniowe takie, że

$$\hat{h}(j_{\mu\rho}) = h_{\mu\rho}.$$

Zgodnie z (1.10) pisze się $v \otimes w \stackrel{\text{def}}{=} i(v, w)$. Posługując się Stw. 1.5 dowodzi się istnienie naturalnego izomorfizmu iloczynów tensorowych $U \otimes (V \otimes W)$ i $(U \otimes V) \otimes W$ (łączność iloczynu tensorowego, można pomijać nawiasy). Przestrzeń tensorów („kontrawariantnych”) stopnia k,

$$\bigotimes^k V = V \otimes \cdots \otimes V \quad (k \text{ czynników})$$

ma wymiar m^k: bazę tej przestrzeni można utworzyć jako ciąg, składający się z tensorów

$$e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\mu_k}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_k = 1, \ldots, m.$$

Elementy iloczynu

$$\mathsf{T}^k_l(V) = (\bigotimes^k V) \otimes (\bigotimes^l V^*)$$

to tensory o *walencji* (k, l). Jeśli A jest tensorem o walencji (k, l),

$$A = A^{\nu_1 \ldots \nu_k}_{\mu_1 \ldots \mu_l} e_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_k} \otimes e^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\mu_l}$$

to często używa się uproszczonego zwrotu „$A^{\nu_1 \ldots \nu_k}_{\mu_1 \ldots \mu_l}$ jest tensorem”; walencja tensora jest zakodowana w położeniu i liczbie wskaźników.

Przestrzeń $\mathsf{T}^0_k(V) = \mathsf{T}^k_0(V^*)$ jest dualna względem $\mathsf{T}^k_0(V)$: jeśli $A \in \mathsf{T}^k_0(V)$ i $B \in \mathsf{T}^0_k(V)$, to

$$\langle A, B\rangle = A^{\mu_1 \ldots \mu_k} B_{\mu_1 \ldots \mu_k}.$$

1.4. Struktury rzeczywiste, zespolone i kwaternionowe.

1.4.1. *Kompleksyfikacja i realifikacja.* Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową; jej *kompleksyfikacja* $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ składa się ze wszystkich wektorów postaci $u + \mathrm{i}v$, gdzie $u, v \in V$. O przestrzeni V mówi się, że jest *formą rzeczywistą* przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$. Jeśli V jest skończenie wymiarowa, to

$$\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Jeśli V jest zespoloną przestrzenią wektorową, to jej *realifikacja* $V^{\mathbb{R}}$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową, której zbiór wektorów i mnożenie ich przez liczby rzeczywiste są takie, jak w V. Jeśli V ma bazę $(e_1, \ldots, e_m)$, to $(e_1, \ldots, e_m, \mathrm{i}e_1, \ldots, \mathrm{i}e_m)$ jest bazą w $V^{\mathbb{R}}$, więc

$$\dim_{\mathbb{R}} V^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V.$$

1.4.2. *Odwzorowania półliniowe.* Niech V i W będą zespolonymi przestrzeniami wektorowymi. Odwzorowanie $f : V \to W$ nazywa się *półliniowym* (czasem: antyliniowym) jeśli dla każdych $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ i $u, v \in V$ zachodzi

$$f(\lambda u + \mu v) = \bar{\lambda} f(u) + \bar{\mu} f(v).$$

Sprzężenie zespolone $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, jest półliniowe.

Przestrzeń wektorową *sprzężoną* do V definiuje się jako przestrzeń $\bar{V}$, która ma ten sam zbiór elementów i strukturę grupy przemiennej co V, natomiast mnożenie wektora przez liczbę zespoloną w przestrzeni $\bar{V}$ jest poprzedzone sprzężeniem tej liczby. Obowiązuje umowa, że wektor v, rozpatrywany jako element przestrzeni $\bar{V}$, jest zapisywany w postaci $\bar{v}$, więc

$$\lambda \cdot_{\bar{V}} \bar{v} = \bar{\lambda} \cdot_V v \quad \text{dla każdych} \quad \lambda \in \mathbb{C}, v \in V,$$

co jest równoważne

$$\bar{\lambda} \cdot \bar{v} = \overline{\lambda \cdot v}.$$

W ostatniej równości kropka po lewej stronie oznacza mnożenie w $\bar{V}$, a po prawej – w V. Odwzorowanie

$$\iota : V \to \bar{V}, \quad v \mapsto \iota(v) = \bar{v}$$

jest półliniowe i uniwersalne w tym sensie, że każde odwzorowanie półliniowe $f : V \to W$ można przedstawić jako złożenie $f = \hat{f} \circ \iota$, gdzie $\hat{f} : \bar{V} \to W$ jest odwzorowaniem liniowym, $\hat{f}(\bar{v}) = f(v)$. Jeśli (e_μ) jest bazą w przestrzeni V, to $(\overline{e_\mu})$ jest bazą w $\bar{V}$; zwykle pisze się $e_{\bar{\mu}}$ zamiast $\overline{e_\mu}$. W rachunku spinorowym, według van der Waerdena [**64**] i Infelda [**32**], używa się zapisu $\bar{v} = v^{\dot{\mu}} e_{\dot{\mu}}$ i nazywa elementy $\bar{V}$ i V spinorami „kropkowanymi" i „niekropkowanymi", odpowiednio. Penrose i jego szkoła używają wskaźników primowanych zamiast kropkowanych [**52, 53**]. Jeśli $f : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym, to odwzorowanie liniowe $\bar{f} : \bar{V} \to \bar{W}$ dane jest wzorem $\bar{f}(\bar{v}) = \overline{f(v)}$. Odwzorowanie $f \mapsto \bar{f}$ jest półliniowe.

Przestrzenie $(\bar{V})^*$ i $\overline{V^*}$ można utożsamić i oznaczać przez $\bar{V}^*$. Przestrzeń $\bar{\bar{V}}$ można utożsamić z V; wtedy $\bar{\bar{v}} = v$ i $\bar{\bar{f}} = f$. Jeśli (e^μ) jest bazą w V^*, dualną względem (e_μ), to $(e^{\bar{\mu}})$ jest bazą w $\bar{V}^*$, dualną względem $(e_{\bar{\mu}})$, $\overline{v^\mu} = \langle \bar{v}, e^{\bar{\mu}} \rangle$, itd.

1.4.3. *Odwzorowania półtoraliniowe.* Jeśli przestrzenie U, V, W są zespolone, to odwzorowanie

$$f : V \times W \to U$$

które jest półliniowe na V i liniowe na W nazywa się odwzorowaniem *półtoraliniowym.* Wtedy odwzorowanie $\bar{V} \times W \to U$, $(\bar{v}, w) \mapsto f(v, w)$ jest biliniowe.

1.4.4. *Przestrzenie pseudounitarne i unitarne.* Niech

$$A : V \to \bar{V}^* \tag{1.11}$$

będzie liniowe; odwzorowanie

$$V \times V \to \mathbb{C}, \quad (u, v) \mapsto (u|v) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \bar{u}, Av \rangle,$$

jest półtoraliniowe. Ponadto, $\overline{(u|v)} = (v|u)$ dla każdych $u, v \in V$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie A jest *hermitowskie*,

$$\bar{A}^* = A. \tag{1.12}$$

Wprowadzając macierz współczynników odwzorowania A,

$$Ae_\mu = e^{\bar{\nu}} A_{\bar{\nu}\mu},$$

i zakładając, że zachodzi (1.12) otrzymuje się

$$A_{\bar{\nu}\mu} = \langle e_{\bar{\nu}}, Ae_\mu \rangle = (e_\nu|e_\mu).$$

więc macierz $(A_{\bar{\nu}\mu})$ jest hermitowska,

$$A_{\bar{\nu}\mu} = \overline{A_{\bar{\mu}\nu}}.$$

Jeśli A jest izomorfizmem, to forma $(u, v) \mapsto (u|v)$ jest niezwyrodniała, tzn. $(u|v) = 0$ dla każdego $u \in V$ pociąga $v = 0$. Parę (V, A), gdzie V jest przestrzeń zespoloną z niezwyrodniałą formą hermitowską (*hermitowskim iloczynem skalarnym*)

$$(u|v) = \langle \bar{u}, Av \rangle \tag{1.13}$$

nazywa się przestrzenią *pseudounitarną*.

Jeśli forma ta jest ponadto dodatnio określona, $u \neq 0 \;\Rightarrow\; (u|u) > 0$, to mówi się, że A definiuje w V strukturę *przestrzeni unitarnej*. Liczbę $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$ nazywa się wtedy *normą* wektora u.

Uwaga: matematycy zwykle określają hermitowski iloczyn skalarny w ten sposób, że odwzorowanie $u \mapsto (u|v)$ jest liniowe, a $v \mapsto (u|v)$ jest półliniowe; tu przyjmuje się definicję stosowaną przez większość fizyków. Matematycy rzadko rozpatrują reprezentacje grup w przestrzeniach pseudounitarnych. W fizyce, w związku z reprezentacjami grup niezwartych, takich jak grupa Lorentza, pojawiają się w naturalny sposób przestrzenie i reprezentacje pseudounitarne. Z tego względu celowe jest jawne uwidacznianie odwzorowania A określającego tę strukturę.

W przestrzeni unitarnej istnieją bazy unitarne (e_μ), tzn. takie, że

$$(e_\mu|e_\nu) = \delta_{\mu\nu}.$$

Wtedy $(A_{\bar{\nu}\mu})$ jest macierzą jednostkową i nie występuje jawnie we wzorach.

W skończeniewymiarowej przestrzeni pseudounitarnej każdemu endomorfizmowi F odpowiada *endomorfizm sprzężony* (względem iloczynu (1.13)) $F^\dagger$ taki, że

$$(Fu|v) = (u|F^\dagger v),$$

dla każdej pary wektorów u i v. Na podstawie (1.13) jest

$$F^\dagger = A^{-1}\bar{F}^* A. \tag{1.14}$$

Odwzorowanie $F \mapsto F^\dagger$ jest półliniowe; jeśli $F_1, F_2 \in \mathsf{End}\, V$, to $(F_1 \circ F_2)^\dagger = F_2^\dagger \circ F_1^\dagger$. Jeśli $F = F^\dagger$, to mówi się, że endomorfizm F jest *samosprzężony* (względem iloczynu (1.13)); endomorfizm F jest *pseudounitarny* (względem iloczynu (1.13)) jeśli $F^\dagger F = \mathrm{id}_V$; jest on wtedy odwracalny, $F^{-1} = F^\dagger$. Uwzględniając (1.14) można warunek pseudounitarności zapisać w postaci

$$\bar{F}^* = AF^{-1}A^{-1}. \tag{1.15}$$

Zbiór wszystkich automorfizmów pseudounitarnych tworzy *grupę pseudounitarną* $\mathsf{U}(A)$. W przestrzeni $V = \mathbb{C}^{k+l}$ wprowadza się strukturę przestrzeni pseudounitarnej zdefiniowaną przez formę hermitowską o sygnaturze (k, l):

$$(u|u) = |u_1|^2 + \cdots + |u_k|^2 - |u_{k+1}|^2 - \cdots - |u_{k+l}|^2,$$

gdzie $u = (u_\mu) \in \mathbb{C}^{k+l}$; pisze się wtedy $\mathsf{U}(k, l)$ zamiast $\mathsf{U}(A)$. Dla $l = 0$ mówi się o strukturze unitarnej i grupie unitarnej $\mathsf{U}(k)$.

Ważne są następujące definicje i fakty związane z przestrzeniami unitarnymi. Każda podprzestrzeń wektorowa przestrzeni unitarnej jest unitarna ze względu na ograniczenie iloczynu skalarnego do tej podprzestrzeni. Jeśli W jest podprzestrzenią przestrzeni unitarnej V, a $W^\perp$ jest podprzestrzenią ortogonalną do W,

$$W^\perp = \{v \in V \mid w \in W \ \Rightarrow (v|w) = 0\},$$

to $V = W \oplus W^\perp$. Jeśli $(F_{\mu\nu})$ jest macierzą endomorfizmu F względem bazy unitarnej, $Fe_\mu = \sum_\nu e_\nu F_{\nu\mu}$, to macierz endomorfizmu sprzężonego powstaje przez *sprzężenie hermitowskie*: $F^\dagger_{\mu\nu} = \overline{F_{\nu\mu}}$.

1.4.5. *Struktura rzeczywista i kwaternionowa.* Niech W będzie zespoloną przestrzenią wektorową; odwzorowanie liniowe $C : W \to \bar{W}$ takie, że $\bar{C}C = \mathrm{id}_W$ określa *strukturę rzeczywistą* w tej przestrzeni. Zbiór

$$V = \{w \in W \mid \bar{w} = Cw\}$$

jest rzeczywistą podprzestrzenią W, której kompleksyfikacja $V^{\mathbb{C}}$ jest izomorficzna W.

Niech teraz W będzie parzystowymiarową zespoloną przestrzenią wektorową, $\dim_{\mathbb{C}} W = 2n$. Odwzorowanie liniowe $C : W \mapsto \bar{W}$ takie, że $\bar{C}C = -\mathrm{id}_W$ pozwala wprowadzić w zbiorze W strukturę prawej, kwaternionowej przestrzeni wektorowej. Mianowicie, definiując, dla każdego $w \in W$,

$$w\mathrm{i} = \sqrt{-1}w, \quad w\mathrm{j} = C^{-1}\bar{w},$$

otrzymuje się $(w\mathrm{i})\mathrm{i} = (w\mathrm{j})\mathrm{j} = -w$ oraz $(w\mathrm{i})\mathrm{j} + (w\mathrm{j})\mathrm{i} = 0$, więc, zgodnie z (1.5) wystarczy położyć $w\mathrm{k} = (w\mathrm{i})\mathrm{j}$. Jest: $\dim_{\mathbb{H}} W = n$.

2. Algebry

W niniejszym paragrafie o wszystkich rozpatrywanych przestrzeniach wektorowych zakłada się, że są nad ciałem $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$.

2.1. Definicje i przykłady.

2.1.1. *Algebra* jest to przestrzeń wektorowa A z odwzorowaniem biliniowym

$$A \times A \to A$$

zwanym *mnożeniem* i zapisywanym jako

$$(a, b) \mapsto a \cdot b \quad \text{albo} \quad [a, b],$$

a także na inne sposoby. Homomorfizm algebry A w algebrę B to odwzorowanie liniowe $h : A \to B$ takie, że dla każdych $a, a' \in A$ zachodzi $h(aa') = h(a)h(a')$. Jeśli h jest, ponadto, bijekcją i h^{-1} jest też homomorfizmem, to o h mówi się, że jest izomorfizmem.

Podprzestrzeń B algebry A taka, że $BB \subset B$ nazywa się *podalgebrą* algebry A. O podzbiorze R podalgebry B mówi się, że ją generuje, jeśli B jest najmniejszą podalgebrą zawierającą R, tzn. jeśli B' jest podalgebrą A i $R \subset B'$, to $B \subset B'$. Np. pierścień $\mathbb{H}$ można rozpatrywać jako algebrę nad $\mathbb{R}$, generowaną przez zbiór $\{i, j\}$.

Podprzestrzeń B algebry A taka, że $AB \subset B$ ($BA \subset B$) nazywa się jej lewostronnym (prawostronnym) ideałem. Każdy ideał jest podalgebrą. Jeśli B jest ideałem dwustronnym – tzn. lewo- i prawostronnym – algebry A, to przestrzeń ilorazowa A/B ma strukturę algebry taką, że odwzorowanie kanoniczne $A \to A/B$, $a \mapsto a + B$, jest homomorfizmem algebr.

2.1.2. Algebra jest *łączna* jeśli $(ab)c = a(bc)$ dla każdych $a, b, c \in A$. Algebra może mieć jedność, tzn. element $1_A \in A$ taki, że $1_A a = a 1_A = a$ dla każdego $a \in A$. W dalszym ciągu zakłada się tu, że rozpatrywane tu łączne algebry mają jedność, a homomorfizmy między nimi przeprowadzają jedności w jedności. Jeśli algebra A ma jedność, to jest iniekcja $\Bbbk \to A$, $\lambda \mapsto \lambda 1_A$, co pozwala utożsamić $\Bbbk$ z jednowymiarową podprzestrzenią A. Jeśli A jest algebrą łączną i $n \in \mathbb{N}$, to $A(n)$ oznacza algebrę (łączną) wszystkich kwadratowych macierzy stopnia n o elementach należących do A; jej jednością jest $1_A I$.

2.1.3. Algebra jest *przemienna* jeśli $ab = ba$ dla wszystkich $a, b \in A$. Np. $\mathbb{C}$ jest algebrą łączną i przemienną nad $\mathbb{R}$. Zbiór kwaternionów jest łączną, ale nieprzemienną algebrą nad $\mathbb{R}$.

2.1.4. *Sumą prostą algebr* A i B jest algebra $A \oplus B \cong A \times B$, w której mnożenie elementów jest takie, że

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \text{ dla każdych } a_1, a_2 \in A, \ \ b_1, b_2 \in B.$$

2.1.5. *Iloczynem tensorowym algebr* A i B jest algebra, której przestrzeń wektorowa jest iloczynem tensorowym $A \otimes B$, a mnożenie elementów jest takie, że

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2) \text{ dla każdych } a_1, a_2 \in A, \ \ b_1, b_2 \in B.$$

Np. jeśli ciało $\mathbb{C}$ jest rozpatrywane jako dwuwymiarowa algebra nad $\mathbb{R}$, to iloczyn $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ jest algebrą izomorficzną $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$; izomorfizm jest dany przez przedłużenie odpowiedniości

$$\sqrt{-1} \otimes 1 \mapsto (\sqrt{-1}, \sqrt{-1}), \ \ 1 \otimes \sqrt{-1} \mapsto (\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}).$$

Podobnie, izomorfizm $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \to \mathbb{C}(2)$ otrzymuje się z

$$\sqrt{-1} \otimes 1 \mapsto \sqrt{-1} I, \ \ 1 \otimes \mathrm{i} \mapsto -\sqrt{-1}\sigma, \ \ 1 \otimes j \mapsto \varepsilon$$

gdzie i, j są jednostkami kwaternionowymi, jak w ustępie 1.2, a

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

2.1.6. Odwzorowanie liniowe $D : A \to A$ nazywa się *różniczkowaniem algebry* A jeśli dla każdych $a, b \in A$ jest spełniona *reguła Leibniza* $D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$.

Jeśli algebra A ma jedność 1_A, a D jest jej różniczkowaniem, to

$$D(1_A) = D(1_A \cdot 1_A) = 2D(1_A),$$

więc $D(1_A) = 0$.

2.1.7. Algebra A z iloczynem $[\,,]$ nazywa się *algebrą Liego* jeśli dla każdych a, b, c jest $[a, b] + [b, a] = 0$ oraz zachodzi *tożsamość Jacobiego*

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Np. jeśli A jest algebrą łączną, to kładąc $[a, b] = ab - ba$ otrzymuje się w tym samym zbiorze A strukturę algebry Liego.

Tożsamość Jacobiego jest równoważna stwierdzeniu: dla każdego $a \in A$ odwzorowanie $A \to A$, $b \mapsto [a, b]$ jest różniczkowaniem algebry $(A, [\,,])$.

Jeśli (e_μ) jest bazą n-wymiarowej algebry Liego, to

$$[e_\nu, e_\rho] = c^\mu_{\nu\rho} e_\mu, \quad \mu, \nu, \rho = 1, \dots, n. \tag{1.17}$$

Liczby $c^\mu_{\nu\rho} \in \Bbbk$ nazywają się *stałymi strukturalnymi* algebry Liego względem bazy (e_μ). Na mocy antysymetrii nawiasu $[\,,\,]$ oraz tożsamości Jacobiego stałe strukturalne spełniają

$$c^\mu_{\nu\rho} + c^\mu_{\rho\nu} = 0, \quad c^\sigma_{\nu\rho} c^\mu_{\tau\sigma} + c^\sigma_{\rho\tau} c^\mu_{\nu\sigma} + c^\sigma_{\tau\nu} c^\mu_{\rho\sigma} = 0, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau = 1, \dots, n. \tag{1.18}$$

Przykład 1.10. Przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^3$ z iloczynem wektorowym $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jest algebrą Liego. Tożsamość Jacobiego można tu sprawdzić posługując się tożsamością

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}.$$

Przykład 1.11. Niech $K(n)$ oznacza algebrę wszystkich macierzy stopnia n o elementach należących do ciała $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ albo $\mathbb{H}$. Wprowadzając w $K(n)$ składanie elementów przy pomocy komutatora $[a, b] = ab - ba$ otrzymuje się algebrę Liego $\mathfrak{gl}(n, K)$. Niech $\operatorname{tr} a$ oznacza ślad macierzy a; zbiory

$$\mathfrak{sl}(n, K) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid \operatorname{tr} a = 0\}$$

są algebrami Liego dla $K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, ale nie są takimi algebrami dla $K = \mathbb{H}$ i $n > 1$, bo na przykład biorąc

$$a = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{otrzymuje się} \quad ab - ba = -2\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Jeśli $a, b \in \mathbb{H}(n)$, to część rzeczywista śladu macierzy $ab - ba$ znika, więc zbiór

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) \mid \operatorname{tr} a + \operatorname{tr} \bar{a} = 0\}$$

jest algebrą Liego nad $\mathbb{R}$ o wymiarze $4n^2 - 1$.

Niech a^* oznacza macierz transponowaną względem $a \in \mathfrak{gl}(n, K)$. Zbiór macierzy (antysymetrycznych)

$$\mathfrak{so}(n, K) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid a^* = -a\}$$

jest algebrą Liego dla $K = \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, ale nie jest taką algebrą dla $K = \mathbb{H}$, $n > 1$, co widać na podstawie przykładu (1.19). Zwykle zapis $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ upraszcza się do $\mathfrak{so}(n)$.

Przykład 1.12. Niech K będzie ℓ-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$ oraz $L = K^*$. W przestrzeni $V = K \oplus L$ można wprowadzić dwie naturalne, nieosobliwe formy biliniowe ω_+ i ω_-,

$$\omega_\pm : V \times V \to \Bbbk, \quad \omega(k + l, k' + l') = \langle k, l' \rangle \pm \langle k', l \rangle, \tag{1.20}$$

gdzie $k, k' \in K$ i $l, l' \in L$. Niech $(k_i)_{i=1,\dots\ell}$ będzie bazą w K, a $(l_i)_{i=1,\dots,\ell}$ – bazą dualną,

$$\langle k_i, l_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Podprzestrzenie K i L są całkowicie zerowe względem obu tych form,

$$\omega_\pm(k_i, k_j) = 0, \quad \omega_\pm(l_i, l_j) = 0 \quad \text{oraz} \quad \omega_\pm(k_i, l_j) = \delta_{ij}.$$

Endomorfizm $X \in \mathsf{End}\, V$ można przedstawić w postaci „blokowej”,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad A \in \mathsf{End}\, K,\ B \in \mathsf{Hom}(L, K), \ \text{itd.} \tag{1.21}$$

Algebry Liego

$$\mathfrak{g}_\pm = \{X \in \mathsf{End}\, V \mid \omega_\pm(Xv, v') + \omega_\pm(v, Xv') = 0\}.$$

zawierają wszystkie macierze postaci (1.21) takie, że

$$B^* = \mp B, \qquad C^* = \mp C, \quad D = -A^*.$$

Algebra $\mathfrak{g}_-$ to algebra *symplektyczna* algebra Liego $\mathfrak{sp}(\ell, \Bbbk)$.

Niech $a^\dagger = \bar{a}^*$ oznacza macierz hermitowsko sprzężoną z macierzą $a \in \mathfrak{gl}(n, K)$, $K = \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$. Zbiory macierzy

$$\mathfrak{su}(n) = \{a \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) | a^\dagger = -a\} \ \text{ oraz } \ \mathfrak{sp}(n) = \{a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{H}) | a^\dagger = -a\}$$

są algebrami Liego nad $\mathbb{R}$.

Stwierdzenie 1.6. *Zbiór* Der A *wszystkich różniczkowań algebry A nad $\Bbbk$ jest, ze względu na komutator, algebrą Liego nad $\Bbbk$.*

Dowód. Widać od razu, że jeśli $\lambda_1, \lambda_2 \in \Bbbk$ i $D_1, D_2 \in \operatorname{Der} A$, to $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 \in \operatorname{Der} A$. Jeśli a i $b \in A$, to

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](ab) &= D_1((D_2 a)b + aD_2 b) - D_2((D_1 a)b + aD_1 b) = \\
&= (D_1 D_2 a)b + D_2 a D_1 b + D_1 a D_2 b + a D_1 D_2 b + \\
&- (D_2 D_1 a)b - D_1 a D_2 b - D_2 a D_1 b - a D_2 D_1 b = \\
&\qquad = ([D_1, D_2]a)b + a[D_1, D_2]b,
\end{aligned}$$

więc $[D_1, D_2] \in \operatorname{Der} A$. $\square$

Występująca w tym stwierdzeniu algebra A nie musi być łączna. W szczególności, jeśli A jest algebrą Liego, to odwzorowanie $\operatorname{ad}(a) : A \to A$, $\operatorname{ad}(a)b = [a, b]$, jest *różniczkowaniem wewnętrznym* tej algebry.

2.1.8. *Algebry ze sprzężeniem. Sprzężeniem* w algebrze z jednością A nad $\mathbb{R}$ nazywa się odwzorowanie liniowe $a \mapsto \bar{a}$ takie, że

$$\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{ab} = \bar{b}\bar{a}, \quad \bar{a}a = a\bar{a} \quad \text{oraz: jeśli } a = \bar{a}, \text{ to } a \in \mathbb{R}. \tag{1.22}$$

Warunki (1.22) pociągają

$$\bar{a}a \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Re} a \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(a + \bar{a}) \in \mathbb{R}.$$

Sprzężenie jest *dobre*, jeśli, ponadto,

$$a \neq 0 \;\Rightarrow\; \bar{a}a > 0. \tag{1.23}$$

W algebrze z dobrym sprzężeniem każdy $\neq 0$ element jest odwracalny, $a^{-1} = \bar{a}/\bar{a}a$. Np. algebry $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$ są algebrami z dobrym sprzężeniem.

Jeśli algebra A jest łączna, to zbiór

$$\{a \in A \mid \bar{a}a = 1\}$$

jest grupą.

Konstrukcja Cayley–Diakona pozwala zbudować z algebry A, z dobrym sprzężeniem, algebrę A^2, także z takim sprzężeniem, o podwójnym wymiarze. W tym celu, w przestrzeni wektorowej $A \oplus A$ wprowadza się iloczyn elementów

$$(a, b)(c, d) = (ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb) \tag{1.24}$$

oraz sprzężenie

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b).$$

Jeśli 1 jest jednością A, to $(1, 0)$ jest jednością A^2 oraz $\operatorname{Re}(a, b) = (\operatorname{Re} a, 0)$. Obliczając

$$\overline{(a, b)}(a, b) = (\bar{a}a + b\bar{b}, 0) = (a\bar{a} + b\bar{b}, 0) = (a, b)\overline{(a, b)}$$

oraz

$$\overline{(a, b)(c, d)} = \overline{(ac - d\bar{b}, \bar{a}d + cb)} = (\overline{ac - d\bar{b}}, -\bar{a}d - cb) =$$
$$= (\bar{c}\bar{a} - b\bar{d}, -\bar{a}d - cb) = (\bar{c}, -d)(\bar{a}, -b) = \overline{(c, d)}\;\overline{(a, b)}$$

sprawdzamy, że w algebrze A^2 spełnione są warunki (1.22) i (1.23), więc sprzężenie w tej algebrze też jest dobre.

LEMAT 1.7. *Jeśli algebra z dobrym sprzężeniem A jest łączna, to algebra A^2 nie ma dzielników zera.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że jeśli $(a, b)(c, d) = 0$ i $(a, b) \neq 0$, to $(c, d) = 0$. Opierając się na (1.24), mnożąc $0 = ac - d\bar{b}$ z prawej strony przez b, korzystając z łączności algebry A oraz $\bar{a}d + cb = 0$ otrzymujemy

$$0 = a(cb) - d(\bar{b}b) = -(a\bar{a} + \bar{b}b)d$$

więc jeśli $(a, b) \neq 0$, to $d = 0$. Podobnie, mnożąc $ac - d\bar{b} = 0$ z lewej strony przez $\bar{a}$ otrzymujemy $(\bar{a}a + b\bar{b})c =$, stąd: jeśli $(a, b) \neq 0$, to $c = 0$. $\square$

Biorąc $A_0 = \mathbb{R}$ z trywialnym sprzężeniem, $\bar{a} = a$, można skonstruować ciąg $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ algebr ze sprzężeniem, kładąc $A_{n+1} = A_n^2$ tak, że $\dim_{\mathbb{R}} A_n = 2^n$. Są łatwe do sprawdzenia izomorfizmy algebr ze sprzężeniem,

$$A_1 \to \mathbb{C}, \quad (a, b) \mapsto a + \sqrt{-1}b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$A_2 \to \mathsf{H}, \quad (a + \sqrt{-1}b, c + \sqrt{-1}d) \mapsto a + \mathrm{i}b + \mathrm{j}d + \mathrm{k}c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Z definicji, algebra A^3 to ośmiowymiarowa *algebra oktonionów* $\mathbb{O}$. Na mocy Lematu algebra $\mathbb{O}$ nie ma dzielników zera, ale – jak można pokazać – nie jest łączna (zob. Zadanie 1.12). Algebra *sedenionów* A^4 ma dzielniki zera.

2.2. Algebry z gradacją. Niech Z oznacza pierścień $\mathbb{Z}$ albo $\mathbb{F}_2$ i niech A będzie algebrą nad $\Bbbk$. Mówi się, że A jest *algebrą z gradacją względem* Z jeśli dany jest rozkład A na sumę prostą przestrzeni wektorowych,

$$A = \bigoplus_{k\in\mathsf{Z}} A_k$$

taki, że

$$\text{jeśli } a_k \in A_k \text{ i } a_l \in A_l, \text{ to } a_k \cdot a_l \in A_{k+l}.$$

O elementach A_k mówi się, że są stopnia k; elementy stopnia 0 i 1 algebry z gradacją względem $\mathbb{F}_2$ nazywa się, odpowiednio, elementami parzystymi i nieparzystymi. Homomorfizm $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ taki, że $2k+1 \mapsto 1$, pozwala z każdej algebry z gradacją względem $\mathbb{Z}$ utworzyć algebrę z gradacją względem $\mathbb{F}_2$ przez „zapamiętywanie" tylko parzystości elementów algebry. W dalszym ciągu, gradacja bez określenia pierścienia Z oznacza gradację względem $\mathbb{F}_2$. Wygodnie jest algebrę z gradacją $A = A_0 \oplus A_1$ zapisywać też jako $A_0 \to A$.

Gradację algebry $A = A_0 \oplus A_1$ można scharakteryzować przy pomocy *automorfizmu głównego* tzn. takiego $\alpha \in \mathsf{End}\, A$, że

$$\alpha | A_\epsilon = (-1)^\epsilon \, \mathrm{id}_{A_\epsilon}, \quad \epsilon \in \{0, 1\}$$

PRZYKŁAD 1.13. (i) Algebra $2B \overset{\text{def}}{=} B \oplus B$ ma gradację określoną przez automorfizm α taki, że $\alpha(b_1, b_2) = (b_2, b_1)$. Odwzorowanie $B \to 2B$ to $b \mapsto (b, b)$.

(ii) Algebra $B(2)$ ma gradację określoną przez automorfizm inwolutywny α taki, że $\alpha(a) = \tau a \tau^{-1}$, $a \in B(2)$, gdzie τ jest jak w (1.16). Odwzorowanie $2B \to B(2)$ umieszcza (b_1, b_2) na przekątnej.

Niech teraz $\Bbbk = \mathbb{R}$.

(iii) Algebra $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ma gradację określoną przez sprzężenie zespolone.

(iv) Algebra $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$ ma gradację określoną przez $\alpha(q) = \mathrm{k}q\mathrm{k}^{-1}$, gdzie k jest jedną z jednostek kwaternionowych, $\mathrm{k}^2 = -1$. Kwaterniony postaci $x\mathrm{i} + y\mathrm{j}$, $x, y \in \mathbb{R}$, są nieparzyste.

(v) Algebra $\mathbb{R}(2)$, oprócz gradacji opisanej w (ii), ma nierównoważną jej gradację taką, że $\alpha(a) = \varepsilon a \varepsilon^{-1}$, gdzie $a \in \mathbb{R}(2)$, a ε jest jak w (1.16). Podalgebra parzysta jest tu izomorficzna $\mathbb{C}$.

(vi) Algebra $\mathbb{H} \to \mathbb{C}(2)$ ma automorfizm główny α taki, że $\alpha(a) = \varepsilon \bar{a} \varepsilon^{-1}$, $a \in \mathbb{C}(2)$. Część parzysta tej algebry to

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{I, \sqrt{-1}\sigma_x, \sqrt{-1}\sigma_y, \sqrt{-1}\sigma_z\} \cong \mathbb{H}.$$

Tutaj $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sqrt{-1}\varepsilon$, $\sigma_z = \tau$ są *macierzami Pauliego.*

2.2.1. Różniczkowaniem stopnia l algebry z gradacją A nazywa się różniczkowanie $D : A \to A$, takie, że $DA_k \subset A_{k+l}$. Zbiór wszystkich różniczkowań algebry z gradacją tworzy algebrę Liego z gradacją: komutator $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ różniczkowania D_1 stopnia l_1 i różniczkowania D_2 stopnia l_2 jest różniczkowaniem stopnia $l_1 + l_2$.

Przykład 1.14. Algebra A funkcji wymiernych (tzn. ilorazów wielomianów o współczynnikach należących do $\Bbbk$) jednej zmiennej x ma gradację względem $\mathbb{Z}$; dla $k \in \mathbb{Z}$ jest $A_k = \Bbbk x^k$. Różniczkowanie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ funkcji jest stopnia -1.

2.3. Algebra tensorowa. *Algebra tensorowa* nad V jest, jako przestrzeń wektorowa, sumą prostą

$$\mathsf{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigotimes^k V, \quad \bigotimes^0 V = \Bbbk.$$

Każdy element $a \in \mathsf{T}(V)$ jest ciągiem tensorów kontrawariantnych,

$$a = (a_0, a_1, \dots), \quad \text{gdzie} \quad a_k \in \bigotimes^k V,$$

takim, że prawie wszystkie elementy ciągu są zerami, tzn. takim, że istnieje $k_a \in \mathbb{N}$ o tej własności, że $k > k_a \Rightarrow a_k = 0$. Iloczyn $a \otimes b$ elementów a i $b = (b_k)_{k=0,1,\dots}$ definiuje się tak, że

$$(a \otimes b)_k = \sum_{l=0}^{k} a_l \otimes b_{k-l} \tag{1.25}$$

co nadaje nieskończenie wymiarowej przestrzeni $\mathsf{T}(V)$ strukturę łącznej algebry nad $\Bbbk$. Jednością tej algebry jest ciąg $(1, 0, 0, \dots)$. Algebra tensorowa ma oczywistą gradację względem $\mathbb{Z}$.

Inne, ważne algebry definiuje się jako ilorazy algebry tensorowej przez jej ideały.

2.4. Algebra Grassmanna.

2.4.1. Niech V będzie przestrzenią wektorową, a A – algebrą. Odwzorowanie liniowe $f : V \to A$ takie, że $f(v)^2 = 0$ dla każdego $v \in V$ nazywa się *odwzorowaniem Grassmanna*. Niech $\mathsf{J}_{\mathrm{Gr}}(V)$ będzie ideałem algebry $\mathsf{T}(V)$ generowanym przez zbiór wszystkich tensorów postaci $v \otimes v$, $v \in V$. (Określenie *generowany* oznacza tu najmniejszy dwustronny ideał zawierający wszystkie te elementy.) Iloraz $\bigwedge V \overset{\text{def}}{=} \mathsf{T}(V)/\mathsf{J}_{\mathrm{Gr}}(V)$ jest łączną algebrą z gradacją względem $\mathbb{Z}$, zwaną *algebrą Grassmanna*. Niech $\kappa : \mathsf{T}(V) \to \bigwedge V$ będzie odwzorowaniem kanonicznym, $\kappa(a) = a + \mathsf{J}_{\mathrm{Gr}}(V)$. Ograniczenie κ do $\Bbbk \oplus V$ jest iniekcją, więc można uważać $\Bbbk \oplus V$ za podprzestrzeń $\bigwedge V$. Mnożenie elementów w $\bigwedge V$ oznacza się przez $\wedge$, $\kappa(a \otimes b) = \kappa(a) \wedge \kappa(b)$.

Stwierdzenie 1.8. *Iniekcja $\kappa : V \to \bigwedge V$ jest uniwersalnym odwzorowaniem Grassmanna, tzn. jeśli $f : V \to A$ jest odwzorowaniem Grassmanna, to istnieje homomorfizm algebr $\hat{f} : \bigwedge V \to A$ taki, że $f = \hat{f} \circ \kappa$.*

Dowód. Odwzorowanie f przedłuża się do homomorfizmu algebr $\mathsf{T}(f) : \mathsf{T}(V) \to A$ w ten sposób, że $\mathsf{T}(f)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = f(v_1) \dots f(v_k)$. Homomorfizm $\mathsf{T}(f)$ znika na $\mathsf{J}_{\mathrm{Gr}}(V)$, więc dobrze definiuje $\hat{f}(a + \mathsf{J}_{\mathrm{Gr}}(V)) = \mathsf{T}(f)(a)$. □

2.4.2. Tensory można symetryzować i antysymetryzować. W szczególności, *odwzorowanie antysymetryzacji* Alt : $\mathsf{T}(V) \to \mathsf{T}(V)$ jest liniowe i przeprowadza tensory kontrawariantne w ich część w pełni antysymetryczną; jeśli $a \in \mathsf{T}^k(V)$ jest tensorem o składowych $a^{\mu_1 \cdots \mu_k}$, to $\mathrm{Alt}\, a$ ma składowe

$$a^{[\mu_1 \cdots \mu_k]} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \textstyle\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} (\operatorname{sgn} \pi) a^{\mu_{\pi(1)} \cdots \mu_{\pi(k)}}.$$

Widać, że $\mathrm{Alt} \in \mathsf{End}\, \mathsf{T}(V)$ jest rzutowaniem, $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$. Przestrzeni wektorowej $\mathsf{Alt}\, V \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Alt}\,(\mathsf{T}(V))$ można nadać strukturę łącznej algebry kładąc

$$\mathrm{Alt}\,(a) \cdot \mathrm{Alt}\,(b) = \mathrm{Alt}\,(a \otimes b) \quad \text{dla } a, b \in \mathsf{T}(V).$$

Zbiór $\Bbbk \oplus V$ jest podprzestrzenią $\mathsf{Alt}\, V$. Dla każdego $v \in V \subset \mathsf{T}(V)$ jest $\mathrm{Alt}\,(v \otimes v) = 0$, więc $f : V \to \mathsf{Alt}\, V$ jest odwzorowaniem Grassmanna, określającym izomorfizm algebry $\bigwedge V$ i *algebry zewnętrznej* $\mathsf{Alt}\, V$. Ten izomorfizm jest naturalny; nie ma potrzeby odróżniania algebr $\bigwedge V$ i $\mathsf{Alt}\, V$; tradycyjnie, nazwy: algebra Grassmanna i algebra zewnętrzna używa się wymiennie.

2.4.3. Jeśli przestrzeń V jest n-wymiarowa, to jest rozkład na sumę prostą

$$\textstyle\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k V$$

gdzie $\bigwedge^k V$ jest przestrzenią wektorową tensorów w pełni antysymetrycznych stopnia k,

$$\textstyle\bigwedge^k V = \{a \in \bigotimes^k V \mid a = \mathrm{Alt}\, a\}, \quad \bigotimes^0 V = \Bbbk.$$

Elementy $\bigwedge^k V$ nazywa się zwykle *k-wektorami*, a elementy $\bigwedge V$ – *multiwektorami*; k-wektor jest multiwektorem jednorodnym stopnia k. Jeśli $a \in \bigwedge^k V$ i $b \in \bigwedge^l V$, to *iloczyn zewnętrzny* tych multiwektorów jest $(k+l)$-wektorem $a \wedge b = \mathrm{Alt}\,(a \otimes b)$ o składowych

$$(a \wedge b)^{\mu_1 \cdots \mu_k \nu_1 \cdots \nu_l} = a^{[\mu_1 \cdots \mu_k} b^{\nu_1 \cdots \nu_l]}$$

Każdy multiwektor $a \in \bigwedge V$ jest ciągiem $(a_0, \ldots, a_n)$ gdzie $a_k \in \bigwedge^k V$. Na mocy (1.25) iloczyn zewnętrzny multiwektorów a i b jest taki, że

$$(a \wedge b)_k = \textstyle\sum_{l=0}^{n} a_l \wedge b_{n-l}.$$

Odwzorowanie $h \in \mathsf{Hom}(V, W)$ określa odwzorowanie

$$\textstyle\bigwedge^k h : \bigwedge^k V \to \bigwedge^k W$$

takie że

$$(\textstyle\bigwedge^k h)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = h(v_1) \wedge \cdots \wedge h(v_k) \tag{1.26}$$

dla wszystkich $v_1, \ldots v_k \in V$ oraz przedłuża się do homomorfizmu algebr $\bigwedge h : \bigwedge V \to \bigwedge W$. Dokładniej, $\bigwedge$ jest funktorem kowariantnym z kategorii przestrzeni wektorowych w kategorię algebr z gradacją.

2.4.4. Jeśli (e_μ) jest bazą w n-wymiarowej przestrzeni V, to bazą w $\bigwedge^k V$ jest zbiór wszystkich k-wektorów postaci

(1.27) $$e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_k}, \quad \text{gdzie } 1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k \leqslant n.$$

Liczba ciągów $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k)$ spełniających warunek określony w (1.27) wynosi $\binom{n}{k}$, więc

$$\dim \bigwedge V = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} = 2^n.$$

STWIERDZENIE 1.9. *Ciąg wektorów $(v_1, \ldots, v_k)$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy*

(1.28) $$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \neq 0.$$

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_k \in V$ są liniowo zależne, to można jeden z tych wektorów przedstawić w postaci liniowej kombinacji pozostałych, więc $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$, bo $v \wedge v = 0$ dla każdego $v \in V$. Jeśli przestrzeń V jest n-wymiarowa, a wektory $v_1, \ldots, v_k$ są liniowo niezależne – więc $k \leqslant n$ – to można ich zbiór uzupełnić tak, aby ciąg $v_1, \ldots, v_n$ był bazą w V, wtedy $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \neq 0$ rozpina $\bigwedge^n V$ i tym bardziej zachodzi (1.28).

2.4.5. Przestrzeń wektorową $\bigwedge V^*$ można utożsamić z przestrzenią dualną względem $\bigwedge V$ określając odwzorowanie obliczania

$$\bigwedge V \times \bigwedge V^* \to \Bbbk, \quad (a, \omega) \mapsto \langle a, \omega \rangle$$

tak, że jeśli $v_1, \ldots, v_k \in V$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$, to

(1.29) $$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \rangle = \det \langle v_i, \alpha_j \rangle.$$

Jeśli $\omega \in \bigwedge^k V^*$, to zamiast $\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, \omega \rangle$ zwykle pisze się $\omega(v_1, \ldots, v_k)$; inaczej mówiąc ω rozpatruje się jako odwzorowanie $V \times \cdots \times V \to \Bbbk$, które jest k-liniowe i w pełni antysymetryczne,

$$\omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = (\operatorname{sgn} \pi) \omega(v_1, \ldots, v_k), \quad \text{dla każdego } \pi \in \mathfrak{S}_k.$$

2.5. Algebra symetryczna. Podobnie, niech $\mathsf{J}_{\mathrm{s}}(V)$ oznacza ideał algebry tensorowej $\mathsf{T}(V)$ generowany przez wszystkie elementy postaci

$$u \otimes v - v \otimes u, \quad \text{gdzie} \quad u, v \in V.$$

Algebra symetryczna nad przestrzenią V to iloraz $\mathsf{Sym}(V) = \mathsf{T}(V)/\mathsf{J}_{\mathrm{s}}(V)$. Algebra symetryczna jest łączna, przemienna i ma gradację względem $\mathbb{Z}$. Algebra symetryczna jest uniwersalna ze względu na odwzorowania symetryczne: jeśli A jest algebrą, a $f : V \to A$ odwzorowaniem liniowym takim, że $f(u)f(v) = f(v)f(u)$ dla wszystkich $u, v \in V$, to istnieje homomorfizm algebr $\hat{f} : \mathsf{Sym}(V) \to A$ taki, że $f = \hat{f} \circ \kappa$, gdzie $\kappa : V \to \mathsf{Sym}(V)$ jest naturalną iniekcją.

Część symetryczna („symetryzacja") tensora a o składowych $a^{\mu_1 \cdots \mu_k}$ jest tensorem $\operatorname{Sym} A$ o składowych

$$a^{(\mu_1 \cdots \mu_k)} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{k!} \textstyle\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_k} a^{\mu_{\pi(1)} \cdots \mu_{\pi(k)}}$$

Algebrę symetryczną można utożsamić z algebrą $\mathsf{S}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathsf{S}^k(V)$ tensorów symetrycznych, w której iloczyn symetryczny $\odot$ tensorów $a \in \mathsf{S}^k(V)$ i $b \in \mathsf{S}^l(V)$ jest określony na składowych wzorem

$$(a \odot b)^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l} = a^{(\mu_1 \dots \mu_k} b^{\nu_1 \dots \nu_l)}.$$

2.6. Superalgebry Liego. W algebrach z gradacją w naturalny sposób pojawiają się „superróżniczkowania"; ich zbiór tworzy „superalgebrę Liego", w której złożenie elementów nieparzystych jest antykomutatorem, podobnie do tego, co w teoriach kwantowych występuje dla operatorów związanych z fermionami. Ta terminologia pochodzi od fizyków i nawiązuje do prac nad supersymetriami w teorii oddziaływań elementarnych; zob. np. [**19**]. Artykuł [**14**] jest dobrym, wczesnym przeglądem tej tematyki, napisanym dla fizyków. Niektórzy matematycy nie przyjmują nazwy „superalgebra Liego" i mówią – w tym kontekście – o algebrach Liego z gradacją, co może prowadzić do nieporozumień gdyż używa się algebr Liego z gradacją, nie będących superalgebrami. Ale Jurij I. Manin poświęca znaczną część książki [**44**] tej tematyce i stale używa przedrostka super w kontekście algebry i geometrii, gdy występują wielkości antykomutujące. Zob. także [**63**].

2.6.1. Niech A będzie algebrą z gradacją; odwzorowanie $D \in \mathsf{End}\, A$ nazywa się superróżniczkowaniem stopnia l jeśli $DA_k \subset A_{k+l}$ i

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{kl} a Db \quad \text{dla każdych} \quad a \in A_k,\ b \in A.$$

Każde superróżniczkowanie stopnia parzystego jest więc zwykłym różniczkowaniem; w związku z tym często zamiast „superróżniczkowanie" stopnia nieparzystego mówi się „antyróżniczkowanie" i nie wprowadza nazwy „superróżniczkowanie".

2.6.2. O dwóch elementach $a \in A_k$ i $b \in A_l$ algebry z gradacją mówi się, że superkomutują (względnie superantykomutują) jeśli $[b, a] = (-1)^{kl}[a, b]$ (względnie $[b, a] = -(-1)^{kl}[a, b]$). Algebra z gradacją jest superprzemienna (superantyprzemienna) jeśli każde jej dwa elementy superkomutują (antysuperkomutują). Np. algebra zewnętrzna jest superprzemienna.

Definicja. Algebra A z gradacją i ze składaniem elementów, $(a, b) \mapsto [a, b]$, takim, że $[A_k, A_l] \subset A_{k+l}$, nazywa się superalgebrą Liego jeśli jest superantyprzemienna, a odwzorowanie $b \mapsto [a, b]$, gdzie $a \in A_k$, jest superróżniczkowaniem stopnia k.

Inaczej mówiąc, algebra z gradacją $(A, [\,,\,])$ jest superalgebrą Liego, jeśli dla każdych $a \in A_k$, $b \in A_l$ zachodzi $[a, b] \in A_{k+l}$, $[b, a] = -(-1)^{kl}[a, b]$ oraz spełniona jest supertożsamość Jacobiego,

$$(-1)^{km}[a, [b, c]] + (-1)^{kl}[b, [c, a]] + (-1)^{lm}[c, [a, b]] = 0$$

dla $a \in A_k,\ b \in A_l,\ c \in A_m$.

Stwierdzenie 1.10. *Jeśli $(A, \cdot)$ jest algebrą z gradacją, to zbiór* Der A *jej superróżniczkowań ma naturalną strukturę superalgebry Liego.*

Dowód. Przez proste sprawdzenie. $\square$

2.6.3. *Superróżniczkowania algebry zewnętrznej* [**20**]. Niech

$$\operatorname{Der} A = \bigoplus_k \operatorname{Der}_k A$$

będzie algebrą superróżniczkowań algebry zewnętrznej $A = \bigwedge V^*$, gdzie V jest przestrzenią wektorową o wymiarze n. Jeżeli $k \leqslant -2$ i $D \in \operatorname{Der}_k A$, to D znika na zbiorze $\Bbbk \oplus V^*$, który generuje A, więc $D = 0$. Także jeśli $D \in \operatorname{Der}_k A$ i $k \geqslant n$, to $D = 0$. Każde $D \in \operatorname{Der}_k A$, gdzie $-1 \leqslant k \leqslant n-1$, jest określone przez odwzorowanie liniowe

$$D|V^* : V^* \to \bigwedge^{k+1} V^*$$

czyli przez tensor $X \in V \otimes \bigwedge^{k+1} V^*$; pisze się $D = i(X)$, co określa izomorfizm przestrzeni wektorowych,

$$i : V \otimes \bigwedge V^* \to \operatorname{Der} \bigwedge V^*.$$

W szczególności, jeśli $k = -1$, to $i(v)$ jest zwężaniem form z wektorem $v \in V$; często pisze się $v \lrcorner \alpha$ zamiast $i(v)\alpha$, gdzie $\alpha \in \bigwedge V^*$. Jeśli formę $\omega \in \bigwedge^k V^*$ rozpatrujemy jako skośne odwzorowanie $V^k \to \Bbbk$, to

$$(i(v_1)\omega)(v_2, \ldots, v_k) = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad v_j \in V,\ j = 1, \ldots, k. \tag{1.30}$$

Niektórzy autorzy przyjmują inną umowę na temat odwzorowania dualności między $\bigwedge V$ i $\bigwedge V^*$ niż ta wynikająca z (1.29), co powoduje inną postać wzoru (1.30); zob. np. wzór na $i_X\omega$ na str. 35 w I tomie [**37**]. W niniejszym tekście została przyjęta umowa jak w [**57**].

Z definicji (1.30) wynika

$$\langle v \lrcorner \omega, w\rangle = \langle \omega, v \wedge w\rangle, \quad \text{dla każdego } w \in \bigwedge V,$$

co oznacza, że $v \lrcorner : \bigwedge V^* \to \bigwedge V^*$ jest odwzorowaniem transponowanym (dualnym), w znaczeniu określonym w 1.3.7, do odwzorowania $v\wedge : \bigwedge V \to \bigwedge V$.

2.6.4. Korzystając z tego, że dla skończenie wymiarowej przestrzeni V, przestrzeń V^{**} jest w naturalny sposób izomorficzna V, definicję (1.30) można zastosować do zwężania formy $\alpha \in V^*$ z multiwektorem $w \in \bigwedge V$. Wynika stąd, że jeśli

$$\alpha \in V^* \text{ i } v \in V, \text{ to } \alpha \lrcorner v = \langle v, \alpha\rangle, \tag{1.31}$$

oraz jeśli $u \in \bigwedge^k V$ i $w \in \bigwedge V$, to

$$\alpha \lrcorner (u \wedge w) = (\alpha \lrcorner u) \wedge w + (-1)^k u \wedge (\alpha \lrcorner w). \tag{1.32}$$

2.6.5. Jeśli $X \in V \otimes \bigwedge^{k+1} V^*$ i $Y \in V \otimes \bigwedge^{l+1} V^*$, to

$$[i(X), i(Y)] = i(X) \circ i(Y) - (-1)^{kl} i(Y) \circ i(X) str$$

jest superróżniczkowaniem stopnia $k + l$, więc istnieje element

$$[X, Y] \in V \otimes \bigwedge^{k+l+1} V^* \text{ taki, że } [i(X), i(Y)] = i([X, Y]).$$

W szczególności, jeśli $k = l = 0$, to $X, Y \in \mathsf{End}\, V$, a $[X, Y]$ jest zwykłym komutatorem endomorfizmów.

Jeśli $c \in V \otimes \bigwedge^2 V^*$, to $i(c)$ jest superróżniczkowaniem stopnia 1; jeśli (e^μ) jest bazą w V^*, to

$$i(c)e^\mu = c^\mu_{\nu\rho} e^\nu \wedge e^\rho, \quad \text{gdzie} \;\; c^\mu_{\nu\rho} + c^\mu_{\rho\nu} = 0,$$

a warunek $[i(c), i(c)] = 0$ jest równoważny tożsamości Jacobiego (1.18).

2.6.6. *(Super)iloczyn tensorowy algebr z gradacją.* Iloczyn tensorowy, opisany w ustępie 2.1.5, zastosowany do algebr z gradacją $A = \bigoplus A_k$ i $B = \bigoplus B_k$ daje algebrę z gradacją

$$A \otimes B = \bigoplus (A \otimes B)_k, \;\; \text{gdzie} \;\; (A \otimes B)_k = \bigoplus_l (A_l \otimes B_{k-l}). \tag{1.33}$$

Bardziej interesujący jest *superiloczyn tensorowy algebr z gradacją*, tradycyjnie oznaczany przez $A \hat{\otimes} B$. Struktura wektorowa i gradacja tej algebry jest taka, jak w (1.33), ale mnożenie uwzględnia parzystość elementów,

$$\text{jeśli } a_2 \in A_k \text{ i } b_1 \in B_l, \text{ to } (a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{kl} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

STWIERDZENIE 1.11. *Jeśli V i W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, to algebry z gradacją $\bigwedge(V \oplus W)$ i $(\bigwedge V) \hat{\otimes} (\bigwedge W)$ są w naturalny sposób izomorficzne.*

Dowód. Odwzorowanie

$$V \oplus W \to (\textstyle\bigwedge V) \hat{\otimes} (\bigwedge W), \qquad (v, w) \mapsto v \otimes 1_{\wedge W} + 1_{\wedge V} \otimes w$$

ma własność Grassmanna i rozszerza się do izomorfizmu algebr z gradacją. □

PRZYKŁAD 1.15. Niech $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie algebrą nad $\mathbb{R}$ z gradacją określoną przez sprzężenie zespolone, to algebra $\mathbb{C} \hat{\otimes} \mathbb{C}$ jest izomorficzna algebrze z gradacją $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$. Istotnie, izomorfizm $\mathbb{C} \hat{\otimes} \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ jest określony przez przedłużenie odpowiedniości

$$1 \otimes 1 \mapsto 1, \;\; \sqrt{-1} \otimes 1 \mapsto \mathrm{i}, \;\; 1 \otimes \sqrt{-1} \mapsto \mathrm{j}, \;\; \sqrt{-1} \otimes \sqrt{-1} \mapsto \mathrm{k}.$$

2.7. Algebra Clifforda. Niech (V, h) będzie m-wymiarową przestrzenią kwadratową nad ciałem $\Bbbk$, a A – algebrą. Odwzorowanie liniowe $f : V \to A$ takie, że $f(v)^2 = h(v, v)$ dla każdego $v \in V$ nazywa się *odwzorowaniem Clifforda.* Niech $\mathsf{J}_{\mathrm{Cl}}(V, h)$ będzie dwustronnym ideałem algebry $\mathsf{T}(V)$ generowanym przez wszystkie tensory postaci $v \otimes v - h(v, v)$, $v \in V$. Iloraz

$$\mathcal{C}\ell(V, h) = \mathsf{T}(V)/\mathsf{J}_{\mathrm{Cl}}(V, h)$$

nazywa się *algebrą Clifforda* przestrzeni (V, h). Odwzorowanie kanoniczne $\kappa : \mathsf{T}(V) \to \mathcal{C}\ell(V, h)$ jest injektywne na $\Bbbk \oplus V$, więc można uważać $\Bbbk \oplus V$ za podprzestrzeń $\mathcal{C}\ell(V, h)$. Iniekcja $V \to \mathcal{C}\ell(V, h)$ ma własność Clifforda. Iloczyn elementów algebry Clifforda oznacza się przy pomocy kropki, którą zwykle się pomija, $\kappa(a \otimes b) = \kappa(a)\kappa(b)$, zatem $\kappa(u \otimes v + v \otimes u - 2h(u, v)) = 0$ zapisuje się jako

$$uv + vu = 2h(u, v) \quad \text{dla} \quad u, v \in V \subset \mathcal{C}\ell(V, h). \tag{1.34}$$

Algebra $\mathcal{C}\ell(V, h)$ jest łączną algebrą z jednością i posiada następującą własność uniwersalności:

Stwierdzenie 1.12. *Jeśli $f : V \to A$ jest odwzorowaniem Clifforda, to istnieje homomorfizm algebr $\hat{f} : \mathcal{C}\ell(V,h) \to A$ przedłużający $\hat{f}$, tzn. taki, że $\hat{f}|V = f$.*

Dowód. Przebiega tak, jak dla Stw. 1.8. □

Ideał $\mathsf{J}_{\mathrm{Cl}}(V,h)$ jest generowany przez parzyste elementy $v \otimes v - h(v,v)$, więc algebra Clifforda ma gradację względem $\mathbb{Z}_2$,

$$\mathcal{C}\ell(V,h) = \mathcal{C}\ell_0(V,h) \oplus \mathcal{C}\ell_1(V,h), \quad \mathcal{C}\ell_1(V,h) = \kappa(\textstyle\bigoplus_k \bigotimes^{2k+1} V)$$

Parzysta algebra Clifforda $\mathcal{C}\ell_0(V,h)$ jest podalgebrą $\mathcal{C}\ell(V,h)$.

Mając dwie przestrzenie kwadratowe, (V,g) i (W,h), można utworzyć ich sumę ortogonalną $(V \oplus W, g \oplus h)$ kładąc, dla $v \in V$ i $w \in W$,

$$(g \oplus h)(v + w, v + w) = g(v,v) + h(w,w).$$

Odpowiednikiem Stwierdzenia 1.11 dla algebr Clifforda jest

Twierdzenie (Chevalley). *Algebry z gradacją*

$$\mathcal{C}\ell(V \oplus W, g \oplus h) \ \ i \ \ \mathcal{C}\ell(V,g) \hat{\otimes} \mathcal{C}\ell(W,h)$$

są w naturalny sposób izomorficzne.

Jeśli V jest rzeczywistą przestrzenią wektorową $\mathbb{R}^m$ z formą kwadratową o sygnaturze (p,q), $p+q=m$, to zamiast $\mathcal{C}\ell(V,h)$ piszemy $\mathcal{C}\ell(p,q)$. Piszemy $\mathcal{C}\ell(m,\mathbb{C})$ zamiast $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^m,h)$.

Przykład 1.16. Algebra $\mathcal{C}\ell(0,1)$ jest izomorficzna $\mathbb{C}$, bo zawiera element e taki, że $e^2 = -1$; parzysta podalgebra to $\mathbb{R}$, więc $\mathcal{C}\ell_0(0,1) \to \mathcal{C}\ell(0,1)$ jest takie jak w Przykładzie 1.15. Wynika z tego przykładu i z Twierdzenia Chevalleya, że $\mathcal{C}\ell_0(0,2) \to \mathcal{C}\ell(0,2)$ to $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$.

2.7.1. Niech $\mathsf{End} \bigwedge V$ będzie algebrą endomorfizmów przestrzeni wektorowej $\bigwedge V$. Odwzorowanie

$$f : V \to \mathsf{End} \textstyle\bigwedge V, \quad f(v)w = v \wedge w + h(v) \lrcorner\, w, \quad v \in V,\ w \in \bigwedge V,$$

ma własność Clifforda:

$$f(v)^2 w = v \wedge f(v) + h(v) \lrcorner\, f(v) = v \wedge (h(v) \lrcorner\, w) + h(v) \lrcorner (v \wedge w) = h(v,v)w,$$

więc przedłuża się do homomorfizmu algebr z jednością $\hat{f} : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \mathsf{End} \bigwedge V$. Obliczając, dla $a \in \mathcal{C}\ell(V,h)$, endomorfizm $\hat{f}(a)$ na jedności $1_{\wedge V}$ algebry $\bigwedge V$ otrzymujemy liniowe odwzorowanie

$$F : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \textstyle\bigwedge V, \quad F(a) = \hat{f}(a) 1_{\wedge V}.$$

Odwzorowanie F jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych (ale nie algebr). Istotnie, $F(1) = 1_{\wedge V}$, a jeśli (e_μ) jest reperem ortonormalnym w (V,h) i $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k$, to

$$F(e_{\mu_1} e_{\mu_2} \ldots e_{\mu_k}) = e_{\mu_1} \wedge e_{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_k}$$

dla $k = 1, \ldots, m$. Wymiar przestrzeni $\mathcal{C}\ell(V,h)$ wynosi więc 2^m.

Jeśli $(v_1, \ldots, v_r)$ jest ciągiem wektorów parami prostopadłych do siebie, to

$$F(v_1 \ldots v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r. \tag{1.35}$$

2.7.2. Niech u będzie wektorem w m-wymiarowej przestrzeni kwadratowej (V,h) takim, że $u^2=-1$. Oznaczając przez h' iloczyn skalarny h ograniczony do podprzestrzeni

$$V' = \{v \in V \mid uv + vu = 0\}$$

otrzymujemy $(m-1)$-wymiarową przestrzeń kwadratową (V', h'). Odwzorowanie liniowe

$$V' \to \mathcal{C}\ell_0(V,h), \quad v \mapsto uv$$

ma własność Clifforda, $(uv)^2 = v^2 = h'(v,v)$, i przedłuża się do izomorfizmu algebr,

$$\mathcal{C}\ell(V', h') \to \mathcal{C}\ell_0(V,h). \tag{1.36}$$

2.7.3. Niech teraz (V,h) będzie parzystowymiarową zespoloną przestrzenią kwadratową, $m=2\ell$. Istnieje *rozkład Witta* tej przestrzeni,

$$V = K \oplus L$$

gdzie K i L są całkowicie zerowymi podprzestrzeniami. Przestrzenie K i L są ℓ-wymiarowe. Można je skonstruować wychodząc z bazy ortonormalnej $(e_\mu)_{\mu=1,\dots,2\ell}$, wprowadzając bazę zerową $(k_1,\dots,\ell,l_1,\dots,l_\ell)$,

$$k_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} + \mathrm{i}e_{2i}), \quad l_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} - \mathrm{i}e_{2i}), \quad i = 1,\dots \ell,$$

i kładąc

$$K = \operatorname{span}\{k_1,\dots,k_\ell\}, \quad L = \operatorname{span}\{l_1,\dots,l_\ell\}.$$

Przestrzeń wektorowa $S = \bigwedge L$ jest 2^ℓ-wymiarowa. Odwzorowanie

$$V \to \mathsf{End}\, S, \quad k + l \mapsto \gamma(k+l), \quad k \in K,\ l \in L,$$

dane przez

$$\gamma(k+l)s = \sqrt{2}(h(k) \lrcorner s + l \wedge s), \quad s \in S,$$

ma własność Clifforda,

$$\gamma(k+l)^2 s = 2(h(k) \lrcorner (l \wedge s) + l \wedge (h(k) \lrcorner s)) = 2(h(k) \lrcorner l)s = (k+l)^2 s,$$

i przedłuża się do reprezentacji algebry $\mathcal{C}\ell(V,h)$ w przestrzeni *spinorów* (Diraca) S,

$$\gamma : \mathcal{C}\ell(V,h) \to \mathsf{End}\, S.$$

Algebra $\mathcal{C}\ell(V,h)$ jest izomorficzna algebrze $\mathsf{End}\, S$ czyli algebrze $\mathbb{C}(2^\ell)$. Przestrzeń spinorów ma gradację względem $\mathbb{Z}_2$ określoną przez parzystość elementów $\bigwedge L$,

$$S = S_0 \oplus S_1, \quad S_\epsilon = \textstyle\bigoplus_k \bigwedge^{2k+\epsilon} L, \quad \epsilon \in \{0,1\}, \quad \dim S_0 = \dim S_1 = 2^{\ell-1}.$$

Dla każdego $v \in V$ jest $\gamma(v)S_0 \subset S_1$. Homomorfizm γ ograniczony do $\mathcal{C}\ell_0(V,h)$ jest wierną reprezentacją parzystej algebry Clifforda,

$$\gamma_0 : \mathcal{C}\ell_0(V,h) \to \mathsf{End}\, S_0 \oplus \mathsf{End}\, S_1.$$

Algebra $\mathcal{C}\ell_0(V,h)$ jest izomorficzna algebrze $\mathsf{End}\, S_0 \oplus \mathsf{End}\, S_1$, czyli algebrze $\mathbb{C}(2^{\ell-1}) \oplus \mathbb{C}(2^{\ell-1})$. Element objętości $\eta = e_1 e_2 \dots e_{2\ell}$ antykomutuje z wektorami, zatem elementy S_0 i S_1, zwane *spinorami Weyla*, są wektorami własnymi $\gamma(\eta)$ o przeciwnych wartościach własnych. Endomorfizm $\gamma(\eta)$ uogólnia używaną przez fizyków macierz γ_5.

2.7.4. *Algebra Clifforda przestrzeni* $\mathbb{C}^{2\ell+1}$. Niech $V = \mathbb{C}^{2\ell+1}$ $(\ell \in \mathbb{N})$ ze standardowym iloczynem skalarnym h. Można wybrać bazę (e_μ) taką, że zgodnie z (1.34),

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, \ldots, 2\ell + 1,$$

i wprowadzić zerową *bazę Witta*, $(k_1, \ldots, k_\ell, l_1, \ldots, l_\ell, e_{2\ell+1})$,

$$k_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} + \mathrm{i}e_{2i}), \quad l_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} - \mathrm{i}e_{2i}), \quad i = 1, \ldots \ell,$$

tak, że

$$k_i k_j + k_j k_i = 0, \quad l_i l_j + l_j l_i = 0, \quad k_i l_j + l_j k_i = \delta_{ij}.$$

Podprzestrzenie

$$K = \mathrm{span}\,\{k_1, \ldots, k_\ell\}, \quad L = \mathrm{span}\,\{l_1, \ldots, l_\ell\}$$

są prostopadłe do $e_{2\ell+1}$, całkowicie zerowe i maksymalnego wymiaru oraz zachodzi rozkład *rozkład Witta*

$$V = K \oplus L \oplus \mathbb{C}e_{2\ell+1}. \tag{1.37}$$

. Element $e_1 \ldots e_{2\ell+1}$ komutuje z wektorami, więc należy do centrum algebry $\mathcal{C}\ell(2\ell + 1)$. Obliczając jego kwadrat sprawdzamy, że jeśli

$$\eta = \mathrm{i}^\ell e_1 \ldots e_{2\ell+1} \quad \text{to} \quad \eta^2 = 1.$$

Jeśli

$$\eta_\pm = \tfrac{1}{2}(\eta \pm 1), \quad \text{to} \quad \eta = \eta_+ + \eta_-, \quad \eta_\pm^2 = \eta_\pm, \quad \eta_+\eta_- = 0.$$

Jeśli

$$\mathcal{C}\ell_\pm(2\ell + 1) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathcal{C}\ell(2\ell + 1) \mid \eta a = \pm a\}$$

to każda z przestrzeni wektorowych $\mathcal{C}\ell_+(2\ell+1)$ i $\mathcal{C}\ell_-(2\ell+1)$ jest podalgebrą – a nawet dwustronnym ideałem – algebry $\mathcal{C}\ell(2\ell + 1)$, a odwzorowanie

$$\mathcal{C}\ell(2\ell + 1) \to \mathcal{C}\ell_+(2\ell + 1) \oplus \mathcal{C}\ell_-(2\ell + 1), \quad a \mapsto (\eta_+ a, \eta_- a)$$

jest izomorfizmem algebr.

Odwzorowanie liniowe

$$V \to \mathcal{C}\ell_0(2\ell + 1), \quad v \to \eta v, \tag{1.38}$$

2.7.5. *Algebra Clifforda* $\mathcal{C}\ell(n, n-1)$. Element objętości η spełnia tu $\eta^2 = 1$ i jest centralny. Odwzorowanie

$$\mathbb{R}^{2n-1} \to \mathcal{C}\ell_0(n, n - 1) \oplus \mathcal{C}\ell_0(n, n - 1), \quad v \mapsto (\eta v, -\eta v)$$

ma własność Clifforda i przedłuża się do izomorfizmu algebr

$$\mathcal{C}\ell(n, n - 1) \to \mathcal{C}\ell_0(n, n - 1) \oplus \mathcal{C}\ell_0(n, n - 1).$$

Odwrotność tego izomorfizmu ma postać

$$(a, b) \mapsto \tfrac{1}{2}(a + b) + \tfrac{1}{2}(a - b)\eta, \quad a, b \in \mathcal{C}\ell_0(n, n - 1).$$

2.7.6. *Konstrukcja indukcyjna algebr Clifforda* [**62**]. Algebry Clifforda $\mathcal{C}\ell(V, h)$ nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ są izomorficzne pewnym algebrom macierzy o elementach zespolonych, które jest łatwo znaleźć na podstawie konstrukcji indukcyjnej ze względu na wymiar przestrzeni V. Biorąc pod uwagę, że algebra $\mathcal{C}\ell(V, h)$ jest generowana przez zbiór wektorów bazy przestrzeni V, wystarczy podać macierze odpowiadające tym wektorom. Dalsze uproszczenie wynika stąd, że mając macierze odpowiadające rzeczywistym algebrom $\mathcal{C}\ell(n, n-1)$ i $\mathcal{C}\ell(n, n)$, wszystkie inne znajdujemy mnożąc odpowiednie macierze przez jednostkę urojoną i. Zgodnie z ust. 2.7.5, do opisu algebry $\mathcal{C}\ell(n, n-1)$ wystarczą macierze (Pauliego) $\sigma_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, \ldots, 2n-1$) odpowiadające elementom $e_\mu \eta \in \mathcal{C}\ell_0(n, n-1)$. Algebra $\mathcal{C}\ell(n, n)$ jest generowana przez macierze (Diraca) $\gamma_\mu^{(n)}$ ($\mu = 1, \ldots, 2n$).

(i) Dla $n = 1$ kładziemy $\sigma_1^{(1)} = 1$.

(ii) W wymiarze $2n$, mając macierze $(\sigma_1^{(n)}, \ldots, \sigma_{2n-1}^{(n)})$ definiujemy macierze Diraca,

$$\gamma_\mu^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu^{(n)} \\ \sigma_\mu^{(n)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, \ldots, 2n-1, \quad \gamma_{2n}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & -I^{(n)} \\ I^{(n)} & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $I^{(n)} \in \mathbb{R}(2^{n-1})$ jest macierzą jednostkową.

(iii) W wymiarze $2n+1$, mając macierze $(\gamma_1^{(n)}, \ldots, \gamma_{2n}^{(n)})$, definiujemy $\sigma_\mu^{(n+1)} = \gamma_\mu^{(n)}$, ($\mu = 1, \ldots, 2n$), oraz $\sigma_{2n+1}^{(n+1)} = \gamma_1^{(n)} \ldots \gamma_{2n}^{(n)}$, stąd dla $n \geqslant 1$,

$$\sigma_{2n+1}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} I^{(n)} & 0 \\ 0 & -I^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Górne wskaźniki, określające wymiar, są zwykle pomijane.

2.8. Wektory i wartości własne endomorfizmu.

2.8.1. *Wyznacznik endomorfizmu.* Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$. Przestrzeń n-wektorów $\bigwedge^n V$ jest 1-wymiarowa, więc jeśli (e_μ) jest bazą w V, to każdy n-wektor jest proporcjonalny do $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. W szczególności

$$e_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge e_{\mu_n} = \varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{1.39}$$

co definiuje *symbol Levi-Civity* $\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ taki, że

$$\varepsilon_{\mu_1 \ldots \mu_n} = \varepsilon_{[\mu_1 \ldots \mu_n]} \ \text{ oraz } \ \varepsilon_{1 \ldots n} = 1.$$

Wyznacznikiem endomorfizmu $a \in \mathsf{End}$ nazywa się liczbę $\det a$ taką, że

$$(\textstyle\bigwedge^n a)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = (\det a)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n). \tag{1.40}$$

Niech $a, b \in \mathsf{End}\, V$; równość $\bigwedge^n(a \circ b) = (\bigwedge^n a) \circ (\bigwedge^n b)$ pociąga

$$\det(a \circ b) = \det a \det b. \tag{1.41}$$

Wyznacznik jest dobrze określony, tzn. nie zależy od bazy występującej w jego definicji; istotnie, niech $\det' a$ będzie wyznacznikiem endomorfizmu a zdefiniowanym przy pomocy innej bazy (e'_μ),

$$(\textstyle\bigwedge^n a)(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n) = (\det' a)(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n).$$

Istnieje endomorfizm odwracalny c taki, że $e'_\mu = c(e_\mu)$, $\mu = 1, \dots, n$, więc

$$\det(a \circ c) = (\det' a) \circ \det c$$

czyli, wobec (1.41), jest $\det' a = \det a$.

Wprowadzając macierz (a^μ_ν) endomorfizmu a względem bazy (e_μ), $a(e_\mu) = e_\nu a^\nu_\mu$, i korzystając z (1.26) i (1.39) otrzymuje się praktyczny wzór na obliczanie wyznaczników,

$$\det a = \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_n} a^{\nu_1}_1 \dots a^{\nu_n}_n. \tag{1.42}$$

Np. dla $n = 2$ otrzymuje się stąd $\det a = a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2$. Zamiast mówić o wyznaczniku endomorfizmu, mówi się często o wyznaczniku macierzy jego współczynników i zapisuje w postaci

$$\det(a^\mu_\nu) = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n_1 & a^n_2 & \dots & a^n_n \end{vmatrix}$$

Łatwo wydedukować z (1.42) użyteczne własności wyznaczników i sposoby ich obliczania. Np. z równości

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = n! \delta^1_{[\mu_1} \dots \delta^n_{\mu_n]}$$

i tożsamości

$$\begin{aligned} n \delta^1_{[\mu_1} \delta^2_{\mu_2} \delta^3_{\mu_3} \delta^4_{\mu_4} \dots \delta^n_{\mu_n]} &= \delta^1_{\mu_1} \delta^2_{[\mu_2} \delta^3_{\mu_3} \delta^4_{\mu_4} \dots \delta^n_{\mu_n]} - \delta^1_{\mu_2} \delta^2_{[\mu_1} \delta^3_{\mu_3} \delta^4_{\mu_4} \dots \delta^n_{\mu_n]} \\ &+ \delta^1_{\mu_3} \delta^2_{[\mu_1} \delta^3_{\mu_2} \delta^4_{\mu_4} \dots \delta^n_{\mu_n]} + \dots + (-1)^{n-1} \delta^1_{\mu_n} \delta^2_{[\mu_1} \delta^3_{\mu_2} \delta^4_{\mu_3} \dots \delta^n_{\mu_{n-1}]} \end{aligned}$$

otrzymuje się klasyczny wzór Laplace'a do obliczania wyznaczników.

Z równości (1.41) wynika, że endomorfizm a jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det a \neq 0$. Grupy unimodularne definiuje się jako

$$\mathsf{SL}(n, \Bbbk) = \{a \in \Bbbk(n) \mid \det a = 1\}.$$

2.8.2. Niech V będzie zespoloną, n-wymiarową przestrzenią wektorową i $a \in \mathsf{End}\, V$. Jeśli

$$a(v) = \lambda v, \quad \text{gdzie} \quad v \in V^\times, \ \ \lambda \in \mathbb{C},$$

to v nazywa się *wektorem własnym*, odpowiadającym *wartości własnej* λ endomorfizmu a.

Lemat 1.13. *Równanie* $a(v) = 0$ *ma rozwiązanie* $v \neq 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det a = 0$.

Jeśli v jest takim rozwiązaniem, to można wziąć bazę taką, że $e_1 = v$; wtedy (1.40) daje $\det a = 0$. Jeśli $\det a = 0$, to

$$a(e_1) \wedge \dots \wedge a(e_n) = 0,$$

więc wektory $a(e_1), \dots, a(e_n)$ są liniowo zależne, zatem istnieją liczby $\mu_1, \dots, \mu_n$, nie wszystkie równe 0, takie, że wektor

$$v = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n$$

jest anihilowany przez a.

2.8.3. Wyznacznik $w_a(z) = \det(a - zI)$ jest wielomianem n-tego stopnia względem z, zwanym *wielomianem charakterystycznym* endomorfizmu a,

$$w_a(z) = (-z)^n + (-z)^{n-1}\mathrm{tr}\, a + \cdots + \det a.$$

STWIERDZENIE 1.14. *Jeśli λ jest wartością własną a, to $w_a(\lambda) = 0$; na odwrót, jeśli λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to istnieje wektor własny endomorfizmu a, odpowiadający λ.*

Wystarczy w Lemacie 1.13 zastąpić a przez $a - \lambda I$.

Rozkładając wielomian charakterystyczny na czynniki,

$$w_a(z) = (\lambda_1 - z)^{n_1} \dots (\lambda_k - z)^{n_k}, \quad n_1 + \dots n_k = n,$$

można przedstawić wyznacznik endomorfizmu a w postaci

$$\det a = \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_k^{n_k}.$$

Wymiar przestrzeni rozpiętej na wektorach własnych o wartości własnej λ_i jest $\leqslant n_i$, $i = 1, \dots, k$. Np. macierz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ma wielomian charakterystyczny $(2 - z)^2$ oraz jeden kierunek wektorów własnych.

Jeśli wielomian charakterystyczny w_a ma tylko pojedyncze pierwiastki, to wektory własne a rozpinają całą przestrzeń V. Takie endomorfizmy są *generyczne* w tym sensie, że ich zbiór, ze względu na naturalną topologię w przestrzeni $\mathsf{End}\, V \cong \mathbb{C}(n)$, jest w tej przestrzeni otwarty i gęsty. Jeśli a jest generyczny, to $\det a$ jest iloczynem wartości własnych a.

Dla każdego $b \in \mathsf{End}\, V$ można rozpatrywać endomorfizm

$$w_a(b) = (-b)^n + (-b)^{n-1}\mathrm{tr}\, a + \cdots + I \det a \in \mathsf{End}\, V.$$

powstający przez podstawienie w wielomianie charakterystycznym w_a endomorfizmu b.

TWIERDZENIE (Hamilton–Cayley). *Wielomian $w_a(a)$ znika dla każdego $a \in \mathsf{End}\, V$.*

Dowód. Jeśli v jest wektorem własnym a odpowiadającym wartości własnej λ, to $w_a(a)v = 0$ na mocy Stwierdzenia 1.14; jeśli a jest generyczne, to jego wektory własne rozpinają V, więc $w_a(a)v = 0$ dla każdego $v \in V$. Wielomian jest funkcją ciągłą, $w_a(a)$ znika dla generycznego a, stąd $w_a(a) = 0$ dla każdego a. □

Wadą powyższego rozumowania jest odwołanie się do argumentu topologicznego – ciągłości wielomianu – w dowodzie faktu czysto algebraicznego. Czysto algebraiczny dowód twierdzenia Hamiltona–Cayleya można znaleźć w [**65**].

2.9. Wyznaczniki kwaternionowe. Definicja wyznacznika na zbiorze macierzy $\mathbb{H}(n)$ wymaga specjalnych rozważań. „Zwykła” definicja nie jest dobra; np. gdyby położyć

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \text{dla} \quad a,b,c,d \in \mathbb{H},$$

to byłoby

$$\det\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = 0, \quad \text{ale} \quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = ab - ba.$$

Kładąc $q = u + \mathrm{i}x + \mathrm{j}y + \mathrm{k}z = u + \mathrm{i}x + \mathrm{j}(y - \mathrm{i}z)$ można kwaternion q przedstawić w postaci macierzy o elementach zespolonych,

$$\begin{pmatrix} u + \mathrm{i}x & -y - \mathrm{i}z \\ y - \mathrm{i}z & u - \mathrm{i}x \end{pmatrix}.$$

Widać, że $\det\begin{pmatrix} u + \mathrm{i}x & -y - \mathrm{i}z \\ y - \mathrm{i}z & u - \mathrm{i}x \end{pmatrix} = \bar{q}q$. Niech teraz $A + \mathrm{j}B \in \mathbb{H}(n)$, gdzie $A, B \in \mathbb{C}(n)$. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie

$$g_n : \mathbb{H}(n) \to \mathbb{C}(2n) \quad \text{dane przez} \quad g_n(A + \mathrm{j}B) = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix}$$

jest monomorfizmem pierścieni nad $\mathbb{R}$. Niech

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2n) \quad \text{i} \quad N \in \mathbb{C}(2n),$$

to

$$N \in g_n(\mathbb{H}(n)) \iff NJ = J\bar{N}, \tag{1.43}$$

więc wyznacznik macierzy $g_n(M)$ o elementach zespolonych jest liczbą rzeczywistą dla każdego $M \in \mathbb{H}(n)$.

Wyznacznik kwaternionowy macierzy $M \in \mathbb{H}(n)$ definiuje się teraz kładąc

$$\det{}_{\mathbb{H}} M = \det(g_n(M)).$$

Wiadomo z poprzedniego, że wyznacznik generycznej macierzy $N \in \mathbb{C}(2n)$ jest równy iloczynowi wartości własnych λ tej macierzy, $Nv = \lambda v$, gdzie $v \in \mathbb{C}^{2n}$ jest odpowiadającym tej wartości wektorem własnym. Na mocy (1.43) wektor $J\bar{v}$ jest też wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej $\bar{\lambda}$. Wektory v i $J\bar{v}$ są ortogonalne względem hermitowskiego iloczynu skalarnego $(u|v) = \sum_{\mu=1}^{2n} \bar{u}_\mu v_\mu$ w $\mathbb{C}^{2n}$, więc są liniowo niezależne, nawet jeśli $\bar{\lambda} = \lambda$. Zatem wektory i wartości własne macierzy N występują parami (v, λ) i $(J\bar{v}, \bar{\lambda})$. Wynika stąd, że iloczyn wszystkich pierwiastków wielomianu w_N, a więc także wyznacznik kwaternionowy macierzy $M \in \mathbb{H}(n)$, jest liczbą nieujemną. Zdefiniowany w ten sposób wyznacznik macierzy kwaternionowej $M \in \mathbb{H}(n)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $2n$ elementów macierzy; w szczególności, dla $n = 1$, jest $\det_{\mathbb{H}} q = \bar{q}q$.

Element M pierścienia $\mathbb{H}(n)$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\det_{\mathbb{H}} M \neq 0$. Definiuje się grupy

$$\mathsf{SL}(n, \mathbb{H}) = \{M \in \mathbb{H}(n) \mid \det{}_{\mathbb{H}} M = 1\}.$$

Historię różnych prób zdefiniowania wyznacznika macierzy o elementach kwaternionowych można znaleźć w [**3**]. Przedstawiona tu definicja pochodzi od Eduarda Study'ego [**58**].

Zadania

ZADANIE 1.1. Pokazać, że każda grupa ma dokładnie jeden element neutralny i że każdy element grupy ma dokładnie jeden element odwrotny.

ZADANIE 1.2. Udowodnić, że jeśli dla każdego $a \in G$ zachodzi $a^2 = e$, to grupa G jest przemienna. Podać przykład takiej grupy rzędu 4.

ZADANIE 1.3. Znaleźć grupy $\mathbb{F}_p^\times$ dla $p = 2, 3, 5$ i 7.

ZADANIE 1.4. Wyznaczyć wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grupy rzędu < 7.

Wskazówka. Pokazać najpierw, że jeśli grupa rzędu 4 posiada element rzędu 4, to jest izomorficzna grupie $\mathbb{Z}_4$. Jeśli nie posiada elementu rzędu 4, to jej elementy $\neq e$ są rzędu 2 i grupa jest izomorficzna $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. W grupie rzędu 6, każdy element jest rzędu 1, 2, 3 albo 6.

ZADANIE 1.5. Pokazać, że jeśli liczby p i q są względnie pierwsze, to grupy $\mathbb{Z}_{pq}$ i $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ są izomorficzne; pokazać, że grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_4$ nie są izomorficzne.

ZADANIE 1.6. Cykle $\lfloor a_1, \dots, a_k \rfloor$ i $\lfloor b_1, \dots, b_l \rfloor$ nazywają się cyklami rozłącznymi, jeśli $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \varnothing$. Pokazać, że cykle rozłączne komutują.

ZADANIE 1.7. Rozłożyć permutację

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 1 & 7 & 8 & 6 & 11 & 2 & 4 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

na iloczyn rozłącznych cykli.

ZADANIE 1.8. Pokazać, że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to kwadrat k-cyklu jest cyklem. Znaleźć kwadrat cyklu $\lfloor 1234 \rfloor$.

ZADANIE 1.9. Odnosząc się do Przykładu 1.10, pokazać, że

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{so}(n) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}) = \tfrac{1}{2} n(n-1), \\ &\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1, \\ &\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sp}(n) = n(2n+1). \end{aligned}$$

ZADANIE 1.10. Nawiązując do ustępu 2.5 pokazać

$$\dim \mathsf{S}^k(\mathbb{k}^n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

ZADANIE 1.11. Pokazać, że
(i) odwzorowanie

$$f_n : \mathbb{C}(n) \to \mathbb{R}(2n) \quad \text{dane przez} \quad f_n(a + \mathrm{i}b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

jest monomorfizmem pierścieni oraz

$$f_n(\mathbb{C}(n)) = \{M \in \mathbb{R}(2n) \mid MJ = JM\} \quad \text{gdzie} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}(2n);$$

(ii) dla każdych $a, b \in \mathbb{R}(n)$ zachodzi

$$\det f_n(a + \mathrm{i}b) = |\det(a + \mathrm{i}b)|^2.$$

Zadanie 1.12. Nawiązując do § 2.1.8 pokazać, że jeśli algebra A ze sprzężeniem jest czysto rzeczywista, $\bar{a} = a$, to algebra A^2 jest przemienna; jeśli A jest przemienna, to algebra A^2 jest łączna.

Przyjmując jako bazę algebry $\mathbb{O}$ ciąg wektorów

$$(1,0), (\mathrm{i},0), (\mathrm{j},0), (\mathrm{k},0), (0,1), (0,\mathrm{i}), (0,\mathrm{j}), (0,\mathrm{k}) \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$$

znaleźć tabliczkę mnożenia w algebrze $\mathbb{O}$ i pokazać, przez podanie przykładu, że ta algebra nie jest łączna.

Zadanie 1.13. Nawiązując do Przykładu 1.12: (i) pokazać, że jeśli $\Bbbk = \mathbb{R}$, to forma ω_+ ma sygnaturę (ℓ, ℓ), (ii) znaleźć wymiary algebr $\mathfrak{g}_\pm$.

Zadanie 1.14. (Różniczkowania algebry macierzy są wewnętrzne.) Niech $d \in A = \mathsf{End}\, S$, gdzie S jest n-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$. Pokazać, że odwzorowanie $A \to A$, $a \mapsto [d, a]$ jest różniczkowaniem algebry A i, na odwrót, jeśli D jest takim różniczkowaniem, to istnieje $d \in A$ takie, że $Da = [d, a]$ dla każdego $a \in A$.

Wskazówka. Niech $x \in S$ oraz $y \in S^*$ będą takie, że $\langle x, y\rangle = 1$. Mając różniczkowanie D należy zdefiniować $d \in A$ wzorem $d(x') = (D(x' \otimes y))(x)$ dla każdego $x' \in S$.

Zadanie 1.15. Znaleźć błąd w następującym rozumowaniu:

„Jeśli (e_1, e_2, e_3) jest bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^3$ z dodatnio określonym iloczynem skalarnym oraz $\eta = e_1 e_2 e_3 \in \mathcal{C}\ell(3,0)$, to $\eta^2 = -1$. Zatem odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{C}\ell(3,0)$, gdzie $f(v) = v\eta$, ma własność Clifforda i przedłuża się do homomorfizmu algebr z jednością $\hat{f} : \mathcal{C}\ell(0,3) \to \mathcal{C}\ell(3,0)$, który jest izomorfizmem ze względu na równość wymiarów algebr $\mathcal{C}\ell(0,3)$ i $\mathcal{C}\ell(3,0)$."

Następujące zadania nawiązują do ust. 2.7.6 i używanych tam oznaczeń.

Zadanie 1.16. Pokazać, że

$$\gamma_\mu^{(n)} \in \mathbb{R}(2^n)$$

oraz

$$\gamma_\mu^{(n)} \gamma_\nu^{(n)} + \gamma_\nu^{(n)} \gamma_\mu^{(n)} = 2h_{\mu\nu}^{(n)} I,$$

gdzie

$$\mu \neq \nu \Rightarrow h_{\mu\nu}^{(n)} = 0, \quad h_{\mu\mu}^{(n)} = (-1)^{\mu+1}$$

i

$$\gamma_\mu^{(n)*} = (-1)^{\mu+1} \gamma_\mu^{(n)}, \quad \mu = 1, \ldots, 2n.$$

Zadanie 1.17. Znaleźć macierze Diraca $\gamma_\mu \in \mathsf{End}\, S$, $S = \mathbb{C}^4$, związane z przestrzenią Minkowskiego, spełniające

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I,$$

gdzie $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ dla $\mu \neq \nu$. Znaleźć macierz hermitowską $A : S \to \bar{S}^*$, taką, że $\gamma_\mu^\dagger = A\gamma_\mu A^{-1}$. Dla każdego spinora $\varphi \in \mathbb{S}$ definiujemy tensory w pełni antysymetryczne $T^k(\varphi)$ stopnia $k = 0, 1, \ldots, 4$ o współrzędnych

$$T^k_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}(\varphi) = \langle \bar{\varphi}, A\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\ldots\gamma_{\mu_k}\varphi\rangle, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k \leqslant 3.$$

(Fizycy zapisują to jako $\varphi^\dagger A\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\ldots\gamma_{\mu_k}\varphi$.)

Pokazać, że tensory te są albo rzeczywiste albo czysto urojone, zależnie od ich stopnia i znaleźć tę zależność. Pokazać, że jeśli φ jest spinorem Weyla, tzn. wektorem własnym macierzy $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, to znikają tensory $T^0(\varphi)$, $T^2(\varphi)$ i $T^4(\varphi)$.

Zadanie 1.18. Rozpatrujemy przestrzeń $\mathbb{R}^5$ z iloczynem skalarnym h. Dla każdej sygnatury (p, q), $p + q = 5$, iloczynu h znaleźć macierze Pauliego $\sigma_\mu \in \mathbb{C}(4)$ spełniające $\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\nu\sigma_\mu = 2h_{\mu\nu}I$, $\mu, \nu = 1, \ldots, 5$. Pokazać, że rzeczywiste macierze Pauliego w wymiarze 5 istnieją tylko w sygnaturze $(3, 2)$.

Zadanie 1.19. Niech $\gamma : \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{2n}, h) \to \mathbb{C}(2^n)$ będzie reprezentacją algebry Clifforda przestrzeni kwadratowej w zespolonej przestrzeni spinorów Diraca. Reprezentację tę można otrzymać z macierzy Diraca opisanych w Zadaniu 1.16, mnożąc odpowiednie macierze przez jednostkę urojoną tak, aby otrzymać iloczyn h o potrzebnej sygnaturze. Niech γ_μ, $\mu = 1, \ldots, 2n$, będą otrzymanymi w ten sposób macierzami Diraca; są one albo rzeczywiste albo mają elementy czysto urojone.

(i) Pokazać – przez konstrukcję – że istnieje macierz $C \in \mathsf{GL}(2^n, \mathbb{R})$ taka, że $\bar{\gamma}_\mu = C\gamma_\mu C^{-1}$ oraz $C^2 = I$ albo $-I$. (Wskazówka: macierz C jest iloczynem ciągu rzeczywistych macierzy Diraca.)

(ii) Pokazać, że jeśli $C^2 = I$, to macierz $I + \mathrm{i}C$ jest odwracalna, a macierze $(I + \mathrm{i}C)\gamma_\mu(I + \mathrm{i}C)^{-1}$ są rzeczywiste.

(iii) Zastosować ten wynik do znalezienia rzeczywistych macierzy γ_μ odpowiadających iloczynowi skalarnemu h o sygnaturze $(3, 1)$.

II

Grupy: ważne konstrukcje i przykłady

1. Generatory i relacje

Zbiór $S \subset G$ nazywa się *zbiorem generującym* grupę G, a jego elementy — *generatorami*, jeśli każdy element grupy można przedstawić w postaci iloczynu

$$a_1 \dots a_m, \quad \text{gdzie} \quad a_i \text{ lub } a_i^{-1} \in S,\ i = 1, \dots, m.$$

Inaczej: $S \subset G$ generuje G wtedy i tylko wtedy gdy G jest najmniejszą grupą, zawierającą S. Np. $n \in \mathbb{Z}$ jest generatorem grupy $n\mathbb{Z}$. Grupa nazywa się *cykliczną* jeśli posiada jednoelementowy zbiór generujący.

Stwierdzenie 2.1. *Jeśli G jest grupą cykliczną nieskończoną, to G jest izomorficzna $\mathbb{Z}$. Grupa cykliczna rzędu n jest izomorficzna grupie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Dowód. Istotnie, niech a będzie generatorem G. Jeśli $a^k \neq e$ dla każdego całkowitego $k \neq 0$, to grupa G jest nieskończona, a odwzorowanie $k \mapsto a^k$ jest izomorfizmem $\mathbb{Z}$ na G. Jeśli grupa G jest skończona, to istnieje najmniejsza liczba dodatnia n o tej własności, że $a^n = e$. Odwzorowanie $\mathbb{Z} \to G$, $m \mapsto a^m$, jest epimorfizmem, którego jądrem jest grupa $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. □

Często wygodnie jest opisać grupę podając jej generatory, spełniające pewne *relacje*. Np. grupę $\mathbb{Z}_p$ można zdefiniować jako grupę o jednym generatorze a, spełniającym relację $a^p = e$.

Aby dokładniej wyjaśnić pojęcie grupy określonej przez generatory i relacje, wygodnie jest najpierw zdefiniować *grupę wolną* F_d o d generatorach $a_1, \dots, a_d$. W tym celu tworzy się wszystkie *słowa* postaci $a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_p}^{s_p}$, gdzie $p \in \mathbb{N}$, $s_j \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, p\}$, $i_j \in \{1, \dots, d\}$ oraz $i_j \neq i_{j+1}$ dla $j \in \{1, \dots, p-1\}$. Iloczyn dwóch słów określa się pisząc je bezpośrednio jedno po drugim i dokonując ewentualnego „skrócenia": jeśli $a_{i_p} = a_{j_1}$, to

$$a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_p}^{s_p} a_{j_1}^{t_1} \dots a_{i_q}^{t_q} = a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_p}^{s_p+t_1} a_{j_2}^{t_2} \dots a_{j_q}^{t_q}. \tag{2.1}$$

Dla każdego generatora a_i utożsamia się a_i^0 z jednością grupy; jeśli w (2.1) jest $s_p + t_1 = 0$, to proces skracania należy kontynuować, itd. Łatwo widać, że tak zdefiniowana grupa wolna zależy tylko od liczby d swoich generatorów, tzn. grupy wolne o tej samej liczbie generatorów są izomorficzne.

Niech teraz $R \subset F_d$ będzie pewnym zbiorem słów, $R = \{r_\iota\}_{\iota \in I}$, a $N(R) \subset F_d$ niech będzie najmniejszym dzielnikiem normalnym grupy F_d zawierającym R (jest to część wspólna wszystkich dzielników normalnych F_d zawierających R). Grupę ilorazową $F_d/N(R)$ nazywa się *grupą określoną przez generatory $a_1, \dots, a_d$ i relacje $r_\iota = e$, $\iota \in I$*, [Ko], [La].

2. Grupy nilpotentne i rozwiązalne

Komutatorem elementów a i b grupy G nazywa się element

$$(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Jeśli A i B są podgrupami G, to (A, B) oznacza podgrupę G generowaną przez wszystkie komutatory postaci (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$. Podgrupa $D(G) = (G, G)$ nazywa się *grupą pochodną* grupy G. Grupa $D(G)$ jest trywialna wtedy, i tylko wtedy, gdy grupa G jest przemienna.

STWIERDZENIE 2.2. *Jeśli $h : G \to H$ jest homomorfizmem grup, to*

$$h(D(G)) \subset D(H),$$

a jeśli h jest epimorfizmem, to h przeprowadza $D(G)$ na $D(H)$.

Dowód. Istotnie, homomorfizm przeprowadza komutatory w komutatory, a jeśli $\operatorname{img} h = H$, to każdy komutator w H jest obrazem pewnego komutatora w G. □

Jeśli $a, b, c \in G$, to $c(a, b)c^{-1}$ jest komutatorem, więc $D(G)$ jest dzielnikiem normalnym grupy G, a grupa ilorazowa $G/D(G)$ jest przemienna gdyż odwzorowanie kanoniczne $\pi : G \to D/D(G)$ przeprowadza $D(G)$ w $\{e\}$, a na mocy ostatniego stwierdzenia otrzymujemy $D(G/D(G)) = \{e\}$. Wynika stąd, że jeśli grupa G jest prosta i nieprzemienna, to $G = D(G)$.

Definiując $C^1(G) = G$, $C^{n+1}(G) = (G, C^n(G))$, tworzy się *ciąg centralny zstępujący* grupy G,

$$G = C^1(G) \supset C^2(G) \supset \dots$$

Każda grupa ciągu jest dzielnikiem normalnym G. Grupa G jest *nilpotentna* jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $C^{n+1}(G) = \{e\}$; najmniejsze n o tej własności nazywa się klasą nilpotentności grupy. Każda grupa przemienna jest nilpotentna.

Definiując $D^0(G) = G$, $D^{n+1}(G) = D(D^n(G))$ tworzy się *ciąg pochodny* grupy G,

$$G = D^0(G) \supset D^1(G) \supset D^2(G) \supset \dots$$

Grupa G jest *rozwiązalna* jeśli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $D^n(G) = \{e\}$; najmniejsze n o tej własności nazywa się klasą rozwiązalności grupy. Każda grupa nilpotentna jest rozwiązalna.

PRZYKŁAD 2.1. Niech K będzie ciałem przemiennym. Grupa macierzy trójkątnych

$$\mathsf{T}(n, K) = \{a = (a_{\mu\nu}) \in \mathsf{GL}(n, K) \mid 1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n \Rightarrow a_{\mu\nu} = 0\}$$

jest grupą rozwiązalną. Jej grupa pochodna

$$\mathsf{T}^1(n, K) = \{a \in \mathsf{T}(n, K) \mid a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1\}$$

jest nilpotentna.

Pokazuje się (zob. np. [**66**]), że grupa $\mathfrak{S}_n$ jest rozwiązalna wtedy, i tylko wtedy, gdy $n < 5$, co wiąże się z rozwiązalnością „ogólnego" równania n-tego stopnia

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2.2}$$

przy pomocy pierwiastników, właśnie tylko dla $n < 5$. Wyjaśniając związek /między własnościami grup permutacji i przedstawialnością rozwiązań równania (2.2) przez pierwiastniki, Évariste Galois (1831) zapoczątkował rozwój teorii grup; zob. [La].

3. Grupy z dodatkową strukturą

Zwykle rozpatruje się grupy z dodatkową strukturą, np. przestrzeni topologicznej lub rozmaitości różniczkowej. *Grupa topologiczna* jest to grupa G, która jest równocześnie przestrzenią topologiczną, a odwzorowanie

$$G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto ab^{-1}, \tag{2.3}$$

jest ciągłe. Grupa dyskretna jest to grupa topologiczna z topologią dyskretną, tzn. taką, w której każdy zbiór jest otwarty. Np. grupy skończone i grupa $\mathbb{Z}$ są dyskretne, ale grupa liczb wymiernych nie jest dyskretna.

Grupa Liego jest to grupa G, która jest rozmaitością gładką, a odwzorowanie (2.3) jest gładkie; więcej o tych grupach będzie w rozdziale VII. Np. grupy $\mathsf{GL}(n, \mathbb{k})$, gdzie $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ są grupami Liego. Przykładem grupy topologicznej, która nie jest grupą Liego, jest „grupa cechowania": niech X będzie przestrzenią topologiczną, a G – grupą topologiczną. Zbiór

$$\mathcal{G} = \{a : X \to G \mid a \text{ jest ciągłe}\}$$

ma naturalną topologię i jest grupą topologiczną ze względu na składanie określone wzorem

$$(a \cdot b)(x) = a(x)b(x), \quad \text{gdzie } a, b \in \mathcal{G} \text{ i } x \in X.$$

Inny przykład grupy topologicznej to grupa Diff (X) wszystkich dyfeomorfizmów rozmaitości gładkiej X.

4. Grupy przekształceń

4.1. Działania i odwzorowania splatające. Spotkaliśmy się już z przykładami grup przekształceń, w szczególności z ogólnym przykładem grupy $\mathfrak{S}(X)$ przekształceń zbioru X. Mając grupę „abstrakcyjną" H o elemencie neutralnym e oraz zbiór X, mówimy, że H działa *lewostronnie* na zbiorze X, jeśli dane jest odwzorowanie

$$H \times X \to X, \quad (a, x) \mapsto ax,$$

takie, że

$$ex = x, \quad a(bx) = (ab)x,$$

dla wszystkich $x \in X$ i $a, b \in H$. Odwzorowanie

$$\mathsf{L} : H \to \mathfrak{S}(X), \text{ określone przez } \mathsf{L}(a)(x) = ax,$$

jest homomorfizmem grup; odwrotnie, mając taki homomorfizm, można zdefiniować lewostronne działanie H w X. Podobnie określa się działanie *prawostronne*,

$$X \times H \to X, \quad (x,a) \mapsto xa, \quad xe = x, \quad (xa)b = x(ab),$$

i zapisuje je jako $\mathsf{R}(a)x = xa$, więc $\mathsf{R}(a) \circ \mathsf{R}(b) = \mathsf{R}(ba)$. Zamiast mówić, że „grupa G działa na zbiorze X" używa się wyrażenia „X jest G-przestrzenią". (Jest to tłumaczenie angielskiego zwrotu „G-space" i nie brzmi po polsku zbyt dobrze, ale bywa wygodne.) Jeśli L jest homomorfizmem określającym działanie lewostronne, to kładąc $\mathsf{R}(a) = \mathsf{L}(a^{-1})$ otrzymujemy działanie prawostronne.

Przykład 2.2. Niech H będzie podgrupą grupy G; utożsamiając X z G określamy następujące działania grupy H:

(i) lewe przesunięcia, $H \times G \to G$, $(a,b) \mapsto \mathsf{L}(a)(b) = ab$;

(ii) prawe przesunięcia, $G \times H \to G$, $(b,a) \mapsto \mathsf{R}(a)(b) = ba$;

(iii) działanie dołączone, $H \times G \to G$, $(a,b) \mapsto \mathrm{Ad}(a)(b) = aba^{-1} = \mathsf{L}(a) \circ \mathsf{R}(a^{-1})(b)$.

(iv) Na zbiorze $X = G/H$ *lewych* warstw mamy działanie *lewostronne* $G \times X \to X$ dane przez $(a, bH) \mapsto abH$.

Twierdzenie (Cayley). *Grupa rzędu n jest izomorficzna pewnej podgrupie grupy $\mathfrak{S}_n$.*

Dowód. Istotnie, jeśli $\#G = n$, to grupy $\mathfrak{S}(G)$ i $\mathfrak{S}_n$ są izomorficzne. Odwzorowanie

$$\mathsf{L} : G \to \mathfrak{S}(G), \quad a \mapsto \mathsf{L}(a),$$

jest monomorfizmem, bo $\mathsf{L}(a)(b) = b$ oznacza $ab = b$, więc pociąga $a = e$, czyli $\ker \mathsf{L} = \{e\}$. Na podstawie stw. 1.2 wynika stąd, że L jest izomorfizmem G na obraz tej grupy w $\mathfrak{S}(G)$. □

Elementy b i c grupy G nazywa się *sprzężonymi*, jeśli istnieje $a \in G$ taki, że $aba^{-1} = c$. Jeśli H jest podgrupą G i $a \in G$, to zbiór

$$aHa^{-1} = \{aba^{-1} \mid b \in H\}$$

też jest podgrupą, o której się mówi, że jest *sprzężona* do H. Grupy sprzężone są izomorficzne, ale nie każde dwie izomorficzne podgrupy są ze sobą sprzężone; np. grupa przemienna $\{1, a, b, ab\}$, gdzie $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$, ma dwie niesprzężone podgrupy izomorficzne: $\{1, a\}$ i $\{1, b\}$.

Niech X i Y będą dwoma G-przestrzeniami; o odwzorowaniu $h : X \to Y$ mówi się, że jest *ekwiwariantne*, albo że *splata* działania G w X i Y, jeśli $h(ax) = ah(x)$ dla każdego $a \in G$ i $x \in X$.

Jeśli G działa w X i Y, to w zbiorze $\mathcal{F}(X,Y)$ wszystkich odwzorowań X w Y definiujemy działanie L grupy G kładąc, dla każdego $x \in X$, $h \in \mathcal{F}(X,Y)$ i $a \in G$:

$$\Big(\mathsf{L}(a)h\Big)(x) = ah(a^{-1}x).$$

4.2. Stabilizatory i orbity. Niech grupa G działa na zbiorze X: *stabilizatorem* punktu $x \in X$ nazywa się zbiór

$$G_x = \{a \in G \mid ax = x\}. \tag{2.4}$$

Stabilizator jest podgrupą G; nazywa się go także *grupą izotropii* albo „małą grupą".

Orbitą punktu $x \in X$ ze względu na działanie podgrupy H grupy G jest zbiór

$$Hx = \{ax \mid a \in H\}.$$

Stabilizatory punktów należących do jednej orbity są ze sobą sprzężone: jeśli $bax = ax$ to $a^{-1}bax = x$, więc $b \in G_{ax}$ jest równoważne $a^{-1}ba \in G_x$, czyli

$$G_{ax} = aG_xa^{-1}.$$

Warstwy: lewostronna aH i prawostronna Ha są, odpowiednio, orbitami punktu $a \in G = X$ ze względu na działanie prawo- i lewostronne H na G (należy zwrócić uwagę na pewną niekonsekwencję terminologiczną).

O punkcie x takim, że $Gx = \{x\}$ mówi się, że jest *niezmienniczy* ze względu na działanie grupy G.

Jeśli X i Y są dwoma G-przestrzeniami, to odwzorowanie $h : X \to Y$ jest ekwiwariantne względem działania G wtedy i tylko wtedy, gdy h jest punktem niezmienniczym G-przestrzeni $\mathcal{F}(X, Y)$.

4.3. Automorfizmy. Zbiór $\mathsf{Aut}(G)$ wszystkich automorfizmów grupy G jest podgrupą grupy $\mathfrak{S}(G)$.

PRZYKŁAD 2.3. Grupa automorfizmów grupy $\mathbb{Z}$ jest izomorficzna grupie $\mathbb{Z}_2$. Istotnie, jeśli $f \in \mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}$, to $f(m) = mf(1)$ dla $m \in \mathbb{Z}$, więc $f(\mathbb{Z}) = f(1)\mathbb{Z}$, ale f jest bijekcją, zatem $f(1) = 1$ albo $f(1) = -1$.

Dla każdego $a \in G$ odwzorowanie $\mathrm{Ad}(a) : G \to G$, $\mathrm{Ad}(a)(b) = aba^{-1}$, gdzie $b \in G$, jest *automorfizmem wewnętrznym* grupy G. Odwzorowanie $\mathrm{Ad} : G \to \mathsf{Aut}(G)$ jest homomorfizmem grup; obraz $\mathsf{Inn}(G)$ tego homomorfizmu jest grupą *automorfizmów wewnętrznych* grupy G. Jeśli grupa G jest przemienna, to grupa $\mathsf{Inn}(G)$ jest trywialna.

STWIERDZENIE 2.3. *Grupa automorfizmów wewnętrznych* $\mathsf{Inn}(G)$ *jest dzielnikiem normalnym grupy wszystkich automorfizmów* $\mathsf{Aut}(G)$ *grupy* G.

Dowód. Niech $h \in \mathsf{Aut}(G)$ i $a, b \in G$, to

$$(h \circ \mathrm{Ad}(a) \circ h^{-1})(b) = h(ah^{-1}(b)a^{-1}) = h(a)bh(a)^{-1} = \mathrm{Ad}\big(h(a)\big)(b),$$

więc zachodzi $h\,\mathsf{Inn}(G)h^{-1} = \mathsf{Inn}(G)$ dla każdego $h \in \mathsf{Aut}(G)$. □

Orbity grupy $\mathsf{Inn}(G)$ w G nazywają się *klasami* elementów sprzężonych grupy G. Klasę elementu $a \in G$ zapisuje się jako

$$\mathrm{Ad}(G)a = \{bab^{-1} \in G \mid b \in G\}.$$

Widać od razu, że klasy elementów sprzężonych, w przeciwieństwie do warstw, na ogół nie są równoliczne. W grupie przemiennej każdy element jest klasą; dzielnik normalny jest mnogościową sumą klas.

4.4. Przestrzenie jednorodne. Mówi się, że działanie grupy G na zbiorze X jest *przechodnie*, a zbiór (przestrzeń) X jest *jednorodny*, jeśli cały zbiór X jest jedną orbitą, tzn. jeśli dla każdych $x, y \in X$ istnieje $a \in G$ takie, że $y = ax$. Stabilizatory wszystkich punktów zbioru jednorodnego są do siebie sprzężone. Działanie jest *swobodne*[1] jeśli $a \neq e$ pociąga $ax \neq x$ dla każdego $x \in X$; np. działania grupy na siebie przez lewe i prawe przesunięcia są swobodne.

Jeśli grupa G działa na X przechodnio i swobodnie, to każdy $x \in X$ określa bijekcję $G \to X$, $a \mapsto ax$.

STWIERDZENIE 2.4. *Zbiór X, jednorodny ze względu na działanie grupy G, można utożsamić ze zbiorem G/G_x, gdzie G_x jest stabilizatorem punktu $x \in X$. Odwzorowanie $f : G/G_x \to X$, $f(aG_x) = ax$, jest ekwiwariantną bijekcją.*

Surjektywność odwzorowania f wynika z jednorodności X; injektywność i ekwiwariantność f są też oczywiste. Inaczej mówiąc, każda przestrzeń jednorodna ze względu na działanie grupy G jest równoważna pewnej przestrzeni lewych warstw G/H, gdzie $H \subset G$ jest podgrupą. W szczególności, sama grupa jest przestrzenią jednorodną ze względu na lewe (a także prawe) przesunięcia.

4.5. Wzory Cauchy'ego-Frobeniusa. Niech G będzie grupą rzędu N, działającą w zbiorze skończonym X; istnieje więc rozkład X na skończoną rodzinę orbit,

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k. \tag{2.5}$$

Elementy jednej orbity mają izomorficzne stabilizatory; orbicie X_i można więc przyporządkować liczbę naturalną

$$n_i = \#G_{x_i}, \quad \text{gdzie } x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, k. \tag{2.6}$$

Biorąc pod uwagę, że orbita X_i jest zbiorem jednorodnym, obliczamy liczbę jej elementów,

$$\#X_i = \#G/\#G_{x_i} = N/n_i. \tag{2.7}$$

W szczególności, działanie dołączone grupy G na samą siebie daje rozkład na klasy elementów sprzężonych,

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_l, \quad G_j = \mathrm{Ad}(G)a_j, \tag{2.8}$$

gdzie $a_j \in G_j$ jest *reprezentantem* j-tej klasy, $j = 1, \ldots, l$.

Wyprowadzimy teraz użyteczne wzory na liczbę k orbit działania G w X. Według Lama [**38**] były one znane już Cauchy'emu i sformuowałane w postaci lematu przez Frobeniusa; wielu autorów przypisuje je Burnside'owi, który zamieścił je w swojej książce z 1897 r. Wzory te zostały w istotny sposób uogólnione przez Pólya. Niech

$$X_a = \{x \in X \mid ax = x\}$$

[1] W polskiej literaturze matematycznej spotyka się określenie działanie *wolne*, co może kojarzyć się z innym znaczeniem tego słowa („mój stary komputer działa wolno”).

oznacza zbiór punktów, których „nie rusza” element a grupy. Rozważamy zbiór

$$Z = \{(a, x) \in G \times X \mid ax = x\}$$

i obliczamy na dwa sposoby liczbę $\#Z$ jego elementów. Dla każdego $x \in X$ mamy $\#G_x$ elementów G, które nie ruszają x, więc

$$\begin{aligned}\#Z &= \textstyle\sum_{x\in X} \#G_x \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{x\in X_i} \#G_x.\end{aligned}$$

Wykorzystując (2.6) i (2.7) otrzymujemy

$$\#Z = kN \tag{2.9}$$

Z drugiej strony, dla każdego $a \in G$ mamy $\#X_a$ elementów X nie ruszanych przez a, stąd

$$\#Z = \textstyle\sum_{a\in G} \#X_a \tag{2.10}$$

Porównując (2.9) i (2.10) otrzymujemy

$$k = N^{-1} \textstyle\sum_{a\in G} \#X_a. \tag{2.11}$$

Znając liczebność klas w rozkładzie (2.8) i biorąc pod uwagę, że zbiory X_a i $X_{bab^{-1}}$ są równoliczne, przekształcamy (2.11) do postaci

$$k = N^{-1} \sum_{j=1}^{l} (\#G_j)(\#X_{a_j}). \tag{2.12}$$

5. Ciągi dokładne i rozszerzenia grup

Mówimy, że homomorfizmy grup

$$H \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} G$$

tworzą *ciąg dokładny* homomorfizmów, jeśli $\operatorname{img} h = \ker g$. Niech 1 oznacza grupę trywialną (jednoelementową); dla każdej grupy G istnieje jeden monomorfizm $1 \to G$ i jeden epimorfizm $G \to 1$; zdanie

$$\text{„ciąg } 1 \to H \xrightarrow{h} E \text{ jest dokładny”}$$

oznacza tyle, co „h jest monomorfizmem”. Zdanie

$$\text{„ciąg } E \xrightarrow{g} G \to 1 \text{ jest dokładny”}$$

jest rownoważne stwierdzeniu, że g jest epimorfizmem. Jeśli $h : G \to H$ jest homomorfizmem, to ciągi

$$1 \to G/\ker h \to \operatorname{img} h \to 1 \quad \text{oraz} \quad 1 \to \ker h \to G \to G/\ker h \to 1$$

są dokładne.

$*$ Mówimy, że grupa E jest rozszerzeniem grupy G przez H, jeśli dany jest ciąg dokładny homomorfizmów grup

$$1 \to H \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} G \to 1. \tag{2.13}$$

Rozszerzenie (2.13) nazywa się *centralnym* jeśli $h(H) \subset Z(E)$. Np. grupa $\mathsf{SU}(2)$ jest rozszerzeniem centralnym grupy $\mathsf{SO}(3)$ przez $\mathbb{Z}_2$. Mówimy, że rozszerzenia:

$$H \overset{h}{\to} E \overset{g}{\to} G \quad \text{i} \quad H \overset{h'}{\to} E' \overset{g'}{\to} G$$

są *równoważne* jeśli istnieje izomorfizm grup $f : E \to E'$ taki, że $g = g' \circ f$ i $h' = f \circ h$. Jeśli E jest równoważne rozszerzeniu

$$1 \to H \xrightarrow{h'} G \times H \xrightarrow{g'} G \to 1,$$

gdzie $h'(b) = (1, b)$ i $g'(a, b) = a$, to mówimy, że rozszerzenie jest *trywialne*. *Przekrojem* (albo: rozszczepieniem) rozszerzenia (2.13) nazywa się homomorfizm $s : G \to E$ taki, że $g \circ s = \mathrm{id}_G$. $*$

Ważnym uogólnieniem iloczynu prostego grup jest *iloczyn półprosty*. Niech

$$\varphi : G \to \mathsf{Aut}\, H \tag{2.14}$$

będzie homomorfizmem grup. W zbiorze $G \times H$ określamy składanie elementów, kładąc, dla $a, a' \in G$ i $b, b' \in H$,

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b\varphi(a)(b')). \tag{2.15}$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowane składanie jest łączne; jeśli e_G i e_H są elementami neutralnymi grup G i H, odpowiednio, to (e_G, e_H) jest elementem neutralnym dla składania (2.15) oraz $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, \varphi(a^{-1})(b^{-1}))$. O zbiorze $G \times H$ z tak określonym działaniem grupowym mówi się, że jest *iloczynem półprostym grup* określonym przez homomorfizm (2.14); grupę tę oznacza się czasami symbolem $G \times_\varphi H$. Iloczyn półprosty rzeczywiście uogólnia pojęcie iloczynu prostego: jeśli $\varphi_0 : G \to \mathsf{Aut}\, H$ oznacza homomorfizm trywialny, tzn. taki, że $\varphi_0(a) = \mathrm{id}_H$ dla każdego $a \in G$, to grupa $G \times_{\varphi_0} H$ jest iloczynem prostym. Podgrupa $H_\varphi = \{(e_G, b) \in G \times_\varphi H \mid b \in H\}$ jest dzielnikiem normalnym.

Przykład 2.4. Niech V będzie przestrzenią wektorową, $G = \mathsf{GL}(V)$. Jako H weźmy grupę przesunięć, tzn. addytywną grupę V. Niech $\varphi : \mathsf{GL}(V) \to \mathsf{Aut}(V)$ będzie odwzorowaniem tożsamościowym, $\varphi(a)v = av$. Iloczyn półprosty $\mathsf{GL}(V) \times_\varphi V$ nazywa się *grupą afiniczną* przestrzeni V. Grupa ta działa w V w ten sposób, że $(a, b) \in \mathsf{GL}(V) \times_\varphi V$ przeprowadza v w $av + b$. W geometrii i fizyce mamy często do czynienia z podgrupami grupy afinicznej. Np. w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ działa grupa *ruchów euklidesowych* $\mathsf{SO}(3) \times_\varphi \mathbb{R}^3$, a w przestrzeni Minkowskiego – niejednorodna grupa Lorentza $\mathsf{O}(1, 3) \times_\varphi \mathbb{R}^4$, zwana także *grupą Poincarégo*. Ta ostatnia grupa odgrywa ważną rolę w relatywistycznych teoriach kwantowych.

Miejsce iloczynów półprostych wśród wszystkich rozszerzeń grup opisuje

Stwierdzenie 2.5. *Rozszerzenie jest równoważne iloczynowi półprostemu wtedy i tylko wtedy, gdy posiada przekrój.*

Dowód. Mając dany iloczyn półprosty

$$1 \to H \xrightarrow{h} G \times_\varphi H \xrightarrow{g} G \to 1 \tag{2.16}$$

określamy $s : G \to G \times_\varphi H$ kładąc $s(a) = (a, e_H)$. Na odwrot, mając przekrój $s : G \to E$ ciągu (2.13) określamy $\varphi : G \to \mathsf{Aut}\, H$ w następujący sposób: jeśli $(a, b) \in G \times H$, to $s(a)h(b)s(a^{-1})$ należy do $\mathrm{img}\, h = \ker g$, bo $g(s(a)h(b)s(a^{-1})) = g \circ s(a).g \circ h(b).g \circ s(a^{-1}) = e_G$; istnieje zatem element $\psi(a, b) \in H$ taki, że $h(\psi(a, b)) = s(a)h(b)s(a^{-1})$; sprawdzamy, że dla każdego $a \in G$ odzorowanie $b \mapsto \psi(a, b)$ jest automorfizmem H; kładąc następnie $\varphi(a)(b) = \psi(a, b)$ sprawdzamy, że odwzorowanie φ jest homomorfizmem G w $\mathsf{Aut}\, H$. Do zakończenia dowodu należy jeszcze pokazać, że rozszerzenia (2.13) i (2.16) są równoważne. Mając przekrój s określamy odwzorowanie $t : E \to H$ takie, że $t \circ h = \mathrm{id}_H$ w następujący sposób: niech $c \in E$, to $cs(g(c^{-1})) \in \operatorname{img} h = \ker g$ bo $g \circ s = \mathrm{id}_G$; biorąc pod uwagę, że h jest injektywne, można znaleźć taki element $t(c) \in H$, że $h(t(c)) = cs(g(c^{-1}))$, czyli $c = h(t(c)) \cdot s(g(c))$. Izomorfizm $f : E \to G \times_\varphi H$ definiujemy wzorem $f(c) = (g(c), t(c))$. Izomorfizm odwrotny dany jest wzorem $f^{-1}(a, b) = h(b)s(a)$. Odwzorowanie t na ogół nie jest homomorfizmem; mamy mianowicie $t(cc') = t(c)\varphi(g(c))(t(c'))$. □

Rozszerzenie (2.13) jest trywialne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje homomorfizm $t : E \to H$ taki, że $t \circ h = \mathrm{id}_H$. Istotnie, jeśli jest takie t, to odwzorowanie $E \to G \times H$, $c \mapsto (t(c), g(c))$, jest izomorfizmem grup.

6. Skończone grupy obrotów

Znajdziemy wszystkie skończone podgrupy grupy obrotów $\mathsf{SO}(3)$; są one często nazywane „grupami punktowymi pierwszego rodzaju”. Skończone podgrupy $\mathsf{O}(3)$ (zawierające odbicia) nazywają się grupami punktowymi drugiego rodzaju.

Przypomnijmy, że każdy obrót na płaszczyźnie można przedstawić w postaci macierzy

$$a(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Podgrupa rzędu n grupy $\mathsf{SO}(2)$ jest generowana przez $a(2\pi/n)$; jest więc izomorficzna grupie $\mathbb{Z}_n$.

Niech teraz $a \in \mathsf{SO}(3)$. Jeśli a nie jest elementem neutralnym (macierzą jednostkową) e, to istnieje *oś obrotu* a, tzn. taka prosta $L \subset \mathbb{R}^3$, że jeśli $x \in L$, to $ax = x$. Istotnie, wielomian $w(\lambda) = \det(\lambda e - a)$ ma dodatni pierwiastek λ_0, bo $w(0) = \det(-a) = -\det a = -1$ oraz $\lim_{\lambda\to\infty} w(\lambda) = \infty$. Istnieje więc wektor $x \neq 0$ taki, że $ax = \lambda_0 x$, ale $\lambda_0^2(x|x) = (ax|ax) = (x|x)$, więc $\lambda_0 = 1$. Prosta $L = \mathbb{R}x$ jest osią obrotu a. Płaszczyzna $L^\perp$ prostopadła do L jest zachowywana przez a.

Niech G będzie podgrupą rzędu $N = \#G$ grupy $\mathsf{SO}(3)$ oraz niech

$$G^\bullet = G \setminus \{e\}.$$

Wprowadzamy zbiór wektorów jednostkowych

$$X = \{x \in \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3 \mid \text{istnieje } a \in G^\bullet \text{ takie, że } ax = x\}.$$

Zbiór X jest skończony, $\#X \leqslant 2(N-1)$. Grupa G działa w X: niech $x \in X$, $ax = x$, $a \in G^\bullet$ i $b \in G$, to $bab^{-1} \in G^\bullet$ i $(bab^{-1})bx = bx$, więc $bx \in X$. Stabilizator (2.4) punktu $x \in X$ jest skończoną grupą obrotów płaszczyzny $L^\perp$ gdzie $L = \mathbb{R}x$. Istnieje więc $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant N$, takie, że grupa G_x jest izomorficzna $\mathbb{Z}_n$; liczbę n nazywa się *krotnością osi L w grupie G*.

Zbiór X można rozłożyć na k orbit działania grupy G, jak w (2.5). Liczba n_i, określona w (2.6), oznacza teraz krotność osi nietrywialnych obrotów należących do stabilizatora elementu $x_i \in X_i$.

Do znalezienia liczby k orbit posłużymy się wzorem Cauchy'ego-Frobeniusa (2.11). Mamy $X_e = X$, a każdy z $N-1$ zbiorów X_a, $a \in G^\bullet$, jest dwuelementowy, gdyż jest przecięciem osi obrotu a ze sferą $\mathbb{S}_2$. Wynika stąd

$$\textstyle\sum_{a\in G} \#X_a = \#X + 2(N-1).$$

Biorąc pod uwagę (2.7) oraz $\#X = \sum_i \#X_i$, otrzymujemy z (2.11)

$$k = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{n_i} + 2 - \dfrac{2}{N}. \tag{2.17}$$

Występujące w tym równaniu liczby całkowite spełniają nierówności

$$N \geqslant 2, \;\; 2 \leqslant n_i \leqslant N. \tag{2.18}$$

Znajdziemy teraz wszystkie rozwiązania (2.17) w liczbach całkowitych, spełniające (2.18).

Na podstawie nierówności

$$0 < \sum \frac{1}{n_i} = k - 2 + \frac{2}{N} \leqslant k - 1$$

mamy $k > 1$, a na podstawie

$$\frac{k}{2} \geqslant \sum \frac{1}{n_i} = k - 2 + \frac{2}{N} > k - 2$$

mamy $k < 4$, czyli $k = 2$ albo 3. Rozpatrujemy oddzielnie oba przypadki.

Jeśli $k = 2$, to

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{2}{N},$$

ale $n_1, n_2 \leqslant N$, więc $n_1 = n_2 = N$.

Niech teraz $k = 3$. Możemy ponumerować orbity tak, że

$$2 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant N.$$

Równanie

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{N}$$

pociąga $n_1 = 2$ (bo gdyby n_1 było większe od 2, to lewa strona ostatniej równości byłaby $\leqslant 1$). Gdyby $n_2 \geqslant 4$, to lewa strona ostatniej równości też byłaby $\leqslant 1$, więc $n_2 = 2$ albo 3.

Jeśli $n_1 = n_2 = 2$, to $N = 2n$, gdzie $n = n_3 = 2, 3, \ldots$.

Jeśli $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, to równanie

$$\frac{1}{n_3} = \frac{2}{N} + \frac{1}{6} \;\text{ pociąga }\; 3 \leqslant n_3 \leqslant 5.$$

Ostatnie warunki mają trzy rozwiązania:

$$n_3 = 3, N = 12; \;\; n_3 = 4, N = 24; \;\; n_3 = 5, N = 60.$$

Można pokazać, że każdemu z powyższych rozwiązań odpowiada, z dokładnością do sprzężenia, jedna podgrupa G grupy $\mathsf{SO}(3)$. Można ją scharakteryzować przez podanie figury foremnej zachowywanej przez G. Wyniki podsumowuje następująca tabela [Lj,Si].

k	n_1	n_2	n_3	N	G	izomorficzna	zachowuje
2	n	n	–	n	$\mathbf{C}_n$	$\mathbb{Z}_n$	zorientowany n-kąt foremny
3	2	2	n	$2n$	$\mathbf{D}_n$	$\mathbb{Z}_2 \times_\varphi \mathbb{Z}_n$	n-kąt foremny
3	2	3	3	12	$\mathbf{T}$	$\mathfrak{A}_4$	czworościan
3	2	3	4	24	$\mathbf{O}$	$\mathfrak{S}_4$	sześcian, ośmiościan
3	2	3	5	60	$\mathbf{Y}$	$\mathfrak{A}_5$	dwunastościan, dwudziestościan

Grupa *diedralna* $\mathbf{D}_n$ jest izomorficzna iloczynowi półprostemu $\mathbb{Z}_2 \times_\varphi \mathbb{Z}_n$ określonemu przez homomorfizm $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}_n$ taki, że $\varphi(-1)z = z^{-1}$.

Przykład 2.5. Wzór (2.12) zastosujemy teraz do obliczenia liczby różnych „cząsteczek” jakie można utworzyć umieszczając po jednym z q *rodzajów* atomów w wierzchołkach wielościanu foremnego. Przedstawimy tu szczegółowy rachunek dla *czworościanu*; wyniki dla sześcianu i ośmiościanu są w Zadaniu 2.18. Nie rozróżniamy dwóch cząsteczek, jeśli można przeprowadzić obrotem jedną w drugą. Np. jeśli $q = 2$, to mamy 5 cząsteczek w kształcie czworościanu. Aby wyprowadzić ogólny wzór na liczbę $k_4(q)$ cząsteczek, zauważamy, że liczba ta jest równa liczbie orbit grupy $\mathbf{T} = \mathfrak{A}_4$ działającej na zbiór X wszystkich rozmieszczeń q rodzajów atomów na wierzchołkach czworościanu; mamy więc $\#X = q^4$. Grupa $\mathfrak{A}_4$ ma $N = 12$ elementów i cztery klasy elementów sprzężonych: oprócz klasy elementu neutralnego a_1 mamy trójelementową klasę elementu $a_2 = (12)(34)$, reprezentującego obrót o π oraz dwie klasy, zawierające $a_3 = (123)$ i $a_4 = (132)$, po cztery elementy każda, odpowiadające obrotom o kąty $2\pi/3$ i $4\pi/3$, odpowiednio. Łatwo widać, że $\#X_{a_1} = q^4$ oraz $\#X_{a_i} = q^2$ dla $i = 2, 3, 4$, więc $k_4(q) = \frac{1}{12}q^2(q^2+11)$.

7. Grupy $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ i $\mathsf{SU}(2)$

Rozpatrzymy teraz dwa przykłady grup topologicznych ważnych ze względu na zastosowania; są to nawet grupy Liego, ale w poniższych rozważaniach nie będziemy korzystali z tego pojęcia.

7.1. Wyznacznik funkcji wykładniczej.

Lemat 2.6. *Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$ i niech* $\operatorname{tr} a$ *oznacza ślad endomorfizmu $a \in \mathsf{End}\,V$. Dla każdego $a \in \mathsf{End}\,V$ mamy*

$$\det\exp a = \exp\operatorname{tr} a. \tag{2.19}$$

Dowód. Z definicji funkcji wykładniczej

$$\exp a = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{a^k}{k!}, \quad a \in \mathsf{End}\,V,$$

wynika równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp ta = a\exp ta. \tag{2.20}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$ae_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n + e_1 \wedge ae_2 \wedge \cdots \wedge e_n + \cdots + e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge ae_n \\ = (\operatorname{tr} a) e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n,$$

różniczkując względem $t \in \mathbb{R}$ obie strony równania powstającego przez zastąpienie w (1.40) endomorfizmu a przez $\exp ta$ i uwzględniając (2.20), otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \exp ta = (\operatorname{tr} a) \det \exp ta.$$

Rozwiązując to równanie różniczkowe z warunkiem początkowym

$$\det \exp 0 = 1$$

i kładąc w rozwiązaniu $t = 1$ otrzymujemy (2.19). □

7.2. Macierze Pauliego. Macierze

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rozpinają przestrzeń wektorową $\mathbb{C}(2)$ zespolonych macierzy drugiego stopnia. Macierze σ_1, σ_2 i σ_3 nazywają się macierzami Pauliego; spełniają one

(2.21)
$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\sigma_0, \text{ dla } i,j = 1,2,3 \text{ oraz } \sigma_i\sigma_j = \mathrm{i}\textstyle\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k \text{ dla } i \neq j.$$

Łatwo widać, że

(2.22) $$\text{jeśli } a \in \mathbb{C}(2) \text{ i } a\sigma_i = \sigma_i a \text{ dla } i,j = 1,2,3, \text{ to } a = \lambda\sigma_0$$

dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Niech $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$. Odwzorowanie

$$\sigma : \mathbb{R}^4 \to \operatorname{Herm}(2), \quad x \mapsto \sigma(x) = \sigma_\mu x^\mu,$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$ na rzeczywistą przestrzeń wektorową $\operatorname{Herm}(2) \subset \mathbb{C}(2)$ macierzy hermitowskich drugiego stopnia. Mamy

$$\det \sigma(x) = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

gdzie $(g_{\mu\nu})$ jest macierzą składowych tensora (metryki) Minkowskiego,

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \text{ oraz } g_{\mu\nu} = 0 \text{ dla } \mu \neq \nu.$$

7.3. Homomorfizm $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{SO}^0(1,3)$. Grupa

(2.23) $$\mathsf{O}(1,3) = \{A \in \mathsf{GL}(4,\mathbb{R}) \mid g_{\mu\nu} A^\mu_\alpha A^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}\}$$

nazywa się *grupą Lorentza*. Jest ona domkniętym podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{16}$ i grupą topologiczną ze względu na topologię indukowaną z tej przestrzeni. Z definicji (2.23) wynika, że $\det A = 1$ albo $\det A = -1$; podgrupa

$$\mathsf{SO}(1,3) = \{A \in \mathsf{O}(1,3) \mid \det A = 1\}$$

nazywa się *szczególną grupą Lorentza*, a jej spójna podgrupa zawierająca jedność $\mathsf{SO}^0(1,3)$ — *właściwą grupą Lorentza*. Pełna grupa $\mathsf{O}(1,3)$ ma cztery składowe spójne: $G = \mathsf{SO}^0(1,3)$, GP, GT i GPT, gdzie

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

są przekształceniami Lorentza opisującymi odbicie przestrzenne i odbicie czasu, odpowiednio.

Grupa $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$ i ma naturalną topologię zaindukowaną przez otaczającą ją przestrzeń; ze względu na tę topologię jest ona grupą topologiczną. Niech $a^\dagger$ oznacza macierz sprzężoną po hermitowsku względem macierzy $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$. Jeśli $b \in \mathrm{Herm}(2)$, to także $aba^\dagger \in \mathrm{Herm}(2)$; odwzorowanie $b \mapsto aba^\dagger$ jest liniowym izomorfizmem takim, że $\det(aba^\dagger) = \det b$. Dla każdego $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ istnieje więc odwzorowanie $\rho(a) \in \mathsf{O}(1,3)$ takie, że

$$\sigma(\rho(a)x) = a\sigma(x)a^\dagger$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}^4$. Odwzorowanie

$$\rho : \mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{O}(1,3) \tag{2.24}$$

jest homomorfizmem grup. Jego jądro składa się ze wszystkich macierzy $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ takich, że $aba^\dagger = b$ dla każdego $b \in \mathrm{Herm}(2)$. Kładąc $b = \sigma_0$ otrzymujemy, że a jest macierzą unitarną, $a^\dagger = a^{-1}$. Dla $b = \sigma_i$, $i = 1,2,3$, otrzymujemy, że a komutuje z macierzami Pauliego, więc na mocy (2.22) mamy $a = \lambda\sigma_0$. Warunek unimodularności daje $\lambda = \pm 1$; zatem jądro jest rzędu 2.

Niech $\mathbb{C}_0(2)$ oznacza przestrzeń wektorową wszystkich bezśladowych, zespolonych macierzy drugiego stopnia. Jeśli $a \in \mathbb{C}_0(2)$, to na mocy (2.19) mamy $\exp a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$.

Lemat 2.7. *Jeśli a należy do obrazu odwzorowania*

$$\exp : \mathbb{C}_0(2) \to \mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \tag{2.25}$$

to $\operatorname{tr} a \neq -2$ *albo* $a = -\sigma_0$.

Dowód. Macierze Pauliego $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ stanowią bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}_0(2)$: dla każdego $b \in \mathbb{C}_0(2)$ istnieje wektor $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{C}^3$ taki, że

$$b = \boldsymbol{\sigma\omega}, \quad \text{gdzie} \quad \boldsymbol{\sigma\omega} = \textstyle\sum_{i=1}^3 \sigma_i\omega_i.$$

Na mocy (2.21) mamy $(\boldsymbol{\sigma\omega})^2 = \omega^2\sigma_0$, gdzie $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$. Na tej podstawie łatwo jest pokazać, że

$$\exp \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma\omega} = (\cos\omega)\sigma_0 + \mathrm{i}\frac{\sin\omega}{\omega}\boldsymbol{\sigma\omega}.$$

Dla $\omega = 0$ należy w tym równaniu zastąpić $(\sin\omega)/\omega$ przez 1. Jeśli $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ i $\operatorname{tr} a = 2$, to istnieje dokładnie jeden wektor $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{C}^3$ taki, że

$$a = \sigma_0 + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma\omega}.$$

Niech teraz $(\operatorname{tr} a)^2 \neq 4$; jeśli $\omega \in \mathbb{C}$ jest rozwiązaniem równania

$$2\cos\omega = \operatorname{tr} a,$$

to ω nie jest całkowitą wielokrotnością π, więc $\sin\omega \neq 0$. Prawa strona równania

$$\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sin\omega}\Big(a - (\cos\omega)\sigma_0\Big) \tag{2.26}$$

ma znikający ślad; istnieje więc spełniający je wektor $\boldsymbol{\omega}$. Biorąc pod uwagę to, że $\det a = 1$, z równania (2.26) otrzymujemy $\boldsymbol{\omega}^2 = \omega^2$. Jeśli $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ należy do obrazu (2.25) i $\operatorname{tr} a = -2$, to $\cos\omega = -1$, więc $\sin\omega = 0$ ale $\omega \neq 0$, stąd $a = -\sigma_0$. □

LEMAT 2.8. *Grupa* $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ *jest spójna.*

Dowód. Pokażemy, że zarówno elementy obrazu (2.25), jak i jego dopełnienia, można połaczyć krzywymi z jednością σ_0 grupy, z czego już wynika spójność. Jeśli a należy do obrazu, $a = \exp b$, gdzie $b \in \mathbb{C}_0(2)$, to można połaczyć a z jednością przy pomocy krzywej $\tau \mapsto \exp\tau b$, gdzie $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. W szczególności, $-\sigma_0$ można połączyć z σ_0 przy pomocy krzywej $\tau \mapsto c(\tau) = \exp \mathrm{i}\pi\tau\sigma_3$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Jeśli a nie należy do obrazu (2.25), to $-a$ należy: istnieje $b' \in \mathbb{C}_0(2)$ takie, że $-a = \exp b'$. Krzywa $\tau \mapsto c(\tau)\exp\tau b'$ łączy σ_0 z a. □

Obrazem ciągłego homomorfizmu (2.24) jest więc spójna podgrupa grupy $\mathsf{O}(1,3)$. Obraz ten jest zatem zawarty w składowej spójnej $\mathsf{SO}^0(1,3)$. Co więcej, obraz ten jest całą grupą $\mathsf{SO}^0(1,3)$, o czym można się przekonać rozpatrując następujące elementy tego obrazu. Niech $\boldsymbol{\omega}$ będzie jednostkowym wektorem rzeczywistym.

(i) Odwzorowanie

$$\rho\Big(\exp(-\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\tau\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma})\Big)$$

jest obrotem w $\mathbb{R}^3$ o kąt τ dookoła osi wektora $\boldsymbol{\omega}$.

(ii) Odwzorowanie

$$\rho\Big(\exp(-\tfrac{1}{2}\tau\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma})\Big)$$

jest *szczególnym* przekształceniem Lorentza w kierunku wektora $\boldsymbol{\omega}$ z prędkością $v = \operatorname{tgh}\tau$.

W wykładach szczególnej teorii względności pokazuje się, że powyższe odwzorowania generują grupę $\mathsf{SO}^0(1,3)$. Udowodniliśmy w ten sposób następujące

STWIERDZENIE 2.9. *Odwzorowanie* (2.24) *jest homomorfizmem na* $\mathsf{SO}^0(1,3)$ *o jądrze* $\mathbb{Z}_2$*.*

7.4. Homomorfizm $\mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3)$. Jeśli element a grupy $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ przedstawić w postaci

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}, \quad \text{to } a^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Niech $\mathsf{SU}(2)$ oznacza grupę zespolonych macierzy unitarnych i unimodularnych drugiego stopnia. Warunek unitarności $a^\dagger = a^{-1}$ daje $\gamma = -\bar{\beta}$ oraz $\delta = \bar{\alpha}$. Zatem

$$a \in \mathsf{SU}(2) \quad \Leftrightarrow \quad a = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \; \text{ i } \; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Istnieje więc bijekcja grupy $\mathsf{SU}(2)$ na sferę $\mathbb{S}_3$ o równaniu $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Grupa $\mathsf{SU}(2)$ jest podgrupą grupy $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$ i można do niej zastosować wyprowadzone w poprzednim ustępie wyniki. Ograniczenie homomorfizmu (2.24) do tej podgrupy daje epimorfizm

$$\rho : \mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3)$$

także o jądrze dwuelementowym. Niech $\mathrm{Herm}_0(2)$ oznacza przestrzeń wektorową hermitowskich, bezśladowych macierzy drugiego stopnia. Jak widać z uwagi (i) na str. 55, odwzorowanie

$$\exp : \mathrm{i}\,\mathrm{Herm}_0(2) \to \mathsf{SU}(2)$$

jest surjekcją.

Zadania

Zadanie 2.1. Pokazać, że jeśli H jest podzbiorem grupy skończonej G, to z warunku $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ wynika. że H jest podgrupą. Podać przykład wskazujący, że założenie o skończoności grupy jest istotne.

Zadanie 2.2. Pokazać, że permutacje $\lfloor 1, 2 \rfloor \lfloor 3, 4 \rfloor$ i $\lfloor 1, 2, 3 \rfloor$ generują grupę $\mathfrak{A}_4$.

Zadanie 2.3. Pokazać: $\mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}_4 = \mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2$, $\mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \mathfrak{S}_3$.

Zadanie 2.4. Niech p będzie liczbą pierwszą. Pokazać, że grupa $\mathsf{Aut}\,\mathbb{Z}_p$ jest izomorficzna multyplikatywnej grupie $\mathbb{F}_p^\times$ różnych od zera elementów ciała $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Zadanie 2.5. Pokazać, że każda podgrupa o indeksie 2 jest dzielnikiem normalnym.

Zadanie 2.6. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G. Pokazać, iż relacja

$$a \equiv a' \;\Leftrightarrow\; \text{„istnieją elementy } b_1 \in H_1 \text{ i } b_2 \in H_2 \text{ takie, że } a' = b_1 a b_2\text{''}$$

jest relacją równoważności w G; klasy równoważności ze względu na tę relację nazywają się *podwójnymi warstwami.*

Zadanie 2.7. Pokazać, że k-cykl generuje grupę $\mathbb{Z}_k$.

Zadanie 2.8. Pokazać, że podgrupa grupy obrotów na płaszczyźnie, przeprowadzająca kwadrat na siebie, jest izomorficzna grupie

$$\mathbb{Z}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}.$$

Zadanie 2.9. Rozpatrzyć uogólnienie kwadratu i sześcianu do 4 wymiarów: jest to zbiór X scharakteryzowany przez $2^4 = 16$ swoich wierzchołków o współrzędnych (w_1, w_2, w_3, w_4), gdzie $w_i = 1$ albo -1 dla $i = 1, \ldots, 4$. Pokazać, że następujące dwa obroty $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ oraz $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_3, x_4, x_1, -x_2)$ w $\mathbb{R}^4$ zachowują X i generują grupę rzędu 8, izomorficzną *grupie kwaternionowej* $\{1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, -1, -\mathrm{i}, -\mathrm{j}, -\mathrm{k}\}$.

Zadanie 2.10. Pokazać, że następujący zbiór elementów grupy $G = \mathfrak{A}_4$:

$$H = \{1, \lfloor 1,2 \rfloor \lfloor 3,4 \rfloor, \lfloor 1,3 \rfloor \lfloor 2,4 \rfloor, \lfloor 1,4 \rfloor \lfloor 2,3 \rfloor\}$$

jest jej dzielnikiem normalnym – więc grupa $\mathfrak{A}_4$ nie jest prosta. Pokazać, że grupa H jest izomorficzna iloczynowi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, a grupa ilorazowa G/H jest izomorficzna $\mathbb{Z}_3$.

Zadanie 2.11. Niech $\mathsf{SU}(n)$ oznacza grupę macierzy unitarnych i unimodularnych n-tego stopnia, $\mathsf{SO}(n)$ – grupę obrotów w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, a $\mathsf{Sp}(1)$ – grupę multyplikatywną jednostkowych kwaternionów. Pokazać, że grupy

$$\mathsf{U}(1) \text{ i } \mathsf{SO}(2)$$

oraz grupy

$$\mathsf{SU}(2) \text{ i } \mathsf{Sp}(1)$$

są izomorficzne.

Zadanie 2.12. Na podstawie wyników Zadania 1.11 wywnioskować istnienie monomorfizmu grup

$$\mathsf{U}(n) \to \mathsf{SO}(2n).$$

Zadanie 2.13. Pokazać, że grupy $\mathsf{SL}(2, \mathbb{F}_2)$ i $\mathfrak{S}_3$ są izomorficzne.

Zadanie 2.14. Udowodnić, że dwie permutacje są do siebie sprzężone w grupie $\mathfrak{S}_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozkładają się na tę samą liczbę rozłącznych cykli o równych długościach. Pokazać, że grupa $\mathfrak{A}_3$ zawiera cykle o równej długości, które nie są do siebie sprzężone w $\mathfrak{A}_3$.

Zadanie 2.15. Pokazać, że grupa diedralna $\mathbf{D}_n$ jest generowana przez dwa swoje elementy a i b, spełniające następujące relacje:

$$a^n = e, \ b^2 = e, \ abab = e.$$

Znaleźć centrum tej grupy; zinterpretować odpowiadający jej wiersz Tabeli 2.1; zwrócić uwagę na różnicę między przypadkiem n parzystego i n nieparzystego.

Zadanie 2.16. Pokazać, że grupa $\mathbf{T}$ obrotów, zachowujących czworościan foremny, jest izomorficzna grupie $\mathfrak{A}_4$ i że posiada ona dzielnik normalny, izomorficzny $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Znaleźć grupę ilorazową. Zinterpretować odpowiadający tej grupie wiersz Tabeli 2.1.

Wskazówka. Wystarczy ponumerować wierzchołki czworościanu od 1 do 4 i zauważyć, że obroty odpowiadają permutacjom parzystym zbioru wierzchołków; dzielnik normalny tej grupy jest generowany przez dwa obroty o π, np. te które odpowiadają permutacjom

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2.17. Pokazać, że grupa obrotów $\mathbf{O}$ sześcianu jest izomorficzna grupie $\mathfrak{S}_4$. Zinterpretować odpowiadający tej grupie wiersz Tabeli 2.1.

Zadanie 2.18. Wyprowadzić następujące wzory na liczbę cząsteczek, jakie można utworzyć umieszczając atomy q rodzajów w wierzchołkach sześcianu i ośmiościanu:

$$k_6(q) = \tfrac{1}{24}q^2(q^6 + 17q^2 + 6), \quad k_8(q) = \tfrac{1}{24}q^2(q^4 + 3q^2 + 12q + 8).$$

Zob. Przykład 2.5 oraz [Ko] rozdz. 8 §3 ćwicz. 7.

Zadanie 2.19. Zinterpretować wiersz Tabeli 2.1 odpowiadający grupie $\mathbf{Y}$ i uzasadnić zawarte w nim informacje.

Zadanie 2.20. Znaleźć orbity działania (naturalnego) grup $\mathsf{SU}(2)$ i $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ na $\mathbb{C}^2$.

Zadanie 2.21. W tym zadaniu stosujemy oznaczenia ustępu 7.3. Pokazać, że wektor $k \in \mathbb{R}^4$ jest zerowy ($g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$) i skierowany ku przyszłości ($k^0 > 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje para liczb zespolonych (z_1, z_2), z których przynajmniej jedna jest $\neq 0$, taka, że

$$\sigma(k) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \end{pmatrix}, \quad \text{czyli} \quad \sigma(k) = \begin{pmatrix} |z_1|^2 & z_1\overline{z_2} \\ z_2\overline{z_1} & |z_2|^2 \end{pmatrix}.$$

Grupa $\mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ działa w zbiorze wszystkich takich par posyłając parę (z_1, z_2) na

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Oznaczając przez k' wektor zerowy odpowiadający parze (z_1', z_2'), pokazać, że $k' = \rho(a)k$. Pokazać, że jeśli $(\operatorname{tr} a)^2 \neq 4$, to przekształcenie Lorentza $\rho(a)$ zachowuje dwa różne kierunki zerowe. Można je przedstawić w postaci „czterośruby”, tzn. w postaci złożenia szczególnego przekształcenia Lorentza w płaszczyźnie P rozpiętej na tych dwóch kierunkach i obrotu w płaszczyźnie prostopadłej do P. Jeśli $(\operatorname{tr} a)^2 = 4$, ale $\rho(a) \neq \mathrm{id}$, to $\rho(a)$ zachowuje jeden *wektor* zerowy i nie zachowuje żadnego kierunku zerowego, który nie jest równoległy do tego wektora. Takie „zerowe” przekształcenie Lorentza nie jest czterośrubą [**60**], wbrew temu, co twierdzą na ten temat J. A. Schouten [**56**] i J. L. Synge [**59**].

Zadanie 2.22. Pokazać, że przestrzeń jednorodną $\mathsf{SO}(n+1)/\,\mathsf{SO}(n)$ można utożsamić ze sferą n-wymiarową $\mathbb{S}_n$, a iloraz $\mathsf{U}(2)/\,\mathsf{U}(1)$ można utożsamić z $\mathsf{SO}(3)$, $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ albo $\mathbb{S}_3$ zależnie od tego w jaki sposób grupa $\mathsf{U}(1)$

jest włożona w $\mathsf{U}(2)$; rozważyć przypadki

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \; z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \; z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka. Zadania tego rodzaju można rozwiązywać odwołując się do stwierdzenia 2.4. Np. przyjmując $G = \mathsf{U}(2)$ i $X = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$, utożsamiając $\mathbb{S}_1$ z $\mathsf{U}(1)$ i $\mathbb{S}_2$ ze zbiorem macierzy postaci $R = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$, gdzie $x^2+y^2+z^2 = 1$, możemy określić działanie G na X, posyłając przy pomocy $A \in \mathsf{U}(2)$ element $(u, R) \in X$ na element $(u \det A, ARA^{-1})$. Działanie to jest przechodnie, a stabilizatorem punktu $(1, \sigma_z)$ jest grupa

$$\{A \in \mathsf{SU}(2) \mid A\sigma_z = \sigma_z A\} = \mathsf{U}(1).$$

$*$ Zadanie 2.23 Pokazać, że rozszerzenie grupy $\mathsf{U}(1)$ przez grupę $\mathbb{Z}_n$, dane przez ciąg (2.13), gdzie $h : \mathbb{Z}_n \to \mathsf{U}(1)$ jest injekcją (zawieraniem), a $g(z) = z^n$, dla $n \neq 0$ nie jest równoważne iloczynowi półprostemu.

Zadanie 2.24. Pokazać, że rozszerzenie grupy $\mathbb{Z}_2$ przez $\mathsf{SO}(n)$,

$$1 \to \mathsf{SO}(n) \to \mathsf{O}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2 \to 1,$$

jest iloczynem prostym dla n nieparzystego, a dla n parzystego jest iloczynem półprostym, ale nie prostym.

Zadanie 2.25. Pokazać, że rozszerzenia

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3) \to 1 \quad \text{i} \quad 1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{SO}^0(1,3) \to 1$$

nie są równoważne iloczynowi półprostemu.

Zadanie 2.26. Pokazać, że na to, aby grupa E była rozszerzeniem grupy G przez H potrzeba i wystarcza, aby E zawierała dzielnik normalny H', izomorficzny H taki, że E/H' jest izomorficzne G. $*$

Zadanie 2.27. Znaleźć centrum *grupy Heisenberga* składającej się ze wszystkich macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Zadanie 2.28. Pokazać, że centrum grupy $\mathsf{GL}(n, K)$, gdzie $K = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, składa się ze wszystkich macierzy „skalarnych”, tzn. postaci aI, gdzie $a \in K^\times$, a I oznacza macierz jednostkową [BJ].

Zadanie 2.29. *Centralizatorem* podzbioru X grupy G nazywa się zbiór $Z(X)$ tych elementów grupy, które są przemienne ze wszystkimi elementami X. W szczególności zbiór $Z(G)$ nazywa się *centrum* grupy G. Pokazać, że centralizator jest podgrupą.

Zadanie 2.30. Pokazać, że każdą macierz $a \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$ można przedstawić w postaci iloczynu macierzy unitarnej unimodularnej i unimodularnej macierzy hermitowskiej o dodatnich wartościach własnych. Ta druga macierz odpowiada szczególnemu przekształceniu Lorentza.

ZADANIE 2.31. *Normalizatorem* podzbioru X grupy G nazywa się zbiór
$$N(X) = \{a \in G \mid aX = Xa\}.$$
Pokazać, że $N(X)$ jest grupą, zawierajaącą $Z(X)$ jako podgrupę.

Wskazówka. Wykorzystać to, że zawieranie $aX \subset Xa$ oznacza, iż dla każdego $b \in X$ istnieje $b' \in X$ takie, że $ab = b'a$.

$*$ ZADANIE 2.32. Podać przykład pokazujący, że iloczyn komutatorów może nie być komutatorem.

Odpowiedź. Niech $V = \mathbb{R}^4$, $W = \wedge^2\mathbb{R}^4$, $G = V \times W$ z iloczynem grupowym $(v, w)(v', w') = v + v', w + w' + v \wedge v')$, to pochodna $D(G) = \{(0, w) \mid w \in W\}$ zawiera $(0, e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)$, natomiast komutator (v, w) i (v', w') wynosi $(0, 2v \wedge v')$.

ZADANIE 2.33. Udowodnić: $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$. $*$

III

Reprezentacje grup i algebr: podstawowe pojęcia

1. Definicje i przykłady

1.1. Reprezentacje grup. Niech G będzie grupą, a V – nietrywialną, tzn. o dodatnim wymiarze, przestrzenią wektorową nad ciałem K. Homomorfizm $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ nazywa się *reprezentacją* grupy G w V. Mówi się, że reprezentacja jest *rzeczywista* (*zespolona, kwaternionowa*) jeśli $K = \mathbb{R}$ ($K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{H}$). Wymiar przestrzeni V nazywa się *wymiarem reprezentacji*. W przypadku reprezentacji kwaternionowych zakłada się, że V jest prawą przestrzenią wektorową, a więc jest

$$\rho(a)(vq) = (\rho(a)v)q \quad \text{dla } a \in G,\ v \in V \ \text{ i } \ q \in \mathbb{H}\ . \tag{3.1}$$

Przykład 3.1. Niech G będzie podgrupą grupy $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ nieosobliwych, rzeczywistych macierzy n-tego stopnia. Reprezentacja rzeczywista

$$\rho : G \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \rho(a) = a,$$

nazywa się *reprezentacją definiującą* grupy G.

Przykład 3.2. Dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ istnieje jednowymiarowa reprezentacja zespolona

$$\rho_n : \mathsf{U}(1) \to \mathsf{GL}(\mathbb{C}), \quad \rho_n(z) = z^n\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,.$$

Przykład 3.3. Niech $a = (a_{\mu\nu}) \in \mathbb{H}(n)$ i niech $a^\dagger$ oznacza macierz sprzężoną po hermitowsku w znaczeniu kwaternionowym, tzn. $a^\dagger = (\overline{a_{\nu\mu}})$. Kwaternionowa grupa *symplektyczna*,

$$\mathsf{Sp}(n) = \{a \in \mathbb{H}(n) \mid a^\dagger a = \mathrm{id}_{\mathbb{H}^n}\},$$

posiada (definiującą) reprezentację kwaternionową w prawej przestrzeni wektorowej $\mathbb{H}^n$ nad $\mathbb{H}$.

1.2. Reprezentacje algebr.

1.2.1. Reprezentacja algebry A nad K w przestrzeni wektorowej V nad K to odwzorowanie liniowe $\rho : A \to \mathsf{End}\, V$ takie, że $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ dla każdych $a, b \in A$. Np. zbiór liczb zespolonych, rozpatrywany jako algebra nad $\mathbb{R}$, ma reprezentację ρ w $\mathbb{R}^2$ taką, że $\rho(\mathrm{i}) = \varepsilon$. Często rozpatruje się reprezentacje rzeczywistych algebr w zespolonych przestrzeniach wektorowych; np. algebra $\mathbb{H}$ ma reprezentację ρ w $\mathbb{C}^2$ taką, że w oznaczeniach (1.16) jest $\rho(\mathrm{i}) = \sqrt{-1}\sigma$ i $\rho(\mathrm{j}) = \varepsilon$.

1.2.2. Każda algebra A ma reprezentację *regularną* ρ w przestrzeni wektorowej A taką, że $\rho(a)b = ab$ dla wszystkich $a, b \in A$.

1.3. Nieprzywiedlność i rozkładalność.

1.3.1. Niech $A \subset \mathsf{End}\, V$ będzie zbiorem endomorfizmów; podprzestrzeń W przestrzeni V nazywa się podprzestrzenią *niezmienniczą* względem A, jeśli

$$w \in W \ \text{ i } \ f \in A \quad \Rightarrow \quad f(w) \in W.$$

1.3.2. Podprzestrzeń B algebry jest jej lewym ideałem wtedy i tylko wtedy, gdy B jest podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na reprezentację regularną tej algebry.

1.3.3. Dla każdego $A \subset \mathsf{End}\, V$ istnieją dwie *trywialne* podprzestrzenie niezmiennicze: V oraz $\{0\}$. O zbiorze $A \subset \mathsf{End}\, V$ mówi się, że jest *nieprzywiedlny* w V, jeśli posiada tylko trywialne podprzestrzenie niezmiennicze. Mówi się, że reprezentacja ρ grupy G w V jest nieprzywiedlna, jeśli zbiór $\rho(G) \subset \mathsf{End}\, V$ jest nieprzywiedlny.

1.3.4. Reprezentacja przywiedlna jest *rozkładalna* jeśli istnieją dwie właściwe (tzn. nietrywialne) podprzestrzenie niezmiennicze V_1 i V_2 takie, że $V = V_1 \oplus V_2$. Taką reprezentację można rozłożyć, tzn. przedstawić w postaci $\rho_1 \oplus \rho_2$, gdzie $\rho_i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$, $i = 1, 2$, jest reprezentacją G w V_i taką, że jeśli $v = v_1 + v_2$, gdzie $v_i \in V_i$, to, dla każdego $a \in G$, $\rho(a)v = \rho_1(a)v_1 + \rho_2(a)v_2$. Ogólniej, reprezentacja ρ w V jest *całkowicie* albo *w pełni rozkładalna* jeśli istnieje rozkład V na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych nieprzywiedlnych, $V = \bigoplus_{i=1}^m V_i$, $\rho = \bigoplus_{i=1}^m \rho_i$, gdzie $m = 1, 2, \ldots$. (Dopuszcza się wartość $m = 1$ gdyż reprezentację nieprzywiedlną uważa się za w pełni rozkładalną.)

Przykład 3.4. Reprezentacja grupy addytywnej $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^2$ określona przez

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

posiada właściwą podprzestrzeń niezmienniczą, ale nie jest rozkładalna.

1.3.5. Reprezentacje ρ_i grupy G w przestrzeniach V_i, $(i = 1, 2)$, nazywają się *równoważnymi* jeśli istnieje splatający je izomorfizm przestrzeni wektorowych $f : V_1 \to V_2$, tzn. taki izomorfizm, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $f \circ \rho_1(a) = \rho_2(a) \circ f$. Zamiast mówić, że reprezentacje ρ_1 i ρ_2 są równoważne (względnie: nierównoważne) pisze się: $\rho_1 \sim \rho_2$ (względnie: $\rho_1 \nsim \rho_2$)

1.3.6. Podobnie definiuje się nieprzywiedlność, rozkładalność i równoważność reprezentacji algebr.

1.4. Kompleksyfikacja i forma rzeczywista reprezentacji. Jeśli ρ jest reprezentacją rzeczywistą grupy G w przestrzeni V, to jej *kompleksyfikacja* $\rho^{\mathbb{C}}$ jest reprezentacją w przestrzeni $\mathbb{C} \otimes V = V \oplus \mathrm{i}V$ taką, że

$$\rho^{\mathbb{C}}(a)(v + \mathrm{i}w) = \rho(a)v + \mathrm{i}\rho(a)w,$$

dla każdego $a \in G$ i $v, w \in V$. Kompleksyfikacja nieprzywiedlnej reprezentacji rzeczywistej może być przywiedlna.

Przykład 3.5. Kompleksyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnej

$$\rho : \mathsf{U}(1) \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \rho(\exp \mathrm{i}\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \ \ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

jest rozkładalna: $\mathbb{C}^2 = W_+ \oplus W_-$, a przestrzenie

$$W_\pm = \{ \begin{pmatrix} z \\ \pm \mathrm{i} z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \}$$

są dwoma podprzestrzeniami niezmienniczymi reprezentacji $\rho^{\mathbb{C}}$.

Nawiązując do terminologii i oznaczeń §1.4 Rozdz. I i mając reprezentację zespoloną ρ grupy G w przestrzeni V, można utworzyć jej *formę rzeczywistą*

$$\rho^{\mathbb{R}} : G \to \mathsf{GL}(V^{\mathbb{R}}).$$

W przypadku, gdy $V = \mathbb{C}^n$, formę rzeczywistą można w jawny sposób opisać jak następuje. Odwzorowanie

$$\kappa : \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathsf{GL}(2n, \mathbb{R}), \quad \kappa(A + \mathrm{i}B) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

jest monomorfizmem grup. Formą rzeczywistą reprezentacji

$$\rho : G \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) \quad \text{jest reprezentacja} \quad \rho^{\mathbb{R}} = \kappa \circ \rho.$$

Dwie nierównoważne reprezentacje zespolone mogą mieć równoważne formy rzeczywiste.

Przykład 3.6. Formą rzeczywistą reprezentacji ρ_n z przykładu 3.2 jest reprezentacja

$$\rho_n^{\mathbb{R}} : \mathsf{U}(1) \to \mathsf{GL}(2, \mathbb{R}), \quad \rho_n^{\mathbb{R}}(\exp \mathrm{i}\alpha) = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}.$$

Jeśli $n \neq 0$, to reprezentacje zespolone ρ_n i ρ_{-n} są nierównoważne, ale ich formy rzeczywiste $\rho_n^{\mathbb{R}}$ i $\rho_{-n}^{\mathbb{R}}$ są splatane macierzą σ.

1.5. Reprezentacje pseudounitarne i unitarne. Reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni pseudounitarnej (unitarnej) nazywa się *reprezentacją pseudounitarną (unitarną)* jeśli $\rho(a)$ jest przekształceniem pseudounitarnym (unitarnym) dla każdego $a \in G$, zob. ustęp 1.4.4.

Stwierdzenie 3.1. *Reprezentacja unitarna w skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej jest w pełni rozkładalna.*

Dowód. Niech $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją unitarną w przestrzeni unitarnej V. Jeśli W jest podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni V, to podprzestrzeń ortogonalna względem W, jest także niezmiennicza, bo jeśli $v \in W^\perp$, to

$$(\rho(a)v|w) = (\rho(a)v|\rho(a)\rho(a^{-1})w) = (v|\rho(a^{-1})w)$$

na mocy unitarności reprezentacji ρ oraz $(u|\rho(a^{-1})w) = 0$ na mocy niezmienniczości W. Można zatem rozłożyć reprezentację, $\rho = \rho_W \oplus \rho_{W^\perp}$. Jeśli W lub $W^\perp$ posiada właściwą podprzestrzeń niezmienniczą, to można ten proces rozkładu kontynuować, ale tylko skończoną liczbę razy, bo V jest skończenie wymiarowe. □

2. Lematy Schura

LEMAT 3.2. *Jeśli odwzorowanie liniowe $f : V_1 \to V_2$ splata reprezentacje grupy G w przestrzeniach V_1 i V_2, to podprzestrzenie* $\ker f$ *i* $\operatorname{img} f$ *są niezmiennicze.*

Dowód. Niech ρ_i, $i = 1, 2$, będą reprezentacjami splatanymi przez f. Każdy element $\operatorname{img} f$ jest postaci $f(v)$, gdzie $v \in V_1$; na mocy warunku splatania, dla każdego $a \in G$ mamy $\rho_2(a)f(v) = f(\rho_1(a)v) \in \operatorname{img} f$, więc $\operatorname{img} f$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. Jeśli $v \in \ker f$, to $f(v) = 0$, więc $f(\rho_1(a)v) = \rho_2(a)f(v) = 0$, czyli $\rho_1(a)v \in \ker f$. □

LEMAT 3.3. *Jeśli f splata reprezentacje ρ_1 i ρ_2, które są nieprzywiedlne, to: albo $f(v) = 0$ dla każdego $v \in V$, albo f jest izomorfizmem.*

Dowód. Istotnie, jeśli reprezentacja ρ_2 jest nieprzywiedlna, to na podstawie poprzedniego lematu mamy $\operatorname{img} f = V_2$ albo $\{0\}$. W tym ostatnim przypadku $f(v) = 0$ dla każdego $v \in V_1$. Jeśli natomiast $\operatorname{img} f = V_2$, to f jest izomorfizmem, bo w przeciwnym razie $\ker f$ byłoby właściwą podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni V_1. □

Inaczej mówiąc, jeśli istnieje nietrywialne odwzorowanie liniowe splatające dwie reprezentacje nieprzywiedlne, to te reprezentacje są równoważne. Zastosujemy teraz poprzedni lemat do przypadku, kiedy $f : V \to V$ splata reprezentację ρ samą ze sobą.

LEMAT 3.4. *Niech ρ będzie nieprzywiedlną reprezentacją grupy G w skończenie wymiarowej przestrzeni zespolonej V. Jeśli $f : V \to V$ splata ρ ze sobą,*

$$f \circ \rho(a) = \rho(a) \circ f \quad \text{dla każdego } a \in G,$$

to istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że $f(v) = \lambda v$ dla każdego $v \in V$.

Dowód. Niech $\mu \in \mathbb{C}$ i $f_\mu : V \to V$, $f_\mu(v) = f(v) - \mu v$, to $f_\mu \circ \rho(a) = \rho(a) \circ f_\mu$. Równanie $\det(f - \mu I) = 0$ ma w dziedzinie liczb zespolonych przynajmniej jedno rozwiązanie λ; odwzorowanie f_λ jest osobliwe: istnieje wektor $v_0 \neq 0$ taki, że $f_\lambda(v_0) = 0$. Na podstawie Lematu 3.3 wynika stąd, że $f_\lambda = 0$ czyli $f(v) = \lambda v$ dla każdego $v \in V$. □

Udowodniliśmy w istocie następujący

LEMAT 3.5. *W dziedzinie liczb zespolonych, macierz przemienna ze wszystkimi macierzami nieprzywiedlnego zbioru macierzy jest krotnością macierzy jednostkowej.*

Reprezentacja (3.2) jest nieprzywiedlna w dziedzinie rzeczywistej, ale macierz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ jest przemienna ze wszystkimi macierzami zbioru $\rho(\mathsf{U}(1))$.

Z Lematu 3.4 wynika następujący

Wniosek. Każda nieprzywiedlna zespolona reprezentacja grupy przemiennej jest jednowymiarowa.

Istotnie, niech $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją zespoloną. Z przemienności grupy wynika $\rho(a)\rho(b) = \rho(b)\rho(a)$. Utożsamiając w tym równaniu $\rho(b)$ z f z Lematu 3.4 otrzymujemy, że istnieje funkcja $\lambda : G \to \mathbb{C}$ taka, że $\rho(b) = \lambda(b)I$ dla każdego $b \in G$; taka diagonalna reprezentacja jest nieprzywiedlna tylko wtedy, gdy jest jednowymiarowa.

3. Charakter reprezentacji

Każdej zespolonej reprezentacji $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ w skończenie wymiarowej przestrzeni V przyporządkowuje się jej *charakter* zdefiniowany jako funkcja

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}, \quad \chi_\rho(a) = \operatorname{tr} \rho(a).$$

Jeśli e oznacza element neutralny grupy, to

$$\chi_\rho(e) = \dim V.$$

Widać od razu, że charakter reprezentacji jest stały na klasie elementów sprzężonych,

$$\chi_\rho(aba^{-1}) = \chi_\rho(b),$$

dla każdych $a, b \in G$. Jeśli $\rho \sim \sigma$, to $\chi_\rho = \chi_\sigma$.

4. Działania na reprezentacjach

Podamy teraz kilka ważnych sposobów budowania nowych reprezentacji ze znanych reprezentacji. O przestrzeniach wektorowych, będących nośnikami reprezentacji, zakładamy, że są skończenie wymiarowe nad $\Bbbk = \mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$.

4.1. Suma prosta reprezentacji. Mając reprezentacje $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ i $\sigma : G \to \mathsf{GL}(W)$ można utworzyć ich *sumę prostą*

$$\rho \oplus \sigma : G \to \mathsf{GL}(V \oplus W)$$

kładąc

$$(\rho \oplus \sigma)(a)(v, w) = (\rho(a)v, \sigma(a)w), \ a \in G, \ v \in V, \ w \in W.$$

Charakter sumy prostej reprezentacji jest sumą ich charakterów,

$$\chi_{\rho\oplus\sigma} = \chi_\rho + \chi_\sigma.$$

4.2. Iloczyn tensorowy reprezentacji. Podobnie tworzy się *iloczyn tensorowy* reprezentacji:

$$\rho \otimes \sigma : G \to \mathsf{GL}(V \otimes W)$$

kładąc

$$(\rho \otimes \sigma)(a)(v \otimes w) = \rho(a)v \otimes \sigma(a)w.$$

Biorąc pod uwagę, że jeśli $F, G \in \mathsf{End}\, V$, to $\operatorname{tr}(F \otimes G) = \operatorname{tr} F \operatorname{tr} G$, widać, że charakter iloczynu tensorowego reprezentacji jest iloczynem ich charakterów,

$$\chi_{\rho\otimes\sigma} = \chi_\rho \cdot \chi_\sigma.$$

Jeśli **1** oznacza reprezentację trywialną, to dla każdej reprezentacji τ mamy $\mathbf{1} \otimes \tau = \tau$.

Iloczyn tensorowy $V \otimes V$ można rozłożyć w sumę prostą przestrzeni $\mathbf{S}^2 V$ tensorów symetrycznych i przestrzeni $\mathbf{\Lambda}^2 V$ tensorów antysymetrycznych,

$$V \otimes V = \mathbf{S}^2 V \oplus \mathbf{\Lambda}^2 V.$$

Mianowicie, tensor $T = T^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu \in V \otimes V$ można rozłożyć na części: symetryczną i antysymetryczną o składowych, odpowiednio,

$$T^{(\mu\nu)} = \tfrac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) \quad \text{i} \quad T^{[\mu\nu]} = \tfrac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}).$$

Niech $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją. Rozkładowi przestrzeni $V \otimes V$ odpowiada rozkład reprezentacji,

$$\rho \otimes \rho = \mathbf{S}^2 \rho \oplus \mathbf{\Lambda}^2 \rho.$$

4.3. Reprezentacja kontragredientna (albo: dualna). Przypomnijmy, że jeśli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\Bbbk = \mathbb{R}$ albo $\mathbb{C}$, to przestrzeń *dualna* V^* względem V, składająca się ze wszystkich funkcji liniowych (form) na V, jest przestrzenią wektorową tego samego wymiaru co V. Jeśli $v \in V$, to wartość funkcji $\alpha \in V^*$ na wektorze $v \in V$ zapisuje się jako $\langle v, \alpha \rangle$. Przestrzeń V^{**} można utożsamić z V. Jeśli $f : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym, to odwzorowanie dualne (transponowane) $f^* : W^* \to V^*$ jest określone przez

$$\langle v, f^*(\alpha) \rangle = \langle f(v), \alpha \rangle \tag{3.4}$$

dla $v \in V$ i $\alpha \in W^*$. Jeśli $g : U \to V$, to $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, itd.

Reprezentacja *kontragredientna* (inaczej: *dualna*) do reprezentacji ρ grupy G w przestrzeni wektorowej V jest to reprezentacja $\check{\rho}$ w przestrzeni dualnej V^*,

$$\check{\rho} : G \to \mathsf{GL}(V^*), \quad \check{\rho}(a) = \rho(a^{-1})^*, \ a \in G.$$

Łatwo widać, że reprezentacja $\check{\rho}$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest nieprzywiedlna.

STWIERDZENIE 3.6. *Reprezentacje ρ i $\check{\rho}$ grupy G są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieosobliwa forma biliniowa $V \times V \to \Bbbk$ niezmiennicza względem działania grupy.*

Dowód. Jeśli reprezentacje ρ i $\check{\rho}$ są równoważne, to istnieje izomorfizm $B : V \to V^*$ taki, że

$$\rho(a^{-1})^* = B\rho(a)B^{-1}, \tag{3.5}$$

czyli $\rho(a)^* B \rho(a) = B$. Dla dowolnych $a \in G$ i $u, v \in V$ wynika stąd, że

$$\langle \rho(a)u, B\rho(a)v \rangle = \langle u, Bv \rangle,$$

więc forma $(u, v) \mapsto \langle u, Bv \rangle$ jest niezmiennicza; jest ona nieosobliwa, bo B jest izomorfizmem. Na odwrót, nieosobliwa, niezmiennicza forma biliniowa definiuje izomorfizm $B : V \to V^*$ splatający reprezentacje ρ i $\check{\rho}$. $\square$

Stwierdzenie 3.7. *Jeśli reprezentacja zespolona ρ jest nieprzywiedlna i $\rho \sim \check{\rho}$, to forma biliniowa, o której mowa w Stwierdzeniu 3.6, jest symetryczna albo antysymetryczna i jest wyznaczona z dokładnością do czynnika liczbowego.*

Dowód. Obliczając transpozycję obu stron równania (3.5), zastępując a przez a^{-1} i stosując ponownie to równanie, otrzymujemy $(B^*)^{-1}B\rho(a) = \rho(a)(B^*)^{-1}B$. Na podstawie Lematu 3.4 wynika stąd istnienie $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ takiego, że $B^* = \lambda B$, więc $B = B^{**} = \lambda^2 B$, czyli $B^* = B$ albo $B^* = -B$. Jeśli oba izomorfizmy B i B' spełniają (3.5), to $B^{-1}B'$ jest przemienne z każdym $\rho(a)$, więc $B' = \lambda B$. □

4.4. Reprezentacja sprzężona. *Reprezentacja sprzężona* $\bar{\rho}$ względem reprezentacji zespolonej $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ jest reprezentacją w przestrzeni $\bar{V}$,

$$\bar{\rho} : G \to \mathsf{GL}(\bar{V}), \quad \bar{\rho}(a) = \overline{\rho(a)}, \ \ a \in G.$$

Łatwo widać, że reprezentacja $\bar{\rho}$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest nieprzywiedlna.

Stwierdzenie 3.8. *Jeśli reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni zespolonej V jest równoważna reprezentacji sprzężonej $\bar{\rho}$ i jest nieprzywiedlna, to izomorfizm $C : V \to \bar{V}$, splatający te reprezentacje, jest określony z dokładnością do czynnika liczbowego, który można wybrać tak, aby $\bar{C}C = \mathrm{id}_V$ albo $\bar{C}C = -\mathrm{id}_V$.*

Dowód. Jeśli $\rho \sim \bar{\rho}$, to istnieje izomorfizm liniowy

$$C : V \to \bar{V} \quad \text{taki, że} \quad \bar{\rho}(a) = C\rho(a)C^{-1} \tag{3.6}$$

dla każdego $a \in G$. Stąd $\rho(a) = \bar{C}\bar{\rho}(a)\bar{C}^{-1} = \bar{C}C\rho(a)C^{-1}\bar{C}^{-1}$, więc $\bar{C}C$ jest przemienne z każdym $\rho(a)$, zatem $\bar{C}C = \lambda\,\mathrm{id}_V$. Obliczając ślad ostatniego równania, otrzymujemy $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Zastępując C przez $C/\sqrt{|\lambda|}$ otrzymujemy zapowiedziany wynik. □

Mówimy, że reprezentacja ρ w zespolonej przestrzeni wektorowej jest *typu zespolonego* jeśli $\rho \nsim \bar{\rho}$.

Mówimy, że reprezentacja ρ w zespolonej przestrzeni wektorowej V jest *typu rzeczywistego* jeśli $\rho \sim \bar{\rho}$, a izomorfizm (3.6) można wybrać tak, że

$$\bar{C}C = \mathrm{id}_V .$$

Stwierdzenie 3.9. *Forma rzeczywista $\rho^{\mathbb{R}}$ reprezentacji typu rzeczywistego ρ rozkłada się w sumę prostą dwóch równoważnych reprezentacji, $\rho^{\mathbb{R}} = \rho_+ \oplus \rho_-$, $\rho_+ \sim \rho_-$.*

Dowód. Niech $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ będzie reprezentacją typu rzeczywistego. Formę rzeczywistą $V^{\mathbb{R}}$ przestrzeni V rozkładamy w sumę prostą, $V^{\mathbb{R}} = V_+ \oplus V_-$, definiując

$$V_\pm = \{v \in V^{\mathbb{R}} \mid \bar{v} = \pm Cv\}.$$

Podprzestrzenie V_+ i V_- są niezmiennicze ze względu na reprezentację $\rho^{\mathbb{R}}$: jeśli $v \in V_\pm$ i $a \in G$, to $\rho(a)v \in V_\pm$ gdyż $\overline{\rho(a)v} = C\rho(a)C^{-1}\bar{v} = \pm C\rho(a)v$;

można więc zdefiniować dwie reprezentacje rzeczywiste $\rho_\pm$ kładąc $\rho_\pm(a) = \rho^{\mathbb{R}}(a)|V_\pm$. Odwzorowanie $V_+ \to V_-$, $v \mapsto \mathrm{i}v$, jest izomorfizmem V_+ na V_- splatającym reprezentacje ρ_+ i ρ_-. □

Reprezentacje $\rho_\pm$ odniesione do baz w przestrzeniach $V_\pm$ mają rzeczywiste elementy macierzowe.

Mówimy, że reprezentacja ρ w zespolonej przestrzeni wektorowej V jest *typu kwaternionowego* jeśli $\rho \sim \bar\rho$, a izomorfizm (3.6) można wybrać tak, że

$$\bar{C}C = -\operatorname{id}_V . \tag{3.7}$$

STWIERDZENIE 3.10. *Jeśli $\rho : G \to \mathsf{GL}(V)$ jest reprezentacją* typu *kwaternionowego, to zespolona przestrzeń wektorowa V ma wymiar parzysty i można nadać jej taką strukturę prawej przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{H}$, że reprezentacja ρ staje się reprezentacją kwaternionową, tzn. zachodzi* (3.1)

Dowód. Obliczając wyznacznik obu stron (3.7) stwierdzamy, że wymiar przestrzeni V jest liczbą parzystą, $\dim_{\mathbb{C}} V = 2n$. W grupie $(V +)$ można wprowadzić strukturę prawej przestrzeni wektorowej nad ciałem kwaternionów kładąc

$$v\mathrm{i} = \sqrt{-1}\, v, \quad v\mathrm{j} = \overline{Cv}.$$

Łatwo sprawdzamy, że $(v\mathrm{i})\mathrm{i} = -v$, $(v\mathrm{j})\mathrm{j} = -v$ oraz $(v\mathrm{i})\mathrm{j} + (v\mathrm{j})\mathrm{i} = 0$; kładąc $v\mathrm{k} = (v\mathrm{i})\mathrm{j}$ możemy poprawnie określić mnożenie v przez $q = x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}+t \in \mathbb{H}$ z prawej strony. Ponadto, na mocy (3.6), zachodzi (3.1). □

Jeśli ciąg $(e_1, \dots, e_n)$ jest bazą kwaternionową w V, to kładąc $\rho(a)(e_\nu) = \sum_\mu e_\mu \rho_{\mu\nu}(a)$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$, możemy dla każdego $a \in G$ zdefiniować macierz $\big(\rho_{\mu\nu}(a)\big) \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{H})$. Na mocy (3.1) mamy

$$\rho_{\mu\nu}(ab) = \textstyle\sum_\alpha \rho_{\mu\alpha}(a)\rho_{\alpha\nu}(b) \ \text{ dla } \ a, b \in G,$$

tzn. $a \mapsto \big(\rho_{\mu\nu}(a)\big)$ jest reprezentacją G w przestrzeni $\mathbb{H}^n$.

Niech (V, A) będzie przestrzenią pseudounitarną, zob. ustęp 1.4.4.

STWIERDZENIE 3.11. *Nieprzywiedlna reprezentacja ρ jest pseudounitarna wtedy, i tylko wtedy, gdy $\check\rho \sim \bar\rho$.*

Dowód. Na podstawie (1.15) widać, że jesli reprezentacja ρ grupy G w (V, A) jest pseudounitarna, to

$$\rho(a^{-1}) = A^{-1}\overline{\rho(a)^*}A \tag{3.8}$$

dla każdego $a \in G$. Izomorfizm A^* splata zatem reprezentacje $\check\rho$ i $\bar\rho$, nawet jeśli ρ jest przywiedlna. Na odwrót, jeśli $\check\rho \sim \bar\rho$, to istnieje izomorfizm $A : V \to \bar{V}^*$ taki, że zachodzi (3.8); iterując to równanie otrzymujemy, iż $A^{-1}\bar{A}^*$ jest przemienne z $\rho(a)$ dla każdego $a \in G$, zatem jeśli reprezentacja ρ jest nieprzywiedlna, to istnieje $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ takie, że $\bar{A}^* = \lambda A$. Wynika stąd $\lambda\bar\lambda = 1$, zatem nieosobliwe odwzorowanie $A' = \sqrt{\lambda}A$ spełnia (1.12) i określa w V strukturę przestrzeni pseudounitarnej, względem której reprezentacja ρ jest pseudounitarna. □

Stwierdzenie 3.12. *Jeśli reprezentacja ρ jest nieprzywiedlna,* unitarna *i $\rho \sim \check{\rho}$, to dla izomorfizmów B i C, zdefiniowanych w* (3.5) *i* (3.6) *mamy:*
albo $B^* = B$ *i* $\bar{C}C = \mathrm{id}_V$,
albo $B^* = -B$ *i* $\bar{C}C = -\mathrm{id}_V$.

Dowód. Na podstawie (1.14), warunek pseudounitarności reprezentacji ρ można zapisać w postaci

$$\check{\rho}(a) = A^*\overline{\rho(a)}(A^*)^{-1}. \tag{3.9}$$

Na podstawie stw. 3.11 otrzymujemy $\rho \sim \bar{\rho}$. Istnieje więc izomorfizm $C : V \to \bar{V}$ taki, że zachodzi (3.6), co w połączeniu z (3.9) daje $B = A^*C$. Obliczając $(\overline{Cu}|v)$ przy pomocy (1.13) otrzymujemy

$$(\overline{Cu}|v) = \langle v, Bu\rangle. \tag{3.10}$$

Połóżmy

$$B^* = \beta B \quad \text{i} \quad \bar{C}C = \gamma\,\mathrm{id}_V, \quad \text{gdzie} \quad \beta, \gamma \in \{1, -1\}. \tag{3.11}$$

Mamy teraz

$$\begin{aligned}
(\overline{Cu}|\overline{Cu}) &= \langle \overline{Cu}, Bu\rangle && \text{na mocy (3.10)}\\
&= \langle u, B^*\overline{Cu}\rangle && \text{z (3.4)}\\
&= \beta\langle u, B\overline{Cu}\rangle && \text{z (3.11)}\\
&= \beta(\bar{C}Cu|u) && \text{z (3.10)}\\
&= \beta\gamma(u|u) && \text{z (3.11).}
\end{aligned}$$

Uwzględniając teraz, że przestrzeń (V, A) i reprezentacja ρ są unitarne, więc $u \neq 0$ pociąga $(u|u) > 0$, otrzymujemy z ostatniej równości $\beta\gamma > 0$, stąd $\beta = \gamma$. □

Przykład 3.7. (Reprezentacje spinorowe). Kładąc $\varepsilon = \sigma_2/\mathrm{i}$ mamy dla $a \in \mathbb{C}(2)$:

$$a^*\varepsilon a = (\det a)\varepsilon. \tag{3.12}$$

(i) Niech σ oznacza reprezentację definiującą grupę $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$; jest ona nieprzywiedlna. Z (3.12) wynika, że $\check{\sigma} \sim \sigma$. Z drugiej strony, obliczając charaktery, otrzymujemy $\bar{\sigma} \nsim \sigma$: reprezentacja jest typu zespolonego. Zatem $\check{\sigma} \nsim \bar{\sigma}$, więc na podstawie stw. 3.11 wnioskujemy, że reprezentacja σ nie jest pseudounitarna względem żadnej struktury w $\mathbb{C}^2$.

Tworząc sumy proste i iloczyny tensorowe można znaleźć inne reprezentacje grupy $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$. Np. reprezentacje $\sigma \oplus \bar{\sigma}$ i $\sigma \otimes \bar{\sigma}$ są typu rzeczywistego.

(ii) Macierz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ można rozpatrywać jako odwzorowanie (1.11) definiujące w $V = \mathbb{C}^2$ strukturę pseudounitarną o sygnaturze $(1, 1)$. Ograniczenie reprezentacji σ do grupy

$$\mathsf{SU}(1, 1) = \{a \in \mathsf{SL}(2, \mathbb{C}) \mid \bar{a}^*Aa = A\}$$

jest reprezentacją typu rzeczywistego gdyż teraz $\bar{a} = CaC^{-1}$, gdzie $C = (A^*)^{-1}B$, $B = \varepsilon$. Przykład ten pokazuje, że założenie o unitarności reprezentacji w stw. 3.12 jest istotne: tutaj $B^* = -B$ i $\bar{C}C = \mathrm{id}$.

Zadania

ZADANIE 3.1. Grupa $\mathfrak{S}_3$ działa na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jako grupa izometrii trójkąta równobocznego. Znaleźć odpowiadającą temu działaniu reprezentację tej grupy. Pokazać, że grupy $\mathfrak{A}_3$ i $\mathbb{Z}_3$ są izomorficzne.

ZADANIE 3.2. Znaleźć klasy elementów sprzężonych w następujących grupach: $\mathbf{D}_4$, $\mathbf{T}$, $\mathsf{SU}(2)$.

ZADANIE 3.3. Znaleźć typ wszystkich reprezentacji zespolonych nieprzywiedlnych grup $\mathbb{Z}_n$, $n = 2, 3, \ldots$.

ZADANIE 3.4. Pokazać, że reprezentacja definiująca σ grupy $\mathsf{SU}(2)$ jest reprezentacją typu kwaternionowego i $\check{\sigma} \sim \sigma$. Znaleźć rozkład iloczynu $\sigma \otimes \sigma$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

ZADANIE 3.5. Pokazać, że grupy $\mathsf{SU}(1,1)$ i $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ są izomorficzne. Znaleźć rozkład iloczynu tensorowego $\sigma \otimes \sigma$ na reprezentacje nieprzywiedlne.

ZADANIE 3.6. Pokazać, że jeśli ρ jest reprezentacją rzeczywistą, to reprezentacja $(\rho^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ jest równoważna reprezentacji $\rho \oplus \rho$.

ZADANIE 3.7. Niech ρ będzie reprezentacją pseudounitarną grupy G. Pokazać, że $\chi_\rho(a^{-1}) = \overline{\chi_\rho(a)}$ dla $a \in G$.

ZADANIE 3.8. Udowodnić następujące wzory na charaktery części symetrycznej i antysymetrycznej reprezentacji $\rho \otimes \rho$.

$$\chi_{\mathbf{S}^2\rho}(a) = \tfrac{1}{2}((\operatorname{tr}\rho(a))^2 + \operatorname{tr}\rho(a)^2), \quad \chi_{\mathbf{\Lambda}^2\rho}(a) = \tfrac{1}{2}((\operatorname{tr}\rho(a))^2 - \operatorname{tr}\rho(a)^2)$$

ZADANIE 3.9. Znaleźć centra następujących grup: $\mathsf{SO}(n)$, $\mathsf{SU}(n)$, $\mathsf{Sp}(n)$.

ZADANIE 3.10. Skonstruować monomorfizm $\mathsf{Sp}(n) \to \mathsf{SU}(2n)$.

ZADANIE 3.11. Pokazać, że reprezentacja definiująca grupę $\mathsf{SL}(n,\mathbb{C})$ i reprezentacja względem niej kontragredientna są równoważne dla $n = 2$, ale nie dla $n > 2$.

IV

Reprezentacje grup skończonych

W niniejszym rozdziale G oznacza grupę rzędu N.

1. Przykłady reprezentacji

PRZYKŁAD 4.1. Niech G będzie grupą działającą na zbiorze skończonym X. Działanie grupy można rozszerzyć do reprezentacji ρ grupy G w przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to \Bbbk\}$ nad ciałem $\Bbbk$ kładąc $(\rho(a)f)(x) = f(a^{-1}x)$. Bazą liniową przestrzeni $\mathcal{F}(X)$ jest zbiór wektorów $(e_x)_{x\in X}$, gdzie e_x jest wektorem (funkcją) takim, że

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x = y \\ 0 & \text{jeśli } x \neq y. \end{cases}$$

Każdy wektor f można przedstawić w postaci sumy $\sum_{x\in X} f(x)e_x$.

PRZYKŁAD 4.2. Dla każdego całkowitego $n > 1$, grupa symetryczna $\mathfrak{S}_n$ ma jednowymiarową nietrywialną reprezentację *alternującą*

$$\operatorname{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \mathsf{GL}(\mathbb{R}),$$

gdzie $\operatorname{sgn}(\pi)$, zdefiniowane w (1.3), jest teraz rozpatrywane jako liniowe odwzorowanie $\mathbb{R}$ w siebie.

PRZYKŁAD 4.3. Inną, naturalną reprezentacją grupy symetrycznej jest reprezentacja *standardowa* σ, zdefiniowana jak następuje. Niech $\Bbbk = \mathbb{C}$. Definiujące grupę $\mathfrak{S}_n$ działanie na zbiorze $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ indukuje, zgodnie z Przykładem 4.1, reprezentację tej grupy w przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(X)$, którą można utożsamić z $\mathbb{C}^n$. Permutacja π posyła wektor $(z_1, \ldots, z_n)$ w wektor $(z_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, z_{\pi^{-1}(n)})$. Przestrzeń

$$V_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 + \ldots + z_n = 0\}$$

jest $(n-1)$-wymiarową podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Reprezentacja $\sigma : \mathfrak{S}_n \to \mathsf{GL}(V_n)$ dana jest przez

$$\sigma(\pi)(z_1, \ldots, z_n) = (z_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, z_{\pi^{-1}(n)}).$$

2. Uśrednianie na grupie

Niech Y będzie przestrzenią wektorową. Funkcję $f : G \to Y$ można *uśrednić*, definiując

$$\langle f\rangle = N^{-1} \textstyle\sum_{b\in G} f(b). \tag{4.1}$$

Sumy $N^{-1}\sum_b f(ab)$ i $N^{-1}\sum_b f(ba)$, $a \in G$, różnią się od sumy (4.1) tylko porządkiem składników. Inaczej mówiąc, mamy $\langle f\circ\mathsf{L}(a)\rangle = \langle f\rangle$ i $\langle f\circ\mathsf{R}(a)\rangle =$

$\langle f\rangle$: lewe i prawe przesunięcia nie zmieniają średniej. Nieco ogólniejszy wynik opisuje następujące

Stwierdzenie 4.1. *Niech X będzie G-przestrzenią, a Y niech będzie przestrzenią wektorową, w której także działa grupa G. Jeśli $h : X \to Y$, to odwzorowanie uśrednione*

$$\langle h\rangle : X \to Y, \quad \langle h\rangle(x) = N^{-1} \textstyle\sum_{a\in G} a \cdot h(a^{-1}x), \tag{4.2}$$

jest ekwiwariantne*,*

$$\langle h\rangle(ax) = a \cdot \langle h\rangle(x),$$

dla każdego $a \in G$ i $x \in X$.

Dowód. Istotnie, na podstawie (4.2) mamy

$$N\langle h\rangle(ax) = \textstyle\sum_{b\in G} b \cdot h(b^{-1}ax) = \sum_{c\in G} ac \cdot h(c^{-1}x) = Na \cdot \langle h\rangle(x). \qquad \square$$

3. Reprezentacja regularna

Biorąc w Przykładzie 4.1 $X = G$ otrzymujemy reprezentację grupy skończonej G w przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(G)$; tę ważną reprezentację nazywa się *reprezentacją regularną* ρ grupy. Jeśli $f \in \mathcal{F}(G)$, $a, b \in G$, to

$$(\rho(a)f)(b) = f(a^{-1}b). \tag{4.3}$$

Jeśli $\Bbbk = \mathbb{C}$, to w przestrzeni $\mathcal{F}(G)$ można określić hermitowski iloczyn skalarny kładąc, dla $f, g \in \mathcal{F}(G)$,

$$(f|g) = N^{-1} \textstyle\sum_{a\in G} \overline{f(a)}g(a). \tag{4.4}$$

Reprezentacja regularna jest unitarna względem tak zdefiniowanego iloczynu.

4. Relacje ortogonalności

Stwierdzenie 4.2. *Każda reprezentacja grupy skończonej w przestrzeni zespolonej jest równoważna pewnej reprezentacji unitarnej.*

Dowód. Niech $(u|v)$ oznacza hermitowski iloczyn skalarny wektorów u i v w przestrzeni V, a $\sigma : G \to \mathsf{GL}(V)$ niech będzie reprezentacją grupy skończonej G. Grupa G działa w przestrzeni $X = V \times V$ i w trywialny sposób w $Y = \mathbb{C}$. Odwołując się do stw. 4.1 widzimy, że reprezentacja σ jest unitarna względem uśrednionego iloczynu skalarnego $(u|v)_\sigma = N^{-1} \sum_{a\in G}(\sigma(a)u|\sigma(a)v)$. $\square$

Wniosek. Każda reprezentacja grupy skończonej jest w pełni rozkładalna.

W dalszym ciągu będziemy pisali $(u|v)$ zamiast $(u|v)_\sigma$.

Niech σ i τ będą nieprzywiedlnymi reprezentacjami zespolonymi grupy skończonej G w przestrzeniach V i W, odpowiednio. Jeśli $h : V \to W$ jest liniowe, to odwzorowanie uśrednione

$$\langle h\rangle = N^{-1} \textstyle\sum_{a\in G} \tau(a^{-1}) \circ h \circ \sigma(a) \tag{4.5}$$

splata reprezentacje σ i τ. Na podstawie Lematu 3.3, mamy

$$\text{jeśli } \sigma \nsim \tau, \text{ to } \langle h \rangle = 0. \tag{4.6}$$

Jeśli $V = W$ i $\sigma = \tau$, to na podstawie Lematu 3.4, obliczając ślady, otrzymujemy

$$\langle h \rangle = \frac{\operatorname{tr} h}{\dim V} \operatorname{id}_V . \tag{4.7}$$

Wybierając bazy unitarne (e_i) w V i (f_μ) w W, możemy wprowadzić elementy macierzowe kładąc

$$\sigma(a)e_i = \textstyle\sum_j e_j \sigma_{ji}(a), \quad \tau(a)f_\mu = \sum_\nu f_\nu \tau_{\nu\mu}(a), \quad h(e_i) = \sum_\mu f_\mu h_{\mu i}.$$

Obliczając obie strony równości $\langle h \rangle = 0$ na wektorze e_i oraz biorąc pod uwagę liniową niezależność wektorów (f_μ) i dowolność h, otrzymujemy

$$\text{jeśli } \sigma \nsim \tau, \text{ to } \textstyle\sum_{a\in G} \tau_{\nu\mu}(a^{-1})\sigma_{ji}(a) = 0. \tag{4.8}$$

Podobnie, jeśli $\sigma = \tau$, to równania (4.5) i (4.7)) dają

$$N^{-1} \textstyle\sum_{a\in G} \sigma_{ji}(a^{-1})\sigma_{lk}(a) = \dfrac{1}{\dim V}\delta_{kj}\delta_{il}. \tag{4.9}$$

Pamiętając o tym, że każda reprezentacja grupy skończonej jest równoważna reprezentacji unitarnej, załóżmy, że σ i τ są unitarne; wtedy $\tau_{\nu\mu}(a^{-1}) = \overline{\tau_{\mu\nu}(a)}$ i podobnie dla elementów macierzowych reprezentacji σ. Rozpatrując elementy macierzowe reprezentacji jako wektory przestrzeni $\mathcal{F}(G)$ i używając iloczynu skalarnego (4.4), możemy zapisać (4.8) i (4.9) w postaci

$$\text{jeśli } \sigma \nsim \tau, \text{ to } (\tau_{\mu\nu}|\sigma_{ij}) = 0, \tag{4.10}$$

$$(\sigma_{ij}|\sigma_{kl}) = \frac{1}{\dim V}\delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{4.11}$$

Niech $\mathcal{F}_0(G)$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{F}(G)$, składającą się ze wszystkich funkcji *centralnych*, tzn. funkcji na G stałych na klasach elementów sprzężonych; charakter każdej reprezentacji grupy G należy do $\mathcal{F}_0(G)$. Korzystając z równości $\chi_\tau(a) = \sum_\mu \tau_{\mu\mu}(a)$, przy założeniu, że reprezentacje σ i τ są nieprzywiedlne, otrzymujemy z (4.10) i (4.11),

$$(\chi_\sigma|\chi_\tau) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \sigma \sim \tau, \\ 0 & \text{jeśli } \sigma \nsim \tau. \end{cases} \tag{4.12}$$

Charaktery tworzą więc zbiór wektorów ortonormalnych w przestrzeni $\mathcal{F}_0(G)$. Wynika stąd, że liczba p nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych jest $\leqslant \dim \mathcal{F}_0(G) =$ liczbie klas w G.

Będziemy mówili, że $\{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ jest *pełnym układem reprezentacji* grupy skończonej G, jeśli: 1^0 każda reprezentacja τ_i, $i = 1, \dots, p$, jest unitarna i nieprzywiedlna, 2^0 $i \neq j \Rightarrow \tau_i \nsim \tau_j$, oraz 3^0 jeśli σ jest reprezentacją nieprzywiedlna i zespoloną G, to istnieje i takie, że $\sigma \sim \tau_i$. Będziemy oznaczali przez χ_i charakter reprezentacji τ_i.

Twierdzenie (o reprezentacjach grup skończonych). *Niech G będzie grupą rzędu N.*

(i) *Dla każdej pary reprezentacji (niekoniecznie nieprzywiedlnych) σ i τ grupy G zachodzi*

$$\sigma \sim \tau \iff \chi_\sigma = \chi_\tau.$$

(ii) *Reprezentacja σ jest nieprzywiedlna* $\iff (\chi_\sigma|\chi_\sigma) = 1$.

(iii) *Niech $(\tau_1, \ldots, \tau_p)$ będzie pełnym układem reprezentacji grupy G w przestrzeniach $V_1, \ldots, V_p$, odpowiednio. W rozkładzie reprezentacji regularnej ρ grupy G składowa τ_i występuje z krotnością $n_i = \dim V_i$,*

$$\rho \sim n_1\tau_1 \oplus \cdots n_p\tau_p, \tag{4.13}$$

a stąd

$$N = n_1^2 + \ldots + n_p^2. \tag{4.14}$$

(iv) *Liczba p reprezentacji nieprzywiedlnych G jest równa liczbie klas elementów sprzężonych w G.*

Dowód. (i) Jeśli $\sigma \sim \tau$, to $\chi_\sigma = \chi_\tau$. Niech (τ_i), $i = 1, \ldots, p$, będą reprezentacjami, o których mowa w części (iii) twierdzenia. Ich charaktery stanowią liniowo niezależny układ wektorów. Jeśli $\sigma \sim m_1\tau_1 \oplus \cdots \oplus m_p\tau_p$ i $\tau \sim n_1\tau_1 \oplus \cdots \oplus n_p\tau_p$, to $\chi_\sigma = m_1\chi_1 + \ldots m_p\chi_p$ i $\chi_\tau = n_1\chi_1 + \ldots n_p\chi_p$, więc $\chi_\sigma = \chi_\tau$ pociąga $m_i = n_i$ dla $i = 1, \ldots, p$, a stąd $\sigma \sim \tau$.

(ii) Jeśli $\sigma \sim m_1\tau_1 \oplus \cdots \oplus m_p\tau_p$, to $(\chi_\sigma|\chi_\sigma) = m_1^2 + \ldots m_p^2$; reprezentacja σ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy ta ostatnia suma $= 1$.

(iii) Charakter χ_ρ reprezentacji regularnej obliczamy z definicji (4.3) tej reprezentacji. Mamy $(\rho(a)e_b)(c) = e_b(a^{-1}c) = e_{ab}(c)$, więc kładąc $\rho(a)e_b = \sum_c e_c\rho_{c,b}(a)$ otrzymujemy $\rho_{c,b}(1) = \delta_{c,b}$, natomiast jeśli $a \neq 1$ i $b = c$, to $\rho_{c,b}(a) = 0$. Wynika stąd, że

$$\chi_\rho(1) = N \quad \text{oraz} \quad \chi_\rho(a) = 0 \quad \text{dla } a \neq 1.$$

Z drugiej strony, na podstawie (4.13) mamy

$$\chi_\rho = n_1\chi_1 + \cdots + n_p\chi_p. \tag{4.15}$$

Obliczając iloczyn skalarny obu stron tej równości z charakterem χ_i otrzymujemy

$$n_i = (\chi_\rho|\chi_i) = N^{-1}\textstyle\sum_a \overline{\chi_\rho(a)}\chi_i(a) = \chi_i(1) = \dim V_i.$$

Obliczając wartość obu stron równości (4.15) na jedności grupy otrzymujemy (4.14).

(iv) Wystarczy pokazać, że ciąg $(\chi_1, \ldots, \chi_p)$ rozpina $\mathcal{F}_0(G)$. Na podstawie (4.10), (4.11) i (4.14) widać, że ciąg wektorów

$$(\tau_{i\ \mu_i\nu_i}), \ \ 1 \leqslant i \leqslant p, \ \ 1 \leqslant \mu_i, \nu_i \leqslant n_i,$$

jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(G)$. Funkcję $f \in \mathcal{F}(G)$ można więc przedstawić w postaci

$$f = \textstyle\sum_i \sum_{\mu_i,\nu_i} f_{i\mu_i\nu_i}\tau_{i\mu_i\nu_i}. \tag{4.16}$$

Niech teraz f będzie funkcją centralną, to $f(a) = f(bab^{-1})$ dla każdych $a, b \in G$, więc

$$f(a) = N^{-1} \textstyle\sum_{b\in G} f(bab^{-1}). \tag{4.17}$$

Wykorzystując rozkład (4.16) do przekształcenia prawej strony (4.17), biorąc pod uwagę

$$\tau_{i\,\mu_i\nu_i}(bab^{-1}) = \textstyle\sum_{\alpha_i,\beta_i} \tau_{i\,\mu_i\alpha_i}(b)\tau_{i\,\alpha_i\beta_i}(a)\tau_{i\,\beta_i\nu_i}(b^{-1})$$

oraz $\tau_{i\,\beta_i\nu_i}(b^{-1}) = \overline{\tau_{i\,\nu_i\beta_i}(b)}$, możemy napisać $f \in \mathcal{F}_0(G)$ w postaci

$$f = \textstyle\sum_i n_i^{-1} \sum_{\mu_i} f_{i\,\mu_i\mu_i}\chi_i. \qquad \square$$

Rozpatrzmy reprezentację

$$\sigma \sim m_1\tau_1 \oplus \cdots \oplus m_p\tau_p$$

grupy G w przestrzeni W. Wygodnie jest znać rozkład W na podprzestrzenie niezmiennicze W_i, gdzie realizują się reprezentacje $m_i\tau_i$, $(i = 1, \dots, p)$, na które rozkłada się σ. Mamy oczywiście $\dim W = \sum_{i=1}^p m_i n_i$. Udowodnimy najpierw

Lemat 4.3. *Dla charakterów χ_i pełnego układu reprezentacji $(\tau_1, \dots, \tau_p)$ grupy G zachodzi*

$$\textstyle\sum_{b\in G} \chi_i(ab^{-1})\chi_j(b) = Nn_i^{-1}\delta_{ij}\chi_j(a).$$

Dowód. Wykorzystując (4.10) i (4.11) obliczamy:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{b\in G} \chi_i(ab^{-1})\chi_j(b) &= \textstyle\sum_{b,\mu,\alpha} \tau_{i\,\mu\mu}(ab^{-1})\tau_{j\,\alpha\alpha}(b) \\
&= \textstyle\sum_{\mu,\nu} \tau_{i\,\mu\nu}(a) \sum_{b,\alpha} \overline{\tau_{i\,\mu\nu}(b)}\tau_{j\,\alpha\alpha}(b) \\
&= N \textstyle\sum_{\mu,\nu,\alpha} \tau_{i\,\mu\nu}(a)(\tau_{i\,\mu\nu} \mid \tau_{j\,\alpha\alpha}) \\
&= Nn_i^{-1}\delta_{ij}\chi_i(a). \quad \square
\end{aligned}$$

Na podstawie lematu dowodzimy

Stwierdzenie 4.4. *Zachowując oznaczenia* Twierdzenia o reprezentacjach grup skończonych, *rozpatrujemy reprezentację σ grupy G w zespolonej przestrzeni wektorowej W. Endomorfizmy*

$$P_i = N^{-1}n_i \textstyle\sum_{a\in G} \overline{\chi_i(a)}\sigma(a), \quad i = 1, \dots, p,$$

stanowią układ operatorów rzutowych takich, że

$$P_iP_j = \delta_{ij}P_i, \quad i, j = 1, \dots, p,$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^p P_i = \mathrm{id}_W, \quad \sigma(a)P_i = P_i\sigma(a), \quad i = 1, \dots, p, \ \ a \in G.$$

Definiując $W_i = P_iW$ oraz $\sigma_i(a)w = \sigma(a)w$ dla $w \in W_i$, otrzymujemy rozkład

$$\sigma = \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_p$$

taki, że $\sigma_i \sim m_i\tau_i$.

5. Twierdzenia o wymiarze

STWIERDZENIE 4.5. *Jeśli każda zespolona, nieprzywiedlna reprezentacja grupy skończonej jest jednowymiarowa, to grupa jest przemienna.*

Dowód. Istotnie, kładąc $n_i = 1$ w (4.14) otrzymujemy $p = N$, więc każda klasa składa się z jednego elementu, co oznacza, że grupa jest przemienna. □

Znacznie głębsze i trudniejsze do udowodnienia jest następujące

TWIERDZENIE (o wymiarze reprezentacji nieprzywiedlnych).
Wymiar reprezentacji nieprzywiedlnej grupy skończonej jest dzielnikiem rzędu grupy.

Znany dowód tego twierdzenia wykorzystuje pojęcie liczb algebraicznych. Przedstawimy tu tylko szkic tego dowodu, podzielonego na kilka lematów; szczegóły można znaleźć w [**49**] i [Si]. Mówimy, że liczba zespolona λ jest *całkowitą liczbą algebraiczną* jeśli istnieje wielomian

$$w(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \text{ taki, że } a_i \in \mathbb{Z} \text{ i } w(\lambda) = 0. \tag{4.18}$$

Oznaczamy przez $\mathbb{A}$ zbiór wszystkich całkowitych liczb algebraicznych.

LEMAT 4.6. $\mathbb{A} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

Dowód. Istotnie, każda liczba całkowita jest także całkowitą liczbą algebraiczną. Na odwrót, niech liczba algebraiczna postaci α/β, gdzie (α, β) jest parą liczb całkowitych względnie pierwszych, spełnia równanie $w(\alpha/\beta) = 0$. Jeśli w jest postaci (4.18), to

$$\alpha^n = -\beta(a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\beta^{n-1}).$$

Prawa strona jest podzielna przez β, ale lewa strona może być podzielna przez β tylko wtedy, gdy $\beta = 1$. □

LEMAT 4.7. *Zbiór $\mathbb{A}$ pokrywa się ze zbiorem wartości własnych macierzy o elementach całkowitych.*

Dowód. Niech $I_l \in \mathbb{Z}(l)$ oznacza macierz jednostkową. Jeśli $L \in \mathbb{Z}(l)$ i $Lx = \lambda x$, gdzie $0 \neq x \in \mathbb{C}^l$, to

$$w(z) = \det(zI_l - L) \tag{4.19}$$

jest postaci (4.18) i $w(\lambda) = 0$. Na odwrót, mając (4.18) łatwo utworzyć macierz L taką, że zachodzi (4.19). Np. dla $n = 3$ można wziąć

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -a_0 & a_1 & -a_2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

LEMAT 4.8. *Zbiór $\mathbb{A}$ jest pierścieniem: jeśli $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$, to $\lambda - \mu$ i $\lambda\mu \in \mathbb{A}$.*

Dowód. Jeśli $L \in \mathbb{Z}(l)$ i $Lx = \lambda x$ oraz $M \in \mathbb{Z}(m)$ i $My = \mu y$, to

$$(L \otimes I_m - I_l \otimes M)(x \otimes y) = (\lambda - \mu)(x \otimes y).$$

Podobnie dla iloczynu. □

Lemat 4.9. *Jeśli $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{A}$, to istnieje $m \in \mathbb{N}$, wektor $x \in \mathbb{C}^m$ i macierze $M_1, \ldots, M_k \in \mathbb{Z}(m)$ takie, że $M_i x = \lambda_i x$ dla $i = 1, \ldots, k$.*

Dowód. Istotnie, na podstawie Lematu 4.7, dla każdego i istnieje $l_i \in \mathbb{N}$, macierz $L_i \in \mathbb{Z}(l_i)$ oraz $x_i \in \mathbb{C}^{l_i}$ takie, że $L_i x_i = \lambda_i x_i$. Niech $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ oraz $M_i = I_{l_1} \otimes I_{l_2} \otimes \cdots \otimes \underset{i\text{te miejsce}}{L_i} \otimes \cdots \otimes I_{l_k}$, to $M_i x = \lambda_i x$. □

Lemat 4.10. *Wartości własne macierzy o elementach w $\mathbb{A}$ należą do $\mathbb{A}$.*

Dowód. Niech $L = (l_{ij}) \in \mathbb{A}(l)$ i niech $x \in \mathbb{C}^l$ będzie wektorem własnym tej macierzy: $Lx = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Na podstawie poprzedniego Lematu można znaleźć $m \in \mathbb{N}$, wektor $y \in \mathbb{C}^m$ i macierze $M_{ij} \in \mathbb{Z}(m)$ takie, że dla każdej pary (i, j) zachodzi $M_{ij} y = l_{ij} y$. Niech $E_{ij} \in \mathbb{Z}(l)$ oznacza macierz taką, że $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Macierz

$$M = \textstyle\sum_{i,j=1,\ldots,n} E_{ij} \otimes M_{ij}$$

należy do $\mathbb{Z}(m+n)$ oraz $M(x \otimes y) = \lambda(x \otimes y)$. Zatem λ, jako wartość własna macierzy o elementach całkowitych, należy do $\mathbb{A}$. □

Lemat 4.11. *Niech χ będzie charakterem zespolonej reprezentacji σ grupy skończonej G. Dla każdego $a \in G$ mamy $\chi(a) \in \mathbb{A}$.*

Dowód. Dla każdego $a \in G$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że a^m jest elementem neutralnym grupy, więc wartości własne endomorfizmu $\sigma(a)$ są m-tymi pierwiastkami jedynki i jako takie należa do $\mathbb{A}$. Na mocy Lematu 4.8 ich suma też należy do $\mathbb{A}$. □

*D*owód Twierdzenia o wymiarze reprezentacji nieprzywiedlnych. Niech χ będzie charakterem nieprzywiedlnej, unitarnej reprezentacji σ o wymiarze n grupy G rzędu N. Rozpatrzmy macierz N-tego stopnia $L = (L_{ab})$, gdzie $L_{ab} = \chi(ab^{-1})$, $a, b \in G$. Na mocy Lematu 4.11 mamy $L \in \mathbb{A}(N)$. Niech $x = (x_a)$, gdzie $x_a = \chi(a)$. Na podstawie lematu 4.3 mamy

$$\textstyle\sum_{b\in G} \chi(ab^{-1})\chi(b) = \frac{N}{n}\chi(a).$$

Zatem $Lx = \frac{N}{n}x$: iloraz N/n jest wartością własną macierzy $L \in \mathbb{A}(N)$. Na mocy Lematu 4.10 ten iloraz należy do $\mathbb{A}$, a na mocy Lematu 4.6 – jest liczbą całkowitą. □

6. Tablice charakterów

Często pierwszy krok do znalezienia reprezentacji grupy skończonej polega na sporządzeniu jej „tablicy charakterów”. W tym celu znajdujemy wszystkie klasy elementów sprzężonych oraz charaktery już znanych reprezentacji. W prostych przypadkach – dla grup o małym rzędzie – można uzyskać pełne informacje o charakterach na podstawie relacji ortogonalności (4.12) i wzoru (4.14).

Niech m_i oznacza liczbę elementów grupy w i-tej klasie elementów sprzężonych i niech $a_i \in G$ będzie reprezentantem tej klasy. Umawiamy się, że pierwsza klasa zawiera element neutralny grupy, tzn. $m_1 = 1$ i $a_1 = 1$. Pierwszą reprezentacją niech będzie reprezentacja trywialna, $\tau_1 = \mathbf{1}$, więc

$\chi_1(a) = 1$ dla każdego $a \in G$. Dla każdego $i = 1, \dots, p$ mamy $\chi_i(1) = n_i$. W pierwszym wierszu tablicy podajemy reprezentantów kolejnych klas, w drugim – liczbę elementów w klasach, a w następnych – wartości charakterów.

Tablica charakterów wygląda więc jak następuje:

reprezentanci klas	$a_1 = 1$	a_2	$\dots$	a_p
liczba elementów w klasie	$m_1 = 1$	m_2	$\dots$	m_p
reprezentacja trywialna	$n_1 = 1$	1	$\dots$	1
druga reprezentacja	n_2	$\chi_2(a_2)$	$\dots$	$\chi_2(a_p)$
......	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
p-ta reprezentacja	n_p	$\chi_p(a_2)$	$\dots$	$\chi_p(a_p)$

Przykład 4.4. Rozpatrzmy jako przykład grupę $\mathfrak{S}_3$. Składa się ona z trzech klas elementów sprzężonych: pierwsza zawiera element neutralny, druga składa się z trzech transpozycji $\lfloor 12 \rfloor$, $\lfloor 23 \rfloor$ i $\lfloor 31 \rfloor$, a trzecia zawiera dwa 3-cykle, $\lfloor 123 \rfloor$ i $\lfloor 213 \rfloor$. Mamy tu więc trzy reprezentacje nieprzywiedlne i nierównoważne, o wymiarach $n_1 = 1$ (reprezentacja trywialna, $\mathbf{1}$), n_2 i n_3. Równanie (4.14) daje $6 = 1 + n_2^2 + n_3^2$; stąd $n_2 = 1$ i $n_3 = 2$. Druga reprezentacja jednowymiarowa to reprezentacja alternująca sgn opisana w Przykładzie 4.2. Charaktery dwóch pierwszych reprezentacji są oczywiste,

$$\chi_1(\pi) = 1 \quad \text{dla każdego } \pi \in \mathfrak{S}_3,$$

$$\chi_2(1) = \chi_2\lfloor 123 \rfloor = \chi_2\lfloor 213 \rfloor = 1, \ \ \chi_2\lfloor 12 \rfloor = \dots = -1$$

Dla trzeciej reprezentacji – którą jest reprezentacja standardowa σ grupy symetrycznej – mamy $\chi_3(1) = 2$ (bo reprezentacja jest dwuwymiarowa), a z warunku ortogonalności charakterów otrzymujemy

$$2 + 3\chi_3\lfloor 12 \rfloor + 2\chi_3\lfloor 123 \rfloor = 0, \ \ 2 - 3\chi_3\lfloor 12 \rfloor + 2\chi_3\lfloor 123 \rfloor = 0,$$

a stąd $\chi_3\lfloor 12 \rfloor = 0$, $\chi_3\lfloor 123 \rfloor = -1$. Tablica charakterów grupy $\mathfrak{S}_3$ jest więc postaci:

reprezentanci klas	1	$\lfloor 12 \rfloor$	$\lfloor 123 \rfloor$
liczba elementów w klasie	1	3	2
reprezentacja trywialna	1	1	1
reprezentacja alternująca	1	-1	1
reprezentacja standardowa	2	0	-1

6.1. Zagadnienie Clebscha-Gordana. Niech $\{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ będzie pełnym układem reprezentacji grupy skończonej G. Dla każdych $i, j = 1, \dots, p$ istnieją liczby $N_{ijk} \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\tau_i \otimes \tau_j \sim \textstyle\sum_{k=1}^{p} N_{ijk}\tau_k. \tag{4.20}$$

Oznaczając przez χ_i charakter reprezentacji $\tau_i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$ i biorąc pod uwagę, że charaktery tworzą układ ortonormalny wektorów w przestrzeni $\mathcal{F}(G)$, znajdujemy współczynniki rozkładu (4.20):

$$N_{ijk} = (\chi_i\chi_j|\chi_k).$$

Zagadnienie Clebscha-Gordana polega na znalezieniu izomorfizmu

$$U : V_i \otimes V_j \to \bigoplus_{i=1}^{p} N_{ijk} V_k$$

takiego, że

$$U(\tau_i(a) \otimes \tau_j(a))U^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{p} N_{ijk} \tau_k(a). \tag{4.21}$$

dla każdego $a \in G$. Elementy macierzy izomorfizmu U, obliczone względem (odpowiednio dobranych) baz w przestrzeniach V_i, $i = 1, \ldots, p$, nazywają się *współczynnikami Clebscha-Gordana.*

Przykład 4.5. Łatwo sprawdzić, że dla reprezentacji sgn i σ grupy $\mathfrak{S}_3$, opisanych w Przykładzie 4.4, mamy

$$\operatorname{sgn} \otimes \operatorname{sgn} = \mathbf{1}, \quad \operatorname{sgn} \otimes \sigma = \sigma, \quad \sigma \otimes \sigma = \sigma \oplus \operatorname{sgn} \oplus \mathbf{1}.$$

7. Twierdzenie Frobeniusa-Schura

Dla grup skończonych jest proste kryterium, pozwalające określić typ reprezentacji ze względu na sprzężenie zespolone (zob. rozdział 4.4).

Twierdzenie (Frobeniusa–Schura). *Jeśli χ jest charakterem nieprzywiedlnej reprezentacji ρ grupy G rzędu N w zespolonej przestrzeni wektorowej V, to*

$$N^{-1} \textstyle\sum_{a \in G} \chi(a^2) = \begin{cases} 0 & \textit{jeśli } \rho \textit{ jest typu zespolonego,} \\ 1 & \textit{jeśli } \rho \textit{ jest typu rzeczywistego,} \\ -1 & \textit{jeśli } \rho \textit{ jest typu kwaternionowego.} \end{cases}$$

Dowód. Możemy założyć, iż reprezentacja ρ jest unitarna i macierze $\big(\rho_{\mu\nu}(a)\big)$ są odniesione do bazy unitarnej w V tak, że

$$\overline{\rho_{\mu\nu}(a)} = \rho_{\nu\mu}(a^{-1}) \text{ dla } a \in G,\ \mu, \nu = 1, \ldots, \dim V.$$

Uwzględniając definicję iloczynu skalarnego (4.4), obliczamy

$$\begin{aligned} N^{-1} \textstyle\sum_{a \in G} \chi(a^2) &= N^{-1} \textstyle\sum_{a \in G, \mu, \nu} \rho_{\mu\nu}(a) \rho_{\nu\mu}(a) \\ &= \textstyle\sum_{\mu,\nu} (\overline{\rho_{\mu\nu}} \mid \rho_{\nu\mu}). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Jeśli $\bar{\rho} \nsim \rho$, to na mocy (4.6) otrzymujemy pierwszą część tezy twierdzenia. Niech teraz $\rho \sim \bar{\rho}$, to na mocy stw. 3.11 mamy także $\rho \sim \check{\rho}$, więc

$$\overline{\rho_{\mu\nu}(a)} = \rho_{\nu\mu}(a^{-1}) = \textstyle\sum_{\alpha,\beta} B_{\mu\alpha} \rho_{\alpha\beta}(a) B^{-1}_{\beta\nu},$$

gdzie $B_{\alpha\beta}$ jest macierzą izomorfizmu (3.5) względem bazy unitarnej (e_μ), $Be_\beta = e^\alpha B_{\alpha\beta}$. Podstawiając do (4.22) i korzystając z (4.11), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{\mu,\nu} (\overline{\rho_{\mu\nu}} \mid \rho_{\nu\mu}) &= \textstyle\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \bar{B}_{\mu\alpha} \bar{B}^{-1}_{\beta\nu} (\rho_{\alpha\beta} \mid \rho_{\nu\mu}) \\ &= \textstyle\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \dfrac{\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}}{\dim V} \bar{B}_{\mu\alpha} \bar{B}^{-1}_{\beta\nu} = \dfrac{1}{\dim V} \textstyle\sum_{\alpha,\beta} \bar{B}_{\beta\alpha} \bar{B}^{-1}_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Uwzględniając stw. 3.12 i $\sum_{\alpha,\beta} \bar{B}_{\alpha\beta} \bar{B}^{-1}_{\beta\alpha} = \dim V$ otrzymujemy pozostałe częsci tezy twierdzenia. $\square$

8. Ograniczanie reprezentacji i reprezentacje indukowane

8.1. Ograniczanie reprezentacji do podgrupy. Często mamy w fizyce do czynienia z *łamaniem symetrii*, polegającym na tym, że przez wprowadzenie zaburzenia, albo w inny sposób, ograniczamy symetrię rozpatrywanego układu do pewnej podgrupy grupy wyjściowych symetrii. Np. pole elektryczne prostego jądra atomowego jest (w przybliżeniu) kulistosymetryczne; umieszczając atom w stałym polu elektrycznym lub magnetycznym ograniczamy początkową symetrię względem grupy $\mathsf{SO}(3)$ do symetrii względem jej podgrupy $\mathsf{SO}(2)$.

Mając reprezentację grupy G w przestrzeni wektorowej V,

$$\sigma : G \to \mathsf{GL}(V),$$

i podgrupę $H \subset G$, można określić reprezentację podgrupy w tej samej przestrzeni,

$$\sigma_H : H \to \mathsf{GL}(V),$$

kładąc $\sigma_H(a) = \sigma(a)$ dla każdego $a \in H$. Na ogół, reprezentacja *ograniczona* do H jest przywiedlna, nawet jeśli reprezentacja σ jest nieprzywiedlna.

Przykład 4.6. Niech σ będzie reprezentacją standardową grupy symetrycznej $\mathfrak{S}_3$; jej charakter jest dany w Przykładzie 4.4. Podgrupa alternująca $H = \mathfrak{A}_3$ jest izomorficzna $\mathbb{Z}_3$; ma więc trzy jednowymiarowe reprezentacje; jeśli $\omega = \exp 2\pi \mathrm{i}/3$, to reprezentacje nietrywialne ρ_1 i ρ_2 grupy H można określić przez $\rho_1(123) = \omega$ i $\rho_2(123) = \omega^2$. Biorąc pod uwagę, że $\omega + \omega^2 = -1$, widać, iż $\sigma_H = \rho_1 \oplus \rho_2$.

8.2. Reprezentacje indukowane. W pewnym sensie, działaniem „dwoistym” do ograniczanie reprezentacji jest konstrukcja reprezentacji indukowanej grupy G z reprezentacji jej podgrupy H. Przedstawimy tu tę konstrukcję dla grup skończonych, ale w fizyce odgrywa ważną rolę podany przez E. Wignera sposób znajdywania tą metodą reprezentacji grupy Poincarégo.

Załóżmy, że H jest podgrupą grupy G o indeksie n, $\#(G/H) = n$. Mając reprezentację ρ grupy H w skończenie wymiarowej przestrzeni V, definiujemy nową przestrzeń wektorową

$$V^G = \{f : G \to V \mid f(ab) = \rho(b^{-1})f(a) \ \text{ dla } a \in G \text{ i } b \in H\}.$$

Widać, że funkcję $f \in V^G$ można określić podając jej wartości na zbiorze $\{a_1, \dots, a_n\}$ elementów G takim, że jeśli $i \neq j$, to $a_i^{-1}a_j \notin H$, zatem

$$\dim V^G = n \dim V.$$

Określamy teraz reprezentację ρ^G grupy G w V^G *indukowaną* przez reprezentację ρ.

$$\rho^G : G \to \mathsf{GL}(V^G), \quad (\rho^G(a)f)(a') = f(a^{-1}a') \quad \text{dla } a, a' \in G.$$

Zadania

Uwaga: mówiąc o znalezieniu reprezentacji, mamy na myśli nieprzywiedlne reprezentacje zespolone. Rozwiązanie większości poniższych zadań można znaleźć w rozdz. 8 książki [Ko].

ZADANIE 4.1. Niech $\rho_{\mu\nu}$ będą elementami macierzowymi nieprzywiedlnej reprezentacji ρ grupy skończonej G. Obliczyć $\sum_{a\in G}\rho_{\mu\nu}(a)$.

ZADANIE 4.2. Znaleźć reprezentacje grupy $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

ZADANIE 4.3. Znaleźć reprezentacje grupy $\mathfrak{S}_3$.

ZADANIE 4.4. Niech $\varpi_n : \mathfrak{S}_n \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ oznacza reprezentację zdefiniowaną przez

$$\varpi_n(\pi)(z_1,\ldots,z_n) = (z_{\pi^{-1}(1)},\ldots,z_{\pi^{-1}(n)}).$$

Pokazać, że $\chi_{\varpi_n}(\pi) = \#\{i\in\{1,\ldots,n\} \mid \pi(i)=i\}$.

ZADANIE 4.5. Pokazać, że jeśli reprezentacje unitarne i nieprzywiedlne ρ i σ grupy skończonej G w przestrzeni $\mathbb{C}^n$ są równoważne, to istnieje macierz *unitarna* $U\in\mathsf{U}(n)$ taka, że $\sigma(a)=U\rho(a)U^{-1}$ dla każdego $a\in G$.

Wskazówka. Zastosować metodę podobną do tej, która występuje w dowodzie stw. 3.8.

ZADANIE 4.6. Znaleźć tablicę charakterów grupy $\mathfrak{A}_4$.

ZADANIE 4.7. Znaleźć tablicę charakterów grupy $\mathfrak{S}_4$.

ZADANIE 4.8. Znaleźć reprezentacje grupy kwaternionowej

$$\{\pm 1,\pm \mathrm{i},\pm \mathrm{j},\pm \mathrm{k}\}.$$

Obliczyć iloczyny tensorowe wszystkich par tych reprezentacji i rozłożyć te iloczyny, które są przywiedlne, na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

ZADANIE 4.9. Znaleźć tablicę charakterów dla grupy diedralnej $\mathbf{D}_5$.

ZADANIE 4.10. *Grupa Pauliego* jest to grupa G, o jedności oznaczonej przez 1, generowana przez 4 elementy ε, e_1, e_2 i e_3, spełniające następujące relacje:

$$\varepsilon^2=1,\ e_i^2=1,\ \varepsilon e_i = e_i\varepsilon \ \text{ dla }\ i=1,2,3$$

oraz

$$e_ie_j=\varepsilon e_je_i \ \text{ dla }\ i\neq j=1,2,3.$$

Znaleźć tablicę charakterów i reprezentacje grupy G. Reprezentacja σ grupy G nazywa się reprezentacją *spinorową* jeśli $\sigma(\varepsilon)\neq \mathrm{id}$. Pokazać, że grupa Pauliego ma dwie nierównoważne reprezentacje spinorowe σ_+ i σ_-, które są typu zespolonego; ich formy rzeczywiste są równoważne.

ZADANIE 4.11. Dwie *grupy Diraca* G_+ i G_- z jednością 1 definiuje się przez podanie ich generatorów $\varepsilon, e_1, e_2, e_3$ i e_4, spełniających relacje, których część jest jednakowa dla obu grup, a mianowicie:

$$\varepsilon^2=1,\ \varepsilon e_\mu = e_\mu\varepsilon \ \text{ dla }\ \mu=1,2,3,4,\ \ e_\mu e_\nu=\varepsilon e_\nu e_\mu \ \text{ dla }\ \mu\neq\nu=1,2,3,4.$$

Pozostałe relacje dla grupy G_+ są:

$$e_i^2 = 1, \quad \text{dla} \;\; i = 1,2,3 \;\; \text{oraz} \;\; e_4^2 = \varepsilon.$$

a dla grupy G_-.

$$e_i^2 = \varepsilon, \quad \text{dla} \;\; i = 1,2,3 \;\; \text{oraz} \;\; e_4^2 = 1.$$

(i) Znaleźć tablice charakterów tych grup.

(ii) Pokazać, że każda z dwóch grup Diraca ma jedną 4-wymiarową reprezentację spinorową, scharakteryzowaną jak w Zad. 4.10. Wektory należące do tej reprezentacji nazywają się spinorami Diraca.

(iii) Pokazać, że reprezentacja spinorowa γ grupy G_+ jest typu rzeczywistego i znaleźć postać czterech macierzy Diraca $\gamma_\mu = \gamma(e_\mu)$ o rzeczywistych elementach macierzowych.

(iv) Pokazać, że reprezentacja spinorowa grupy G_- jest typu kwaternionowego. Znaleźć postać macierzy Diraca tej reprezentacji w takiej bazie, że

$$\gamma_5 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \mathrm{i}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową drugiego stopnia.

(v) Dla każdej z grup: G_+ i G_- definiujemy podgrupę H generowaną przez wszystkie elementy postaci $e_\mu e_\nu$. Pokazać, że te dwie podgrupy są izomorficzne, mimo że grupy G_+ i G_- nie są izomorficzne. Pokazać, że reprezentacja spinorowa γ ograniczona do H rozkłada się w sumę prostą $\gamma_+ \oplus \gamma_-$ dwóch 2-wymiarowych reprezentacji nieprzywiedlnych; wektory należące do tych dwóch reprezentacji nazywają się spinorami Weyla. Pokazać, że reprezentacje γ_+ i γ_- są typu zespolonego.

$*$ Zadanie 4.12 Znaleźć tablicę charakterów grupy $G_{k,l}$ generowanej przez elementy $\varepsilon, e_1, \ldots, e_{k+l}$, spełniające następujące relacje:

$$\varepsilon^2 = 1, \;\; \varepsilon e_\mu = e_\mu \varepsilon \;\; \text{dla} \;\; \mu = 1, \ldots, k+l, \;\; e_\mu e_\nu = \varepsilon e_\nu e_\mu \;\; \text{dla} \;\; \mu \neq \nu,$$

$$e_\mu^2 = 1 \;\; \text{dla} \;\; \mu = 1, \ldots, k, \quad e_\mu^2 = \varepsilon \;\; \text{dla} \;\; \mu = k+1, \ldots, k+l.$$

Uogólnić na grupy $G_{k,l}$ wyniki otrzymane przy rozwiązywaniu zadań 4.10 i 4.11. $*$.

Zadanie 4.13. Pokazać, że jeśli ρ i σ są reprezentacjami nieprzywiedlnymi grupy skończonej, to w rozkładzie ich iloczynu tensorowego na reprezentacje nieprzywiedlne,

$$\rho \otimes \sigma \sim n_1\tau_1 \oplus \cdots \oplus n_p\tau_p,$$

reprezentacja trywialna $\tau_1 = \mathbf{1}$ występuje albo z krotnością $n_1 = 1$ i wtedy $\rho \sim \check{\sigma}$, albo ta reprezentacja nie występuje, $n_1 = 0$, i wtedy $\rho \nsim \check{\sigma}$.

Zadanie 4.14. Znaleźć reprezentację grupy $\mathfrak{S}_3$ indukowaną przez nietrywialną reprezentację jej podgrupy alternującej.

Zadanie 4.15. Stosujemy oznaczenia wprowadzone w Zad. 4.10. Pokazać, że zbiór

$$H = \{1, e_1e_2, e_2e_3, e_3e_1, \varepsilon, \varepsilon e_1e_2, \varepsilon e_2e_3, \varepsilon e_3e_1\}$$

jest podgrupą grupy Pauliego G. Znaleźć nieprzywiedlne reprezentacje tej grupy; jest wśród nich jedna, dwuwymiarowa reprezentacja spinorowa ρ. Znaleźć ograniczenia reprezentacji nieprzywiedlnych G do H. Pokazać, że $\rho^G \sim \sigma_+ \oplus \sigma_-$.

Zadanie 4.16. Opierając się na twierdzeniach o wymiarze (§ 5) pokazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to grupa rzędu p^2 jest przemienna.

V

Algebra grupowa i tablice Younga

1. Algebra grupowa

Niech G będzie grupą rzędu N. Rozpatrzmy ponownie przestrzeń wektorową $\mathcal{F}(G)$ i wprowadźmy następujące uproszczenie w zapisie jej elementów (por. z §3 na str. 72). Jeśli $f \in \mathcal{F}(G)$, to

$$\text{zamiast} \quad f = \textstyle\sum_{a\in G} f(a)e_a \quad \text{piszemy} \quad f = \textstyle\sum_{a\in G} f(a)a.$$

Inaczej mówiąc, utożsamiamy element a grupy z funkcją na grupie, przyjmującą wartość 1 w punkcie a i 0 w pozostałych punktach. Przestrzeni wektorowej $\mathcal{F}(G)$ można w naturalny sposób nadać strukturę algebry łącznej z jednością, definiując odwzorowanie biliniowe

$$\mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G), \quad (f, g) \mapsto f * g,$$

gdzie

$$f * g = \textstyle\sum_{a,b\in G} f(a)g(b)ab, \quad \text{czyli} \quad (f * g)(a) = \textstyle\sum_{b\in G} f(ab^{-1})g(b).$$

Funkcję $f * g$ nazywa się *splotem* funkcji f i g; z łączności składania elementów grupy wynika łaczność splotu, a jedność grupy, rozpatrywana jako element $\mathcal{F}(G)$, jest jednością tej algebry, zwanej *algebrą grupową*. Znak splotu $*$ zastępujemy zwykle kropką lub opuszczamy, jeśli to nie prowadzi do nieporozumień. Nie należy splotu funkcji na grupie mylić z iloczynem funkcji, rozumianym jako funkcja o wartościach będących iloczynami wartości funkcji.

Grupę G można rozpatrywać jako podzbiór algebry $\mathcal{F}(G)$; jedność 1 grupy jest także jednością algebry.

Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą algebrami z jednościami $1_{\mathcal{A}}$ i $1_{\mathcal{B}}$, odpowiednio. Przypomnijmy, że odwzorowanie liniowe $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ nazywa się homomorfizmem algebr z jednością, jeśli $h(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ i $h(A_1A_2) = h(A_1)h(A_2)$ dla każdych $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. W szczególności, jeśli $\mathcal{B} = \mathsf{End}\, V$, to h nazywa się *reprezentacją algebry* $\mathcal{A}$ w przestrzeni wektorowej V.

Każda reprezentacja τ grupy G w przestrzeni wektorowej V rozszerza się do reprezentacji $\widetilde{\tau}$ algebry grupowej: wystarczy położyć $\widetilde{\tau}\Big(\sum_{a\in G} f(a)a\Big) = \sum_{a\in G} f(a)\tau(a)$. Na odwrót, każda reprezentacja $\widetilde{\tau}$ algebry grupowej w przestrzeni wektorowej V taka, że $\widetilde{\tau}(1) = \mathrm{id}_V$ definiuje, przez ograniczenie, reprezentację odpowiadającej jej grupy.

Użycie splotu nadaje szczególnie prostą postać reprezentacji regularnej (4.3); mianowicie, pisząc $f = \sum_b f(b)b$, otrzymujemy $\sum_b \Big(\rho(a)f\Big)(b)b = \sum_b f(a^{-1}b)b = a\sum_b f(b)b$. Wynika stąd, że jeśli $f, g \in \mathcal{F}(G)$, to $\widetilde{\rho}(f)g = fg$; $\widetilde{\rho}$ jest (lewą) reprezentacją regularną algebry $\mathcal{F}(G)$.

Niech $\{\tau_1, \dots, \tau_p\}$ będzie pełnym układem reprezentacji grupy G w przestrzeniach $V_1, \dots, V_p$, odpowiednio, zob. str. 73. Definiujemy reprezentację

$$\mathcal{T} : \mathcal{F}(G) \to \mathsf{End}\, V_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{End}\, V_p \tag{5.1}$$

kładąc, dla $f \in \mathcal{F}(G)$,

$$\mathcal{T}(f) = \Big(\tilde{\tau}_1(f), \dots, \tilde{\tau}_p(f)\Big).$$

Stwierdzenie 5.1. *Reprezentacja* (5.1) *jest izomorfizmem algebr.*

Dowód. Na podstawie (4.14) widać, że wymiary obu tych algebr są równe. Wystarczy więc pokazać, że homomorfizm $\mathcal{T}$ jest injektywny. Niech $f \in \ker \mathcal{T}$, to $\tilde{\tau}_i(f) = 0$ dla $i = 1, \dots, p$, więc $\sum_{a \in G} f(a)\tau_i(a) = N(\bar{f}|\tau_i)$, czyli $f \perp \mathcal{F}(G)$, zatem $f = 0$. □

2. Lewe ideały i idempotenty

Podprzestrzeń $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(G)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą reprezentacji regularnej wtedy i tylko wtedy, gdy jest *lewym ideałem* algebry $\mathcal{F}(G)$, tzn. jeśli jest taką podprzestrzenią wektorową $\mathcal{F}(G)$, że $A \in \mathcal{F}(G)$ i $B \in \mathcal{B}$ pociągają $AB \in \mathcal{B}$. Jeśli $\mathcal{B}$ jest lewym ideałem, to reprezentacja $\rho_{\mathcal{B}} : G \to \mathsf{GL}(\mathcal{B})$ powstająca ze zredukowania reprezentacji regularnej do $\mathcal{B}$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}$ jest lewym ideałem *minimalnym*, tzn. takim, który nie zawiera właściwego lewego ideału.

Każdy element $e \in \mathcal{F}(G)$ generuje lewy ideał $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G)e$ i definiuje reprezentację $\rho_{\mathcal{B}}$; będziemy mówili, że e *generuje reprezentację* $\rho_{\mathcal{B}}$. Jeśli element ten jest idempotentem

$$e^2 = e, \quad \text{i} \quad \mathcal{B} = \mathcal{F}(G)e, \quad \text{to} \quad B \in \mathcal{B} \iff Be = B.$$

Istotnie, jeśli $B = Be$, to $B \in \mathcal{B}$ z definicji $\mathcal{B}$; jeśli $B \in \mathcal{B}$, to istnieje $C \in \mathcal{F}(G)$ taki, że $B = Ce$, więc $Be = Ce^2 = Ce = B$.

Przykład 5.1. Element

$$e = (\#G)^{-1} \textstyle\sum_{a \in G} a \in \mathcal{F}(G)$$

jest idempotentem gdyż $a \sum_b b = \sum_b b$; wynika stąd także $ae = e$ dla każdego $a \in G$, zatem $\mathcal{B} = \mathcal{A}(G)e = \mathbb{C}e$ jest przestrzenią jednowymiarową, a reprezentacja generowana przez e jest trywialna.

Jeśli e jest idempotentem, to $e' = 1 - e$ jest także idempotentem. Niech $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G)e$ i $\mathcal{B}' = \mathcal{F}(G)e'$, to

$$\mathcal{F}(G) = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$$

gdyż każdy $A \in \mathcal{F}(G)$ można przedstawić w postaci $A = Ae + Ae'$ i $Ae = Be'$ pociąga $Ae = Ae^2 = Be'e = 0$. Powstaje pytanie: czy dla każdego ideału $\mathcal{B}$ istnieje idempotent e taki, że $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G)e$?

3. Twierdzenie o idempotentach

TWIERDZENIE. *Jeśli G jest grupą skończoną, a $\mathcal{B}$ jest lewym ideałem algebry grupowej $\mathcal{F}(G)$, to istnieje idempotent $e \in \mathcal{F}(G)$ taki, że $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G)e$.*

Dowód. Niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}(G)$ będzie lewym ideałem. Wybierając podprzestrzeń wektorową $\mathcal{C}$ uzupełniającą do $\mathcal{B}$, tzn. taką, że $\mathcal{F}(G) = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$, możemy przedstawić każdy element $A \in \mathcal{F}(G)$ w postaci $A_{\mathcal{B}} + A_{\mathcal{C}}$, gdzie $A_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ i $A_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ oraz zdefiniować *operator rzutowy* $P \in \mathsf{End}(\mathcal{F}(G))$ kładąc $P(A) = A_{\mathcal{B}}$. Operator rzutowy P jest idempotentem algebry $\mathsf{End}(\mathcal{F}(G))$, $P \circ P = P$.

Niech teraz $b \in G$; definiujemy nowy operator (odwzorowanie liniowe) P_b, kładąc, dla każdego $A \in G$,

$$P_b(A) = bP(b^{-1}A).$$

Sprawdzamy, że P_b też jest operatorem rzutowym na $\mathcal{B}$. Niech $c \in G$, to

$$P_c \circ P_b(A) = P_c(bP(b^{-1}A)) = cP(c^{-1}bP(b^{-1}A)).$$

Biorąc pod uwagę, że $\mathcal{B}$ jest lewym ideałem, mamy $c^{-1}bP(b^{-1}A) \in \mathcal{B}$, więc

$$cP(c^{-1}bP(b^{-1}A)) = c \cdot c^{-1}bP(b^{-1}A) = P_b(A),$$

czyli

$$P_c \circ P_b = P_b \tag{5.2}$$

dla każdych $b, c \in G$. Definiujemy teraz

$$\Pi = N^{-1} \textstyle\sum_{b \in G} P_b.$$

Na mocy (5.2) mamy

$$\Pi \circ \Pi = \Pi \tag{5.3}$$

i Π jest także operatorem rzutowym na $\mathcal{B}$. Dla $a \in G$ oraz $A \in \mathcal{F}(G)$ mamy $\sum_c cP(c^{-1}aA) = \sum_c acP(c^{-1}A)$, więc także

$$\Pi(AB) = A\Pi(B) \quad \text{dla} \quad A, B \in \mathcal{F}(G). \tag{5.4}$$

Definiując $e = \Pi(1)$ i kładąc w (5.4) $A = e$, $B = 1$, otrzymujemy $\Pi(e) = e^2$. Z drugiej strony, na mocy (5.3), mamy $\Pi(1) = \Pi(\Pi(1))$, czyli $\Pi(e) = e$, zatem $e^2 = e$. Widać ponadto, że $\ker \Pi$ jest także lewym ideałem i $\mathcal{F}(G) = \mathcal{B} \oplus \ker \Pi$. □

Wynika stąd łatwo

STWIERDZENIE 5.2. *Jeśli G jest grupą skończoną, posiadającą p klas elementów sprzężonych i p nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych o wymiarach n_α, $\alpha = 1, \ldots, p$, to istnieje zbiór idempotentów $\{e_1, \ldots, e_N\}$, $e_i \in \mathcal{F}(G)$, $i = 1, \ldots, N$, $N = n_1 + \cdots + n_p$, takich, że*

$$e_i e_j = e_j e_i = 0 \quad \textit{dla} \quad i \neq j, \quad e_1 + \cdots + e_N = 1;$$

ideały $\mathcal{B}_i = \mathcal{F}(G)e_i$ są minimalne.

4. Reprezentacje grupy $\mathfrak{S}_n$

Przedstawimy teraz, pomijając dowody, konstrukcję wszystkich nieprzywiedlnych reprezentacji grup symetrycznych $\mathfrak{S}_n$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ znamy już dwie takie (banalne) reprezentacje: trywialną, której odpowiada idempotent opisany w Przykładzie 5.1 i alternującą. Łatwo widać, że element

$$(n!)^{-1} \textstyle\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \pi)\pi$$

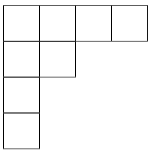
jest idempotentem w algebrze $\mathfrak{S}_n$, generującym reprezentację alternującą.

Przypomnijmy (por. Zadanie 2.14), że dwie permutacje są do siebie sprzężone (należą do tej samej klasy) wtedy i tylko wtedy, gdy rozkładają się na tę samą liczbę rozłącznych cykli o równych długościach. Klasę elementów sprzężonych w grupie $\mathfrak{S}_n$ można więc w pełni scharakteryzować przy pomocy *podziału* (partycji) liczby n, tzn. ciągu liczb naturalnych $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ takiego, że

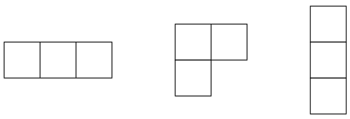
$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n, \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r \geqslant 1.$$

Przyjęło się przedstawiać takie ciągi – a więc klasy elementów sprzężonych – przy pomocy *diagramów Younga*, w których liczba m_1 jest uwidoczniona przy pomocy m_1 poziomo umieszczonych kwadratów, liczba m_2 – przy pomocy następnego wiersza m_2 takich kwadratów, itd. Np. podziałowi $(4, 2, 1, 1)$ liczby 8 przyporządkowuje się diagram

(5.5)



Grupie $\mathfrak{S}_3$, która ma trzy klasy elementów sprzężonych, odpowiadają trzy diagramy Younga,



Wypełniając diagram Younga związany z grupą $\mathfrak{S}_n$ liczbami od 1 do n otrzymujemy *tablicę Younga* T, np.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6\\\cline{1-2} 7\\\cline{1-1} 8\\\cline{1-1}\end{array} \tag{5.6}$$

Jednemu diagramowi odpowiada $n!$ tablic; np. dla jednego z diagramów grupy $\mathfrak{S}_3$ mamy następujące tablice:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array} \tag{5.7}$$

Elementy grupy $\mathfrak{S}_8$ działają, w oczywisty sposób, na tablicę (5.6) przeprowadzając ją w inne tablice odpowiadające diagramowi (5.5). O elemencie grupy $\mathfrak{S}_8$, który jest złożeniem permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$, permutacji zbioru $\{5, 6\}$ i nie rusza 7 i 8, mówimy, że zachowuje wiersze tablicy (5.6).

Np. element $\lfloor 123\rfloor\lfloor 56\rfloor$ zachowuje wiersze tej tablicy, a $\lfloor 12\rfloor\lfloor 57\rfloor$ nie ma tej własności. W podobny sposób definiuje się, dla dowolnej tablicy Younga, permutacje zachowujące wiersze i kolumny.

Niech T będzie tablicą Younga dla grupy $\mathfrak{S}_n$; definiujemy następujące dwie podgrupy grupy $\mathfrak{S}_n$:

$$\mathfrak{S}_n(T,w) = \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \quad \pi \text{ zachowuje wiersze } T\,\},$$
$$\mathfrak{S}_n(T,k) = \{\pi \in \mathfrak{S}_n \mid \quad \pi \text{ zachowuje kolumny } T\,\},$$

oraz element algebry $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n)$:

$$E_T = \textstyle\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n(T,w)} \pi \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n(T,k)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau. \tag{5.8}$$

Dowód następującego twierdzenia można znaleźć w [Br]:

Twierdzenie. (i) *Jeśli T jest tablicą Younga i E_T jest elementem algebry $\mathfrak{S}_n$ danym przez* (5.8), *to istnieje $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ takie, że*

$$E_T^2 = \lambda E_T;$$

(ii) *ideał $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n)E_T$ jest minimalny;*
(iii) *jeśli T i T' są dwoma tablicami Younga, to reprezentacje grupy $\mathfrak{S}_n$ w ideałach $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n)E_T$ i $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_n)E_{T'}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy tablice te pochodzą od jednego diagramu Younga.*

Wynika stąd, że otrzymuje się w ten sposób wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy $\mathfrak{S}_n$. Widać od razu, że dla tablicy

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & \ldots & \ldots & n \\ \hline\end{array}$$

mamy $\mathfrak{S}_n(T,w) = \mathfrak{S}_n$ oraz $\mathfrak{S}_n(T,k) = \{1\}$, więc E_T generuje reprezentację trywialną. Podobnie, tablica

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline n \\ \hline\end{array}$$

odpowiada reprezentacji alternującej. Dla pierwszej tablicy w (5.7) mamy natomiast

$$\mathfrak{S}_3(T,w) = \{1, \lfloor 12\rfloor\} \quad \mathfrak{S}_3(T,k) = \{1, \lfloor 13\rfloor\},$$

więc

$$E_T = (1 + \lfloor 12\rfloor)(1 - \lfloor 13\rfloor). \tag{5.9}$$

Zadania

Zadanie 5.1. Pokazać, że przestrzeń wektorowa $\mathcal{F}_0(G)$ funkcji centralnych na grupie skończonej G jest podalgebrą przemienną algebry grupowej $\mathcal{F}(G)$.

Zadanie 5.2. Sprawdzić, że element E_T zdefiniowany w (5.9) spełnia $E_T^2 = 3E_T$ i znaleźć generowaną przez niego reprezentację grupy $\mathfrak{S}_3$.

Zadanie 5.3. Niech G oznacza grupę Pauliego (Zad. 4.10). Pokazać, że jeśli
$$E = (1-\varepsilon)(1-e_3)(1+\mathrm{i}e_1e_2) \quad \text{to} \quad E^2 = 8E.$$
Pokazać, że ideał $\mathcal{B} = \mathcal{F}(G)E$ jest rozpinany przez wektory $f_1 = e_1E$ i $f_2 = E$. Znaleźć macierze reprezentacji grupy G w $\mathcal{B}$.

Wskazówka. Zwrócić uwagę na to, że na mocy definicji E zachodzi $\varepsilon E = -E$.

Zadanie 5.4. Wykorzystując diagramy Younga dla grupy $\mathfrak{S}_3$, wyprowadzić następujący wzór na rozkład tensora trzeciego rzędu T na składowe nieprzywiedlne:
$$\begin{aligned} T^{abc} = {} & T^{(abc)} + T^{[abc]} \\ & + \tfrac{1}{3}(T^{abc} - T^{cba} + T^{bac} - T^{bca}) \\ & + \tfrac{1}{3}(T^{abc} - T^{bac} + T^{cba} - T^{cab}). \end{aligned}$$

VI

Rozmaitości gładkie i pola wektorowe

Większość interesujących grup Liego – włącznie z najprostszymi i najczęściej występującymi w fizyce – ma nietrywialną topologię; nie można w nich wprowadzić jednego, globalnie określonego układu współrzędnych. Z tego względu wykład na temat grup Liego trzeba poprzedzić przypomnieniem kilku najważniejszych pojęć dotyczących rozmaitości gładkich, zwanych także różniczkowymi lub różniczkowalnymi.

1. Mapy i atlasy

Przypomnijmy, że jeśli M i N są przestrzeniami topologicznymi, to bijekcję $f : M \to N$ taką, że f i f^{-1} są ciągłe, nazywamy *homeomorfizmem* M na N. Niech M będzie przestrzenią topologiczną spełniającą aksjomat rozdzielania Hausdorffa. Parę (U, x) nazywamy *mapą* o wymiarze n na M, jeśli $U \subset M$ jest zbiorem otwartym a x jest homeomorfizmem U na pewien otwarty zbiór w $\mathbb{R}^n$. Zbiór U nazywa się dziedziną mapy, a odwzorowanie $x = (x^1, \dots, x^n)$ – lokalnym układem współrzędnych. Funkcja $x^i : U \to \mathbb{R}$ nazywa się i-tą współrzędną w tym układzie. Rodzina $(U_\iota, x_\iota)_{\iota \in I}$ map na M nazywa się *atlasem* jeśli dziedziny map pokrywają M, $\bigcup_\iota U_\iota = M$. Przestrzeń M posiadająca atlas składający się z map o wymiarze n nazywa się *rozmaitością topologiczną* o wymiarze n. Np. sfera $\mathbb{S}_n$ jest taką rozmaitością: atlas w tym przypadku można określić wybierając dwa różne punkty na sferze i rozpatrując rzuty stereograficzne z tych punktów na plaszczyzny styczne do sfery w punktach antypodalnych względem tych wybranych.

2. Rozmaitości gładkie

Niech (U, x) i (V, y) będą dwoma mapami na rozmaitości topologicznej o wymiarze n; mówimy, że te mapy są ze sobą *zgodne*, jeśli homeomorfizmy

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V) \quad \text{i} \quad x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

są dyfeomorfizmami, tzn. takimi homeomorfizmami, że $y \circ x^{-1}$ i $x \circ y^{-1}$ są gładkie. Mówimy, że atlas rozmaitości topologicznej jest gładki, jeśli jego mapy są parami zgodne. Rozmaitość topologiczną z maksymalnym gładkim atlasem nazywamy *rozmaitością gładką*. Warunek maksymalności oznacza, że każda mapa zgodna ze wszystkimi mapami atlasu należy do tego atlasu. Zwykle posługujemy się atlasami, które nie są maksymalne. Każdy gładki atlas można rozszerzyć do atlasu maksymalnego.

Przykład 6.1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest n-wymiarową rozmaitością gładką. W tym przypadku atlas gładki może zawierać jedną mapę $(\mathbb{R}^n, x)$, gdzie x oznacza *globalny* układ współrzędnych kartezjańskich: niech $t = (t^1, \ldots, t^n) \in \mathbb{R}^n$, to $x^i(t) = t^i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

PRZYKŁAD 6.2. Sfera $\mathbb{S}_n$ ma gładki atlas składający się z dwóch map.

Jeśli (U, x) i (V, y) są mapami w przestrzeniach topologicznych M i N, odpowiednio, to w przestrzeni topologicznej $M \times N$ można określić mapę $(U \times V, x \times y)$, kładąc $(x \times y)(p, q) = (x(p), y(q))$ dla każdych $p \in U$ i $q \in V$. Wynika stąd od razu

STWIERDZENIE 6.1. *Iloczyn dwóch rozmaitości gładkich jest rozmaitością gładką.*

∗ **Ostrzeżenie**. Istnieją rozmaitości topologiczne, które nie dopuszczają gładkiego atlasu [**35**]; istnieją rozmaitości topologiczne, które posiadają nierównoważne struktury gładkie, tzn. atlasy gładkie o tej własności, że mapy należące do jednego atlasu nie są zgodne z mapami należącymi do drugiego atlasu. Np. sfera $\mathbb{S}_7$ posiada 14 nierównoważnych struktur gładkich [**46**]. Dla $n \neq 4$, każda przestrzeń $\mathbb{R}^n$ posiada tylko jedną strukturę gładką, opisaną w Przykładzie 6.1, ale przestrzeń topologiczna $\mathbb{R}^4$ posiada nieskończenie wiele nierównoważnych struktur gładkich [**15**].∗

Jeśli M i N są rozmaitościami gładkimi, to odwzorowanie

$$h : M \to N$$

nazywa się odwzorowaniem gładkim, jeśli dla każdej pary map: (U, x) w M i (V, y) w N złożenie $y \circ h \circ x^{-1}$ jest gładkie; o takim złożeniu mówi się, że jest ono *wyrażeniem odwzorowania h we współrzędnych lokalnych x* i *y*. W szczególności, o funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ mówimy, że jest gładka, jeśli jej wyrażenie $f \circ x^{-1}$ we współrzędnych lokalnych x każdej mapy na M jest gładkie. Następujące stwierdzenie jest oczywiste:

STWIERDZENIE 6.2. *Zbiór $\mathcal{C}(M)$ wszystkich funkcji gładkich na rozmaitości gładkiej M jest przemienną algebrą ze względu na mnożenie funkcji.*

Będziemy odtąd zajmowali się głównie rozmaitościami i odwzorowaniami gładkimi i z tego względu będziemy pomijali przymiotnik „gładki”, chyba, że prowadziłoby to do nieporozumień.

3. Pola wektorowe

3.1. Przestrzeń styczna. Wygodnie jest zdefiniować wektory i pola wektorowe na rozmaitości traktując je jako operatory różniczkowe, tzn. uogólniając znany z analizy wektorowej w $\mathbb{R}^3$ operator $\vec{v} \cdot \mathrm{grad}$. Definiujemy mianowicie *przestrzeń styczną* do rozmaitości M w punkcie $p \in M$ jako zbiór T_pM wszystkich liniowych odwzorowań $v : \mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$ spełniających regułę Leibniza w postaci

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad \text{dla} \quad f, g \in \mathcal{C}(M).$$

Zbór T_pM jest przestrzenią wektorową; dowodzi się, że prawdziwe jest

STWIERDZENIE 6.3. *Przestrzeń styczna do rozmaitości n-wymiarowej jest n-wymiarowa.*

O wektorze $v \in T_pM$ mówi się, że jest *zaczepiony* w punkcie p.

3.2. Wiązka styczna. Wygodnie jest wprowadzić pojęcie *wiązki stycznej* TM rozmaitości M: jest to zbiór

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

na którym wprowadza się naturalną topologię i gładki atlas. Niech $\pi : TM \to M$ będzie *rzutem*, określonym jako odwzorowanie przyporządkowujące każdemu wektorowi stycznemu $v \in T_pM$ punkt, do którego jest zaczepiony, $\pi(v) = p$. Jeśli (U, x) jest mapą na M, to określamy mapę (V, y) ma TM biorąc $V = \pi^{-1}(U)$ i kładąc $y(v) = (x \circ \pi(v), \dot{x}(v))$, gdzie $\dot{x}^i(v) = v(x^i)$ jest i-tą składową wektora v względem układu współrzędnych x. „Podnosząc" w ten sposób mapy z M do TM, otrzymujemy na wiązce stycznej atlas zgodnych map, nadający jej strukturę $2n$-wymiarowej rozmaitości.

Mając odwzorowanie $h : M \to N$, określamy *odwzorowanie styczne* $Th : TM \to TN$: jeśli $v \in T_pM$, to $Th(v)$ jest wektorem zaczepionym w punkcie $h(p) \in N$ takim, że dla każdej funkcji $g \in \mathcal{C}(N)$ mamy $Th(v)(g) = v(g \circ h)$. Odwzorowanie $T_ph = Th|T_pM$ jest liniowe; jeśli $j : N \to P$ też jest gładkie, to

$$T(j \circ h) = Tj \circ Th \quad \text{oraz} \quad T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM}\,.$$

Inaczej mówiąc, T jest kowariantnym funktorem z kategorii gładkich rozmaitości w kategorię wiązek wektorowych.

3.3. Trzy definicje pól wektorowych. Istnieje kilka równoważnych i pożytecznych definicji pól wektorowych; przytoczymy tu trzy.

(A) Intuicyjna definicja mówi, że pole wektorowe polega na przyporządkowaniu, w sposób gładki, punktom rozmaitości zaczepionych w tych punktach wektorów. Można ją przetłumaczyć na język wiązek mówiąc, że pole wektorowe jest *przekrojem* wiązki stycznej $\pi : TM \to M$, tzn. odwzorowaniem $X : M \to TM$ takim, że $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$.

(B) Pole wektorowe na M można określić jako *różniczkowanie* algebry $\mathcal{C}(M)$, tzn. odwzorowanie liniowe $X : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(M)$ spełniające regułę Leibniza,

$$X(fg) = fX(g) + gX(f) \quad \text{dla} \quad f, g \in \mathcal{C}(M).$$

Zbiór wszystkich pól wektorowych na M oznaczamy przez $\mathcal{V}(M)$. Jeśli $p \in M$ i $X \in \mathcal{V}(M)$, to odwzorowanie $\mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto X(f)(p)$, definiuje wektor zaczepiony w punkcie p: jest to wartość pola X w tym punkcie. Pola wektorowe można mnożyć przez funkcje: zbiór $\mathcal{V}(M)$ jest modułem nad pierścieniem $\mathcal{C}(M)$. Ponadto, mamy

STWIERDZENIE 6.4. *Przestrzeń wektorowa $\mathcal{V}(M)$ jest nieskończenie wymiarową algebrą Liego ze względu na nawias pól wektorowych*

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \quad X, Y \in \mathcal{V}(M). \tag{6.1}$$

Dowód. Istotnie, obliczając, $X \circ Y(fg) = (Xf)(Yg) + (Xg)(Yf) + f(X \circ Y)g + g(X \circ Y)f$, zauważamy, że złożenie $X \circ Y$ nie jest polem wektorowym, ale nawias (6.1) nim jest, bo jest odwzorowaniem liniowym i spełnia regułę Leibniza. Ponadto, łatwo sprawdzić, że dla każdych trzech pól wektorowych X, Y i Z zachodzi tożsamość Jacobiego

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0. \qquad \square$$

(C) Pole wektorowe można określić także przy pomocy generowanej przez to pole *jednoparametrowej grupy przekształceń lokalnych*, zwanej także *strumieniem* tego pola. Odwzorowanie gładkie

$$\mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, p) \mapsto \varphi_t(p),$$

określa jednoparametrową grupę, jeśli

$$\varphi_0 = \mathrm{id}_M \quad \text{oraz} \quad \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} \quad \text{dla} \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ odwzorowanie $\varphi_t : M \to M$ jest dyfeomorfizmem, gdyż $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$. Taka grupa indukuje pole wektorowe X: jeśli $f \in \mathcal{C}(M)$, to

$$X(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_t|_{t=0}.$$

Obliczając złożenie obu stron drugiego równania (6.2) z f i różniczkując względem s w punkcie $s = 0$, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_t = (Xf) \circ \varphi_t. \tag{6.3}$$

Wynika stąd, że funkcja f jest stała na krzywych całkowych (trajektoriach) pola X wtedy i tylko wtedy, gdy $Xf = 0$.

Mając pole $X \in \mathcal{V}(M)$, można znaleźć odpowiadającą mu lokalną grupę lokalnych dyfeomorfizmów rozmaitości M. W tym celu wprowadzamy współrzędne lokalne x oraz wyrażamy φ_t i X przez te współrzędne, definiując $z_t = x \circ \varphi_t \circ x^{-1}$ i $Z^i = X(x^i) \circ x^{-1}$. Grupę φ_t znajdujemy rozwiązując wynikający z (6.3) układ równań różniczkowych zwyczajnych w $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z_t^i = Z^i \circ z_t$$

z warunkiem początkowym $z_0^i(u) = u^i$, $u \in \mathbb{R}^n$. Rozwiązania takie istnieją (na ogół) tylko „podwójnie” lokalnie: dla t należących do pewnego, odpowiednio małego otoczenia 0 oraz dla współrzędnych u należących do pewnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}^n$.

3.4. Przenoszenie pól wektorowych. Przy pomocy odwzorowania stycznego Th można przenosić wektory, ale na ogół nie można przenosić pól. Np. jeśli odwzorowanie h nie jest injektywne, to istnieją dwa różne punkty p i q takie, że $h(p) = h(q)$. Na ogół mamy $Th(X(p)) \neq Th(X(q))$ i nie wiadomo jaką wartość przypisać przeniesionemu polu w tym punkcie. Pola wektorowe (także inne pola tensorowe) można przenosić przy pomocy dyfeomorfizmów. Mianowicie, jeśli $h : M \to N$ jest dyfeomorfizmem, to używając definicji

(B) pól, określamy pole $h_*X \in \mathcal{V}(N)$, powstające z przeniesienia pola $X \in \mathcal{V}(M)$, kładąc

$$(h_*X)(g) = (X(g \circ h)) \circ h^{-1}$$

dla każdej funkcji $g \in \mathcal{C}(N)$. Na podstawiej tej definicji łatwo sprawdzić, że przenoszenie pól wektorowych jest izomorfizmem algebr Liego,

$$h_*[X,Y] = [h_*X, h_*Y] \quad \text{dla każdych} \quad X, Y \in \mathcal{V}(M). \tag{6.4}$$

Używając definicji (C) pól można zapisać wzór na pole wektorowe przeniesione przy pomocy dyfeomorfizmu h w postaci

$$h_*X = Th \circ X \circ h^{-1},$$

gdzie X jest teraz interpretowane jako przekrój wiązki stycznej. Widać stąd, że

$$(h_*X)(h(p)) = T_p h(X(p)). \tag{6.5}$$

Definicja (C) prowadzi do

Stwierdzenie 6.5. *Jeśli $h : M \to N$ jest dyfeomorfizmem, a pole $X \in \mathcal{V}(M)$ generuje (φ_t), to pole $h_*X \in \mathcal{V}(N)$ generuje $(h \circ \varphi_t \circ h^{-1})$.*

Dowód. Widać od razu, że jeśli (φ_t) jest jednoparametrową grupą na M, to $(h \circ \varphi_t \circ h^{-1})$ jest jednoparametrową grupą na N. Niech Y będzie polem wektorowym na N, indukowanym przez $(h \circ \varphi_t \circ h^{-1})$, a $g \in \mathcal{C}(N)$, to

$$Y(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \circ h \circ \varphi_t \circ h^{-1}{}_{|t=0} = (X(g \circ h)) \circ h^{-1} = (h_*X)(g),$$

więc $Y = h_*X$. □

Jeśli h jest dyfeomorfizmem, to można określić cofnięcie pola wektorowego $X : M \to TM$ jako pole

$$h^*X = Th^{-1} \circ X \circ h.$$

4. Wiązki włókniste

Wiązka styczna jest przykładem ogólnego pojęcia gładkiej *wiązki włóknistej.* Wiązki definiuje się zwykle najpierw w obszerniejszej kategorii topologicznej, ale tu ograniczymy się do wiązek gładkich, pomijając przymiotnik *gładki* zarówno w odniesieniu do odwzorowań, jak i przestrzeni (rozmaitości). Wiązka (włóknista) o włóknie typowym N jest określona przez odwzorowanie surjektywne $\pi : E \to M$ o tej własności, że dla każdego $p \in M$ istnieje otwarte otoczenie U i dyfeomorfizm

$$h : U \times N \to \pi^{-1}(U)$$

taki, że

$$\text{jeśli } (q, y) \in U \times N, \text{ to } \pi(h(q, y)) = q.$$

Tę ostatnia własność wiązki nazywa się jej *lokalną trywialnością*. Inaczej mówiąc, jeśli $U \subset M$ jest odpowiednio małe, to część wiązki leżąca nad U jest iloczynem. O wiązce mówi się, że jest trywialna, jeśli istnieje „globalna” trywializacja, tzn. taka, że $U = M$, więc $E \cong M \times N$. Np. wiązka styczna sfery $\mathbb{S}_n$ jest trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 1, 3$ albo 7.

Zbiór $E_p \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-1}(p)$ nazywa się *włóknem* wiązki nad p. Każde włókno jest dyfeomorficzne z włóknem typowym N.

Odwzorowanie $s : U \to E$ takie, że jeśli $q \in U$, to $\pi(s(q)) = q$ nazywa się lokalnym przekrojem wiązki; na mocy samej definicji wiązki, każda wiązka ma przekroje lokalne. Przekrój jest globalny jeśli $U = M$. Wiązka, która nie jest trywialna, może nie mieć przekrojów globalnych.

Jeśli N jest przestrzenia wektorową, wszystkie włókna E_p, $p \in M$, są przestrzeniami wektorowymi, oraz istnieją odwzorowania lokalnie trywializujące h, których ograniczenia do włókien są izomorfizmami przestrzeni wektorowych, to E nazywa się wiązką wektorową. Wiązka styczna jest wiązką wektorową. Wiązka wektorowa ma przekroje globalne (np. przekrój zerowy).

Przykład 6.3. *Wiązki Hopfa.* Niech K będzie jedną z czterech algebr nad $\mathbb{R}$, bez dzielników zera, mianowicie

$$K = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H} \text{ albo } \mathbb{O} \text{ (algebra oktonionów)}$$

Wymiary tych algebr są, odpowiednio, 1, 2, 4 i 8. Każda ma antyinwolucję $K \to K$, $p \mapsto \bar{p}$ taką, że $|p|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{p}p$ jest liczbą rzeczywistą, $p \neq 0 \;\Rightarrow\; |p|^2 > 0$ i dla każdych $p, q \in K$ jest $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}$. Rozpatrzmy odwzorowanie

$$\pi : K^2 \to \mathbb{R} \times K, \quad \pi(p, q) = (|q|^2 - |p|^2, 2p\bar{q}).$$

Na mocy tożsamości

$$(|q|^2 - |p|^2)^2 + |2p\bar{q}|^2 = (|p|^2 + |q|^2)^2$$

widać, że π odwzorowuje sferę

$$\mathbb{S}(K) = \{(p, q) \in K^2 \mid |p|^2 + |q|^2 = 1\}$$

na sferę

$$\{(r, s) \in \mathbb{R} \times K \mid r^2 + |s|^2 = 1\}.$$

Jeśli $\pi(p, q) = \pi(p', q')$ to istnieje $u \in K$ takie, że $|u| = 1$ i $p' = pu, q' = qu$. Zatem włókno nad $\pi(p, q)$, $(p, q) \in \mathbb{S}(K)$, jest sferą

$$\{(pu, qu) \in \mathbb{S}(K) \mid |u|^2 = 1\}.$$

Otrzymuje się w ten sposób trzy wiązki Hopfa:

$K = \mathbb{R}$	$\mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$	włókno	$\mathbb{S}_0 = \mathbb{Z}_2$
$K = \mathbb{C}$	$\mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_2$	włókno	$\mathbb{S}_1 = \mathsf{U}(1)$
$K = \mathbb{H}$	$\mathbb{S}_7 \to \mathbb{S}_4$	włókno	$\mathbb{S}_3 = \mathsf{SU}(2)$
$K = \mathbb{O}$	$\mathbb{S}_{15} \to \mathbb{S}_8$	włókno	$\mathbb{S}_7$.

Są to jedyne wiązki sfer nad sferami, których włókna są też sferami.

5. Formy różniczkowe i całkowanie

5.1. Wiązki form. Niech T_p^*M oznacza przestrzeń dualna względem przestrzeni stycznej T_pM; zbiór

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$$

posiada naturalną strukturę wiązki wektorowej nad M: jest to wiązka 1-form albo *wiązka kostyczna* rozmaitości gładkiej M. Ogólniej, dla każdego $k = 0, 1, \dots, n = \dim M$ mamy wiązkę k-form $\bigwedge^k T^*M$ nad M. Zbiór $\Gamma^k(M)$ przekrojów tej wiązki jest modułem nad pierścieniem $\mathcal{C}(M) = \Gamma^0(M)$ funkcji na M. Elementy $\Gamma^k(M)$ nazywają się polami k-form, albo, krócej, k-formami (różniczkowymi) na M. Jeśli

$$\alpha \in \Gamma^k(M) \quad \text{i} \quad X_i \in \mathcal{V}(M),\ i = 1, \dots, k, \quad \text{to} \quad \alpha(X_1, \dots, X_k) \in \mathcal{C}(M)$$

jest wartością formy α na ciągu pól wektorowych $X_1, \dots, X_k$. Jeśli

(6.6) $\quad \alpha \in \Gamma^k(M) \quad \text{i} \quad \beta \in \Gamma^l(M), \quad \text{to} \quad \alpha \wedge \beta \quad \text{jest} \quad (k + l) -$ formą.

Np. jeśli $\alpha, \beta \in \Gamma^1(M)$ i $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, to

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

5.2. Pochodna zewnętrzna. Niech

$$\Gamma(M) = \bigoplus\nolimits_{k=0}^{n} \Gamma^k(M).$$

Pochodna zewnętrzna $\mathrm{d}\colon \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ jest określona przez następujące warunki

(i) jest liniowa,
(ii) $\mathrm{d}\circ\mathrm{d} = 0$,
(iii) jeśli $f \in \mathcal{C}(M)$ i $X \in \mathcal{V}(M)$, to $\langle X, \mathrm{d}f\rangle = X(f)$,
(iv) spełnia regułę Leibniza $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$.

Pokazuje się, że istnieje jedno odwzorowanie d spełniające te warunki, i że zachodzi

$$\mathrm{d}\Gamma^k(M) \subset \Gamma^{k+1}(M).$$

5.3. Cofanie form. Odwzorowanie gładkie $h : M \to N$ – nie koniecznie dyfeomorfizm – określa, dla każdego k, odwzorowanie, zwane cofnięciem („pull-back") form różniczkowych,

$$h^* : \Gamma^k(N) \to \Gamma^k(M)$$

dane przez

$$(h^*\alpha)_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha_{h(p)}\Big(T_ph(X_1), \dots, T_ph(X_k)\Big),$$

gdzie $p \in M$ i $X_1, \dots, X_k \in T_pM$. W szczególności,

(6.7) $\quad$ jeśli $\alpha \in \Gamma^0(M)$, to $\quad h^*\alpha = \alpha \circ h.$

Łatwo sprawdzić, że

(6.8) $\quad h^*(\alpha \wedge \beta) = h^*\alpha \wedge h^*\beta \quad \text{i} \quad \mathrm{d}\circ h^* = h^* \circ \mathrm{d},$

a jeśli dane są dwa odwzorowania gładkie,

$$M_1 \xrightarrow{h_1} M_2 \xrightarrow{h_2} M_3, \quad \text{to} \quad (h_2 \circ h_1)^* = h_1^* \circ h_2^*. \tag{6.9}$$

5.4. Orientacja rozmaitości. Jeśli $\dim M = n$, to włókna wiązki $\bigwedge^n T^*M$ są jednowymiarowe. Zakładając, że rozmaitość M jest spójna i wyjmując z $\bigwedge^n T^*M$ obraz przekroju zerowego, otrzymujemy rozmaitość $\mathfrak{M}$, która jest albo spójna, albo ma dwie składowe spójne, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}'' = \varnothing$. W pierwszym przypadku M jest nieorientowalna; w drugim, wyróżniając jedną z tych składowych $\mathfrak{M}'$ wprowadzamy *orientację* M. Każdy element $\mathfrak{M}'$ jest postaci $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0$; ciąg wektorów $(e_1, \ldots, e_n)$ określa orientację przestrzeni stycznej do rozmaitości w punkcie, do którego te wektory są zaczepione. Przesuwając te wektory w dowolny ciągły sposób i biorąc ich iloczyn zewnętrzny otrzymamy element tej samej składowej $\mathfrak{M}'$ wiązki $\bigwedge^n T^*M$.

Odtąd zakładamy, że rozmaitość M jest orientowalna i została w ten sposób zorientowana. Można to zrobić także wtedy, gdy M nie jest spójna, ale posiada nigdzie nie znikający przekrój wiązki $\bigwedge^n T^*M$.

5.5. Całkowanie. Mając zorientowaną rozmaitość M można zdefiniować całkę formy $\lambda \in \varGamma^n(M)$ na obszarze $U \subset M$, którego domknięcie jest zwarte. Załóżmy – co jest nieistotnym uproszczeniem – że U jest dziedziną mapy (U, x) należącej do gładkiego atlasu na M i takiej, że n-forma $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ określa na U orientację zgodną z orientacją rozmaitości. Formę λ można przedstawić w postaci $\lambda = \ell\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, gdzie $\ell \in \mathcal{C}(U)$. Oznaczając przez $(t^1, \ldots, t^n)$ współrzędne kanoniczne na $\mathbb{R}^n$ definiujemy

$$\int_U \lambda = \int_{x(U)} (\ell \circ x^{-1})(t^1, \ldots, t^n)\, \mathrm{d}t^1 \ldots \mathrm{d}t^n \tag{6.10}$$

gdzie po prawej stronie występuje całka Riemanna ciągłej (bo gładkiej) funkcji $\ell \circ x^{-1}$ po obszarze $x(U) \subset \mathbb{R}^n$, którego domknięcie jest zwarte. Jeśli y jest innym układem współrzędnych lokalnych w U, to

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = (J \circ x)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

gdzie J jest jakobianem odwzorowania $y \circ x^{-1}$. Jeśli orientacje układów x i y są zgodne, to $J = \mid J \mid$ i klasyczna reguła zamiany zmiennych w całkach wielokrotnych zapewnia, że definicja (6.10) jest poprawna w tym sensie, iż nie zależy od wyboru układu współrzędnych. Co więcej, wynika stąd od razu

Stwierdzenie 6.6. *Jeśli U jest obszarem o zwartym domknięciu na orientowalnej rozmaitości M i $\lambda \in \varGamma^n(M)$, to dla każdego zachowującego orientację dyfeomorfizmu $h : M \to M$ mamy*

$$\int_{h(U)} \lambda = \int_U h^*\lambda. \tag{6.11}$$

Formę λ o nośniku zwartym, albo – ogólniej – n-formę „dostatecznie szybko dążącą do 0 w nieskończoności” można całkować po całej rozmaitości M. W szczególności, każdą n-formę można całkować na orientowalnej rozmaitości *zwartej*. Stosując w tym przypadku (6.11) do iloczynu $f\lambda$, gdzie $f \in \mathcal{C}(M)$, otrzymujemy

$$\int_M f\lambda = \int_M (f \circ h) h^* \lambda \tag{6.12}$$

dla każdego $h \in \mathrm{Diff}(M)$.

6. Algebra Cartana

Niech M będzie n-wymiarową gładką rozmaitością. Sumie prostej modułów

$$\mathit{\Gamma}(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathit{\Gamma}^k(M)$$

można nadać strukturę algebry łącznej i superprzemiennej, zwanej *algebrą Cartana*. Mnożenie jej elementów jest określone jak w (6.6). Pochodna zewnętrzna d jest jej superróżniczkowaniem stopnia 1 spełniającym

$$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0. \tag{6.13}$$

W niniejszym paragrafie opiszemy superalgebrę Liego $\mathrm{Der}\,\mathit{\Gamma}(M)$ wszystkich superróżniczkowań algebry Cartana; dla odciążenia języka przedrostek „super” będzie opuszczany. Zakładając, że rozmaitość M jest ustalona, piszemy często T, $\mathit{\Gamma}$ zamiast TM, $\mathit{\Gamma}(M)$, itd.

Algebra Cartana jest generowana przez $\mathit{\Gamma}^0 \oplus \mathit{\Gamma}^1$, więc różniczkowanie, znikające na tej sumie, znika na całej algebrze. Wynika stąd, że

$$\mathrm{Der}\,\mathit{\Gamma} = \bigoplus_{k=-1}^{n} \mathrm{Der}_k\,\mathit{\Gamma}.$$

Różniczkowanie D nazywa się *algebraicznym*, jeśli znika na $\mathit{\Gamma}^0$; jest ono wtedy określone przez $D|\mathit{\Gamma}^1$. Zakładając, że D jest stopnia k, odwzorowanie

$$D|\mathit{\Gamma}^1 : \mathit{\Gamma}^1 \to \mathit{\Gamma}^{k+1}$$

jest przekrojem X wiązki $T \otimes \bigwedge^{k+1} T^*$ tzn. polem $(k+1)$-form o wartościach wektorowych. Różniczkowanie algebraiczne $D = i(X)$, ograniczone do włókna wiązki $\mathit{\Gamma} \to M$, jest różniczkowaniem algebry zewnętrznej, opisanym w Przykładzie 2.6.3.

Przy założeniu, że $i(X)$ jest stopnia k, komutator różniczkowań

$$[i(X), \mathrm{d}] = i(X) \circ \mathrm{d} - (-1)^k\, \mathrm{d} \circ i(X) \tag{6.14}$$

jest różniczkowaniem stopnia $k+1$, które nie jest algebraiczne. Na mocy tożsamości Jacobiego, jest

$$[[i(X), \mathrm{d}], \mathrm{d}] = 0.$$

Różniczkowanie D algebry Cartana takie, że

$$[D, \mathrm{d}] = 0$$

nazywa się *typu Liego*. Np. jeśli $k = -1$, to X jest polem wektorowym, a różniczkowanie stopnia 0

$$\mathcal{L}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} [i(X), \mathrm{d}] = i(X) \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i(X)$$

jest pochodną Liego w kierunku X.

TWIERDZENIE (Frölicher–Nijenhuis). (i) *Każde różniczkowanie typu Liego jest postaci* (6.14), *gdzie* X *jest przekrojem wiązki*

$$TM \otimes \bigwedge T^*M \to M; \tag{6.15}$$

(ii) *każde różniczkowanie można w jeden sposób przedstawić w postaci sumy różniczkowania algebraicznego i różniczkowania typu Liego.*

Dowód. Można znaleźć w [**20**]. □

WNIOSEK. Niech X i Y będą przekrojami wiązki (6.15); łatwo sprawdzić, że różniczkowanie

$$[[\mathrm{d}, i(X)], [\mathrm{d}, i(Y)]]$$

jest typu Liego; istnieje więc przekrój $[\![X, Y]\!]$ wiązki (6.15) taki, że

$$[[\mathrm{d}, i(X)], [\mathrm{d}, i(Y)]] = [\mathrm{d}, i([\![X, Y]\!])]. \tag{6.16}$$

Nawias $[\![\,,\,]\!]$ nadaje przestrzeni wektorowej $\mathsf{Sec}(T \otimes \bigwedge T^*)$ przekrojów wiązki (6.15) strukturę superalgebry Liego; odwzorowanie liniowe

$$\mathsf{Sec}(T \otimes \bigwedge T^*) \to \operatorname{Der} \varGamma, \quad X \mapsto [\mathrm{d}, i(X)]$$

jest morfizmem struktur superalgebry Liego.

Jeśli X i Y są polami wektorowymi, to $[\![X, Y]\!]$ jest komutatorem Liego tych pól, zapisywanym zwykle jako $[X, Y]$. Równanie (6.16) uogólnia znaną własność pochodnej Liego,

$$[\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)] = \mathcal{L}([\![X, Y]\!]). \tag{6.17}$$

PRZYKŁAD 6.4. Niech J oznacza strukturę prawie zespoloną na parzystowymiarowej rozmaitości, tzn. $J \in \mathsf{Sec}(T \otimes T^*)$ oraz $J \circ J = -\operatorname{id}_T$. Nawias $[\![J, J]\!]$ jest polem 2-form o wartościach wektorowych, zwanym *skręceniem Nijenhuisa*. W teorii rozmaitości zespolonych pokazuje się, że znikanie tego skręcenia jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby J odpowiadało strukturze zespolonej rozmaitości analitycznej, zob. np. II tom [**37**].

W zastosowaniach przydatny jest formularz, opisujący związki między różniczkowaniami d, $i(X)$ oraz $\mathcal{L}(X)$, gdzie X jest polem wektorowym. Zawiera on, oprócz (6.13) i (6.17), wzór Cartana na pochodną Liego form,

$$\mathcal{L}(X) = i(X) \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i(X), \tag{6.18}$$

oraz, dla $X, Y \in \mathcal{V}$, wzory

$$\mathrm{d} \circ \mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(X) \circ \mathrm{d} = 0, \tag{6.19}$$

$$i(X) \circ i(Y) + i(Y) \circ i(X) = 0, \tag{6.20}$$

$$\mathcal{L}(X) \circ i(Y) - i(Y) \circ L(X) = i([\![X, Y]\!]). \tag{6.21}$$

Jako przykład zastosowania tego formularza można podać następujące wygodne wzory na obliczanie pochodnej zewnętrznej: jeśli $\alpha \in \varGamma^1(M)$ i $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, to

$$\mathrm{d}\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]), \tag{6.22}$$

jeśli $\alpha \in \Gamma^2(M)$ i $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$, to

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(X,Y,Z) = {} & X(\alpha(Y,Z)) + Y(\alpha(Z,X)) + Z(\alpha(X,Y)) + \\ & - \alpha([Y,Z],X) - \alpha([Z,X],Y) - \alpha([X,Y],Z). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Np. wzór (6.22) wyprowadza się pisząc, na podstawie (6.18),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha(X,Y) = (i(X)\,\mathrm{d}\alpha)(Y) &= -(\mathrm{d}(i(X)\alpha))(Y) + (\mathcal{L}(X)\alpha)(Y) \\ &= -Y(\alpha(X)) + \mathcal{L}(X)(\alpha(Y)) - \alpha(\mathcal{L}(X)Y) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]). \end{aligned}$$

7. Kohomologie de Rhama

Formę $\alpha \in \Gamma^k(M)$ nazywa się formą *domkniętą* jeśli $\mathrm{d}\alpha = 0$; jeśli rozmaitość M jest n-wymiarowa, to każda n-forma na M jest domknięta. Forma $\alpha \in \Gamma^k(M)$ nazywa się formą *dokładną* jeśli istnieje forma $\beta \in \Gamma^{k-1}(M)$ taka, że $\alpha = \mathrm{d}\beta$. Wobec (6.13), każda forma dokładna jest domknięta, ale istnieją formy domknięte, które nie są dokładne. Jeśli $\alpha = \mathrm{d}\beta$ jest dokładną 1-formą, to całka krzywoliniowa $\int_1^2 \alpha = \beta(2) - \beta(1)$. Forma $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$, ograniczona do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$, jest domknięta, ale nie dokładna, bo jej całka po okręgu daje jego obwód. Niech $Z^k(M)$ i $B^k(M)$ oznaczają przestrzenie wektorowe k-form na M domkniętych i dokładnych, odpowiednio. Iloraz przestrzeni wektorowych

$$H^k(M) \stackrel{\text{def}}{=} Z^k(M)/B^k(M)$$

nazywa się ktą *przestrzenią kohomologii de Rhama* rozmaitości M. Wymiar tej przestrzeni nazywa się ktą *liczbą Bettiego* rozmaitości M. Niech

$$Z^k(M) \to H^k(M), \quad \alpha \mapsto [\alpha],$$

będzie odwzorowaniem kanonicznym na iloraz, tzn. jeśli $\alpha, \alpha' \in Z^k(M)$, to

$$[\alpha] = [\alpha'] \;\Leftrightarrow\; \alpha - \alpha' \in B^k(M).$$

Jeśli formy α i β są domknięte, to forma $\alpha \wedge \beta$ też jest domknięta. Ponadto, jeśli jedna z tych form jest dokładna, np. $\alpha = \mathrm{d}\gamma$, to forma $\alpha \wedge \beta = \mathrm{d}(\gamma \wedge \beta)$ jest dokładna. Wynika stąd, że jest dobrze określone mnożenie elementów

$$H^k(M) \times H^l(M) \to H^{k+l}(M), \quad ([\alpha],[\beta]) \mapsto [\alpha] \wedge [\beta] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha \wedge \beta]$$

nadające przestrzeni $H^*(M) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_k H^k(M)$ strukturę *algebry kohomologii de Rhama* rozmaitości M.

Zadania

Zadanie 6.1. Pokazać, że grupa $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ jest rozmaitością o wymiarze n^2.

Zadanie 6.2. Rzeczywistą przestrzeń rzutową definiuje się wprowadzając w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ relację równoważności: $t \equiv s \bmod R$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}^{\times}$ takie, że $s = \lambda t$ i kładąc $\mathbb{RP}_n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/R$. Pokazać, że $\mathbb{RP}_n$ można utożsamić z ilorazem $\mathbb{S}_n/\mathbb{Z}_2$, tzn. ze sferą, na której utożsamiono pary punktów antypodalnych. Pokazać, że ta przestrzeń posiada gładki atlas składający się z $n + 1$ map.

Wskazówka. Niech $\operatorname{dir} t$ oznacza klasę równoważności, ze względu na relację R, zawierającą $t \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Kładziemy $U_i = \{\operatorname{dir} t \mid t^i \neq 0\}$ oraz, dla $j \neq i$, $x^j(\operatorname{dir} t) = t^j/t^i$.

Zadanie 6.3. Sprawdzić, że nawias pól wektorowych spełnia tożsamość Jacobiego oraz że zachodzi (6.4).

Zadanie 6.4. Znaleźć jednoparametrową grupę przekształceń lokalnych, generowaną przez pole wektorowe $X = x^2$ na $M = \mathbb{R}$.

Zadanie 6.5. Pochodna zewnętrzna spełnia $[\mathrm{d}, \mathrm{d}] = 0$, więc zgodnie z Twierdzeniem Frölichera–Nijenhuisa, można ją przedstawić w postaci (6.14). Znaleźć pole X takie, że $\mathrm{d} = [i(X), \mathrm{d}]$.

Zadanie 6.6. Uogólnić wzory (6.22) i (6.23) dla $\alpha \in \Gamma^k(M)$.

VII

Grupy Liego

Przypomnijmy (por. rozdział 3), że *grupa Liego* jest to grupa G, która jest równocześnie rozmaitością gładką, a odwzorowanie

$$G \times G \to G, \quad (a, b) \mapsto a^{-1}b, \tag{7.1}$$

jest gładkie. Wynika stąd, że odwzorowania

$$\mathsf{L}(a) : G \to G, \;\; \mathsf{R}(a) : G \to G, \;\; \mathsf{L}(a)(b) = \mathsf{R}(b)(a) = ab,$$

są dyfeomorfizmami dla każdego $a \in G$. Odwzorowanie $\mathrm{Ad}(a) = \mathsf{L}(a) \circ \mathsf{R}(a^{-1})$ jest także dyfeomorfizmem. Pokazuje się, że z założenia gładkości grupy Liego wynika jej analityczność: można tak zawęzić atlas map na grupie Liego, że funkcje przejścia między mapami będą funkcjami analitycznymi, tzn. funkcjami posiadającymi w pewnym otoczeniu każdego punktu rozwinięcia w zbieżne szeregi potęgowe; względem współrzędnych map takiego atlasu funkcja (7.1) jest także analityczna.

Wymiarem grupy Liego jest wymiar rozmaitości, na której jest ona zdefiniowana.

1. Algebra Liego grupy Liego

Niech G będzie grupą Liego; mówimy, że pole wektorowe $A \in \mathcal{V}(G)$ jest *lewo niezmiennicze*, jeśli jest niezmiennicze ze względu na wszystkie lewe przesunięcia, tzn. jeśli

$$(\mathsf{L}(a))_* A = A \quad \text{dla każdego } a \in G. \tag{7.2}$$

W niniejszym rozdziale wygodnie będzie oznaczać wartość pola wektorowego A w punkcie a przez A_a. Na podstawie definicji (6.5) przenoszenia pól wektorowych przy pomocy dyfeomorfizmów widać, że warunek (7.2) jest równoważny następującemu:

$$A_a = (T_e \mathsf{L}(a))(A_e) \quad \text{dla każdego } a \in G. \tag{7.3}$$

Wynika stąd, że pole lewo niezmiennicze na G jest określone przez swoją wartość w jedności e grupy.

STWIERDZENIE 7.1. *Jeśli G jest n-wymiarową grupą Liego, to przestrzeń wektorowa G' lewo niezmienniczych pól wektorowych na G jest n-wymiarową algebrą Liego ze względu na nawias pól wektorowych.*

Dowód. Istotnie, przestrzeń G' jest n-wymiarowa gdyż, jako przestrzeń wektorowa, jest izomorficzna przestrzeni T_eG. Na podstawie (6.4) widać, że G' jest podalgebrą Liego algebry Liego $\mathcal{V}(G)$. □

Algebra Liego, o której mowa w powyższym stwierdzeniu, nazywa się *algebrą Liego grupy Liego.*

2. Odwzorowanie wykładnicze

Niech (φ_t) będzie jednoparametrową grupą przekształceń G, generowaną przez pole wektorowe $A \in G'$. (Pokazuje się, że taka grupa jest określona na grupie Liego globalnie.) Na mocy stw. 6.5 i lewo niezmienniczości A mamy

$$\mathsf{L}(a) \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \mathsf{L}(a) \tag{7.4}$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$ i $a \in G$. Definiujemy *odwzorowanie wykładnicze*

$$\exp : G' \to G, \quad \exp A = \varphi_1(e).$$

Jeśli $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_t|_{t=0} = Af$ i $u \in \mathbb{R}$, to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_{ut}|_{t=0} = uAf$, więc

$$\exp tA = \varphi_t(e),$$

a na podstawie (7.4) otrzymujemy stąd $\varphi_t(a) = a\varphi_t(e) = a \exp tA$, czyli

$$\varphi_t = \mathsf{R}(\exp tA). \tag{7.5}$$

Obliczając obie strony równości $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ na elemencie e i korzystając z (7.5), otrzymujemy

$$\exp(t+s)A = (\exp tA)(\exp sA).$$

Wynika stąd, że dla każdego $A \in G'$, zbiór

$$\{\exp tA \mid t \in \mathbb{R}\} \subset G$$

jest (jednowymiarową) podgrupą grupy G; pokazuje się, że ta podgrupa jest izomorficzna $\mathbb{R}$ albo $\mathsf{U}(1)$.

STWIERDZENIE 7.2. *Odwzorowanie wykładnicze* exp *jest lokalnym dyfeomorfizmem, tzn. dyfeomorfizmem pewnego otoczenia* 0 *w przestrzeni wektorowej G' na odpowiednie otoczenie jedności e grupy G.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że obie przestrzenie wektorowe T_0G' i T_eG można utożsamić z G'; odwzorowanie $T_0 \exp : G' \to G'$ przeprowadza wektor styczny do krzywej $t \mapsto tA$ w wektor styczny do krzywej $t \mapsto \exp tA$, więc $T_0 \exp = \mathrm{id}_{G'}$ i exp jest lokalnym dyfeomorfizmem. □

3. Algebra Liego grupy $\mathsf{GL}(V)$

Niech V będzie n-wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową. Przestrzeń wektorowa endomorfizmów $\mathsf{End}\, V$ jest rozmaitością o wymiarze n^2: jeśli (e_i) jest bazą w V, to można zdefiniować globalny układ współrzędnych $x = (x^i{}_j)$ w $\mathsf{End}\, V$ kładąc $x^i{}_j(a) = a^i{}_j$, gdzie $(a^i{}_j)$ jest macierzą endomorfizmu $a \in \mathsf{End}\, V$ względem (e_i), $a(e_j) = e_i a^i{}_j$. Przestrzeń wektorowa $\mathsf{End}\, V$ jest także algebrą Liego ze względu na komutator endomorfizmów, $[a, b] = ab - ba$. Grupa $\mathsf{GL}(V)$, jako otwarty podzbiór $\mathsf{End}\, V$ jest rozmaitością o wymiarze n^2. Przestrzeń $(\mathsf{End}\, V)^*$ można traktować jako podzbiór $\mathcal{C}(\mathsf{GL}(V))$; zawiera ona współrzędne $x^i{}_j$. Przypomnijmy też, iż przestrzenie wektorowe $(\mathsf{End}\, V)^{**}$ i $\mathsf{End}\, V$ można w naturalny sposób utożsamić. Algebrę Liego $\mathsf{GL}(V)'$ grupy $\mathsf{GL}(V)$ zapisuje się zwykle jako $\mathfrak{gl}(V)$.

Stwierdzenie 7.3. *Odwzorowanie*

(7.6) $\mu : \mathfrak{gl}(V) \to \mathsf{End}\, V$ *dane przez* $\langle \mu(A), f\rangle = A_e(f),\ f \in (\mathsf{End}\, V)^*$,

jest izomorfizmem algebry Liego $\mathfrak{gl}(V)$ *na algebrę Liego* $\mathsf{End}\, V$.

Dowód. Odwzorowanie μ jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych gdyż jest liniowe, przestrzenie $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathsf{End}\, V$ są tego samego wymiaru, a jądro μ jest trywialne, bo jeśli $A_e(f) = 0$ dla każdego $f \in (\mathsf{End}\, V)^*$, to $A = 0$. Aby znaleźć $\mu([A, B])$, gdzie $A, B \in \mathfrak{gl}(V)$, obliczamy Af, gdzie $A \in \mathfrak{gl}(V)$ i $f \in (\mathsf{End}\, V)^*$. Na podstawie (7.3) i (7.6) mamy

$$(Af)(a) = A_a(f) = A_e(f \circ \mathsf{L}(a)) = (f \circ \mathsf{L}(a))(\mu(A)) = f \circ \mathsf{R}\Big(\mu(A)\Big)(a)$$

czyli

$$Af = f \circ \mathsf{R}\Big(\mu(A)\Big). \tag{7.7}$$

Obliczając $f \circ \mathsf{R}\Big(\mu([A, B])\Big) = [A, B]f = A(Bf) - B(Af)$, korzystając z (7.7) oraz z $\mathsf{R}\Big(\mu(B)\Big) \circ \mathsf{R}\Big(\mu(A)\Big) = \mathsf{R}\Big(\mu(A)\mu(B)\Big)$ otrzymujemy

$$\mu([A, B]) = [\mu(A), \mu(B)].$$ □

Warto zwrócić uwagę na to, że pierwszy komutator w tym ostatnim równaniu jest nawiasem pól wektorowych (operatorów różniczkowych pierwszego rzędu), a drugi – czysto algebraicznym komutatorem endomorfizmów.

Łatwo jest uogólnić powyższe rozważania i wyniki na przypadek, gdy V jest zespoloną przestrzenią wektorową o wymiarze n; grupa $\mathsf{GL}(V)$ jest wtedy grupą Liego o wymiarze rzeczywistym $2n^2$; jej algebra Liego $\mathsf{End}\, V$ może być rozpatrywana jako zespolona algebra Liego o wymiarze n^2, albo jako rzeczywista algebra Liego o wymiarze $2n^2$.

Od tej pory będziemy utożsamiali $\mathfrak{gl}(V)$ z $\mathsf{End}\, V$ i opuszczali znak izomorfizmu μ, tzn. zapisywali (7.7) w postaci

$$Af = f \circ \mathsf{R}(A). \tag{7.8}$$

Odwzorowanie wykładnicze

$$\exp : \mathsf{End}\, V \to \mathsf{GL}(V)$$

ma teraz „zwykłe” znaczenie. Mianowicie, przepisując (6.3) dla pola $A \in \mathsf{End}\, V$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \varphi_t = (Af) \circ \varphi_t,$$

i zakładając $f \in (\mathsf{End}\, V)^*$, korzystając z (7.5), (7.8) i dowolności f, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp tA = (\exp tA)A.$$

Rozwiązanie tego „macierzowego” równania różniczkowego takie, że

$$\exp tA|_{t=0} = I,$$

gdzie I jest jednością grupy $\mathsf{GL}(V)$, ma postać szeregu

$$\exp tA = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(tA)^k}{k!},$$

który jest zbieżny dla każdego $tA \in \mathsf{End}\, V$; $(tA)^0 = I$.

4. Morfizmy grup Liego

Jeśli G i H są grupami Liego, to gładki homomorfizm grup

$$h : G \to H$$

nazywa się *homomorfizmem grup Liego.*

STWIERDZENIE 7.4. *Jeśli $h : G \to H$ jest homomorfizmem grup Liego, a e oznacza jedność grupy G, to odwzorowanie*

$$h' : G' \to H'$$

zdefiniowane przez

$$h'(A)_{h(e)} = (T_e h)(A_e) \tag{7.9}$$

jest homomorfizmem algebr Liego.

Dowód. Istotnie, odwzorowanie h' jest liniowe; ponadto, z (7.9) wynika, że jeśli $g \in \mathcal{C}(H)$, to

$$(h'(A)(g)) \circ h = A(g \circ h),$$

co daje $h'([A, B]) = [h'(A), h'(B)]$. □

Z definicji (7.9) wynika także

$$h(\exp tA) = \exp th'(A). \tag{7.10}$$

Jeśli G i H są grupami Liego oraz istnieje monomorfizm grup Liego $h : H \to G$, to mówimy, że H jest *podgrupą Liego* grupy G.

∗ **Ostrzeżenie.** Można utożsamić H z obrazem $h(H) \subset G$ żądając, aby h było dyfeomorfizmem na obraz. Odwzorowanie $h : H \to h(H)$ jest wtedy izomorfizmem grup Liego, ale, na ogół, topologia w $h(H)$ wyznaczona przez żądanie, aby h było homeomorfizmem H na obraz, jest mocniejsza od topologii zaindukowanej w zbiorze $h(H)$ przez topologię G. Jako przykład może służyć odwzorowanie $h_\lambda : \mathbb{R} \to \mathsf{U}(1) \times \mathsf{U}(1)$ dane przez $h_\lambda(t) = (\exp 2\pi \mathrm{i} t, \exp 2\pi \mathrm{i} \lambda t)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest liczbą niewymierną; zbiór $h_\lambda(\mathbb{R})$ jest gęsty na torusie $\mathsf{U}(1) \times \mathsf{U}(1)$. Jeśli λ jest wymierne, to $h_\lambda(\mathbb{R})$ jest okręgiem. Jeśli $h(H)$ jest domkniętym podzbiorem G, to topologia zaindukowana pokrywa się z przeniesioną z H przy pomocy h i $h(H)$ jest podgrupą topologiczną G; zob. rozdz. IV w [Ch]. ∗

Łatwo dostrzec, że injektywność homomorfizmu grup h pociąga injektywność homomorfizmu algebr h'; można więc algebrę Liego podgrupy H utożsamić z podalgebrą $h'(H') \subset G'$.

5. Reprezentacja dołączona grupy i algebry Liego

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad $\Bbbk$, a V niech będzie przestrzenią wektorową nad $\Bbbk$. Odwzorowanie liniowe

$$f : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V$$

takie, że

$$f(u)f(v) - f(v)f(u) = f([u,v]) \quad \text{dla wszystkich } u, v \in \mathfrak{g}$$

nazywa się *reprezentacją algebry Liego* w przestrzeni V. Homomorfizm grup Liego

$$h : G \to \mathsf{GL}(V)$$

określa *reprezentację grupy Liego* G w V. Różniczkując obie strony równania (7.10) względem t otrzymujemy

$$h'(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(\exp tA)|_{t=0}. \tag{7.11}$$

Odwzorowanie

$$h' : G' \to \mathsf{End}\, V$$

jest reprezentacją algebry Liego G' w przestrzeni wektorowej V, *indukowaną* przez reprezentację h grupy G. Dla każdego $a \in G$, odwzorowanie $\mathrm{Ad}(a) : G \to G$ jest gładkim automorfizmem (wewnętrznym) grupy G; odwzorowanie $\mathrm{Ad}(a)' : G' \to G'$ jest zatem automorfizmem algebry Liego G'. Kładąc $\mathrm{ad}(a) = \mathrm{Ad}(a)'$ definiujemy *reprezentację dołączoną*

$$\mathrm{ad} : G \to \mathsf{GL}(G')$$

grupy Liego G w jej algebrze Liego. Odwzorowanie ad jest także gładkim homomorfizmem; indukuje więc reprezentację algebry Liego G' w przestrzeni wektorowej G',

$$\mathrm{ad}' : G' \to \mathsf{GL}(G')' = \mathsf{End}\, G'$$

zwaną *reprezentacją dołączoną algebry Liego*. Znajdziemy teraz jawną postać reprezentacji dołączonych ad i ad$'$ przy założeniu $G = \mathsf{GL}(V)$. Kładąc $h = \mathrm{Ad}(a)$ w (7.11) otrzymujemy

$$\mathrm{ad}(a)(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Ad}(a)(\exp tA)|_{t=0} = aAa^{-1}. \tag{7.12}$$

Wyrażenie aAa^{-1} jest zwykłym złożeniem endomorfizmów („iloczynem macierzy"). Aby obliczyć ad$'$ kładziemy $h = \mathrm{ad}$ w (7.11):

$$\mathrm{ad}'(A) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{ad}(\exp tA)|_{t=0}.$$

Obliczając obie strony ostatniego równania na $B \in \mathsf{End}\, V$ i korzystając z (7.12) otrzymujemy

$$\mathrm{ad}'(A)(B) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{ad}(\exp tA)(B)|_{t=0} = [A, B].$$

Łatwo sprawdzić, że równanie $\mathrm{ad}'([A,B]) = [\mathrm{ad}'(A), \mathrm{ad}'(B)]$ jest równoważne tożsamości Jacobiego dla nawiasu [,].

W dalszym ciągu będzie stosowany skrót ad zamiast ad$'$, co nie powinno prowadzić do nieporozumień,

$$\mathrm{ad}(A)B = [A, B], \quad A, B \in \mathfrak{g}. \tag{7.13}$$

Stwierdzenie 7.5. *Niech H będzie podgrupą Liego grupy Liego G. Podgrupa H jest dzielnikiem normalnym G wtedy i tylko wtedy, gdy podalgebra H' jest ideałem algebry G'.*

Dowód. Istotnie, utożsamiając H z obrazem $h(H)$, mamy: jeśli H jest dzielnikiem normalnym, to $a \in G$ i $b \in H$ pociąga $aba^{-1} \in H$. Biorąc $B \in H'$ otrzymujemy stąd $aBa^{-1} \in H'$ dla każdego $a \in G$; biorąc $A \in G'$, kładąc $a = \exp tA$ i różniczkując $(\exp tA)B(\exp tA)^{-1}$ względem t otrzymujemy $[A, B] \in H'$; podobnie dowodzi się implikacji w drugą stronę. □

Przedstawimy teraz przykłady grup i algebr Liego. O ile to nie jest zaznaczone inaczej, V jest n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Przykład 7.1. Jeśli

$$\mathsf{SL}(V) = \{a \in \mathsf{GL}(V) \mid \det a = 1\},$$

to

$$\mathsf{SL}(V)' = \{A \in \mathsf{End}\, V \mid \operatorname{tr} A = 0\}.$$

Wynika to natychmiast z (2.19). Zwykle pisze się $\mathfrak{sl}(V)$ zamiast $\mathsf{SL}(V)'$.

Przykład 7.2. Niech $g : V \times V \to \mathbb{k}$ będzie odwzorowaniem biliniowym, symetrycznym i niezwyrodniałym. Grupa (pseudo)ortogonalna

$$\mathsf{O}(V, g) = \{a \in \mathsf{GL}(V) \mid g(au, av) = g(u, v) \text{ dla każdych } u, v \in V\}$$

jest grupą Liego o wymiarze $\frac{1}{2}n(n-1)$ (nad $\mathbb{k}$). Zastępując w powyższej definicji a przez $\exp tA$ i różniczkując względem t otrzymuje się

$$\mathsf{O}(V, g)' = \{A \in \mathsf{End}\, V \mid g(Au, v) + g(u, Av) = 0 \text{ dla każdych } u, v \in V\}.$$

Jeśli V jest przestrzenią rzeczywistą i g ma sygnaturę (k, l), $k + l = n$, to pisze się $\mathsf{O}(k, l)$ zamiast $\mathsf{O}(V, g)$. Jeśli $l = 0$, to zamiast $\mathsf{O}(k, 0)$ pisze się $\mathsf{O}(k)$: jest to *grupa ortogonalna.* Dla $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ używa się oznaczenia $\mathsf{O}(n, \mathbb{C})$ na *zespoloną grupę ortogonalną.*

Odpowiadające tym grupom algebry Liego zapisuje się zwykle jako $\mathfrak{so}(k, l)$, $\mathfrak{so}(k)$ i $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$.

W każdym przypadku można wprowadzić bazę (e_i) w V i położyć $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ oraz $A(e_i) = e_j A^j_i$, $A_{ij} = g_{ik} A^k_j$. Równanie definiujące elementy algebry Liego $\mathsf{O}(V, g)'$ przyjmuje postać

$$A_{ij} + A_{ji} = 0.$$

Widać, że jeśli $A \in \mathsf{O}(V, g)'$, to $\operatorname{tr} A = 0$, więc $\mathsf{O}(V, g)' = \mathsf{SO}(V, g)'$.

Przykład 7.3. Niech teraz V będzie zespoloną przestrzenią wektorową. Odwzorowanie półtoraliniowe (liniowe względem drugiego argumentu),

$$h : V \times V \to \mathbb{C},$$

hermitowskie, $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$, i niezwyrodniałe określa *grupę (pseudo)unitarną* (już zdefiniowaną, w równoważny sposób, w rozdz. III §1.4.4)

$$\mathsf{U}(V, h) = \{a \in \mathsf{GL}(V) \mid h(au, av) = h(u, v) \text{ dla każdych } u, v \in V\}.$$

Jej algebra Liego jest

$$\mathsf{U}(V, h)' = \{A \in \mathsf{End}\, V \mid h(Au, v) + h(u, Av) = 0 \text{ dla każdych } u, v \in V\}.$$

Wprowadzając bazę (e_i) w V i używając oznaczeń jak poprzednio możemy zapisać warunek określający algebrę Liego $\mathsf{U}(V,h)'$ w postaci

$$A_{ij} + \overline{A_{ji}} = 0.$$

Podgrupa $\mathsf{SU}(V,h) = \mathsf{U}(V,h) \cap \mathsf{SL}(V)$ jest dzielnikiem normalnym; podalgebra $\mathsf{SU}(V,h)' = \mathsf{U}(v,h)' \cap \mathsf{SL}(V)'$ jest ideałem.

6. Forma i równanie Maurera-Cartana

Przestrzeń $(G')^*$ dualną do algebry Liego G' grupy G można utożsamić z przestrzenią 1-form na G, niezmienniczych względem lewych przesunięć. Niech (e_i), $i = 1, \ldots, n = \dim G$, będzie bazą przestrzeni wektorowej G'; elementy bazy dualnej (ω^i) spełniają

$$\omega^i(e_j) = \mathsf{R}^i_j, \quad \mathsf{L}(a)^*\omega^i = \omega^i; \quad i,j = 1, \ldots, n; \quad a \in G.$$

Obliczając na podstawie (6.23) wartość $\mathrm{d}\omega^i(e_j, e_k)$ i korzystając z (1.17) otrzymujemy

$$\mathrm{d}\omega^i + \tfrac{1}{2} c^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k = 0. \tag{7.14}$$

Formę

$$\omega = e_i \otimes \omega^i \tag{7.15}$$

o wartościach w G' nazywa się *formą Maurera-Cartana*. Na mocy (7.14) spełnia ona równanie Maurera-Cartana

$$\mathrm{d}\omega + \tfrac{1}{2}[\omega, \omega] = 0,$$

gdzie $[\omega,\omega] = [e_i, e_j]\omega^i \wedge \omega^j$. Niech h będzie iloczynem skalarnym na algebrze Liego G', tzn. odwzorowaniem $h : G' \times G' \to \mathbb{R}$ biliniowym i nieosobliwym. Oznaczając $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ można wprowadzić pole $g = h_{ij}\omega^i \otimes \omega^j$, które jest tensorem metrycznym na G, niezmienniczym względem lewych przesunięć.

Przykład 7.4. Forma Maurera-Cartana na $\mathsf{GL}(V)$. Niech (e_μ), $\mu = 1, \ldots, n$, będzie bazą w n-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni wektorowej V. Wprowadzając bazę dualną (e^μ) w V^* definiujemy układ współrzędnych $x = (x^\mu_\nu)$ na $\mathsf{GL}(V)$ kładąc, dla każdego $a \in \mathsf{GL}(V)$,

$$x^\mu_\nu(a) = \langle a(e_\nu), e^\mu \rangle.$$

Odwzorowanie $x : \mathsf{GL}(V) \to \mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ jest izomorfizmem grup. Konstruujemy n^2 form ω^μ_ν na $\mathsf{GL}(V)$ kładąc

$$\omega^\mu_\nu(a) = x^\mu_\rho(a^{-1})\, \mathrm{d}x^\rho_\nu(a). \tag{7.16}$$

Formy te są liniowo niezależne – bo x jest układem współrzędnych – i lewo niezmiennicze, gdyż na mocy (6.8) i (6.7) mamy $\mathsf{L}(a)^*\omega^\mu_\nu = \omega^\mu_\nu$ dla $a \in \mathsf{GL}(V)$ i $\mu, \nu = 1, \ldots, n$. Są one współrzędnymi formy Maurera-Cartana na grupie $\mathsf{GL}(V)$. Równanie (7.16) zapisuje się często w postaci skróconej: $\omega = a^{-1}\, \mathrm{d}a$.

7. Zastosowanie: podstawy teorii pól z cechowaniem

Reprezentacje Ad i ad odgrywają podstawową rolę w teoriach z cechowaniem: w banalny sposób w elektrodynamice, w istotny sposób w teoriach nieprzemiennych typu Yanga-Millsa i w teorii grawitacji Einsteina. Przedstawimy tu podstawowe struktury geometryczne teorii pól z cechowaniem w najprostszym przypadku konfiguracji o trywialnej topologii. Niech $G \subset \mathsf{GL}(V)$ będzie grupą Liego, a M niech będzie czasoprzestrzenią, tzn. przestrzenią (pseudo)riemannowską; w szczeglónej teorii względności utożsamiamy M z przestrzenią Minkowskiego. W teoriach z cechowaniem rozpatrujemy pola form na M o wartościach w przestrzeniach wektorowych; niech $\Gamma(M, W)$ oznacza moduł form o wartościach w przestrzeni wektorowej W; przez $\Gamma^p(M, W)$ oznaczamy podmoduł p-form o wartościach w W. Jeśli (E_α) jest bazą w W, to pole $\mathbf{B} \in \Gamma(M, W)$ zapisujemy w postaci $\mathbf{B} = E_\alpha \otimes \mathbf{B}^\alpha$, gdzie $\mathbf{B}^\alpha \in \Gamma(M, \mathbb{R}) = \Gamma(M)$. Przypomnijmy (rozdział I, §3), że zbiór $\mathcal{G}$ wszystkich (teraz zakładamy: gładkich) odwzorowań $S : M \to G$ jest *grupą cechowania*. Reprezentacja $\rho : G \to \mathsf{GL}(W)$ określa prawe działanie grupy cechowania w $\Gamma(M, W)$:

$$\Gamma(M, W) \times \mathcal{G} \to \Gamma(M, W), \quad (\mathbf{B}, S) \mapsto \mathsf{R}(S)\mathbf{B}, \text{ gdzie } \mathsf{R}(S)\mathbf{B} = \rho(S^{-1})\mathbf{B}.$$

Jawnie:

$$(\rho(S^{-1})\mathbf{B})(x) = \rho(S(x)^{-1})\mathbf{B}(x), \quad x \in M.$$

Element przestrzeni $\Gamma(M, W)$ z tak określonym działaniem grupy $\mathcal{G}$ nazywa się *formą typu* ρ. Przez (e_i) oznaczamy bazę w algebrze Liego G', a przez c^i_{jk} – odpowiadające jej stałe strukturalne. Niech teraz $\mathbf{A} \in \Gamma(M, G')$ i $\mathbf{B} \in \Gamma(M, W)$. Definiujemy

$$\rho'(\mathbf{A})\mathbf{B} = \rho'(e_i)(E_\alpha)\mathbf{A}^i \wedge \mathbf{B}^\alpha.$$

W szczególności, jeśli $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Gamma(M, G')$ i $\rho = \mathrm{ad}$, to piszemy

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \quad \text{zamiast} \quad \mathrm{ad}(\mathbf{A})\mathbf{B},$$

tzn.

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^i = c^i_{jk}\mathbf{A}^j \wedge \mathbf{B}^k.$$

Nawias [,] określa w module $\Gamma(M, G')$ strukturę „superalgebry Liego”: odwzorowanie $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ jest biliniowe, a jeśli $\mathbf{A} \in \Gamma^p(M, G')$, $\mathbf{B} \in \Gamma^q(M, G')$ i $\mathbf{C} \in \Gamma(M, G')$, to

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + (-1)^{pq}[\mathbf{B}, \mathbf{A}] = 0$$

i

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = [[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{C}] + (-1)^{pq}[\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{C}]].$$

W module $\mathrm{Pot}(M) = \Gamma^1(M, G')$ wprowadzamy działanie grupy cechowania

$$\mathrm{Pot}(M) \times \mathcal{G} \to \mathrm{Pot}(M), \quad (\mathbf{A}, S) \mapsto \mathsf{R}(S)\mathbf{A},$$

gdzie

$$\mathsf{R}(S)\mathbf{A} = S^{-1}\mathbf{A}S + S^{-1}\,\mathrm{d}S.$$

Elementy przestrzeni $\mathrm{Pot}(M)$ z tak określonym działaniem grupy $\mathcal{G}$ nazywają się *potencjałami cechowania*. Odwzorowanie $\mathbf{A} \mapsto \mathsf{R}(S)\mathbf{A}$ nazywa się *przekształceniem cechowania* potencjału.

STWIERDZENIE 7.6. (i) *Odwzorowanie* $\mathrm{D} : \mathrm{Pot}(M) \to \Gamma^2(M, G')$ *określone wzorem*

$$\mathrm{D}\mathbf{A} = \mathrm{d}\mathbf{A} + \tfrac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{A}]$$

jest ekwiwariantne względem działania grupy $\mathcal{G}$.

(ii) *Równanie* $\mathrm{D}\mathbf{A} = 0$ *jest warunkiem koniecznym na istnieniu elementu* $S \in \mathcal{G}$ *takiego, że* $\mathsf{R}(S)\mathbf{A} = 0$.

Dowód. Zauważamy najpierw, że forma $S^{-1}\,\mathrm{d}S$ jest cofnięciem, przy pomocy S, formy Maurera-Cartana grupy G, zatem

$$\mathrm{d}(S^{-1}\,\mathrm{d}S) + \tfrac{1}{2}[S^{-1}\,\mathrm{d}S, S^{-1}\,\mathrm{d}S] = 0.$$

Wykorzystując to równanie, łatwo otrzymujemy

$$\mathrm{D}\Big(\mathsf{R}(S)A\Big) = S^{-1}\mathrm{D}\mathbf{A}S,$$

co dowodzi (i). Równanie $\mathrm{D}\mathbf{A} = 0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym lokalnej całkowalności równania $\mathsf{R}(S)\mathbf{A} = 0$. $\square$

Niech $\mathbf{A}$ będzie potencjałem cechowania, a $\mathbf{B} \in \Gamma(M, W)$ niech będzie formą typu ρ. *Pochodną kowariantną* $\mathbf{B}$ względem $\mathbf{A}$ nazywamy formę

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{B} + \rho'(\mathbf{A})\mathbf{B}.$$

STWIERDZENIE 7.7. *Niech* $\mathbf{A}$ *będzie potencjałem cechowania, a* $\mathbf{F} = \mathrm{D}\mathbf{A}$ *– odpowiadającym mu natężeniem pola cechowania.*

(i) *Jeśli* $\mathbf{B}$ *jest formą typu* ρ, *to odwzorowanie*

$$\mathrm{Pot}(M) \times \Gamma(M, W) \to \Gamma(M, W), \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\mathbf{B},$$

jest ekwiwariantne względem działania grupy cechowania.

(ii) *Dla każdej formy* $\mathbf{B}$ *typu* ρ *zachodzi*

$$\mathrm{D}^2_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = \rho'(\mathbf{F})\mathbf{B}.$$

(iii) *Zachodzi* tożsamość Bianchiego

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\mathbf{F} = 0.$$

Dowód. Pozostawiamy jako zadanie. $\square$

Wprowadzając formę $*\mathbf{F} \in \Gamma(M, G')$ dualną (w sensie Hodge'a) względem $\mathbf{F}$, możemy równanie Yanga-Millsa zapisać w postaci

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}} * \mathbf{F} = *j,$$

gdzie j jest 1-formą typu ad, opisującą gęstość prądu.

8. Podstawowe twierdzenie o grupach Liego

Pokazaliśmy w jaki sposób znając grupę Liego G można określić odpowiadającą jej algebrę Liego G'. Przejście od grupy do algebry jest łatwe w tym sensie, że opiera się na „różniczkowaniu"; przejście od algebry do grupy jest trudniejsze: wymaga „całkowania" i uwzględnienia topologii. Zadowolimy się tu sformułowaniem twierdzenia, którego dowód można znaleźć np. w [Ch] i [SL].

Twierdzenie 1. *1. Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą, skończenie wymiarową algebrą Liego, to istnieje jedna, z dokładnością do izomorfizmu,* jednospójna[1] *grupa Liego G taka, że $G' = \mathfrak{g}$.*

2. Jeśli H jest spójną grupą Liego taką, że $H' = \mathfrak{g}$, to $H = G/K$, gdzie K jest dyskretnym dzielnikiem normalnym, zawartym w centrum grupy G.

3. Jeśli grupy Liego H_1 i H_2 mają izomorficzne algebry Liego, to są lokalnie izomorficzne, *tzn. istnieje otoczenie U jedności grupy H_1 oraz lokalny dyfeomorfizm $h : U \to H_2$ taki, że $a, b, ab \in U \Rightarrow h(ab) = h(a)h(b)$.*

4. Jeśli grupa G jest jednospójna, a H jest grupą Liego o algebrze Liego H', to homomorfizm algebr Liego $f : G' \to H'$ podnosi się do homomorfizmu grup Liego $h : G \to H$, $h' = f$.

Przykład 7.5. Przemienna algebra Liego $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ jest algebrą Liego grupy addytywnej $G = \mathbb{R}$; każda dyskretna i nietrywialna podgrupa $K \subset \mathbb{R}$ jest izomorficzna $\mathbb{Z}$; iloraz $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest izomorficzny grupie $\mathsf{U}(1)$, która jest spójna, ale nie jest jednospójna.

Przykład 7.6. Zwykły iloczyn wektorowy w $\mathbb{R}^3$ określa w tej przestrzeni strukturę algebry Liego $\mathfrak{g}$; grupa $\mathsf{SU}(2)$ jest jednospójna i $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{g}$; mamy $Z(\mathsf{SU}(2)) = \mathbb{Z}_2$; grupa $\mathsf{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$ jest izomorficzna spójnej, ale nie jednospójnej, grupie $\mathsf{SO}(3)$.

Przykład 7.7. Niech (e_1, e_2, e_3) będzie bazą w $\mathbb{R}^3$; określamy w tej przestrzeni strukturę algebry Liego $\mathfrak{g}$ kładąc

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = -e_2.$$

Algebra $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego grup $\mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$ i $\mathsf{SL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$; ta druga grupa jest izomorficzna składowej spójnej grupy $\mathsf{SO}(1, 2)$. Grupa jednospójna G taka, że $G' = \mathfrak{g}$ jest w tym przypadku grupą Liego, która nie posiada wiernej reprezentacji skończenie wymiarowej (nie jest grupą macierzową).

9. Całki niezmiennicze na grupach Liego

W teorii grup skończonych ważną rolę odgrywa uśrednianie funkcji na grupie: pozwala ono, między innymi, pokazać, że każda reprezentacja takiej grupy jest równoważna reprezentacji unitarnej; zob. §2 na str. 71. Istotne jest to, że średnia wartość $\langle f \rangle$ funkcji f na grupie G jest niezmiennicza względem lewych i prawych przesunięć,

$$\langle f \circ \mathsf{L}(a) \rangle = \langle f \rangle, \ \langle f \circ \mathsf{R}(a) \rangle = \langle f \rangle \quad \text{dla każdego } a \in G, \tag{7.17}$$

[1] Przyjmujemy tu następującą definicję: grupa Liego jest jednospójna jeśli jest spójna i każda krzywa zamknięta jest ściągalna do punktu.

oraz

$$\langle 1 \rangle = 1. \tag{7.18}$$

Na grupie Liego o dodatnim wymiarze rolę uśredniania spełnia odpowiednie całkowanie. Dla każdej takiej grupy można określić, na odpowiednio zdefiniowanej przestrzeni topologicznej $\mathcal{E}(G) \subset \mathcal{F}(G)$ funkcji zespolonych na G, *całkę lewo niezmienniczą* i przy jej pomocy średnią funkcji taką, że odwzorowanie

$$\mathcal{E}(G) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle f \rangle$$

jest liniowe, dodatnie:

$$\text{jeśli} \quad f \in \mathcal{E}(G), \;\; f \geqslant 0 \;\text{ i }\; f \neq 0, \quad \text{to} \quad \langle f \rangle > 0,$$

ciągłe i spełnia pierwszy (*lub* drugi) z warunków (7.17). Warunek unormowania (7.18) można spełnić tylko na „grupach o skończonej objętości”, tzn. na grupach zwartych; zob. poniżej. Na takich grupach zachodzą *oba* warunki niezmienniczości (7.17).

9.1. Moduł grupy Liego. Mając formę Maurera-Cartana (7.15) na grupie Liego G o wymiarze n, tworzymy n-formę lewo niezmienniczą

$$\lambda = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^n, \quad \mathsf{L}(a)^* \lambda = \lambda \quad \text{dla każdego } a \in G.$$

Forma ta nigdzie nie znika, co pokazuje, że każda grupa Liego jest orientowalna; lewe przesunięcia są dyfeomorfizmami zachowującymi orientację. Jeśli λ' jest także lewo niezmienniczą n-formą na G, to istnieje liczba rzeczywista c taka, że $\lambda' = c\lambda$. W szczególności, dla każdego $b \in G$ forma $\lambda' = \mathsf{R}(b)^* \lambda$ jest lewo niezmiennicza, co wynika z (6.9) i przemienności $\mathsf{L}(a)$ i $\mathsf{R}(b)$. Istnieje zatem homomorfizm grup („moduł” grupy G)

$$\varDelta : G \to \mathbb{R}^\times \quad \text{taki, że} \quad \mathsf{R}(a)^* \lambda = \varDelta(a) \lambda \tag{7.19}$$

dla każdego $a \in G$. O grupie mówi się, że jest unimodularna, jeśli reprezentacja $\varDelta$ jest trywialna. Następujący przykład pokazuje, że istnieją grupy Liego, które nie są unimodularne.

Przykład 7.8. Rozpatrzmy dwuwymiarową, nieprzemienną i niezwartą grupę Liego $H = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, zdefiniowaną jako podgrupa grupy $G = \mathsf{GL}(\mathbb{R}^2)$ ze względu na injektywny homomorfizm

$$h : H \to G, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Formę Maurera-Cartana na H znajdujemy, cofając przy pomocy h, formy na G zdefiniowane w (7.16), co daje $\omega^1 = \mathrm{d}x/x$ i $\omega^2 = \mathrm{d}y/x$, więc $\lambda = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y/x^2$ jest lewo niezmienniczą 2-formą na H. Kładąc $a = (\alpha, \beta) \in H$, otrzymyjemy $\mathsf{R}(a)(x, y) = (\alpha x, \beta x + y)$, a stąd $\varDelta(a) = (\det h(a))^{-1}$.

10. Działanie grupy Liego na rozmaitości

Prawe działanie grupy Liego G, o elemencie neutralnym e, na rozmaitości M dane jest przez odwzorowanie gładkie

$$\mathsf{R} : M \times G \to M, \quad \mathsf{R}(p, a) = \mathsf{R}(a)p, \quad \mathsf{R}(a) \circ \mathsf{R}(b) = \mathsf{R}(ba), \quad \mathsf{R}(e) = \mathrm{id}_M,$$

dla wszystkich $a, b \in G$ i $p \in M$. Wobec $\mathsf{R}(a)^{-1} = \mathsf{R}(a^{-1})$ odwzorowanie $\mathsf{R}(a) : M \to M$ jest dyfeomorfizmem dla każdego $a \in G$. Wygodnie jest też wprowadzić odwzorowanie

$$\mathsf{R}(p) : G \to M, \quad \mathsf{R}(p)a = \mathsf{R}(p, a).$$

Jeśli A jest elementem algebry Liego $\mathfrak{g}$ grupy G, to $t \mapsto \mathsf{R}(\exp tA)p$ jest krzywą przechodzącą przez punkt p, określającą wektor $\widetilde{A}(p)$ styczny do tej krzywej w punkcie p.

Stwierdzenie 7.8. *Odwzorowanie*

$$\mathfrak{g} \to \mathcal{V}(M), \quad A \mapsto \widetilde{A} \tag{7.20}$$

jest homomorfizmem algebr Liego.

Dowód. Z definicji $\widetilde{A}$, dla każdej funkcji $f \in \mathcal{C}(M)$ jest

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(p)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \mathsf{R}(\exp tA)(p)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \mathsf{R}(p)(\exp tA)|_{t=0} \\ &= T_e\mathsf{R}(p)(A_e)(f),\end{aligned}$$

co pokazuje, że odwzorowanie (7.20) jest liniowe. Dalej, wobec

$$\mathrm{Ad}(a)(\exp tA) = \exp \mathrm{ad}(a)(tA)$$

mamy

$$\begin{aligned}(\mathsf{R}(a)^*\widetilde{A})(f) &= (\widetilde{A}(f \circ \mathsf{R}(a^{-1})) \circ \mathsf{R}(a) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \mathsf{R}(a^{-1}) \circ \mathsf{R}(\exp tA) \circ \mathsf{R}(a)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \mathsf{R}(\exp \mathrm{ad}(a)(tA)|_{t=0} = \widetilde{\mathrm{ad}(a)A}(f)\end{aligned}$$

czyli

$$\mathsf{R}(a)^*\widetilde{A} = \widetilde{\mathrm{ad}(a)A}. \tag{7.21}$$

Obliczając, z definicji, pochodną Liego pola $\widetilde{B}$, $B \in \mathfrak{g}$, względem pola $\widetilde{A}$, mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathsf{R}(\exp tA)^*\widetilde{B}|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\mathrm{ad}(\exp tA)B}|_{t=0} = \widetilde{[A, B]}$$

czyli

$$[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = \widetilde{[A, B]}.$$

□

11. Wiązki główne i stowarzyszone

11.1. Wiązki główne. Wiązka $\pi : P \to M$, której włókno typowe jest grupą Liego G działającą swobodnie i przechodnio na włóknach wiązki nazywa się *wiązką główną*. Dopuszczamy grupy dyskretne, tzn. zero-wymiarowe grupy Liego. Grupę G nazywa się *grupą strukturalną* lub grupą struktury wiązki. Zwykle wybiera się prawostronne działanie grupy struktury w P. Dla krótkości sformułowań, wygodnie jest zapisywać taką wiązkę główną jako $G \to P \xrightarrow{\pi} M$.

Mając rozmaitość M i grupę Liego G można utworzyć *wiązkę iloczynową* biorąc $P = M \times G$ i definiując działanie grupy jako $P \times G \to P$, $((x, a), b) \mapsto (x, ab)$.

Przykład 7.9. Niech G będzie domkniętą podgrupą Liego grupy H, a N domkniętym dzielnikiem normalnym grupy G, to jest wiązka główna

$$G/N \to H/N \to H/G.$$

Przykład 7.10. Trzy pierwsze wiązki Hopfa (Przykład 6.3 na str. 95) są główne:

$$\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1, \tag{7.22}$$

$$\mathsf{U}(1) \to \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_2, \tag{7.23}$$

$$\mathsf{SU}(2) \to \mathbb{S}_7 \to \mathbb{S}_4. \tag{7.24}$$

Ostatnia wiązka Hopfa nie jest główna, bo algebra oktonionów nie jest łączna, więc zbiór jednostkowych oktonionów nie jest grupą ze względu na mnożenie.

Przykład 7.11. Wiązki Hopfa można uogólnić na wyższe wymiary, przyjmując przestrzenie rzutowe jako rozmaitości bazy. Dla $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ definiujemy przestrzeń rzutową $K\mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, w następujący sposób, zob. Zadanie 6.2. Niech K^{n+1} będzie lewą przestrzeni wektorową nad K; w zbiorze $K^{n+1} \setminus \{0\}$ wprowadzamy relację równoważności:

$$p \equiv p' \;\Leftrightarrow\; \text{istnieje } q \in K^\times \text{ takie, że } p' = qp.$$

Zbiór $\operatorname{dir} p$ elementów równoważnych p jest„kierunkiem" wektora p. Przestrzeń rzutowa $K\mathbb{P}_n$ jest zbiorem wszystkich takich kierunków; zbiorowi temu nadaje się w naturalny sposób topologię i strukturę rozmaitości różniczkowej o wymiarze $n \dim_\mathbb{R} K$. Niech $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in K^{n+1}$. Zbiór

$$\{p \in K^{n+1} \mid |p_1|^2 + \dots + |p_{n+1}|^2 = 1\}$$

jest sferą o wymiarze $(n+1) \dim_\mathbb{R} K - 1$. Grupa $\{u \in K \mid |u| = 1\}$ działa na tej sferze, $(p, u) \mapsto pu = (p_1 u, \dots, p_{n+1} u)$, i określa wiązki główne

$$\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}_n \xrightarrow{\operatorname{dir}} \mathbb{R}\mathbb{P}_n,$$

$$\mathsf{U}(1) \to \mathbb{S}_{2n+1} \xrightarrow{\operatorname{dir}} \mathbb{C}\mathbb{P}_n,$$

$$\mathsf{SU}(2) \to \mathbb{S}_{4n+3} \xrightarrow{\operatorname{dir}} \mathbb{H}\mathbb{P}_n.$$

Dla $n = 1$ są to wiązki Hopfa (7.22)-(7.24).

11.2. Wiązki stowarzyszone. Niech $G \to P \xrightarrow{\pi} M$ będzie wiązką główną, a V rozmaitością, w której działa lewostronnie grupa G. W iloczynie $P \times V$ wprowadzamy działanie prawostronne grupy, kładąc $(p,v)a = (pa, a^{-1}v)$ dla $p \in P$, $a \in G$ i $v \in V$. Przestrzeń ilorazowa

$$E = (P \times V)/G, \tag{7.25}$$

składająca się z klas $[(p,v)]$ elementów $p \in P$, $v \in V$, takich, że

$$[(p,v)] = [(p',v')] \;\Leftrightarrow\; \text{istnieje } a \in G \text{ takie, że } p' = pa \text{ i } v' = a^{-1}v,$$

ma strukturę wiązki nad M o włóknie typowym V, o czym można się przekonać rozpatrując lokalną trywializację wiązki głównej (zob. ustęp 4 na str. 94),

$$h : U \times G \to \pi^{-1}(U).$$

Przy jej pomocy tworzy się lokalną trywializację wiązki $E \xrightarrow{\pi_E} M$,

$$U \times V \to \pi_E(U), \quad (q,v) \mapsto [(h(q,e),v)], \quad \pi_E([(p,v)]) = \pi(p)$$

gdzie e jest jednością grupy G. Wiązkę (7.25) nazywa się *wiązką stowarzyszoną* z P za pośrednictwem działania G w V.

Każdy element $p \in P$ określa dyfeomorfizm

$$\mathsf{p} : V \to E_{\pi(p)} \quad \text{dany przez } \mathsf{p}(v) = [(p,v)]. \tag{7.26}$$

STWIERDZENIE 7.9. *Zbiór* $\mathsf{Sec}\,E$ *przekrojów wiązki* $E \to M$ *można utożsamić ze zbiorem* $\mathsf{Hom}_G(P,V)$ *odwzorowań* P *w* V*, ekwiwariantnych względem działania grupy* G*, tzn. takich odwzorowań* $X : P \to V$*, że dla każdego* $a \in G$ *i* $p \in P$ *jest* $X(pa) = a^{-1}X(p)$*.*

Dowód. Mając $X \in \mathsf{Hom}_G(P,V)$ definiuje się przekrój $\widetilde{X} \in \mathsf{Sec}\,E$ kładąc

$$\widetilde{X}(q) = [(p, X(p))] \quad \text{gdzie } p \text{ jest nad } q,\ \pi(p) = q.$$

Na odwrót, mając $Y \in \mathsf{Sec}\,E$, definiuje się $X \in \mathsf{Hom}_G(P,V)$, używając (7.26) i kładąc

$$X(p) = \mathsf{p}^{-1}(Y(\pi(p)).$$

Łatwo sprawdza się, że $\widetilde{X} = Y$. □

11.3. Morfizmy. *Morfizmem wiązki głównej* $G \to P \xrightarrow{\pi} M$ w wiązkę główną $H \to Q \xrightarrow{\sigma} M$ nazywa się parę (f,h), gdzie $f : P \to Q$, a $h : G \to H$ jest homomorfizmem grup Liego i zachodzi

$$\sigma \circ f(p) = \pi(p), \quad f(pa) = f(p)h(a), \quad \text{dla każdego} \quad p \in P,\ a \in G.$$

Jeśli f jest dyfeomorfizmem, a h jest izomorfizmem grup Liego, to para (f,h) określa izomorfizm wiązek głównych. Wiązka główna izomorficzna wiązce iloczynowej nazywa się *trywialną wiązkę główną.*

STWIERDZENIE 7.10. *Wiązka główna jest trywialna wtedy i tylko wtedy, gdy ma (globalny) przekrój.*

Dowód. Jeśli $s : M \to P$ jest przekrojem wiązki głównej $P \to M$ o grupie struktury G, to odwzorowanie

$$f : M \times G \to P, \quad f(x,a) = s(x)a,$$

wraz z $h = \mathrm{id}_G$, jest izomorfizmem wiązek głównych. □

Przykład 7.12. Wiązka

$$\mathbb{Z}_2 \to \mathsf{U}(1) \xrightarrow{\pi} \mathsf{U}(1) \text{ taka, że } \pi(z) = z^2,\ z \in \mathsf{U}(1),$$

nie jest trywialna, co wiąże się z tym, że funkcji $z \mapsto \sqrt{z}$ nie można w jednoznaczny i ciągły sposób określić na prostej $\mathbb{C}$.

11.3.1. *Redukcja i rozszerzenie grupy struktury.* Mówi się, że morfizm (f,h) wiązek głównych *redukuje* grupę struktury H wiązki $H \to Q \xrightarrow{\sigma} M$ do jej podgrupy $G \xrightarrow{h} H$, jeśli rozmaitość P jest podrozmaitością Q ze względu na zanurzenie $P \xrightarrow{f} Q$, a działanie grupy w zredukowanej wiązce („podwiązce") $G \to P \to M$ powstaje przez ograniczenie działania grupy w wiązce „otaczającej".

Przykład 7.13. Redukcja grupy H wiązki $H \to Q \to M$ do podgrupy trywialnej $G = \{e\} \in H$ jest równoważna podaniu przekroju $s : M \to Q$: wtedy $P = s(M)$. Widać, że redukcja nie zawsze jest możliwa – bywają *przeszkody.*

Mając wiązkę $G \to P \to M$ i grupę H taką, że G jest jej podgrupą Liego, można skonstruować wiązkę $H \to Q \to M$ taką, że wiązka $G \to P \to M$ jest jej redukcją. W tym celu w zbiorze $P \times H$ wprowadzamy działanie grupy G takie, że

$$(p,a)b = (pb, b^{-1}a), \quad \text{dla} \quad p \in P,\ a \in H,\ b \in G \subset H.$$

Grupa H działa w ilorazie $Q \stackrel{\text{def}}{=} (P \times H)/G$ w ten sposób, że

$$[(p,a)]a' = [(p,aa')], \quad a' \in H,$$

co określa wiązkę $H \to Q \to M$, o której mówi się, że powstaje z wiązki $G \to P \to M$ przez *rozszerzenie* grupy struktury. Nie ma przeszkód przy takim rozszerzaniu.

11.3.2. *Przedłużanie grupy struktury.* Mówi się, że morfizm (f,h) wiązek głównych *przedłuża* grupę struktury H wiązki $H \to Q \xrightarrow{\sigma} M$ do grupy $G \xrightarrow{h} H$, jeśli odwzorowanie $P \xrightarrow{f} Q$ jest submersją, a $h : G \to H$ jest epimorfizmem. Ważnym przykładem takich przedłużeń są *struktury spin* na zorientowanych rozmaitościach Riemanna. Wiązkę baz takiej n-wymiarowej rozmaitości M można zredukować do wiązki $H = \mathsf{SO}(n) \to Q \to M$. Struktura spin na M to przedłużenie

$$\mathsf{Spin}(n) \to P \to M$$

tej wiązki do grupy $\mathsf{Spin}(n)$ podwójnie nakrywającej $\mathsf{SO}(n)$,

$$\mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Spin}(n) \xrightarrow{\chi_n} \mathsf{SO}(n) \to 1.$$

Przykład 7.14. Wiązkę baz ortonormalnych o zgodnej orientacji sfery $\mathbb{S}_n$, $n > 1$, można utożsamić z rozmaitością $\mathsf{SO}(n+1)$, a struktura spin jest dana przez przedłużenie wiązek

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Spin}(n) \arrow[r] \arrow[d, "\chi_n"'] & \mathsf{Spin}(n+1) \arrow[d, "\chi_{n+1}"] & \\ \mathsf{SO}(n) \arrow[r] & \mathsf{SO}(n+1) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{S}_n, \end{tikzcd}$$

Istnieją przeszkody na istnienie struktur spin i pin. Np. przestrzeń rzutowa $\mathbb{RP}_5$ jest orientowalną rozmaitością Riemanna, ale nie dopuszcza struktury spin, zob. [**28**],[**47**],[**34**] i [**33**]. Są także czasoprzestrzenie – 4-wymiarowe przestrzenie z metryką lorentzowską – które nie dopuszczają struktury spin [**22, 23**]. Jeśli n-wymiarowa przestrzeń Riemanna jest nieorientowalna, to jej wiązkę baz można przedłużyć – jeśli nie ma przeszkód – do jednej z dwóch grup pin, nakrywających $\mathsf{O}(n)$. Np. grupa $\mathsf{SO}(1) = \{1\}$ ma nakrycie $\mathsf{Spin}(1) = \{1, -1\}$, a grupa $\mathsf{O}(1) = \mathbb{Z}_2$ ma dwa nakrycia

$$\mathbb{Z}_4 \quad \text{i} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Te dwie grupy stanowią centrum odpowiednich dwóch grup pin, nakrywających $\mathsf{O}(n)$, zob. np. [**8**].

11.4. Łamanie symetrii.

Niech

$$H \to Q \xrightarrow{\pi} M \tag{7.27}$$

będzie wiązką główną, a V przestrzenią jednorodną ze względu na lewostronne działanie grupy H. Jeśli G jest stabilizatorem punktu $v_0 \in V$, to odwzorowanie

$$V \to H/G, \quad av_0 \mapsto aG$$

pozwala utożsamić V i H/G.

Stwierdzenie 7.11. *Przekrój wiązki $E = (Q \times V)/H$ stowarzyszonej z wiązką* (7.27) *za pośrednictwem przechodniego działania grupy H w rozmaitości V określa redukcję grupy struktury H tej wiązki do stabilizatora G punktu rozmaitości V.*

Dowód. Przypomnijmy, że stabilizatory różnych punktów przestrzeni jednorodnej są do siebie sprzężone, (ustęp 4.4 na str. 47), a zbiór $\mathsf{Sec}\, E$ można utożsamić z $\mathsf{Hom}_H(Q, V)$ (stwierdzenie 7.9). Niech G będzie stabilizatorem $v_0 \in V$, a przekrój wiązki $E = (Q \times V)/H$ niech odpowiada odwzorowaniu $\varphi \in \mathsf{Hom}_H(Q, V)$, to

$$P = \{p \in Q \mid \varphi(p) = v_0\}$$

jest podrozmaitością Q. Grupa G działa swobodnie i przechodnio na włóknach odwzorowania $\pi|P$. □

Fizycy mówią, że przekrój, o którym mowa w Stw. 7.11, *łamie symetrię* względem H do podgrupy G.

Przykład 7.15. *Pole Higgsa* jest przekrojem wiązki stowarzyszonej z wiązką główną nad czasoprzestrzenią o grupie struktury $\mathsf{SU}(2)$ za pośrednictwem działania dołączonego tej grupy w algebrze Liego; algebrę tę realizujemy tu jako zbiór macierzy

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathbb{C}(2) \mid A^\dagger = A,\ \operatorname{tr} A = 0\}$$

będących rzeczywistymi kombinacjami liniowymi macierzy Pauliego. W czasoprzestrzeni $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_2$ ograniczamy rozważania do sfery $\mathbb{S}_2$ $(t, r = \text{const.})$. Niech

$$\mathsf{SU}(2) \to Q \to \mathbb{S}_2 \tag{7.28}$$

będzie wiązką trywialną, $Q = \mathbb{S}_2 \times \mathsf{SU}(2)$. Zbiór

$$V = \{A \in \mathfrak{su}(2) \mid A^2 = I\}$$

jest sferą jednostkową i przestrzenią jednorodną (orbitą) ze względu na działanie dołączone grupy,

$$V \times \mathsf{SU}(2) \to V, \quad (A, a) \mapsto \rho(a)A = aAa^{-1}.$$

Tutaj ρ jest homomorfizmem $\mathsf{SU}(2) \to \mathsf{SO}(3)$. Stabilizatorem punktu $\sigma_z \in V$ jest grupa $\mathsf{U}(1)$, zanurzona w $\mathsf{SU}(2)$,

$$i : \mathsf{U}(1) \to \mathsf{SU}(2), \quad i(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad z\bar{z} = 1.$$

Jeśli pole Higgsa nigdzie nie znika, to można je unormować i ograniczyć się do pola opisanego przez $\varphi \in \mathsf{Hom}_{\mathsf{SU}(2)}(Q, V)$, jawnie danego wzorem

$$\varphi(A, a) = a^{-1}Aa.$$

Ze względu na przekrój $\mathbb{S}_2 \to Q = \mathbb{S}_2 \times \mathsf{SU}(2)$, $\quad A \mapsto (A, 1)$, pole Higgsa $\varphi(A, 1) = A$ jest regularne, fizycy nazywają je „jeżem" (hedgehog). Pole to redukuje wiązkę (7.28) do

$$\mathsf{U}(1) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}_2, \tag{7.29}$$

gdzie

$$P = \{(A, a) \in Q \mid \varphi(A, a) = \sigma_z\} = \mathsf{SU}(2), \quad \pi(A, a) = A$$

Wiązka (7.29) nie jest trywialna. Pola Higgsa odgrywają ważną rolę w budowaniu modeli pól Yanga–Millsa i „generowaniu" mas cząstek opisywanych przez pola cechowania, zob. np. [**54**].

11.5. Wiązka baz rozmaitości. Zbiór LM wszystkich baz przestrzeni stycznych do rozmaitości n-wymiarowej M jest wiązką główną

$$\mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) \to LM \xrightarrow{\pi} M. \tag{7.30}$$

Bazę przestrzeni T_pM można rozpatrywać jako izomorfizm przestrzeni wektorowych $e : \mathbb{R}^n \to T_pM$, elementy grupy $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ jako automorfizmy liniowe przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a działanie grupy w LM – jako składanie $e \circ a$. Włókno L_pM wiazki LM to zbiór wszystkich baz przestrzeni T_pM, $p \in M$.

Przykład 7.16. Na mocy twierdzenia o bezwładności form kwadratowych (zob. Rozdz. VI 4.14 w [**6**]), zbiór takich form o sygnaturze (p,q) jest przestrzenią jednorodną ze względu na działanie grupy $\mathsf{GL}(p+q,\mathbb{R})$. Tensor metryczny o sygnaturze (p,q) na $(p+q)$-wymiarowej rozmaitości redukuje wiązkę baz liniowych, więc łamie symetrię do grupy $\mathsf{O}(p,q)$.

11.5.1. Na wiązce LM jest określona 1-*forma kanoniczna* θ o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Jeśli $v \in T_eLM$, to

$$\langle v, \theta(e)\rangle = e^{-1}(T_e\pi(v)).$$

Na podstawie tej definicji

$$\mathsf{R}(a)^*\theta = a^{-1}\theta.$$

Jądrem odwzorowania $\theta(e) : T_eLM \to \mathbb{R}^n$ jest n^2-wymiarowa przestrzeń $\mathsf{Ver}_e\, LM$ wektorów *pionowych*, stycznych do LM w punkcie e.

Przykład 7.17. Grupa liniowa $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ jest domkniętą podgrupą grupy afinicznej $\mathsf{GA}(n,\mathbb{R})$, zob. § 2.4 na str. 49. Rozszerzenie grupy struktury wiązki $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to LM \to M$ do grupy afinicznej daje *wiązkę baz afinicznych* $\mathsf{GA}(n,\mathbb{R}) \to AM \to M$ n-wymiarowej rozmaitości M. Elementy AM to pary (e,v) takie, że $e \in L_pM$ i $v \in T_pM$.

11.5.2. *Wiązka tensorów typu* ρ. Reprezentacja $\rho : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(V)$ grupy $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ w przestrzeni wektorowej V określa wiązkę stowarzyszoną z wiązką baz n-wymiarowej rozmaitości M,

$$E(\rho) = (LM \times V)/\,\mathsf{GL}(n,\mathbb{R}).$$

Np. reprezentacja identycznościowa, $\rho(a) = a$, określa wiązkę styczną, reprezentacja dualna do niej, $\rho(a) = (a^*)^{-1}$, określa wiązkę kostyczną (1-form), a reprezentacja dołączona, $\mathrm{ad} : \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathsf{GL}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$, określa wiązkę tensorów mieszanych (o walencji $(1,1)$).

11.6. G-struktury. Redukcja $G \to P \to M$ wiązki baz (7.30) do domkniętej podgrupy G grupy $\mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ nazywa się (z angielska) *G-strukturą* na rozmaitości M. Użyteczność tego pojęcia widać na przykładach.

Przykład 7.18. Niech G będzie grupą $\mathsf{GL}^+(n,\mathbb{R}) \subset \mathsf{GL}(n,\mathbb{R})$ macierzy o dodatnim wyznaczniku. G-struktura na M – o ile istnieje – jest równoważna orientacji tej rozmaitości.

Przykład 7.19. $\mathsf{O}(n)$-struktura na M jest równoważna podaniu metryki Riemanna na tej rozmaitości gdyż teraz P jest podrozmaitością LM składającą się ze wszystkich ortonormalnych baz na M. Pokazuje się, że jeśli rozmaitość M jest parazwarta, to taka redukcja istnieje.

Przykład 7.20. Jeśli rozmaitość M jest parzysto wymiarowa, to można rozpatrywać redukcję wiązki jej baz do grupy $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ zanurzonej w $\mathsf{GL}(2n,\mathbb{R})$ zgodnie z (3.3). $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$-struktura na $2n$-wymiarowej rozmaitości – o ile istnieje – określa na niej *strukturę prawie zespoloną*. Wśród parzysto-wymiarowych sfer tylko $\mathbb{S}_2$ i $\mathbb{S}_6$ posiadają taką strukturę.

Jeśli G i H są podgrupami $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ i $G \subset H$, to G-struktura wyznacza – przez rozszerzenie grupy struktury – H-strukturę na M. O takiej G-strukturze mówi się, że jest *mocniejsza* od H-struktury.

Przykład 7.21. Niech I oznacza element neutralny grupy $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$. „Najmocniejsza" $\{I\}$-struktura na n-wymiarowej rozmaitości M określa na niej „teleparalelizm" – w absolutny sposób można na niej określać równość wektorów zaczepionych w różnych punktach. Wśród sfer, tylko $\mathbb{S}_1$, $\mathbb{S}_3$ i $\mathbb{S}_7$ dopuszczają teleparalelizm.

12. Grupy zwarte

Własności grup zwartych przypominają w znacznym stopniu własności grup skończonych; te ostatnie można rozpatrywać jako zwarte grupy Liego o wymiarze 0. Niech λ będzie lewo niezmienniczą n-formą na n-wymiarowej grupie Liego G, zdefiniowaną w § 9.1. Na grupie zwartej $\int_G \lambda < \infty$, więc mnożąc λ przez odpowiednią stałą można osiągnąć $\int_G \lambda = 1$. Kładąc w (6.12) $M = G$, $f = 1$ i $h = \mathsf{R}(a)$ otrzymujemy zatem

$$\int_G \mathsf{R}(a)^* \lambda = 1,$$

a uwzględniając (7.19) dowodzimy unimodularności grupy zwartej, $\varDelta(a) = 1$ dla każdego $a \in G$. Podsumowując, mamy

Stwierdzenie 7.12. *Na zwartej grupie Liego G można określić średnią wartość* $\langle f \rangle$ *funkcji* $f \in \mathcal{C}(G)$ *w ten sposób, że zachodzą równania* (7.17) *i* (7.18).

Wygodnie jest czasami zapisywać całkę

$$\langle f \rangle = \int_G f\lambda \quad \text{w postaci} \quad \int_G f(a)\, \mathrm{d}a.$$

Przykład 7.22. Jedyną zwartą i spójną grupą Liego o wymiarze 1 jest $\mathsf{U}(1)$. Kładąc $z = \exp \mathrm{i}\varphi \in \mathsf{U}(1)$ można wynikającą z powyższych definicji całkę na tej grupie zapisać w postaci

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi.$$

Przeglądając teraz dowody twierdzeń w rozdziałach III i IV przekonujemy się łatwo, że następujące fakty są prawdziwe dla zwartych grup Liego:

(i) Każda reprezentacja takiej grupy w skończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej jest równoważna reprezentacji unitarnej; jest więc w pełni rozkładalna (por. stw. 3.1 i 4.2).

(ii) Elementy macierzowe skończenie wymiarowych reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą ortogonalny układ wektorów w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}(G)$ otrzymanej przez uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{C}(G)$ względem iloczynu skalarnego[2]

$$(f|g) = \int_G \overline{f(a)} g(a)\, \mathrm{d}a. \tag{7.31}$$

[2] Fizycy zapisują iloczyn skalarny elementów przestrzeni Hilberta w postaci $\langle f|g \rangle$, co może mylić się z przyjętym tu oznaczeniem „odwzorowania obliczania".

(iii) Niech χ_ρ oznacza charakter reprezentacji ρ w skończenie wymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej. Reprezentacje ρ i σ grupy zwartej są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $\chi_\rho = \chi_\sigma$. Charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych i nierównoważnych są ortogonalne. Reprezentacja ρ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $(\chi_\rho|\chi_\rho) = 1$.

Dowód następującego twierdzenia o reprezentacjach zwartych grup Liego wymaga subtelniejszych rozważań; można ten dowód znaleźć w [Ch]:

Twierdzenie 2. *Jeśli G jest zwartą grupą Liego, to*

1. Istnieje taka rzeczywista, skończenie wymiarowa przestrzeń wektorowa V, że G jest izomorficzna pewnej podgrupie $\mathsf{GL}(V)$ („G jest grupą macierzową”).

2. Każda nieprzywiedlna reprezentacja grupy G jest skończenie wymiarowa.

3. Jeśli grupa G nie jest skończona, to posiada nieskończoną, ale przeliczalną, rodzinę $\tau^i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$, $i \in \mathbb{N}$, reprezentacji nieprzywiedlnych i unitarnych.

4. Twierdzenie Petera-Weyla. *Niech $\mathcal{H}(G)$ oznacza przestrzeń Hilberta funkcji zespolonych na G ze względu na iloczyn skalarny* (7.31)*. Elementy macierzowe $\tau^i_{\mu\nu}$ reprezentacji $\tau^i : G \to \mathsf{GL}(V_i)$ stanowią ortogonalną i zupełną bazę przestrzeni $\mathcal{H}(G)$,*

$$(\tau^i_{\alpha\beta}|\tau^j_{\mu\nu}) = \delta_{ij}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}/\dim V_i.$$

Szereg Fouriera *funkcji gładkiej f,*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\dim V_i} f^i_{\alpha\beta}\tau^i_{\alpha\beta}\dim V_i, \qquad f^i_{\alpha\beta} = (\tau^i_{\alpha\beta}|f),$$

jest zbieżny jednostajnie do tej funkcji.

Z pierwszej części powyższego twierdzenia wynika, że każda grupa zwarta jest izomorficzna pewnej podgrupie domkniętej odpowiedniej grupy unitarnej $\mathsf{U}(n)$. Stosując twierdzenie Petera-Weyla do grupy $\mathsf{U}(1)$ otrzymuje się dobrze znane twierdzenie o rozkładzie funkcji okresowej w szereg Fouriera. Następujący wzór określa *splot* funkcji f i g należących do $\mathcal{H}(G)$:

$$(f * g)(a) = \int_G f(ab^{-1})g(b)\,\mathrm{d}b.$$

Ze względu na splot, przestrzeń $\mathcal{H}(G)$ jest algebrą łączną. Obliczając elementy macierzowe splotu i korzystając z (7.17) otrzymujemy

$$(f * g)^i_{\alpha\beta} = \textstyle\sum_\nu f^i_{\alpha\nu}g^i_{\nu\beta}.$$

Zadania

Zadanie 7.1. Pokazać, że algebra Liego grupy Heisenberga (zob. Zad. 2.27) ma bazę składającą się z wektorów p, q, r spełniających $[q,p] = \mathrm{i}r$, $[p,r] = 0$, $[q,r] = 0$.

Zadanie 7.2. Pokazać, że macierz $\left(\begin{smallmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ nie jest kwadratem żadnej macierzy należącej do $\mathsf{GL}(2,\mathbb{R})$ i wywnioskować stąd, że odwzorowanie $\exp : \mathsf{End}\,\mathbb{R}^2 \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{R})$ nie jest surjektywne.

Zadanie 7.3. Zapisując równanie $ad-bc=1$ w postaci $(a+d)^2+(b-c)^2 = 4+(a-d)^2+(b+c)^2$ pokazać, że grupa $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ jest homeomorficzna $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}^2$, więc nie jest jednospójna.

Zadanie 7.4. Znaleźć składowe spójne grup $\mathsf{O}(k,l)$, $k,l \in \mathbb{N}$.

Zadanie 7.5. Znaleźć w jawny sposób izomorfizm algebr Liego: $\mathfrak{so}(3) \subset \mathsf{End}\,\mathbb{R}^3$ i $\mathfrak{su}(2) \subset \mathsf{End}\,\mathbb{C}^2$. Pokazać, że izomorfizm $\mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{su}(2)$ nie podnosi się do homomorfizmu grup Liego $\mathsf{SO}(3) \to \mathsf{SU}(2)$ („pod wpływem obrotu o 360 stopni spinor zmienia znak”).

Zadanie 7.6. Pokazać, że algebry opisane w poprzednim zadaniu są izomorficzne algebrze Liego pól wektorowych na $\mathbb{R}^3$, rozpiętej na polach $y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}$, $z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}$ i $x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$, gdzie x,y,z są współrzędnymi kartezjańskimi w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć także algebrę Liego grupy ruchów euklidesowych (izometrii) w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 7.7. Znaleźć algebrę Liego grupy $\mathsf{Sp}(n)$.

Zadanie 7.8. Udowodnić następujące izomorfizmy algebr Liego:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}); \tag{7.32}$$

$$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(4); \tag{7.33}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2,2); \tag{7.34}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}); \tag{7.35}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(1,2); \tag{7.36}$$

*

$$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(6,\mathbb{C}); \tag{7.37}$$

$$\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6); \tag{7.38}$$

$$\mathfrak{su}(2,2) \cong \mathfrak{so}(2,4); \tag{7.39}$$

$$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{so}(2,2); \tag{7.40}$$

$$\mathfrak{sp}(2) \cong \mathfrak{so}(5). \tag{7.41}$$

*

Wskazówka. Znaleźć lokalne izomorfizmy grup Liego odpowiadające tym izomorfizmom algebr Liego. W szczególności, homomorfizm

$$\mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \times \mathsf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{SO}(4,\mathbb{C})$$

otrzymuje się wychodząc z izomorfizmu przestrzeni wektorowych $\sigma : \mathbb{C}^4 \to \mathsf{End}\,\mathbb{C}^2$, rozpatrując odwzorowanie

$$\sigma(z) \mapsto a\sigma(z)b^{-1}, \quad a,b \in \mathsf{SL}(2,\mathbb{C})$$

i uwzględniając to, że $\det\sigma(z)$ jest niezwyrodniałą formą kwadratową na $\mathbb{C}^4$. Forma ta, ograniczona do $\mathbb{R}^4$, ma sygnaturę $(2,2)$, co prowadzi do homomorfizmu $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})\to\mathsf{SO}(2,2)$.

$*$ Homomorfizm

$$\mathsf{SL}(4,\mathbb{C})\to\mathsf{SO}(6,\mathbb{C})$$

otrzymuje się wychodząc z izomorfizmu $\mathbb{C}^6\to\wedge^2\mathbb{C}^4$, wprowadzając w przestrzeni $S=\mathbb{C}^4$ element objętości $\omega\in\wedge^4 S$, rozpatrując odwzorowanie $Z\mapsto aZa^*$, gdzie $Z\in\wedge^2 S=\mathsf{Hom}(S,S^*)$, $a\in\mathsf{SL}(S)$ i uwzględniając to, że pfafian, zdefiniowany wzorem $\mathsf{Pf}(Z)\omega=\frac{1}{2}Z\wedge Z$, jest niezwyrodniałą formą kwadratową. Element objętości definiuje dualność Hodge'a $*:\wedge^2 S\to\wedge^2 S^*$ i mamy $*Z\circ Z=-\mathsf{Pf}(Z)\,\mathrm{id}_S$ oraz $\mathsf{Pf}(aZa^*)=\det a\,\mathsf{Pf}(Z)$. Jeśli $*Z=\bar{Z}$, to $-\mathsf{Pf}(Z)$ jest formą dodatnio określoną, co prowadzi do homomorfizmu $\mathsf{SU}(4)\to\mathsf{SO}(6)$. Podobnie otrzymuje się homomorfizm $\mathsf{SU}(2,2)\to\mathsf{SO}(2,4)$, który jest podstawą teorii twistorów Penrose'a. Homomorfizm $\mathsf{Sp}(2)\to\mathsf{SO}(5)$ otrzymuje się utożsamiając $\mathbb{R}^5$ z $\mathbb{R}\times\mathbb{H}$, wprowadzając odwzorowanie $\tau:\mathbb{R}\times\mathbb{H}\to\mathsf{End}\,\mathbb{H}^2$, $\tau(t,q)=\left(\begin{smallmatrix} t & q\\ \bar{q} & -t\end{smallmatrix}\right)$; działanie $A\in\mathsf{Sp}(2)$ w $\mathbb{R}^5$ dane jest przez $\tau(t,q)\mapsto A\tau(t,q)A^\dagger$. (Uwaga: trzeba sprawdzić, że $\operatorname{tr}A\tau(t,q)A^\dagger=0$.)$*$

Zadanie 7.9. Stosujemy oznaczenia §7. Pokazać, że jeśli $\mathbf{A}\in\Gamma^1(M,G')$, to $[\mathbf{A}[\mathbf{A},\mathbf{A}]]=0$. Udowodnić stw. 7.7. Niech $\mathbf{F}=\mathrm{D}\mathbf{A}$. Udowodnić i zinterpretować równość $\mathrm{D}^2_{\mathbf{A}}*\mathbf{F}=0$.

Zadanie 7.10. Zinterpretować geometrycznie G-struktury na n-wymiarowej rozmaitości odpowiadające $G=$ (i) $\mathsf{SL}(n,\mathbb{R})$, (ii) $\mathsf{GL}(k,\mathbb{R})\times\mathsf{GL}(l,\mathbb{R})$, $k+l=n$.

Zadanie 7.11. Dla $X\in\Bbbk(n)$ definiujemy odwzorowanie liniowe

$$E(X):\Bbbk(n)\to\Bbbk(n),\quad E(X)Y=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(X+tY)|_{t=0}.$$

Pokazać, że (zob. str. 106 w [**29**])

$$E(X)=(\exp X)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(\operatorname{ad}X)^n,\quad \text{gdzie}\quad (\operatorname{ad}X)Y=[X,Y],$$

czyli, symbolicznie,

$$(\exp X)\frac{1-\exp(-\operatorname{ad}X)}{\operatorname{ad}X}.$$

VIII

Algebry Liego

Algebry Liego są ważne w fizyce przede wszystkim z następującego względu: w teoriach kwantowych stany układu fizycznego opisuje się w przestrzeni Hilberta, w której określona jest reprezentacja unitarna grupy Liego symetrii układu. Reprezentacja ta indukuje reprezentację algebry Liego realizowaną przy pomocy operatorów antyhermitowskich; dzieląc te operatory przez jednostkę urojoną otrzymuje się operatory hermitowskie, o rzeczywistych wartościach własnych. Te hermitowskie operatory mają interpretcję fizyczną: odpowiadają im *obserwable* takie jak energia, pęd, moment pędu, ładunek itp.

Na podstawie części 4 Twierdzenia 1 w Rozdz. VII wiadomo, że reprezentacja algebry Liego grupy jednospójnej G w przestrzeni wektorowej V podnosi się do reprezentacji ρ tej grupy. Jeśli chce się znaleźć w ten sposób reprezentacje grupy $H = G/K$, gdzie K jest dyskretną podgrupą centrum grupy G (zob. część 2 Tw. 1), to wystarczy wybrać wśród reprezentacji grupy G te, dla których ρ jest trywialne na K, tzn. te dla których $a \in K$ pociąga $\rho(a) = \mathrm{id}_V$.

Na reprezentacjach algebr Liego można wykonywać działania podobne do tych, jakie wykonuje się na reprezentacjach grup. Jeśli $\sigma_i : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V_i$, $i = 1, 2$, są reprezentacjami algebry Liego $\mathfrak{g}$, to ich *suma prosta* jest określona przez

$$\sigma_1 \oplus \sigma_2 : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}(V_1 \oplus V_2), \quad (\sigma_1 \oplus \sigma_2)(A)(v_1, v_2) = (\sigma_1(A)v_1, \sigma_2(A)v_2),$$

a *iloczyn tensorowy* $\sigma_1 \otimes \sigma_2 : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}(V_1 \otimes V_2)$ przez

$$(\sigma_1 \otimes \sigma_2)(A)(v_1 \otimes v_2) = (\sigma_1(A)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes \sigma_2(A)v_2,$$

gdzie $A \in \mathfrak{g}$, $v_i \in V_i$. Definicję iloczynu tensorowego reprezentacji algebr Liego można heurystycznie uzasadnić rozpatrując iloczyn tensorowy $\rho_1 \otimes \rho_2$ reprezentacji grupy Liego i obliczając pochodną funkcji $t \mapsto \rho_1(\exp tA) \otimes \rho_2(\exp tA)$ względem t w punkcie $t = 0$.

1. Automorfizmy i różniczkowania algebr Liego

W niniejszym paragrafie $\mathfrak{g}$ oznacza skończenie wymiarową algebrę Liego nad $\Bbbk$.

Definicja. Automorfizmem algebry $\mathfrak{g}$ nazywa się odwzorowywanie $h \in \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ takie, że dla każdych $A, B \in \mathfrak{g}$ zachodzi

$$h([A, B]) = [h(A), h(B)].$$

Np. Jeśli $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego grupy G, to dla każdego $a \in G$, odwzorowanie $\mathrm{ad}(a) \in \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ jest automorfizmem algebry $\mathfrak{g}$.

Definicja. Różniczkowaniem algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywa się odwzorowanie $D \in \mathsf{End}\,\mathfrak{g}$ takie, że dla każdych $A, B \in \mathfrak{g}$ zachodzi (reguła Leibniza)

$$D[A, B] = [DA, B] + [A, DB].$$

Np. jeśli $C \in \mathfrak{g}$, to odwzorowanie $\mathrm{ad}(C)$ zdefiniowane w (7.13) jest różniczkowaniem algebry $\mathfrak{g}$.

2. Formy niezmiennicze na algebrach Liego

Niech

$$h : G' \times G' \to K, \quad \text{gdzie} \quad K = \mathbb{R} \text{ lub } \mathbb{C},$$

będzie formą biliniową na algebrze Liego grupy G. Mówi się, że jest to *forma niezmiennicza* jeśli jest ona niezmiennicza względem reprezentacji dołączonej G w G',

$$h(\mathrm{ad}(a)A, \mathrm{ad}(a)B) = h(A, B) \quad \text{dla} \quad A, B \in G',\ a \in G.$$

Kładąc w ostatnim równaniu $a = \exp tC$, $C \in G'$, i różniczkując względem t otrzymuje się warunek niezmienniczości w postaci „infinitezimalnej":

$$h([C, A], B) + h(A, [C, B]) = 0. \tag{8.1}$$

Powyższe równanie można przyjąć za definicję niezmienniczości formy h określonej na algebrze Liego $\mathfrak{g}$.

STWIERDZENIE 8.1. *Niech (c^i_{jk}) będą stałymi strukturalnymi algebry Liego $\mathfrak{g}$ względem bazy (e_i), niech $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ będzie macierzą współczynników formy biliniowej h na $\mathfrak{g}$ oraz $c_{ijk} = h_{il}c^l_{jk}$. Forma h jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$c_{ijk} = c_{[ijk]}. \tag{8.2}$$

Dowód. Warunek (8.1) jest równoważny temu, że

$$h([e_i, e_j], e_k) + h(e_j, [e_i, e_k]) = c_{kij} + c_{jik} = 0$$

dla każdych i, j, k. Na mocy definicji stałych strukturalnych jest $c_{ijk} = -c_{ikj}$, więc także $c_{ijk} = -c_{jik}$. □

Każda forma biliniowa jest formą niezmienniczą na przemiennej algebrze Liego. Formy niezmiennicze na algebrach Liego występują w fizyce m.in. w związku z konstrukcją funkcji Lagrange'a w teoriach pól z cechowaniem.

2.1. Forma Killinga. Niech $\rho : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\,V$ będzie reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$ w przestrzeni wektorowej V. Można jej przyporządkować formę niezmienniczą h_ρ na $\mathfrak{g}$ zdefiniowaną wzorem

$$h_\rho(A, B) = \mathrm{tr}\,(\rho(A) \circ \rho(B), \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

W szczególności, dla $\rho = \mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\,\mathfrak{g}$ otrzymuje się *formę Killinga* $\mathcal{K} = h_{\mathrm{ad}}$,

$$\mathcal{K}(A, B) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(B)). \tag{8.3}$$

PRZYKŁAD 8.1. Forma Killinga algebry $\mathsf{End}\, V = \mathfrak{gl}(V)$.

Niech V będzie n-wymiarową rzeczywistą przestrzenią wektorową z bazą (e_μ), $\mu = 1, \ldots, n$. W przestrzeni $\mathsf{End}\, V$ wprowadza się bazę (E^μ_ν) w taką, że $E^\mu_\nu(e_\rho) = \delta^\mu_\rho e_\nu$, więc $E^\mu_\nu \circ E^\alpha_\beta = \delta^\mu_\beta E^\alpha_\nu$. Niech $A, B \in \mathsf{End}\, V$. Obliczając $[A, [B, E^\mu_\nu]] = M^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(A, B) E^\beta_\alpha$ otrzymuje się

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(B)) = M^{\mu\alpha}_{\mu\alpha}(A, B) = 2(n\,\mathrm{tr}\,(AB) - (\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B)).$$

Formę Killinga $\mathcal{K}$ można wyrazić przez stałe strukturalne: niech $\mathcal{K}_{ij} = \mathcal{K}(e_i, e_j)$, to

$$\mathcal{K}_{ij} = \mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(e_i) \circ \mathrm{ad}(e_j)).$$

Obliczając $\mathrm{ad}(e_i) \circ \mathrm{ad}(e_j)(e_p)$ otrzymuje się

$$\mathcal{K}_{ij} = c^p_{ik} c^k_{jp}. \tag{8.4}$$

Łatwo udowodnić

STWIERDZENIE 8.2. *Niech $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ oznacza formę Killinga algebry Liego $\mathfrak{g}$. Jeśli $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest* ideałem*, to forma Killinga $\mathcal{K}_\mathfrak{h}$ algebry $\mathfrak{h}$ jest ograniczeniem do $\mathfrak{h}$ formy $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$.*

Często wygodnie jest używać, jako formę niezmienniczą na $\mathfrak{g}$, formę proporcjonalną do formy Killinga i oznaczać ją także symbolem $\mathcal{K}$, bez dodatkowych wyjaśnień. Np. jako formy niezmienniczej na $\mathfrak{gl}(V) = \mathsf{End}\, V$ używamy

$$\mathcal{K}(A, B) = \mathrm{tr}\,(AB) - \tfrac{1}{n}(\mathrm{tr}\, A)(\mathrm{tr}\, B). \tag{8.5}$$

Ograniczenie (8.5) do algebry $\mathfrak{sl}(V)$ endomorfizmów o znikającym śladzie, która jest ideałem algebry $\mathfrak{gl}(V)$, jest postaci $\mathrm{tr}\,(AB)$.

2.2. Algebry Liego nilpotentne i rozwiązalne. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem przemiennym K. Endomorfizm $X \in \mathsf{End}\, V$ nazywa się *nilpotentnym* jeśli istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $X^p = 0$. Jeśli algebra Liego jest przemienna, to jej forma Killinga znika. Wiadomo (zob. Stw. 4.5), że jeśli wszystkie zespolone reprezentacje nieprzywiedlne grupy skończonej są jednowymiarowe, to grupa jest przemienna. Okazuje się, że jest wiele algebr Liego, a więc i grup, które nie są przemienne, ale mają znikającą formę Killinga lub posiadają tę własność, że ich skończenie wymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne są jednowymiarowe.

2.2.1. Jeśli $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są podzbiorami algebry Liego $\mathfrak{g}$, to $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{g}$ oznacza podprzestrzeń wektorową rozpiętą na wszystkich elementach postaci $[A, B]$, gdzie $A \in \mathfrak{a}$ i $B \in \mathfrak{b}$. Podprzestrzeń $\mathcal{D}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest ideałem algebry $\mathfrak{g}$, zwanym jej *ideałem pochodnym.* Definiując $\mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}^{k+1}(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}))$, otrzymuje się ciąg zstępujący ideałów

$$\mathfrak{g} \supset \mathcal{D}^1(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{D}^2(\mathfrak{g}) \supset \ldots$$

Definiując $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathcal{D}^1(\mathfrak{g})$ i $\mathcal{C}^{k+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^k(\mathfrak{g})]$ otrzymuje się drugi podobny ciąg,

$$\mathfrak{g} \supset \mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}) \supset \ldots$$

Łatwo sprawdzić (przez indukcję), że

$$\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) \supset \mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8.6}$$

Definicja. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *nilpotentna* (*rozwiązalna*) jeśli istnieje liczba $p \in \mathbb{N}$ taka, że $\mathcal{C}^p(\mathfrak{g}) = \{0\}$ ($\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}) = \{0\}$).

Zawieranie (8.6) pokazuje, że każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

2.2.2. Nilpotentną algebrę Liego można w równoważny sposób zdefiniować jako algebrę, dla której istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego ciągu $(A_1, \ldots, A_p)$ elementów algebry zachodzi

$$\mathrm{ad}(A_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(A_p) = 0.$$

TWIERDZENIE (Engel). *Jeśli algebra Liego $\mathfrak{g}$ ma tę własność, że dla każdego $A \in \mathfrak{g}$ endomorfizm $\mathrm{ad}(A)$ jest nilpotentny, to algebra $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna.*

Dowód. Zob. §3.3 w [**31**]. □

Algebra przemienna jest nilpotentna. Można pokazać, że jeśli grupa Liego G jest nilpotentna, to jej algebra Liego G' jest nilpotentna.

PRZYKŁAD 8.2. Algebra Liego grupy $\mathsf{T}^1_n(\mathbf{C})$ (zob. Przykład 2.1), składająca się ze wszystkich macierzy postaci

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

jest nilpotentna. W szczególności, algebra Liego grupy Heisenberga jest nilpotentna.

STWIERDZENIE 8.3. *Forma Killinga algebry nilpotentnej znika.*

Dowód. Jeśli algebra $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna to, dla każdych $A, B \in \mathfrak{g}$, endomorfizm $X = \mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(B)$ jest nilpotentny. Z drugiej strony, jeśli endomorfizm $X \in \mathsf{End}\, V$ jest nilpotentny, tzn. $X^m = 0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, to $\mathrm{tr}\, X = 0$. Istotnie, niech przestrzeń wektorowa V będzie zespolona n-wymiarowa; *wielomian charakterystyczny* w tego endomorfizmu X ma postać

$$w(\lambda) = \det(\lambda\, \mathrm{id}_V - X) = \lambda^n - \mathrm{tr}\, X \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det X.$$

Rozkładając w na czynniki liniowe,

$$w(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n).$$

otrzymuje się $\mathrm{tr}\, X = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Dla każdego pierwiastka λ_i, $i = 1, \ldots, n$, wielomianu w istnieje wektor $v_i \neq 0$ taki, że $Xv_i = \lambda_i v_i$. Jeśli $X^m = 0$, to $X^m v_i = 0$, więc $\lambda_i = 0$, stąd $\mathrm{tr}\, X = 0$. □

Istnieją algebry Liego o znikającej formie Killinga, które nie są nilpotentne; zob. [Bb], Ch. 1 Exerc. §4.2c.

2.2.3. Niech $G \subset \mathsf{GL}(V)$ będzie grupą Liego. Jeśli $A, B \in G' \subset \mathsf{End}\, V$, to punkty krzywej

$$t \mapsto a(t) = \exp At \exp Bt \exp(-At) \exp(-Bt)$$

należą do podgrupy pochodnej $D(G)$. Łatwo widać, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)|_{t=0} = 0$, ale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(\sqrt{t})|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}a(t)|_{t=0} = [A, B].$$

Wynika stąd

$$D(G)' = [G', G'].$$

oraz

Stwierdzenie 8.4. *Jeśli G jest rozwiązalną grupą Liego, $D^k(G) = \{e\}$, to jej algebra Liego G' jest rozwiązalna, $\mathcal{D}^k(G') = \{0\}$.*

Dwuwymiarowa algebra Liego, rozpięta na wektorach e_1 i e_2 takich, że $[e_1, e_2] = e_1$ jest rozwiązalna, ale nie jest nilpotentna. Pokazuje się, że każda zespolona, skończenie wymiarowa nieprzywiedlna reprezentacja rozwiązalnej algebry Liego jest jednowymiarowa (zob. [Bb] Ch. 1 §5.3 Cor. 2). Wynika stąd, że „interesujące” reprezentacje takich algebr są na ogół nieskończenie wymiarowe, na co wskazuje następujący

Przykład 8.3. Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego grupy Heisenberga z bazą (p, q, r) jak w Zadaniu 7.1. Algebra $\mathfrak{g}$ posiada nieprzywiedlną reprezentację ρ w nieskończenie wymiarowej przestrzeni V zespolonych wielomianów jednej zmiennej x. Jeśli $w \in V$, to $(\rho(p)w)(x) = -\mathrm{i}w'(x)$, $(\rho(q)w)(x) = xw(x)$ oraz $\rho(r) = \mathrm{id}_V$. Reprezentacja skończenie wymiarowa algebry $\mathfrak{g}$, powstająca przez zróżniczkowanie reprezentacji definiującej grupę Heisenberga (Zadanie 2.27) nie jest nieprzywiedlna.

2.3. Radykał algebry Liego.

Stwierdzenie 8.5. *Niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem algebry Liego $\mathfrak{g}$.*

(i) Jeśli algebra $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna, to iloraz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ też.

(ii) Jeśli ideał $\mathfrak{h}$ oraz iloraz $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ są rozwiązalne, to algebra $\mathfrak{g}$ też jest rozwiązalna.

Dowód. Niech $\kappa : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ oznacza homomorfizm kanoniczny. Jeśli algebra $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna, to dla pewnego p zachodzi $\mathcal{D}^p\mathfrak{g} = \{0\}$, ale $\mathcal{D}^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \kappa(\mathcal{D}^p\mathfrak{g})$, dowodzi części (i). Jeśli $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ są rozwiązalne, to istnieją liczby $k, l \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{D}^k\mathfrak{h} = \{0\}$ i $\mathcal{D}^l(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{0\}$. Zatem $\mathcal{D}^l\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$, a stąd $\mathcal{D}^{k+l}\mathfrak{g} = \mathcal{D}^k(\mathcal{D}^l\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}^k\mathfrak{h} = \{0\}$, co dowodzi części (ii). □

Wniosek. Suma $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ideałów rozwiązalnych algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest także ideałem rozwiązalnym tej algebry.

Istotnie, $\mathfrak{a}$ jest także ideałem rozwiązalnym algebry $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$. Iloraz $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{a}$ jest izomorficzny ilorazowi $b/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, więc jest rozwiązalny na mocy części (i) Stwierdzenia 8.5. A zatem na mocy części (ii) suma $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ jest rozwiązalna.

Definicja. Radykałem algebry Liego nazywa się jej największy ideał rozwiązalny.

2.4. Proste algebry Liego. O algebrze Liego $\mathfrak{g}$ mówi się, że jest *prosta*, jeśli nie jest przemienna i nie posiada właściwych ideałów. Np. algebra Liego $\mathfrak{su}(2)$ jest prosta. Algebra Liego jest *półprosta* jeśli jej jedynym przemiennym ideałem jest $\{0\}$. Każda algebra prosta jest także półprosta; iloczyn (czyli suma prosta) algebr prostych jest algebrą półprostą. Pokazuje się, że każda algebra półprosta jest tej postaci.

LEMAT 8.6. *Jeśli $W = U \oplus V$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową, $F \in \mathsf{End}\, W$, $F(U) = \{0\}$ i $F(V) \subset U$, to* $\operatorname{tr} F = 0$.

Dowód. Istotnie, niech (e_μ) i (f_a) będą reperami w U i V, odpowiednio, to $F(e_\mu) = 0$ i $F(f_a) = F^\mu_a e_\mu$, więc $\operatorname{tr} F = 0$. □

TWIERDZENIE (Kryterium Cartana-Killinga). *Algebra Liego jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy jej forma Killinga jest nieosobliwa.*

Dowód. Udowodnimy tu tylko, że jeśli forma Killinga $\mathcal{K}$ jest nieosobliwa, to algebra jest półprosta. Pełny dowód tego twierdzenia można znaleźć w [Wo].

Jeśli algebra Liego $\mathfrak{g}$ nie jest półprosta, to istnieje przemienny ideał $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ taki, że $\mathfrak{a} \neq \{0\}$. Niech $\mathfrak{b}$ będzie podprzestrzenią $\mathfrak{g}$, uzupełniającą do $\mathfrak{a}$, tzn. taką podprzestrzenią, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Niech $A \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$ i $F = \operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(A)$, to dla każdego $A' \in \mathfrak{a}$ jest $F(A') = 0$, a dla każdego $B \in \mathfrak{b}$ jest $F(B) \in \mathfrak{a}$. Z poprzedniego lematu wynika, że $\operatorname{tr} F = 0$ czyli $\mathcal{K}(X, A) = 0$ dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ i $A \in \mathfrak{a}$, co oznacza, że forma Killinga $\mathcal{K}$ jest osobliwa. □

PRZYKŁAD 8.4. Algebra Liego $\mathsf{End}\, V$ nie jest półprosta, bo na mocy (8.5) macierz jednostkowa I jest prostopadła, względem $\mathcal{K}$, do całej przestrzeni $\mathsf{End}\, V$. Algebra $\mathfrak{sl}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{SL}(V)'$ składa się ze wszystkich elementów $\mathsf{End}\, V$ o znikającym śladzie; jest ona ideałem w $\mathsf{End}\, V$ i na mocy stw. 8.2 mamy $\mathcal{K}_{\mathfrak{sl}(V)}(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$. Jeśli $\operatorname{tr}(AB) = 0$ dla każdego $B \in \mathfrak{sl}(V)$, to $A = 0$, więc, na mocy kryterium Cartana, algebra $\mathfrak{sl}(V)$ jest półprosta.

Mówimy, że algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest *zwartą algebrą Liego* jeśli istnieje zwarta grupa Liego G taka, że $G' = \mathfrak{g}$. Np. przemienna algebra Liego $\mathbb{R}^n$ jest zwartą algebrą Liego, gdyż jest ona algebrą Liego *torusa* $\mathsf{U}(1)^n = \mathsf{U}(1) \times \cdots \times \mathsf{U}(1)$ (n czynników). Algebra Liego $\mathbb{R}^3$ ze składaniem elementów zdefiniowanym jako iloczyn wektorowy jest także zwartą algebrą Liego (można wziąć $G = \mathsf{SU}(2)$). Dowodzi się, że algebra Liego jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy posiada (dodatnio) określoną formę niezmienniczą. Mówimy, że G jest *prostą* (względnie *półprostą*) *grupą Liego* jeśli algebra Liego G' jest prosta (względnie półprosta). Pojęcie prostej grupy Liego różni się od pojęcia grupy prostej: np. grupa $\mathsf{SU}(2)$ jest prostą grupą Liego, ale nie jest grupą prostą, bo ma nietrywialny dzielnik normalny, mianowicie $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$. Grupa $\mathsf{SO}(4)$ nie jest prostą grupą Liego, ale jest półprosta, mimo że nie jest iloczynem prostym: $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathsf{SO}(4) = (\mathsf{SU}(2) \times \mathsf{SU}(2))/\mathbb{Z}_2$.

3. Lista prostych, zwartych i jednospójnych grup Liego

Torusem o wymiarze n grupy Liego G nazywamy każdą jej podgrupę izomorficzną $\mathsf{U}(1)^n = \mathsf{U}(1) \times \cdots \times \mathsf{U}(1)$ (n czynników). Torus w G jest *maksymalny* jeśli nie jest zawarty w żadnym torusie większego wymiaru. Dowodzi się, że w półprostej grupie Liego każde dwa torusy maksymalne są do siebie sprzężone; ich wymiar jest więc niezmiennikiem grupy, zwanym jej *rangą*. Torusowi maksymalnemu H półprostej grupy Liego G odpowiada maksymalna przemienna podalgebra H' algebry G', zwana *podalgebrą Cartana*. Ranga jest wymiarem podalgebry Cartana. Niech $\mathsf{Spin}(m)$ oznacza grupę jednospójną o algebrze Liego $\mathfrak{so}(m)$; zob. twierdzenie w Rozdz. VII; stanowi ona nietrywialne rozszerzenie grupy $\mathsf{SO}(m)$ przez $\mathbb{Z}_2$; jest więc ciąg dokładny homomorfizmów grup

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Spin}(m) \to \mathsf{SO}(m) \to 1.$$

É. Cartan podał pełną listę prostych, zwartych algebr i grup Liego. Na liście tej rangę grupy – lub odpowiadającej jej algebry – umieszcza się jako dolny wskaźnik przy literze oznaczającej tę grupę. Litery A, B,..., G do oznaczania prostych algebr Liego wprowadził Wilhelm Killing [**36**]; są one używane obecnie do oznaczania zarówno algebr jak i grup Liego.

LISTA CARTANA
zwartych i jednospójnych grup prostych,

Grupa		Wymiar
$\mathsf{A}_\ell = \mathsf{SU}_{\ell+1}$	$\ell \geqslant 1$	$\ell(\ell+2)$
$\mathsf{B}_\ell = \mathsf{Spin}_{2\ell+1}$	$\ell \geqslant 2$	$\ell(2\ell+1)$
$\mathsf{C}_\ell = \mathsf{Sp}_\ell$	$\ell \geqslant 3$	$\ell(2\ell+1)$
$\mathsf{D}_\ell = \mathsf{Spin}_{2\ell}$	$\ell \geqslant 4$	$\ell(2\ell-1)$
E_6		78
E_7		133
E_8		248
F_4		52
G_2		14

Komentarz do listy Cartana: lista powyższa jest pełna i bez powtórzeń; nie ma na niej grup B_1 i C_1, gdyż obie te grupy są izomorficzne grupie A_1; podobnie $\mathsf{C}_2 = \mathsf{B}_2$ i $\mathsf{D}_3 = \mathsf{A}_3$. Grupa $\mathsf{D}_1 = \mathsf{U}(1)$ nie jest prosta; podobnie $\mathsf{D}_2 = \mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$. *Grupy wyjątkowe* E_6, E_7, E_8, F_4 i G_2 są grupami automorfizmów pewnych przestrzeni związanych z algebrą oktonionów; w szczególności, G_2 jest grupą automorfizmów tej algebry, zob. [Ti].

4. Operator Casimira

Rozpatrzmy teraz reprezentację algebry Liego $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V$ i załóżmy, że dana jest nieosobliwa, biliniowa i symetryczna forma niezmiennicza h na $\mathfrak{g}$. Niech (e_i) będzie bazą w $\mathfrak{g}$, macierz (h_{ij}), gdzie $h_{ij} = h(e_i, e_j)$, jest symetryczna i nieosobliwa; macierz (h^{ij}) odwrotna względem (h_{ij}) też jest symetryczna.

Operator Casimira dla reprezentacji σ algebry $\mathfrak{g}$,

$$\mathcal{C} = h^{ij}\sigma(e_i) \circ \sigma(e_j) \in \mathsf{End}\, V, \tag{8.7}$$

jest dobrze zdefiniowany w tym sensie, że nie zależy od wyboru bazy (e_i).

STWIERDZENIE 8.7. *Operator Casimira dla reprezentacji σ algebry $\mathfrak{g}$ jest przemienny z $\sigma(A)$ dla każdego $A \in \mathfrak{g}$.*

Dowód. Istotnie, dla każdego k mamy

$$\begin{aligned} [\mathcal{C}, \sigma(e_k)] &= h^{ij}([\sigma(e_i), \sigma(e_k)]\sigma(e_j) + \sigma(e_i)[\sigma(e_j), \sigma(e_k)]) \\ &= h^{ij}(c^l_{ik}\sigma(e_l)\sigma(e_j) + c^l_{jk}\sigma(e_i)\sigma(e_l)) \\ &= h^{ij}c^l_{ik}(\sigma(e_l)\sigma(e_j) + \sigma(e_j)\sigma(e_l)). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Na mocy niezmienniczości h mamy (8.2), więc $h^{ij}c^l_{ik} = -h^{il}c^j_{ik}$; wyrażenie w ostatnim nawiasie w (8.8) jest symetryczne w parze (j, l), co daje

$$[\mathcal{C}, \sigma(e_k)] = 0. \qquad \square$$

Wynika stąd, że jeśli reprezentacja σ jest zespolona i nieprzywiedlna, to istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że

$$\mathcal{C} = \lambda \,\mathrm{id}_V .$$

PRZYKŁAD 8.5. Rozpatrzmy operator Casimira dla reprezentacji σ algebry Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ w przestrzeni wektorowej V wszystkich zespolonych funkcji gładkich na sferze $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$. Oznaczając przez e_x, e_y, e_z wektory bazy w $\mathfrak{g}$ takie, że $[e_x, e_y] = e_z$, itd., określamy reprezentację $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V$ kładąc

$$\sigma(e_x) = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pola wektorowe $\sigma(e_y)$ i $\sigma(e_z)$ otrzymuje się z $\sigma(e_x)$ przez cykliczną permutację współrzędnych x, y, z. Pola te są styczne do sfery, a σ jest homomorfizmem algebry Liego $\mathfrak{g}$ w algebrę Liego $\mathsf{End}\, V$. Łatwo zauważyć, że forma Killinga na $\mathfrak{g}$ jest proporcjonalna do standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$; można więc wziąć $h^{ij} = \delta^{ij}$. Dla operatora Casimira mamy zatem

$$\mathcal{C} = (y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})^2 + (z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})^2 + (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})^2.$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne w $\mathbb{R}^3$,

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta,$$

stwierdzamy, że $\mathcal{C}$ jest operatorem Laplace'a na sferze, a operator Laplace'a w $\mathbb{R}^3$ jest postaci

$$\Delta = r^{-2}\mathcal{C} + r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}. \tag{8.9}$$

Niech $w_l(x, y, z) = r^l Y_l(\theta, \phi)$ będzie harmonicznym, jednorodnym stopnia l wielomianem na $\mathbb{R}^3$. Funkcja Y_l należy do V. Podstawiając w_l do (8.9) otrzymujemy

$$\mathcal{C}Y_l = -l(l+1)Y_l, \quad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Podprzestrzeń

$$V_l = \{f \in V \mid \mathcal{C}f = -l(l+1)f\}$$

jest $(2l + 1)$-wymiarową przestrzenią niezmienniczą i nieprzywiedlną dla reprezentacji σ. Funkcje Y_l nazywają się funkcjami sferycznymi.

5. Algebra obwiednia algebry Liego

Operator Casimira można zdefiniować niezależnie od reprezentacji, wprowadzając pojęcie algebry obwiedni algebry Liego. Niech $\mathfrak{g}$ będzie skończenie wymiarową algebrą Liego nad $\Bbbk$. W algebrze tensorowej $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_k \bigotimes^k \mathfrak{g}$ rozpatrujemy ideał $\mathrm{J}(\mathfrak{g})$ generowany przez wszystkie elementy postaci

$$u \otimes v - v \otimes u - [u, v], \quad u, v \in \mathfrak{g}.$$

Algebra ilorazowa

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{T}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}(\mathfrak{g})$$

nazywa się *algebrą obwiednią* algebry Liego $\mathfrak{g}$.

Algebra $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ jest łączna – bo algebra tensorowa jest łączna – i ma jedność 1. Suma $\Bbbk \oplus \mathfrak{g}$ jest podprzestrzenią $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Niech A będzię algebrą łączną. Odwzorowanie liniowe $f : \mathfrak{g} \to A$ nazywa się *odwzorowaniem Liego*, jeśli, dla wszystkich $u, v \in \mathfrak{g}$ jest

$$f(u)f(v) - f(v)f(u) = f([u, v]).$$

Algebra obwiednia ma następującą własność uniwersalności: jeśli $f : \mathfrak{g} \to A$ jest odwzorowaniem Liego, to istnieje homomorfizm algebr łącznych

$$\hat{f} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A \quad \text{taki, że } \hat{f}|\mathfrak{g} = f.$$

W szczególności, jeśli algebra $\mathfrak{g}$ jest przemienna – $[u, v] = 0$ dla wszystkich u, v – to algebra obwiednia jes izomorficzna algebrze symetrycznej.

Operator Casimira można teraz określić jako

$$\mathcal{C} = h^{ij} e_i e_j \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}).$$

Operator $\mathcal{C}$ należy do centrum algebry $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

6. Kompleksyfikacja i realifikacja algebr Liego; forma rzeczywista

6.1. Kompleksyfikacja i realifikacja. Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rzeczywistą algebrą Liego, to jej *kompleksyfikacja* $\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$ jest zespoloną algebrą Liego i $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$; nawias elementów $A + \mathrm{i}B$ oraz $A' + \mathrm{i}B'$ definiuje się jako

$$[A + \mathrm{i}B, A' + \mathrm{i}B'] = [A, A'] - [B, B'] + \mathrm{i}([A, B'] + [B, A']).$$

Jeśli $\mathfrak{h}$ jest zespoloną algebrą Liego, to można określić jej *realifikację* $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ zawężając skalary, przez które można mnożyć elementy algebry, do liczb rzeczywistych, więc $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$.

Przykład 8.6. Kompleksyfikując algebrę $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$, a następnie ją realifikując, otrzymujemy rzeczywistą, sześciowymiarową algebrę Liego grupy Lorentza.

Można te działania przedstawić symbolicznie w postaci diagramu

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{SO}(3) & & \mathsf{SO}(1,3) \\
\mathfrak{so}(3) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\text{kompleksyfikacja}"'] & \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) \arrow[r, "\text{realifikacja}"'] & \mathfrak{so}(1,3) \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Zespolone i skończenie wymiarowe reprezentacje zwartych grup Liego są równoważne unitarnym i dlatego w pełni rozkładalne, zob. rozdz. VII §12. Hermann Weyl [We] zauważył, że zespolone reprezentacje skończenie wymiarowe niezwartej, ale półprostej grupy Liego są także w pełni rozkładalne, gdyż kompleksyfikacja algebry Liego tej grupy jest izomorficzna kompleksyfikacji pewnej zwartej algebry Liego. Obserwacja ta nosi nazwę „sztuczki unitarnej". Ścisłe i ogólniejsze jej sformułowanie można znaleźć w [SA] i [BR].

6.2. Forma rzeczywista zespolonej algebry Liego. Niech $\mathfrak{g}$ będzie zespoloną algebrą Liego. Rzeczywistą algebrę Liego $\mathfrak{h}$, której kompleksyfikacja $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{h}$ jest izomorficzna $\mathfrak{g}$, nazywa się *formą rzeczywistą* algebry $\mathfrak{g}$. Formy rzeczywistej nie należy mieszać z realifikacją; jest $\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}$. Algebrę zespoloną zawsze można – w jeden, kanoniczny sposób – zrealifikować, natomiast istnieją algebry zespolone, które nie mają formy rzeczywistej oraz takie, które mają wiele takich form.

Jeśli $\mathfrak{g} = \mathbb{C}\otimes\mathfrak{h}$, to można zdefiniować półliniowy automorfizm ς algebry $\mathfrak{g}$ kładąc $\varsigma(A+\mathrm{i}B) = A-\mathrm{i}B$ dla $A, B \in \mathfrak{h}$. Na odwrót, jeśli ς jest półliniowym automorfizmem zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$, to

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \varsigma(X) = X\}$$

jest formą rzeczywistą algebry $\mathfrak{g}$.

Przykład 8.7. Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ma dwie formy rzeczywiste:

automorfizm $X \mapsto \bar{X}$ określa formę rzeczywistą $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$,
automorfizm $X \mapsto -X^\dagger$ określa formę rzeczywistą $\mathfrak{su}(2)$.

Przykład 8.8. Algebra Liego $\mathbb{C}^3$ ze składaniem takim, że

$$[e_1, e_2] = \mathrm{i}e_3, \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 0$$

nie ma formy rzeczywistej (zob. Przykład 11.76 w [Wo]).

7. Reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Nietrudno znaleźć wszystkie skończenie wymiarowe zespolone reprezentacje algebry Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}(2)$. Można w tej algebrze wprowadzić bazę składającą się z macierzy

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

spełniających

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y. \tag{8.10}$$

Niech σ będzie reprezentacją tej algebry w zespolonej przestrzeni wektorowej V. Przestrzeń wektorów o *wadze* $\omega \in \mathbb{C}$ to

$$V_\omega = \{v \in V \mid \sigma(H)v = \omega v\}.$$

Na podstawie (8.10) jest

$$\sigma(X)V_\omega \subset V_{\omega+2}, \quad \sigma(Y)V_\omega \subset V_{\omega-2}. \tag{8.11}$$

Element $e \in V_\omega$ nazywa się *elementem pierwotnym* (elementem o największej wadze, highest weight vector) o wadze ω jeśli

$$e \neq 0 \quad \text{i} \quad \sigma(X)e = 0.$$

Jeśli $0 < \dim V < \infty$, to V zawiera pewien element pierwotny, gdyż zawiera wektor własny $v \neq 0$ endomorfizmu $\sigma(H)$, a elementy ciągu

$$v,\ \sigma(X)v,\ \sigma(X)^2 v, \dots$$

są liniowo niezależne dopóki są $\neq 0$. (Dowodzi się tego przy użyciu wyznacznika Vandermonde'a). Skoro jednak $\dim V < \infty$, to istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\sigma(X)^n v \neq 0$ i $\sigma(X)^{n+1}v = 0$; można wziąć $e = \sigma(X)^n v$.

Niech teraz V będzie przestrzenią wektorową, niekoniecznie skończonego wymiaru, zawierającą element pierwotny e o wadze ω. Można teraz podać dokładną strukturę przestrzeni niezmienniczej, zawierającej e.

Stwierdzenie 8.8. *Jeśli*

$$e_{-1} = 0, \quad e_n = \frac{1}{n!}\sigma(Y)^n e \quad \textit{dla} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{8.12}$$

to

$$\sigma(H)e_n = (\omega - 2n)e_n, \tag{8.13}$$

$$\sigma(Y)e_n = (n+1)e_{n+1}, \tag{8.14}$$

$$\sigma(X)e_n = (\omega - n + 1)e_{n-1}. \tag{8.15}$$

Dowód. Równanie (8.13) wynika natychmiast z drugiego równania (8.11). Równanie (8.14) wynika wprost z definicji (8.12). Równanie (8.15) dowodzi się przez indukcję: dla $n = 0$ mamy $e_{-1} = 0$ oraz $e_0 = e$, więc $\sigma(X)e_0 = 0$, bo element e jest pierwotny. Zakładając, że (8.15) zachodzi dla $n-1$, wykorzystując (8.10), (8.13) i (8.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
n\sigma(X)e_n &= \sigma(X)\sigma(Y)e_{n-1} && \text{z (8.14)}\\
&= [\sigma(X), \sigma(Y)]e_{n-1} + \sigma(Y)\sigma(X)e_{n-1} &&\\
&= \sigma(H)e_{n-1} + (\omega - n + 2)\sigma(Y)e_{n-2} && \text{z (8.10) i założenia indukcyjnego}\\
&= (\omega - 2n + (\omega - n + 2)(n-1))e_{n-1} && \text{z (8.13) i (8.14)}\\
&= n(\omega - n + 1)e_{n-1}; && \text{dzieląc przez } n \text{ otrzymujemy (8.15).} \square
\end{aligned}$$

Wniosek. Są dwie możliwości:
(a) ciąg nieskończony $(e_0, e_1, e_2, \dots)$ jest liniowo niezależny;
albo
(b) waga ω jest liczbą całkowitą $m \geqslant 0$, ciąg $(e_0, e_1, \dots, e_m)$ jest liniowo niezależny oraz $e_{m+1} = e_{m+2} = \dots = 0$.

Dowód. Jeżeli wszystkie e_i $(i = 0, 1, \dots)$ są $\neq 0$, to, jako wektory o różnych wagach, tworzą ciąg liniowo niezależny (przypadek (a)). Jeśli natomiast istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $e_{m+1} = 0$, to także $e_{m+2} = e_{m+3} = \cdots = 0$ (na mocy (8.12)). Jeśli $e_m \neq 0$, to ciąg $(e_0, e_1, \dots, e_m)$ jest liniowo niezależny. Podstawiając $n = m + 1$ do (8.15) otrzymuje się $\omega = m$. □

Jeśli przestrzeń V jest skończenie wymiarowa, to zachodzi przypadek (b). Niech $W_m = \operatorname{span}\{e_0, \dots, e_m\}$. Reprezentacja σ_m algebry $\mathfrak{g}$ w W_m jest nieprzywiedlna i zachodzą równości

$$\begin{aligned} \sigma_m(H)e_n &= (m - 2n)e_n, \\ \sigma_m(Y)e_n &= (n + 1)e_{n+1}, \\ \sigma_m(X)e_n &= (m - n + 1)e_{n-1}, \end{aligned} \tag{8.16}$$

gdzie $e_{-1} = e_{m+1} = 0$ oraz $n = 0, \dots, m$. Wynika stąd, że endomorfizmy $\sigma_m(X)$ i $\sigma_m(Y)$ są nilpotentne.

Każde dwie reprezentacje nieprzywiedlne i o tym samym, skończonym wymiarze, są równoważne. Operator Casimira ma tu postać

$$\mathcal{C} = \sigma_m(X)^2 + 2(\sigma_m(X)\sigma_m(Y) + \sigma_m(Y)\sigma_m(X)).$$

Obliczając $\mathcal{C}$ na wektorze $v \in V_m$ otrzymujemy na podstawie (8.16)

$$\mathcal{C}v = m(m + 2)v. \tag{8.17}$$

Dla małych wartości m można reprezentacje σ_m skojarzyć ze znanymi reprezentacjami grupy $\mathsf{SL}(2, \mathbb{C})$. Dla $m = 0$ mamy reprezentację trywialną; $m = 1$ odpowiada reprezentacji „definiującej” (czyli spinorowej); σ_2 jest równoważne reprezentacji ad; dla $m = 4$ otrzymujemy 5-wymiarową reprezentację występującą w związku z tensorem krzywizny konforemnej (tensorem Weyla) w czasoprzestrzeni ogólnej teorii względności.

Warto zwrócić uwagę na różnicę między reprezentacjami z parzystymi i nieparzystymi wartościami m. W fizyce wprowadzamy zwykle liczbę $s = m/2$, którą interpretuje się jako *spin* – lub moment pędu, zależnie od kontekstu – układu, którego stany są opisywane w przestrzeni wektorowej (Hilberta), niosącej reprezentację grupy obrotów lub Lorentza.

Jeśli m jest parzyste, więc s całkowite, to wartości własne „operatora rzutu spinu” na pewien kierunek, tzn. endomorfizmu $\frac{1}{2}\sigma_m(H)$, należą do zbioru

$$\{-s, -s + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, s - 1, s\}.$$

Natomiast jeśli m jest nieparzyste, to te wartości własne są połówkowe, więc różne od 0 i tworzą zbiór

$$\{-s, -s + 1, \dots, -\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}, \dots, s - 1, s\}.$$

Zakończymy twierdzeniem, które wyraża prawo składania momentów pędu w mechanice kwantowej.

Stwierdzenie 8.9. *Jeśli $k, l \in \mathbb{N}$, to dla nieprzywiedlnych reprezentacji $\sigma_k : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V_k$ i $\sigma_l : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V_l$ zachodzi*

$$\sigma_k \otimes \sigma_l \sim \sigma_{k+l} \oplus \sigma_{k+l-2} \oplus \cdots \oplus \sigma_{|k-l|}.$$

Dowód. (Szkic) Jeśli $Z \in \mathfrak{g}$, a wektory v i w są wektorami własnymi endomorfizmów $\sigma_k(Z)$ i $\sigma_l(Z)$, odpowiednio, to $v \otimes w$ jest wektorem własnym $(\sigma_k \otimes \sigma_l)(Z)$ o wartości własnej będącej sumą wartości własnych czynników. Niech $(e^k_n)_{n=0,\ldots,k}$ i $(e^l_p)_{p=0,\ldots,l}$ będą bazami, odpowiednio, w V_k i V_l, opisanymi przez (8.16). Wektor $e^k_0 \otimes e^l_0$ jest wektorem pierwotnym reprezentacji $\sigma_k \otimes \sigma_l$ o wadze $k + l$. Generuje on więc podprzestrzeń $V_{k+l} \subset V_k \otimes V_l$, która jest nośnikiem nieprzywiedlnej reprezentacji (równoważnej) σ_{k+l}. Wektory $e^k_1 \otimes e^l_0$ i $e^k_0 \otimes e^l_1$ rozpinają dwuwymiarową podprzestrzeń; wektor $l e^k_1 \otimes e^l_0 - k e^k_0 \otimes e^l_1$ jest pierwotny o wadze $k+l-2$. Generuje on podprzestrzeń $V_{k+l-2} \subset V_k \otimes V_l$. Kontynuując ten proces można zakończyć dowód. $\square$

Zadania

ZADANIE 8.1. Pokazać, że forma Killinga (8.3) jest niezmiennicza ze względu na reprezentację dołączoną i spełnia warunek (8.1).

ZADANIE 8.2. Znaleźć formy Killinga: algebry Liego grupy Heisenberga (zob. zadanie 2.27), algebr $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ i algebry Liego grupy Lorentza.

ZADANIE 8.3. Pokazać. że reprezentacja ρ zdefiniowana w Przykładzie 8.3 jest nieprzywiedlna.

ZADANIE 8.4. Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową o wymiarze n. Pokazać, że forma Killinga $k_{\mathfrak{sl}(V)}$ zdefiniowana w przykładzie 8.4 ma sygnaturę $\left(\frac{1}{2}n(n+1) - 1, \frac{1}{2}n(n-1)\right)$.

ZADANIE 8.5. Pokazać, że forma Killinga algebry Liego $\mathfrak{so}(n)$ jest ujemnie określona.

ZADANIE 8.6. Podać przykłady torusów maksymalnych w następujących grupach: $\mathsf{SU}(n+1)$, $\mathsf{SO}(2n)$, $\mathsf{SO}(2n+1)$, $\mathsf{Sp}(n)$.

ZADANIE 8.7. Opisać izomorfizmy grup wymienione w *Komentarzu* do LISTY CARTANA.

IX

Zastosowania teorii grup w fizyce

Wczesne zastosowania grup w fizyce dotyczą znalezionych w końcu XIX wieku grup krystalograficznych [**17, 55**] oraz związku między symetriami zasady wariacyjnej i prawami zachowania (twierdzenia Emmy Noether [**50**]). Najprostsze takie związki występują w mechanice i były znane od dawna. Zaczniemy niniejszy rozdział od krótkiego przeglądu praw zachowania w ujęciu hamiltonowskim.

Najważniejsze zastosowania grup w fizyce dotyczą teorii kwantowych. Warto przytoczyć kilka zdań wielkiego Hermanna Weyla z jego dzieła [We1], będącego pierwszym wykładem zastosowań teorii grup w mechanice kwantowej:

> F. Klein considered the group concept as most characteristic of nineteenth century mathematics. Until the present, its most important application to natural sciences lay in the description of the symmetry of crystals, but it has recently been recognized that group theory is of fundamental importance for quantum physics; it here reveals the essential features which are not contingent on a special form of the dynamical laws nor on special assumptions concerning the forces involved. We may well expect that it is just this part of quantum physics which is most certain of a lasting place. . . The investigation of groups first becomes a connected and complete theory in *the theory of the representations of groups by linear transformations,* and it is exactly this mathematically most important part which is necessary for an adequate description of the quantum mechanical relations. *All quantum numbers, with the exception of the so-called principal quantum number, are indices characterizing representations of groups.*

W niniejszym rozdziale przedstawione są podstawowe definicje dotyczące reprezentacji grup w przestrzeni Hilberta mechaniki kwantowej oraz twierdzenie Wignera-Eckarta. W stosowanym tu podejściu nacisk kładzie się na aspekty grupowo-algebraiczne, a mało uwagi poświęca zagadnieniom topologicznym i funkcjonalno-analitycznym, co prowadzi do braku ścisłości w niektórych sformułowaniach. Dotyczy to w szczególności pojęć operatorów unitarnych i samosprzężonych, tutaj rozumianych „nieformalnie”, zgodnie ze zwyczajami przyjętymi w wykładach mechaniki kwantowej dla fizyków.

1. Geometria mechaniki klasycznej

1.1. Elementy geometrii symplektycznej. Niech N będzie gładką rozmaitością o wymiarze $2n$. Dwuformę ω na N nazywa się *formą symplektyczną* jeśli jest domknięta i nieosobliwa, tzn. jeśli

$$\mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{i} \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ czynników}} \neq 0. \tag{9.1}$$

Parę (N, ω) nazywa się *rozmaitością* (przestrzenią) *symplektyczną*. Przestrzeń symplektyczna jest orientowalna i posiada formę objętości η.

1.1.1. Jeśli przestrzeń symplektyczna (N, ω) jest zwarta, to $\int_M \eta$ jest jej objętością; zatem forma ω zwartej przestrzeni symplektycznej nie jest dokładna.

Przykład 9.1. Dwuwymiarowa sfera $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{R}^3$ jest zwartą przestrzenią symplektyczną. Niech $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami takimi, że $\|u\| = 1$, a $v, w \perp u$, tzn. $v, w \in T_u\mathbb{S}_2$. Formę symplektyczną na $\mathbb{S}_2$ określa się przy pomocy iloczynu „mieszanego” wektorów, $\omega_u(v, w) = u \cdot (v \times w)$. Żadna sfera o wymiarze > 2 nie jest przestrzenią symplektyczną, bo każda domknięta 2-forma na takiej sferze jest dokładna.

Każda rozmaitość Kählera ma strukturę przestrzeni symplektycznej, zob. np. Ch. IX w [**37**].

1.1.2. Automorfizmem przestrzeni symplektycznej (N, ω) nazywa się dyfeomorfizm $\varphi : N \to N$ zachowujący ω, tzn. taki, że $\varphi^*\omega = \omega$. Pole wektorowe $X \in \mathcal{V}(N)$, które generuje jednoparametrową grupę – *strumień* – (φ_t) automorfizmów symplektycznych nazywa się *polem symplektycznym*. Warunek $\varphi_t^*\omega = \omega$ pociąga $\mathcal{L}(X)\omega = 0$, co wobec $\mathrm{d}\omega = 0$ daje $\mathrm{d}i(X)\omega = 0$. *Lokalnie*, występującą tu domkniętą formę można przedstawić w postaci różniczki funkcji.

1.1.3. Jeśli F jest gładką funkcją na N, to wobec tego, że dwuforma ω jest nieosobliwa, istnieje pole $X_F \in \mathcal{V}(N)$ takie, że

$$i(X_F)\omega = -\,\mathrm{d}F. \tag{9.2}$$

Pole X_F generuje strumień automorfizmów przestrzeni symplektycznej. Wynika stąd, że jest „dużo” automorfizmów przestrzeni symplektycznej; tworzą one grupę nieskończonego wymiaru. Fizycy mówią, że F jest *generatorem* tych przekształceń. Pole X_F nazywa się *polem hamiltonowskim generowanym przez F*. Każde pole hamiltonowskie jest symplektyczne.

Stwierdzenie 9.1. *Komutator $[X, Y]$ dwóch pól symplektycznych jest polem hamiltonowskim generowanym przez funkcję $\omega(X, Y)$.*

Dowód. Zakładając $\mathcal{L}(X)\omega = 0$ i $\mathcal{L}(Y)\omega = 0$, obliczamy obie strony tożsamości (6.21) na formie ω. Korzystając z (6.18) oraz $i(X)i(Y)\omega = -\omega(X, Y)$, otrzymujemy

$$i([X, Y])\omega = -\,\mathrm{d}(\omega(X, Y)).$$

□

1.1.4. *Nawiasem Poissona* funkcji F, G na przestrzeni symplektycznej (N, ω) nazywa się funkcję

$$\{F, G\} = i(X_F)\,\mathrm{d}G \quad \text{czyli} \quad X_F(G). \tag{9.3}$$

Na podstawie (9.2) i (6.20) otrzymuje się

$$\{F, G\} = i(X_F)\,\mathrm{d}G = -i(X_F) \circ i(X_G)\omega = i(X_G) \circ i(X_F)\omega = -\{G, F\}. \tag{9.4}$$

LEMAT 9.2. *Jeśli* (N, ω) *jest przestrzenią symplektyczną i* $F, G \in \mathcal{C}(N)$, *to*

$$[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}. \tag{9.5}$$

Dowód. Ze Stw. 9.1 wynika, że

$$i([X_F, X_G])\omega = -\,\mathrm{d}(\omega(X_F, X_G)).$$

Korzystając z (9.2), (9.3) i tożsamości $\omega(X_F, X_G) = i(X_G)i(X_F)\omega$, otrzymujemy

$$-\,\mathrm{d}(\omega(X_F, X_G)) = \mathrm{d}(i(X_G)\,\mathrm{d}F) = \mathrm{d}\{G, F\} = i(X_{\{F,G\}})\omega$$

co wobec nieosobliwości formy ω kończy dowód lematu. □

LEMAT 9.3. *Nawias Poissona spełnia tożsamość Jacobiego: dla wszystkich* $F, G, H \in \mathcal{C}(N)$ *jest*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Dowód. Korzystając z (9.3), (9.4) i (9.5) otrzymuje się

$$\begin{aligned}\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} &= \\ \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} - \{\{F, G\}, H\} &= \\ X_F(X_G(H)) - X_G(X_F(H)) - X_{\{F,G\}}(H) &= 0. \quad \square\end{aligned}$$

STWIERDZENIE 9.4. *Zbiór* $\mathcal{C}(N)$ *wszystkich funkcji gładkich na przestrzeni symplektycznej* (N, ω) *jest algebrą Liego ze względu na nawias Poissona. Odwzorowanie*

$$\mathcal{C}(N) \to \mathcal{V}(N), \quad F \mapsto X_F$$

jest homomorfizmem algebr Liego, którego jądrem są funkcje stałe.

Dowód. Stwierdzenie jest prostym wnioskiem z (9.4) i ostatnich dwóch lematów. □

1.1.5. *Wiązka kostyczna.* Niech M będzie rozmaitością n-wymiarową. W wiązce kostycznej $\pi : T^*M \to M$ jest 1-*forma Liouville'a* θ taka, że jeśli

$$\alpha \in T^*M \quad \text{i} \quad v \in T_\alpha(T^*M) \quad \text{to} \quad \langle v, \theta\rangle = \langle T_\alpha\pi(v), \alpha\rangle. \tag{9.6}$$

Para $(T^*M, \mathrm{d}\theta)$ jest rozmaitością symplektyczną. Aby to uzasadnić, wystarczy pokazać, że forma $\mathrm{d}\theta$ jest nieosobliwa. Układ współrzędnych lokalnych $(q^1, \ldots, q^n)$ w $U \subset M$ indukuje współrzędne lokalne $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$

w $\pi^{-1}(U) \subset T^*M$ takie, że $\theta = p_\mu \,\mathrm{d}q^\mu$, więc $\omega = \mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}q^\mu$. Widać, że forma η jest proporcjonalna do

$$\mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}q^n \neq 0.$$

W kontekście mechaniki, rozmaitość M nazywa się *przestrzenią konfigurayjną*, a wiązkę T^*M – *przestrzenią fazową*.

Twierdzenie Darboux mówi, że *lokalnie* każda forma symplektyczna daje się przedstawić, przez wybór współrzędnych, w postaci $\mathrm{d}p_\mu \wedge \mathrm{d}q^\mu$, zob. [**1**], [**57**].

Definicje (9.2) i (9.3) dają teraz

$$X_F = \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial F}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu} \quad \text{i} \quad \{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial p_\mu}\frac{\partial G}{\partial q^\mu} - \frac{\partial F}{\partial q^\mu}\frac{\partial G}{\partial p_\mu}. \tag{9.7}$$

Dyfeomorfizm $h : M \to M$ podnosi się do automorfizmu $\hat{h}$ wiązki kostycznej,

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\hat{h}} & T^*M \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{h} & M \end{array}$$

zdefiniowanego tak, że dla każdych $\alpha \in T^*M$ i $v \in T_{\pi(\alpha)}M$ zachodzi

$$\langle v, \alpha\rangle = \langle T_{\pi(\alpha)}h(v), \hat{h}(\alpha)\rangle. \tag{9.8}$$

oraz

$$\pi \circ \hat{h} = h \circ \pi. \tag{9.9}$$

Obliczając wartość cofnięcia $\hat{h}^*\theta$ formy θ na wektorze $u \in T_\alpha T^*M$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle u, (\hat{h}^*\theta)_\alpha\rangle = \langle T_\alpha \hat{h}(u), \theta_{\hat{h}(\alpha)}\rangle &\overset{(9.6)}{=} \langle T_{\hat{h}(\alpha)}\pi \circ T_\alpha \hat{h}(u), \hat{h}(\alpha)\rangle \\ &\overset{(9.9)}{=} \langle T_{\hat{h}(\alpha)}h \circ T_\alpha\pi(u), \hat{h}(\alpha)\rangle \overset{(9.8)}{=} \langle T_\alpha\pi(u), \alpha\rangle \overset{(9.6)}{=} \langle u, \theta_\alpha\rangle, \end{aligned}$$

a stąd

$$\hat{h}^*\theta = \theta. \tag{9.10}$$

Wynika stąd, że każdy dyfeomorfizm h rozmaitości M podnosi się do automorfizmu symplektycznego $\hat{h}$ przestrzeni $(T^*M, d\theta)$.

Jeśli (φ_t) jest jednoparametrową grupą przekształceń lokalnych M, generowaną przez pole $X = X^\mu \partial/\partial q^\mu \in \mathcal{V}(M)$ (zob. str. 93), to grupa $(\hat{\varphi}_t)$ jest generowana przez pole $\hat{X} \in \mathcal{V}(T^*M)$, które, na mocy (9.10), spełnia $\mathcal{L}(\hat{X})\theta = 0$, co daje

$$\hat{X} = X^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{\partial X^\mu}{\partial q^\nu} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu}, \qquad \widehat{[X,Y]} = [\hat{X}, \hat{Y}], \tag{9.11}$$

a generatorem pola $\hat{X}$ – w znaczeniu ust. 1.1.3 – jest funkcja

$$X^\mu(q)p_\mu \in \mathcal{C}(T^*M).$$

1.2. Równania Hamiltona, prawa zachowania i odwzorowanie momentu.

1.2.1. Pole wektorowe X_H na przestrzeni symplektycznej N generuje strumień (φ_t), który opisuje ruch układu o hamiltonianie $H \in \mathcal{C}(N)$. (Mówimy tutaj o hamiltonianie niezależnym od czasu; wprowadzając rozmaitość $N' = N \times \mathbb{R}$ definiuje się *hamiltonian zależny od czasu* $t \in \mathbb{R}$ jako funkcję $H : N' \to \mathbb{R}$.) Dla każdej funkcji $F \in \mathcal{C}(N)$ mamy (zob. (6.3)):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F \circ \varphi_t = X_H(F \circ \varphi_t).$$

Korzystając z (9.3), otrzymujemy stąd

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F \circ \varphi_t = \{H, F\} \circ \varphi_t \tag{9.12}$$

oraz

Stwierdzenie 9.5. *Równość* $\{H, F\} = 0$ *jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja* F *była* stałą ruchu *opisywanego przez hamiltonian* H*. Stałe ruchu tworzą algebrę Liego ze względu na nawias Poissona. Hamiltonian jest stałą ruchu.*

Jeśli $N = T^*M$, to współrzędne kanoniczne zdefiniowane w ustępie 1.1.5, są funkcjami na N, więc na podstawie (9.7) i (9.12), równania ruchu mają postać klasycznych *równań Hamiltona*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}. \tag{9.13}$$

Jeśli $(p(t), q(t))$ jest rozwiązaniem tych równań, a (φ_t) jest strumieniem generowanym przez X_H, to

$$\varphi_t(p(t'), q(t')) = (p(t + t'), q(t + t')), \quad t, t' \in \mathbb{R},$$

co fizycy wyrażają mówiąc, że *hamiltonian generuje przesunięcia w czasie.*

1.2.2. Niech teraz G będzie grupą Liego działającą prawostronnie (zob. Rozdz. VII §10) i *symplektycznie* w przestrzeni $(N = T^*M, \omega = \mathrm{d}\theta)$ i tak, że nawet forma Liouville'a jest zachowana,

$$\mathsf{R}(a)^*\theta = \theta$$

dla każdego $a \in G$. Używając oznaczenia wprowadzonego w (7.20), mamy

Stwierdzenie 9.6. *Odwzorowanie liniowe*

$$\varPhi : \mathfrak{g} \to \mathcal{C}(N), \quad A \mapsto \varPhi(A) \stackrel{\text{def}}{=} i(\widetilde{A})\theta \tag{9.14}$$

jest homomorfizmem algebr Liego.

Dowód. Skoro forma Liouville'a jest niezmiennicza względem działania grupy, mamy $\mathcal{L}(\widetilde{A})\theta = 0$, stąd $\mathrm{d}\varPhi(A) + i(\widetilde{A})\omega = 0$ czyli

$$\widetilde{A} = X_{\varPhi(A)}. \tag{9.15}$$

dla każdego $A \in \mathfrak{g}$. Na podstawie definicji (9.14) oraz tożsamości (6.21), otrzymujemy

$$\varPhi([A, B]) = i(\widetilde{[A, B]})\theta = \mathcal{L}(\widetilde{A})\varPhi(B) = i(\widetilde{A})\,\mathrm{d}\varPhi(B),$$

a uwzględniając (9.3) i (9.15), dostajemy

$$\Phi([A, B]) = \{\Phi(A), \Phi(B)\}. \qquad \square$$

STWIERDZENIE 9.7. *Jeśli hamiltonian H jest niezmienniczy względem działania grupy G, to dla każdego $A \in \mathfrak{g}$ funkcja $\Phi(A)$ jest stałą ruchu.*

Dowód. Istotnie, niezmienniczość H implikuje $\mathcal{L}(\widetilde{A})H = 0$ dla każdego $A \in \mathfrak{g}$, więc

$$\{\Phi(A), H\} \overset{(9.3)}{=} i(X_{\Phi(A)})\,\mathrm{d}H \overset{(9.15)}{=} i(\widetilde{A})\,\mathrm{d}H = 0. \qquad \square$$

1.2.3. Stałe ruchu $\Phi(A)$ wynikające z niezmienniczości hamiltonianu względem działania grupy G można połączyć ze sobą w jeden obiekt, co uogólnia łączenie składowych J_x, J_y, J_z momentu pędu w wektor $\mathbf{J}$. Z tego względu wielu autorów nazywa powstające tu pojęcie *odwzorowaniem momentu* (moment map lub momentum map) [**27, 43, 45**].

Odwzorowanie momentu określone przez działanie symplektyczne grupy G w $N = T^*M$ dane jest jako

$$\Psi : N \to \mathfrak{g}^* \quad \text{takie, że} \quad \langle A, \Psi(x)\rangle = \Phi(A)(x), \tag{9.16}$$

gdzie Φ jest jak w (9.14) i $x \in N$. Stąd

$$\begin{aligned}\langle A, \mathsf{R}(a)^*\Psi\rangle &\overset{(9.16)}{=} \mathsf{R}(a)^*\Phi(A) \overset{(9.14)}{=} \\ &\mathsf{R}(a)^*(i(\widetilde{A})\theta) \overset{(7.21)}{=} i(\widetilde{\mathrm{ad}(a)A})\theta \overset{(9.14)}{=} \\ &\qquad \Phi(\mathrm{ad}(a)A) \overset{(9.16)}{=} \langle \mathrm{ad}(a)A, \Psi\rangle = \langle A, \mathrm{ad}(a)^*\Psi\rangle\end{aligned}$$

czyli

$$\Psi \circ \mathsf{R}(a) = \mathrm{ad}(a)^*\Psi. \tag{9.17}$$

1.3. Ważny przykład: zagadnienie Keplera i atom wodoru. Stosując tradycyjne oznaczenia mechaniki,

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \;\; r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \;\; \mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z), \;\; p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2,$$

hamiltonian ciała (albo: naładowanej cząstki) o masie μ, poruszającego się w kulisto symetrycznym polu grawitacyjnym (albo: elektrycznym), można sprowadzic do postaci

$$H = \frac{1}{2\mu}p^2 - \frac{\alpha}{r}. \tag{9.18}$$

Dla ciała poruszającego się w polu grawitacyjnym masy μ_0 jest $\alpha = \kappa\mu_0\mu$, gdzie κ oznacza stałą grawitacji, a dla elektronu w polu jądra o ładunku Ze jest $\alpha = Ze^2$.

Składowe wektora momentu pędu $\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ – będące stałymi ruchu – mają postać

$$j_x = yp_z - zp_y, \quad \text{cykl.}, \tag{9.19}$$

gdzie „cykl” oznacza – tutaj i w dalszym ciągu – równania, otrzymane przez „cykliczne” permutacje $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ i $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$. Forma symplektyczna na $N = T^*\mathbb{R}^3$ ma postać

$$\omega = \mathrm{d}p_x \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}p_y \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}p_z \wedge \mathrm{d}z.$$

Na podstawie definicji (9.2), stałym ruchu (9.19) odpowiadają pola wektorowe

$$J_x = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} + p_y\frac{\partial}{\partial p_z} - p_z\frac{\partial}{\partial p_y}, \quad \text{cykl.}. \tag{9.20}$$

Zgodnie z (9.11), są one podniesieniami do N pól $y\partial/\partial z - z\partial/\partial y$, cykl.. Pola (9.20) spełniają

$$[J_x, J_y] = J_z, \quad \text{cykl.}$$

więc rozpinają algebrę Liego $\mathfrak{so}(3)$.

Składowe pola

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\mu}\mathbf{j} \times \mathbf{p} + \alpha\frac{\mathbf{r}}{r}$$

są także stałymi ruchu, o czym można się przekonać obliczając nawiasy Poissona składowych $\mathbf{l}$ z hamiltonianem (9.18). Pola

2. Opis teorii kwantowych przy pomocy przestrzeni Hilberta

3. Nierelatywistyczna mechanika kwantowa jednej cząstki

Do opisu jednej cząstki w nierelatywistycznej mechanice kwantowej można używać przestrzeni Hilberta funkcji określonych na $\mathbb{R}^3$, o wartościach w $\mathbb{C}^N$, całkowalnych z kwadratem,

$$\mathcal{H} = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^N \mid (\varphi \mid \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi^\dagger(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z < \infty\},$$

gdzie $\mathbf{r} = (x, y, z)$ oraz $\varphi^\dagger(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \overline{\varphi_\alpha(\mathbf{r})}\varphi_\alpha(\mathbf{r})$. Jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ to ich iloczyn skalarny wynosi

$$(\varphi_1 \mid \varphi_2) = \int \varphi_1^\dagger(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Jeśli U jest operatorem liniowym w $\mathcal{H}$, to operator $U^\dagger$ taki, że $(U\varphi_1 \mid \varphi_2) = (\varphi_1 \mid U^\dagger\varphi_2)$ dla każdych $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ – o ile istnieje – nazywa się operatorem *sprzężonym* względem U. Operator U jest *samosprzężony* jeśli $U^\dagger = U$ i *unitarny* jeśli $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathrm{id}$.

Niech $\rho : G \to \mathsf{Aut}\,\mathcal{H}$ będzie reprezentacją unitarną grupy Liego G w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$, $A \in G'$ i $s \in \mathbb{R}$; różniczkując obie strony równości

$$(\rho(\exp sA)\varphi_1 \mid \rho(\exp sA)\varphi_2) = (\varphi_1 \mid \varphi_2)$$

względem s w punkcie $s = 0$ otrzymuje się, że operator $\mathrm{i}\rho'(A)$ jest samosprzężony.

W szczególności, niech G będzie grupą Liego działającą w $\mathbb{R}^3$,

$$G \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (a, \mathbf{r}) \mapsto a\mathbf{r},$$

i w $\mathbb{C}^N$,

$$G \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N, \quad (a, u) \mapsto au.$$

Działania te określają reprezentację ρ grupy G w $\mathcal{H}$,

$$(\rho(a)\varphi)(\mathbf{r}) = a\varphi(a^{-1}\mathbf{r}).$$

Przykład 9.2. Jeśli $N = 1$ i G jest grupą ruchów euklidesowych, $G = \mathsf{SO}_3 \times \mathbb{R}^3$, działającą w naturalny sposób w $\mathbb{R}^3$ i trywialnie w $\mathbb{C}$, to mamy reprezentację G w $\mathcal{H}$ daną przez $(\rho(a,b)\varphi)(\mathbf{r}) = \varphi(a^{-1}(\mathbf{r}-b))$. Reprezentacja ta jest unitarna. Rozpatrując jednoparametrową grupę przesunięć $s \mapsto (I, se_x)$ wzdłuż osi x otrzymuje się $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(x-s, y, z)\ |_{s=0} = -\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y, z)$, więc operator $p_x = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}$ jest samosprzężony. Podobnie, rozpatrując obroty wokół osi z,

$$s \mapsto \left(\begin{pmatrix} \cos s & \sin s & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right) \in \mathsf{SO}_3 \times \mathbb{R}^3,$$

otrzymuje się

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(x\cos s - y \sin s, x \sin s + y\cos s, z)\ |_{s=0} = -y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

więc $l_z = xp_y - yp_x$ jest operatorem samosprzężonym, itd.

Przykład 9.3. Niech $G = \mathsf{SU}(2)$ działa w naturalny sposób w przestrzeni spinorów Pauliego $\mathbb{C}^2$ i przy pomocy reprezentacji dołączonej w $\mathbb{R}^3$: jeśli $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ i $a \in \mathsf{SU}(2)$, to działanie dane jest przez

$$(\rho(a)\varphi)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}) = a\varphi(a^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{r}a).$$

Element $a(s) = \exp\frac{1}{2}\mathrm{i}s\sigma_z \in \mathsf{SU}_2$ indukuje obrót o kąt s wokół osi z; stąd

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}a(s)\ |_{s=0} = \mathrm{i}(l_z + \tfrac{1}{2}\sigma_z).$$

4. Zwyrodnienie i reguły wyboru

4.1. Zwyrodnienie widma energii. Niech H będzie niezależnym od czasu, samosprzężonym, operatorem Hamiltona, działającym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, w której jest dana reprezentacja ρ grupy G taka, że operator $\mathcal{H}$ jest niezmienniczy względem działanie grupy,

$$\rho(a)H = H\rho(a) \quad \text{dla każdego } a \in G.$$

Podprzestrzeń

$$\mathcal{H}_E = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid H\varphi = E\varphi\}$$

jest niezmiennicza, $\varphi(a)\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_E$ dla każdego $a \in G$. Jeśli $\dim \mathcal{H}_E > 0$, to mówi się, że symetria hamiltonianu ze względu na G powoduje *degenerację* (poziomów energii). Jeśli, ponadto, przestrzeń $\mathcal{H}_E$ jest przywiedlna ze względu na reprezentację ρ, to mówi się, że występuje *degeneracja przypadkowa.*

Przykład 9.4. *Atom wodoru.* Stosując jednostki takie, że $c = 1$, $\hbar = 1$ i wybierając masę elektronu jako jednostkę masy, można zapisać hamiltonian atomu wodoru w postaci

$$H = \tfrac{1}{2}\mathbf{p}^2 - e^2/r$$

gdzie $\mathbf{p} = -\mathrm{i}\nabla$ jest wektorem (operatorem) pędu, e jest ładunkiem elektronu, a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hamiltonian ten jest niezmienniczy względem działania grupy obrotów $SO(3)$, zatem komutuje ze składowymi wektora momentu pędu,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

W działaniu na gładkie, poza punktem $r = 0$, całkowalne z kwadratem funkcje na $\mathbb{R}^3$ hamiltonian ma wartości własne tworzące ciąg

$$E_n = -e^4/2n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Przestrzeń $\mathcal{H}_{E_n}$ ma wymiar n^2, więc tylko najniższy poziom energii E_1 jest niezdegenerowany. Występuje tu degeneracja przypadkowa, bo

$$\mathcal{H}_{E_n} = \textstyle\bigoplus_{l=0}^{n-1} \mathcal{H}_{n,l}, \quad \dim \mathcal{H}_{n,l} = 2l + 1,$$

gdzie

$$\mathcal{H}_{n,l} = \{\varphi \in \mathcal{H}_{E_n} \mid \mathbf{l}^2\varphi = l(l+1)\varphi\}$$

jest przestrzenią nieprzywiedlną ze względu na działanie grupy $\mathsf{SO}(3)$. Ta przypadkowa degeneracja jest konsekwencją symetrii względem większej grupy, o algebrze Liego rozpiętej na składowych $\mathbf{l}$ i składowych wektora

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2e^2}(\mathbf{l} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{l}) + \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{9.21}$$

Dodatkowe symetrie zagadnienia jednego ciała (zagadnienia Keplera, atomu wodoru) zostały dawno znalezione i wielokrotnie, ponownie, odkrywane. Prawdopodobnie po raz pierwszy jest o nich wzmianka w korespondencji między Johannem Bernoullim i jego uczniem, Jakobem Hermannem a dokładniejszy opis jest w dziele Laplace'a [**42**].

W kontekście mechaniki kwantowej symetrie te występują po raz pierwszy u Pauliego [**51**] i są stosowane, przez Hulthena[**30**], Focka [**18**] i Bargmanna [**5**], do znalezienia widma i funkcji własnych hamiltonianu atomu wodoru. Fizycy często nazywają (9.21) wektorem Rungego–Lenza [**24, 25**].

4.2. Symetrie i stałe ruchu. Jeśli reprezentacja $\rho : G \to \mathsf{GL}(\mathcal{H})$ jest unitarna, to dla każdego $A \in \mathfrak{g}$, operator $L = \mathrm{i}\rho'(A)$ jest samosprzężony, $L^\dagger = L$; jeśli hamiltonian H jest niezmienniczy względem działania grupy, to z równości $\rho(\exp tA)H = H\rho(\exp tA)$ przez różniczkowanie względem t otrzymuje się $[L, H] = 0$.

Stwierdzenie 9.8. *Jeśli $L^\dagger = L$, $[L, H] = 0$, a $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ jest rozwiązaniem równania Schrödingera*

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = H\psi,$$

to wartości oczekiwane $(\psi|L\psi)$ operatora L są rzeczywistymi stałymi ruchu.

Dowód. Istotnie, $L^\dagger = L$ daje

$$\overline{(\psi|L\psi)} = (L\psi|\psi) = (\psi|L^\dagger\psi) = (\psi|L\psi),$$

a wykorzystując równanie Schrödingera oraz $H^\dagger = H$ otrzymuje się

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi|L\psi) = (-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}|L\psi) + (\psi|L\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}) = (\psi|[L,H]\psi) = 0. \qquad \square$$

4.3. Reguły wyboru. Przypomnijmy, że jeśli φ i ψ są unormowanymi elementami przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to $|(\varphi|\psi)|^2$ jest prawdopodobieństwem „przejścia" ze stanu ψ do φ. Niech $\rho : G \to \mathsf{U}(\mathcal{H})$ będzie unitarną reprezentacją grupy zwartej G w $\mathcal{H}$. zob. Twierdzenie Petera–Weyla w Rozdz. VII §12

5. Operatory tensorowe

6. Twierdzenie Wignera-Eckarta

[BR]

Zadania

Zadanie 9.1. Rozpatrujemy przestrzeń symplektyczną (N, ω) taką, że $N = T^*M$, $M = \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ są współrzędnymi w $N \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, a forma Liouville'a jest $\theta = \mathbf{p} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Grupa $\mathsf{SO}(3)$ działa w N tak, że

$$\mathsf{R}(a)(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (a^{-1}\mathbf{p}, a^{-1}\mathbf{r}), \quad a \in \mathsf{SO}(3)$$

Składanie elementów algebry Liego $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ dane jest przez iloczyn wektorowy, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$.

IX

Półproste algebry Liego

Przygotowując ten rozdział, opierałem się głównie na [SA], [Wo], [Bb] Rozdz. 8 i [**29**].

1. Wstęp: pierwsza orientacja

1.1. Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}(2)$ ma bazę składającą się z macierzy H, X, Y; zob. §7 na str. 133. Macierze H, X i Y są wektorami własnymi endomorfizmu $\mathrm{ad}(H) \in \mathsf{End}\,\mathfrak{g}$, o wartościach własnych 0, 2 i -2, odpowiednio. Względem bazy (H, X, Y) endomorfizm $\mathrm{ad}(H)$ jest macierzą diagonalną,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zachodzi $[X, Y] = H$. Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$ ma dwie formy rzeczywiste,

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Y \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}\mathrm{i}H \oplus \mathbb{R}(X-Y) \oplus \mathbb{R}\mathrm{i}(X+Y).$$

1.2. Reprezentacja spinorowa algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Przestrzeń $V = \mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym ma parzystą algebrę Clifforda $\mathcal{C}\ell_0(3)$ izomorficzną algebrze macierzy $\mathbb{C}(2)$. Przestrzeń V można zanurzyć w $\mathbb{C}(2)$,

$$V \to \mathbb{C}(2), \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} z & x - \mathrm{i}y \\ x + \mathrm{i}y & -z \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Wektory $k = (1/2, \mathrm{i}/2, 0)$ oraz $l = (1/2, -\mathrm{i}/2, 0)$ są zerowe; wraz z $e_3 = (0,0,1)$ tworzą zerową bazę Witta przestrzeni $V = K \oplus L \oplus \mathbb{C}e_3$, gdzie $K = \mathbb{C}k$ i $L = \mathbb{C}l$. Odwzorowanie (9.1) można rozszerzyć do izomorfizmu przestrzeni wektorowych $\mathbb{C} \oplus V \to \mathbb{C}(2)$ żądając, aby obrazem 1 była macierz jednostkowa. Algebry zewnętrzne $\bigwedge K$ i $\bigwedge L$ są 2-wymiarowe,

$$\bigwedge K = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\}, \quad \bigwedge L = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{C}\}.$$

Algebrę $\mathcal{C}\ell_0(3)$ można utożsamić z

$$\bigwedge L . \bigwedge K = \{A.B \mid A \in \bigwedge L \subset \mathbb{C}(2), B \in \bigwedge K \subset \mathbb{C}(2)\},$$

gdzie kropka oznacza mnożenie macierzy. Przestrzeń spinorów

$$S \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{C}\ell_0(3)k = \bigwedge Lk = \{\begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \mid \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}\}$$

jest dwuwymiarowym, lewym, minimalnym ideałem algebry $\mathcal{C}\ell_0(3)$.

Niech $\phi \in S \subset \mathbb{C}(2)$ będzie spinorem i $X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}(2)$. Odwzorowanie $\sigma : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{End}\, S$

$$\sigma(X)\phi = X.\phi \quad \text{(iloczyn macierzy)}$$

definiuje (podstawową) reprezentację spinorową algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

1.3. Podalgebra Cartana algebry półprostej. Niech teraz $\mathfrak{g}$ będzie półprostą, n-wymiarową, zespoloną algebrą Liego.

Definicja. Podalgebrą Cartana algebry $\mathfrak{g}$ nazywa się taką jej przemienną podalgebrę $\mathfrak{h}$, która jest maksymalna w zbiorze podalgebr przemiennych i taka, że dla każdego $H \in \mathfrak{h}$ endomorfizm $\mathrm{ad}(H)$ jest diagonalizowalny, tzn. taki, że istnieje baza przestrzeni $\mathfrak{g}$, względem której macierz endomorfizmu $\mathrm{ad}(H)$ ma postać

$$\mathrm{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C},\ i = 1,\dots,n. \tag{9.2}$$

Wymiar ℓ przestrzeni $\mathfrak{h}$ nazywa się *rangą* algebry $\mathfrak{g}$.

1.4. Pierwiastki. *Pierwiastkiem* algebry $\mathfrak{g}$ (względem $\mathfrak{h}$) nazywa się taki element $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, że przestrzeń wektorowa

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X \quad \text{dla wszystkich } H \in \mathfrak{h}\}$$

ma dodatni wymiar. Niech R oznacza zbiór wszystkich pierwiastków algebry $\mathfrak{g}$; pokazuje się, że jest rozkład $\mathfrak{g}$ na sumę prostą przestrzeni wektorowych

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \textstyle\bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{9.3}$$

jeśli $\alpha \in R$, to $-\alpha \in R$, ale nie ma innych pierwiastków równoległych do α oraz

$$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1, \quad \dim \mathfrak{h}_\alpha = 1, \quad \text{gdzie} \quad \mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}.$$

Rozkład (9.3) bywa nazywany *rozkładem Cartana pierwszego rodzaju algebry* $\mathfrak{g}$.

Suma

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \tag{9.4}$$

jest podalgebrą $\mathfrak{g}$, izomorficzną algebrze $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, a odwzorowanie

$$\sigma : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathsf{End}\,\mathfrak{g},\ \ \sigma(X)Y = [X,Y],\ \ X \in \mathfrak{s}_\alpha,\ Y \in \mathfrak{g},$$

jest reprezentacją tej algebry. Ta obserwacja, w połączeniu z wynikami na temat reprezentacji algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, ułatwia badanie struktury i reprezentacji półprostych algebr Liego.

1.5. Forma Killinga. Skoro algebra $\mathfrak{g}$ jest półprosta, to posiada niezmienniczą i niezwyrodniałą formę $\mathcal{K}$ (proporcjonalną do formy) Killinga; pokazuje się, że forma $\mathcal{K}$ ograniczona do $\mathfrak{h}$ też jest nieosobliwa, więc określa izomorfizm $\mathcal{K} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ (zob. Umowa na str. 14).

Pokazuje się, że $\mathcal{K}^{-1}(\alpha)$ należy do 1-wymiarowej przestrzeni $\mathfrak{h}_\alpha$, więc można wybrać element $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ tak, aby

$$\alpha(H_\alpha) = 2. \tag{9.5}$$

Ograniczenie formy $\mathcal{K}$ do rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$\mathfrak{h}_r = \textstyle\sum_{\alpha \in R} \mathbb{R} H_\alpha$$

jest formą dodatnio określoną. W przestrzeni

$$\mathfrak{h}_r^* = \textstyle\sum_{\alpha \in R} \mathbb{R} \alpha$$

definiuje się iloczyn skalarny

$$(\alpha|\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathcal{K}^{-1}(\alpha), \beta \rangle. \tag{9.6}$$

Pisząc $|\alpha| = \sqrt{(\alpha|\alpha)}$ i oznaczając przez φ kąt między pierwiastkami α i β, mamy

$$(\alpha|\beta) = |\alpha||\beta| \cos\varphi. \tag{9.7}$$

Pokazuje się, że

$$n(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(H_\beta) = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\beta|\beta)}, \quad \alpha, \beta \in R, \tag{9.8}$$

jest liczbą całkowitą.

1.6. Baza i macierz Cartana. Podzbiór $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ zbioru R nazywa się *bazą Cartana*, jeśli S jest bazą rzeczywistej przestrzeni wektorowej $\mathfrak{h}_r^*$ taką, że każdy pierwiastek jest postaci $\beta = \sum_{i=1}^{\ell} m_i \alpha_i$ gdzie $m_i \in \mathbb{Z}$ i, dla danego β, wszystkie $m_i \geqslant 0$ (mówi się, że takie β jest *pierwiastkiem dodatnim*) albo $m_i \leqslant 0$ (β jest *pierwiastkiem ujemnym*). Zbiór wszystkich pierwiastków dodatnich (ujemnych) jest oznaczany jako R^+ (R^-). *Macierz Cartana* n o elementach

$$n_{ij} = n(\alpha_i, \alpha_j),$$

które są liczbami całkowitymi, w pełni charakteryzuje algebrę Liego $\mathfrak{g}$.

1.7. Diagram Dynkina. Biorąc pod uwagę (9.7) i (9.8) można napisać

$$n(\alpha, \beta) n(\beta, \alpha) = 4\frac{(\alpha|\beta)^2}{|\alpha|^2|\beta|^2} = 4\cos^2\varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{n(\alpha, \beta)}{n(\beta, \alpha)} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2}.$$

Dla $\alpha, \beta \in S$ liczba $n(\alpha, \beta)$ jest całkowita, więc, przy założeniu $\alpha \neq \beta$ i $|\alpha| \leqslant |\beta|$, możliwe są cztery przypadki:

$4\cos^2\varphi$	$\|\cos\varphi\|$	φ	$\|n(\alpha,\beta)\|$	$\|n(\beta,\alpha)\|$	$\|\beta\|^2/\|\alpha\|^2$
0	0	90°	0	0	
1	$1/2$	60° albo 120°	1	1	1
2	$\sqrt{2}/2$	45° albo 135°	1	2	2
3	$\sqrt{3}/2$	30° albo 150°	1	3	3

Informację o bazie S wynikającą z powyższej tablicy zapisuje się w postaci *diagramu Dynkina*, w następujący sposób: każdy element bazy S jest przedstawiany przez węzeł $\circ$ diagramu; węzły odpowiadające prostopadłym do siebie elementom nie są ze sobą bezpośrednio połączone; dwa węzły odpowiadające parze (α,β) elementów bazy, które tworzą ze sobą kąt φ są połączone równoległymi liniami w liczbie $4\cos^2\varphi$. Jeśli, ponadto, $|\alpha|<|\beta|$, to podwójne albo potrójne linie, łączące odpowiadające tym pierwiastkom węzły, zaopatruje się w znak $>$, wskazujący który z tych elementów jest dłuższy.

1.8. Przykład: $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$. Podalgebra Cartana $\mathfrak{h}$ tej algebry składa się ze wszystkich macierzy postaci
(9.9)
$$H=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_{\ell+1}\},\quad \text{gdzie}\quad \lambda_1,\dots,\lambda_{\ell+1}\in\mathbb{C}\ \text{ i }\ \lambda_1+\dots+\lambda_{\ell+1}=0.$$

Ranga tej algebry wynosi więc ℓ. Niech $(e_i)_{i=1,\dots,\ell+1}$ będzie kanoniczną bazą w przestrzeni $\mathbb{C}^{\ell+1}$. W przestrzeni wektorowej macierzy $\mathbb{C}(\ell+1)$ można wprowadzić bazę $(E_{ij})_{i,j=1,\dots,\ell+1}$ taką, że

$$E_{ij}e_k=\delta_{jk}e_i,\quad \text{stąd}\quad E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il},\quad i,j,k,l=1,\dots,\ell+1.$$

Obliczając

$$[H,E_{ij}]=(\lambda_i-\lambda_j)E_{ij}$$

otrzymuje się, że pierwiastki są postaci $\alpha_{ij}\in\mathfrak{h}^*$, gdzie

$$\alpha_{ij}(H)=\lambda_i-\lambda_j,\ \ i\neq j,\quad \text{stąd}\quad \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}=\mathbb{C}E_{ij}.$$

Bazą zbioru pierwiastków jest rodzina $(\alpha_i)_{i=1,\dots,\ell}$, gdzie $\alpha_i=\alpha_{i\,i+1}$. Istotnie,
jeśli $i<j$, to $\alpha_{ij}=\alpha_i+\alpha_{i+1}+\dots+\alpha_{j-1}$,
jeśli $i>j$, to $\alpha_{ij}=-\alpha_j-\alpha_{j+1}-\dots-\alpha_{i-1}$.

Jako formę niezmienniczą na algebrze $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{C})$ można wziąć formę $\mathcal{K}$ taką, że $\mathcal{K}(X,Y)=\operatorname{tr}(XY)$, więc dla H postaci (9.2) jest

$$\mathcal{K}(H,H)=\lambda_1^2+\dots+\lambda_{\ell+1}^2.$$

Rzeczywista algebra $\mathfrak{h}_r$ składa się ze wszystkich rzeczywistych macierzy diagonalnych o znikającym śladzie, więc ograniczenie formy $\mathcal{K}$ do $\mathfrak{h}_r$ jest dodatnio określone.

Izomorfizm $\mathcal{K}:\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^*$ przeprowadza $E_{ii}-E_{jj}$ w α_{ij}, stąd

$$(\alpha_{ij}|\alpha_{kl})=\delta_{ik}-\delta_{il}-\delta_{kj}+\delta_{lj},$$
$$(\alpha_i|\alpha_j)=\delta_{ij}-\delta_{i\,j+1}-\delta_{i+1\,j}+\delta_{i+1\,j+1}$$

zatem

$$(\alpha_i|\alpha_{i+k}) = \begin{cases} 2 \quad \text{dla} \quad k = 0 \\ -1 \quad \text{dla} \quad |k| = 1 \\ 0 \quad \text{dla} \quad |k| > 1 \end{cases}$$

Dla $\alpha = \alpha_i$, podalgebrę (9.4) można teraz opisać tak:

$$\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}X_i, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C}Y_i, \quad [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = \mathbb{C}H_i,$$

gdzie

$$X_i = E_{i\,i+1}, \quad Y_i = E_{i+1\,i}, \quad H_i = E_{i\,i} - E_{i+1\,i+1}. \tag{9.10}$$

Element (9.9) ma rozkład

$$H = \sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i) H_i. \tag{9.11}$$

1.9. Algebry półproste o randze 1 i 2. Algebra $\mathsf{A}_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ jest jedyną prostą algebra Liego o randze 1. Ma dwa pierwiastki, α i $-\alpha$ oraz „diagram Dynkina” w postaci węzła $\circ$

Są cztery algebry o randze 2; mają bazę $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$:

(i) $\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1$ o *niespójnym* diagramie Dynkina $\circ \quad \circ$, co charakteryzuje algebry, które *nie są proste*.
(ii) Algebra A_2 wymiaru 8 ma bazę składającą się z wektorów tworzących kąt 120°. Trzeci pierwiastek dodatni to $\alpha_1 + \alpha_2$. Diagram: $\circ\!-\!\!-\!\circ$
(iii) Algebra $\mathsf{B}_2 = \mathfrak{so}(5, \mathbb{C})$ o wymiarze 10 ma bazę składającą się z dwóch wektorów tworzących kąt 135°. Pozostałe 2 pierwiastki dodatnie to $\alpha_1 + \alpha_2$ i $2\alpha_1 + \alpha_2$. Diagram: $\circ\!\Leftarrow\!\circ$
(iv) Algebra wyjątkowa G_2 o wymiarze 14 ma bazę składającą się z dwóch wektorów tworzących kąt 150°. Pozostałe 4 pierwiastki dodatnie to $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$ i $3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Diagram: $\circ\!\Rrightarrow\!\circ$

2. Struktura półprostych algebr Liego

2.1. Podalgebry Cartana i pierwiastki.

Twierdzenie 3. *Każda skończenie wymiarowa zespolona półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ posiada podalgebrę Cartana. Grupa automorfizmów algebry $\mathfrak{g}$ działa przechodnio na zbiorze wszystkich podalgebr Cartana algebry $\mathfrak{g}$.*

Niezbyt łatwy dowód tego ważnego twierdzenia można znaleźć np. w [SA].

Niech $\mathfrak{h}$ będzie podalgebrą Cartana półprostej, zespolonej, skończenie wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Dla $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ definiuje się

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(H)X = \alpha(X)H \text{ dla wszystkich } H \in \mathfrak{h}\},$$

więc $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Zbiór pierwiastków

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0, \ \dim \mathfrak{g}_\alpha > 0\}$$

nie jest pusty, bo $\mathrm{ad}(H), H \in \mathfrak{h}$, jest diagonalizowalne. Forma Killinga $\mathcal{K}$ na $\mathfrak{g}$ określa iloczyn skalarny, który jest niezmienniczy,

$$\mathcal{K}([Z,X],Y) + \mathcal{K}(X,[Z,Y]) = 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad X,Y,Z \in \mathfrak{g}.$$

Lemat 9.1. *Jeśli $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ i $\alpha + \beta \neq 0$, to podprzestrzenie $\mathfrak{g}_\alpha$ i $\mathfrak{g}_\beta$ są prostopadłe do siebie względem niezmienniczego iloczynu skalarnego.*

Dowód. Niech $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, $H \in \mathfrak{h}$, to niezmienniczość iloczynu daje

$$\mathcal{K}([H,X],Y) + \mathcal{K}(X,[H,Y]) = 0,$$

czyli

$$(\alpha(H) + \beta(H))\mathcal{K}(X,Y) = 0.$$

Skoro $\alpha + \beta \neq 0$, to istnieje $H \in \mathfrak{h}$ takie, że $\alpha(H) + \beta(H) \neq 0$, więc $\mathcal{K}(X,Y) = 0$. □

Wnioski. (i) Podprzestrzeń $\mathfrak{g}_\alpha$ jest całkowicie zerowa, bo $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\alpha$.

(ii) Jeśli $\alpha \in R$, to $-\alpha \in R$: gdyby tak nie było, to byłoby $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}$, co oznaczałoby, że forma $\mathcal{K}$ jest osobliwa.

(iii) Rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_\alpha(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha})$ jest rozkładem na podprzestrzenie wzajemnie ortogonalne, więc forma $\mathcal{K}$ jest nieosobliwa w ograniczeniu do $\mathfrak{h}$.

Lemat 9.2. *Jeśli α i $\beta \in \mathfrak{h}^*$, to $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$; w szczególności*

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}.$$

Dowód. Jeśli $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ i $H \in \mathfrak{h}$, to, na mocy tożsamości Jacobiego,

$$[H,[X,Y]] = [[H,X],Y] + [X,[H,Y]] = (\alpha(H) + \beta(H))[X,Y] \qquad \square$$

Lemat 9.3. *Niech $\alpha \in R$ i $Z_\alpha = \mathcal{K}^{-1}(\alpha) \in \mathfrak{h}$. Jeśli $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, to*

$$[X,Y] = \mathcal{K}(X,Y)Z_\alpha. \tag{9.12}$$

Dowód. Na podstawie Lematu 9.2 jest $[X,Y] \in \mathfrak{h}$. Z niezmienniczości iloczynu skalarnego, dla każdego H, zachodzi

$$\mathcal{K}([X,Y],H) + \mathcal{K}(Y,[X,H]) = 0$$

czyli

$$\mathcal{K}([X,Y] - \mathcal{K}(X,Y)Z_\alpha, H) = 0$$

a skoro iloczyn skalarny jest nieosobliwy w ograniczeniu do $\mathfrak{h}$, to ostatnia równość pociąga (9.12). □

Wniosek. Jeśli $\alpha \in R$, to $\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = 1$.

2.1.1. Mając $\alpha \in R$, można wybrać $H_\alpha || Z_\alpha \in \mathfrak{h}$ tak, aby $\alpha(H_\alpha) = 2$. Mając $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, można wybrać $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tak, aby

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha. \tag{9.13}$$

Lemat 9.4. *Algebra Liego $\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}X_\alpha \oplus \mathbb{C}Y_\alpha \oplus \mathbb{C}H_\alpha$ jest izomorficzna algebrze $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.*

Dowód. Istotnie, $[H_\alpha, X_\alpha] = \alpha(H_\alpha)X_\alpha = 2X_\alpha$ i $[H_\alpha, Y_\alpha] = -\alpha(H_\alpha)Y_\alpha = -2Y_\alpha$. □

2.1.2. Nawiązując do oznaczeń i wyników §7 w Rozdz. VIII, niech

$$\sigma : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathsf{End}\, V$$

będzie reprezentacją w skończenie wymiarowej przestrzeni V, a V_n niech będzie jej podprzestrzenią wektorów o wadze n,

$$V_n = \{v \in V \mid \sigma(H)v = nv\}.$$

STWIERDZENIE 9.5. *Definiując złożenie odwzorowań*

$$\theta = \mathrm{e}^{\sigma(X)}\mathrm{e}^{-\sigma(Y)}\mathrm{e}^{\sigma(X)} \in \mathsf{GL}(V), \tag{9.14}$$

mamy

$$\theta\sigma(X) = -\sigma(Y)\theta, \tag{9.15}$$

$$\theta\sigma(Y) = -\sigma(X)\theta, \tag{9.16}$$

$$\theta\sigma(H) = -\sigma(H)\theta, \tag{9.17}$$

a odwzorowania liniowe

$$\theta : V_n \to V_{-n} \tag{9.18}$$

$$\sigma(Y)^n : V_n \to V_{-n} \tag{9.19}$$

$$\sigma(X)^n : V_{-n} \to V_n \tag{9.20}$$

są izomorfizmami.

Dowód. Niech $f(t) = \mathrm{e}^{t\sigma(X)}\sigma(H)\mathrm{e}^{-t\sigma(X)}$, to $f(0) = \sigma(H)$ oraz

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t\sigma(X)}[\sigma(X),\sigma(H)]\mathrm{e}^{-t\sigma(X)} = -2\sigma(X)$$

więc $f(t) = \sigma(H) - 2t\sigma(X)$, stąd

$$\mathrm{e}^{\sigma(X)}\sigma(H)\mathrm{e}^{-\sigma(X)} = \sigma(H - 2X). \tag{9.21}$$

Zupełnie podobnie pokazuje się, że

$$\mathrm{e}^{\sigma(Y)}\sigma(H)\mathrm{e}^{-\sigma(Y)} = \sigma(H + 2Y), \tag{9.22}$$

$$\mathrm{e}^{\sigma(Y)}\sigma(X)\mathrm{e}^{-\sigma(Y)} = \sigma(-H + X - Y), \tag{9.23}$$

$$\mathrm{e}^{\sigma(X)}\sigma(Y)\mathrm{e}^{-\sigma(X)} = \sigma(H - X + Y), \tag{9.24}$$

$$\mathrm{e}^{-\sigma(Y)}\sigma(X)\mathrm{e}^{\sigma(Y)} = \sigma(H + X - Y), \tag{9.25}$$

a stąd

$$\begin{aligned}\theta\sigma(X)\theta^{-1} &\overset{(9.14)}{=} \mathrm{e}^{\sigma(X)}\mathrm{e}^{-\sigma(Y)}\sigma(X)\mathrm{e}^{\sigma(Y)}\mathrm{e}^{-\sigma(X)}\\ &\overset{(9.25)}{=} \mathrm{e}^{\sigma(X)}\sigma(H + X - Y)\mathrm{e}^{-\sigma(X)}\\ &= -\sigma(Y) \quad \text{(ostatnia równość wykorzystuje (9.21) i (9.24))},\end{aligned}$$

czyli (9.15). Podobnie uzasadnia się (9.16) i (9.17). Izomorfizm (9.18) wynika z (9.17), itd. □

LEMAT 9.6. *Jeśli* $\alpha \in R$, *to* $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

Dowód. Forma $\mathcal{K}$ jest nieosobliwa na $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, ale $\mathcal{K}|\mathfrak{g}_\alpha = 0$, więc $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Niech $X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha$ będą jak w §2.1.1. Jeśli $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$, to istnieje $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $Y \neq 0$, takie, że $(X_\alpha|Y) = 0$; Lemat 9.3 daje $[X_\alpha, Y] = 0$, więc ze względu na reprezentację dołączoną algebry $\mathfrak{s}_\alpha$ w całej algebrze $\mathfrak{g}$ element Y jest pierwotny o wadze -2 bo $\operatorname{ad}(H_\alpha)Y = [H_\alpha, Y] = -2Y$. Ale to jest sprzeczne z tym, że waga elementu pierwotnego w przestrzeni skończenie wymiarowej jest liczbą całkowitą nieujemną, stąd teza lematu. □

Lemat 9.7. *Jeśli $\alpha \in R$ i $k\alpha \in R$, to $k = 1$ albo -1.*

Dowód. Zob. dowód Stwierdzenia 16.40 w [Wo] lub §8.4 w [**31**]. □

Twierdzenie 4. *Stosując oznaczenia §2.1.1 mamy:*

$$\text{jeśli } \alpha, \beta \in R, \text{ to } \beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ i } \beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in R.$$

Dowód. Niech $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, $Y \neq 0$ i $p = \beta(H_\alpha)$, to $[H_\alpha, Y] = pY$, więc ze względu na reprezentację $\sigma : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathsf{End}\,\mathfrak{g}$ wektor Y ma wagę p, zatem $\beta(H_\alpha)$ jest liczbą całkowitą.

Niech

$$\text{jeśli } p \geqslant 0, \text{ to } Z = \sigma(Y_\alpha)^p Y$$
$$\text{jeśli } p \leqslant 0, \text{ to } Z = \sigma(X_\alpha)^{-p} Y$$

to, na mocy (9.19) i (9.20), jest $Z \neq 0$. Widać od razu, że $[H_\alpha, Z] = -pZ$. Ogólniej,

$$[H, Z] = (\beta(H) - p\alpha(H))Z,$$

co dowodzi się przez indukcję. Niech $Z_k = \sigma(Y_\alpha)^k$ dla $k \geqslant 0$, to równość

$$[H, Z_k] = (\beta(H) - k\alpha(H))Z_k \tag{9.26}$$

zachodzi dla $k = 0$: $Z_0 = Y \in \mathfrak{g}_\beta$, więc $[H, Z_0] = \beta(H)Z_0$. Zakładając, że (9.26) zachodzi dla $k > 0$, otrzymuje się

$$\begin{aligned}[H, Z_{k+1}] = [H, [Y_\alpha, \sigma(Y_\alpha)^k Y]] &= [[H, Y_\alpha], Z_k] + [Y_\alpha, [H, Z_k]] \\ &= (\beta(H) - (k+1)\alpha(H))Z_{k+1}\end{aligned}$$

czyli (9.26) dla $k + 1$. □

Stwierdzenie 9.8. *Ograniczenie $(\,|\,)$ do rzeczywistej przestrzeni wektorowej $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{R} H_\alpha$ jest formą dodatnio określoną.*

Dowód. Na podstawie definicji, jeśli $H, H' \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, to

$$(H|H') = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}(H) \circ \operatorname{ad}(H')), \quad \text{gdzie } \operatorname{ad}(H)W = [H, W],\ W \in \mathfrak{g}.$$

Jako bazę w algebrze $\mathfrak{g}$ o randze ℓ można wziąć zbiór

$$\{H_1, \ldots, H_\ell, X_\alpha, \alpha \in R\}, \quad \text{gdzie } X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha.$$

Wobec $\operatorname{ad}(H)H_k = 0$ oraz $\operatorname{ad}(H)X_\alpha = \alpha(H)X_\alpha$ jest $\operatorname{ad}(H) \circ \operatorname{ad}(H')X_\alpha = \alpha(H)\alpha(H')X_\alpha$, więc $(H|H') = \sum_{\alpha \in R} \alpha(H)\alpha(H')$. Dla wektorów bazy,

$$(H_\alpha|H_\beta) = \textstyle\sum_{\gamma \in R} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta) \in \mathbb{Z}.$$

Jeśli $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, to

$$(H|H) = \textstyle\sum_{\gamma \in R} \gamma(H)^2 \geqslant 0,$$

więc forma $(\,|\,)$ jest dodatnio określona. □

WNIOSEK. Liczba $n(\beta,\alpha) = 2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha)$ jest całkowita.

Istotnie, w oznaczeniach Lematu 9.3 jest $\alpha(H) = (Z_\alpha|H)$ oraz $(\alpha|\beta) = (Z_\alpha|Z_\beta)$. Wobec $H_\alpha||Z_\alpha$ i $\alpha(H_\alpha) = (Z_\alpha|H_\alpha) = 2$ otrzymuje się

$$\beta(H_\alpha) = (Z_\beta|H_\alpha) = (Z_\beta|Z_\alpha)\frac{(Z_\alpha|H_\alpha)}{(Z_\alpha|Z_\alpha)} = 2\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$$

a Twierdzenie 4 daje teraz tezę wniosku.

2.1.3. *Grupa Weyla.* Niech $\alpha \in R$, $\beta \in \mathfrak{h}^*$. Odwzorowanie liniowe

$$r_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*, \quad r_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$$

jest odbiciem w płaszczyźnie $\ker H_\alpha \subset \mathfrak{h}^*$, więc izometrią i $r_\alpha \circ r_\alpha = \mathrm{id}$.

Definicja. Grupa Weyla W jest to podgrupa grupy $\mathsf{GL}(\mathfrak{h}^*)$, generowana przez wszystkie odbicia r_α, $\alpha \in R$.

Na podstawie Twierdzenia 4 widać, że grupa Weyla jest grupą permutacji zbioru pierwiastków. Działanie to, na ogół, nie jest przechodnie, bo są pierwiastki różnej długości.

2.2. Istnienie bazy Cartana.

LEMAT 9.9. *Jeśli α i β są nierównoległymi pierwiastkami i $n(\beta,\alpha) > 0$, to $\alpha - \beta$ jest pierwiastkiem.*

Dowód. Wobec $n(\beta,\alpha) > 0$ i $\alpha \not\parallel \beta$ iloczyn $n(\beta,\alpha)n(\alpha,\beta) = 4\cos^2\varphi$ nie może być równy 0 ani 4, zatem $n(\alpha,\beta)$ lub $n(\beta,\alpha) = 1$. Jeśli $n(\beta,\alpha) = \beta(H_\alpha) = 1$, to $\beta - \alpha \in R$ na mocy Twierdzenia 4. Jeśli $n(\alpha,\beta) = 1$, to zamieniamy α i β miejscami. □

2.2.1. *Elementy rozkładalne.* Zbiór pierwiastków R jest skończony, więc istnieje taki element $T \in \mathfrak{h}$, że dla każdego $\alpha \in R$ jest $\alpha(T) \neq 0$. Niech

$$R_T^+ = \{\alpha \in R | \alpha(T) > 0\}, \quad R_T^- = \{-\alpha | \alpha \in R_T^+\},$$

to

$$R = R_T^+ \cup R_T^-.$$

Definicja. Element $\alpha \in R_T^+$ nazywa się *rozkładalnym*, jeśli $\alpha = \beta + \gamma$, gdzie $\beta,\gamma \in R_T^+$.

Niech S_T oznacza zbiór wszystkich elementów R_T^+, które są nierozkładalne.

LEMAT 9.10. *Każdy element zbioru R_T^+ jest postaci*

$$\alpha = \textstyle\sum_i n_i\alpha_i \quad \text{gdzie } \alpha_i \in S_T,\ n_i \geqslant 0 \text{ oraz } n_i \in \mathbb{Z}.$$

Dowód. Niech $I \subset R_T^+$ będzie zbiorem tych elementów, które nie są tej postaci. Niech $\alpha \in I$ będzie takim elementem, że dla każdego $\alpha' \in I$ jest $\alpha'(T) \geqslant \alpha(T)$. Element α jest rozkładalny – gdyby nie był, należałby do S_T – więc istnieją elementy $\beta,\gamma \in R_T^+$ takie, że $\alpha = \beta + \gamma$, zatem $\alpha(T) = \beta(T) + \gamma(T)$, ale $\gamma(T) > 0$, stąd $\beta(T) < \alpha(T)$: sprzeczność dowodzi, że zbiór I jest pusty. □

LEMAT 9.11. *Jeśli $\alpha,\beta \in S_T$ i $\alpha \neq \beta$, to $(\alpha|\beta) \leqslant 0$.*

Dowód. Z Lematu 9.9 wynika, że jeśli $(\alpha|\beta) > 0$, to $\gamma = \alpha - \beta \in R$. Jeśli $\gamma \in R_T^+$, to $\alpha = \beta + \gamma$ jest rozkładalne, a jeśli $-\gamma \in R_T^+$, to $\beta = \alpha + (-\gamma)$ jest rozkładalne. □

LEMAT 9.12. *Zbiór $S_T = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ jest liniowo niezależny.*

Dowód. Niech

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \alpha_i = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{9.27}$$

Definiując

$$N^{\pm} = \{i | 1 \leqslant i \leqslant \ell,\ \pm\lambda_i > 0\}$$

można zapisać (9.27) w postaci

$$\sum_{i \in N^+} \mu_i \alpha_i = \sum_{i \in N^-} \nu_i \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \beta, \quad \mu_i, \nu_i > 0.$$

Stąd

$$(\beta|\beta) = (\sum_{i \in N^+} \mu_i \alpha_i | \sum_{j \in N^-} \nu_j \alpha_j) = \sum_{i \in N^+, j \in N^-} \mu_i \nu_j (\alpha_i|\alpha_j)$$

Na podstawie poprzedniego Lematu jest $(\alpha_i|\alpha_j) \leqslant 0$, stąd $(\beta|\beta) \leqslant 0$, co pociąga $\beta = 0$ i dowodzi liniowej niezależności zbioru S_T. □

Podsumowując, zachodzi

TWIERDZENIE 5. *Zbiór S_T elementów nierozkładalnych jest bazą Cartana. Na odwrót, jeśli S jest bazą Cartana, a T jest takim elementem $\mathfrak{h}$, że $\alpha(T) > 0$ dla każdego $\alpha \in S$, to $S = S_T$.*

2.2.2. *Macierz Cartana.* Na podstawie Lematu 9.11, elementy *macierzy Cartana* względem bazy $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$,

$$n_{ij} = 2\frac{(\alpha_i|\alpha_j)}{(\alpha_j|\alpha_j)} \in \mathbb{Z}$$

są takie, że jeśli $i \neq j$, to $n_{ij} \leqslant 0$. Wobec

$$n_{ij} n_{ji} = 4\cos^2\varphi \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{dla } i \neq j$$

są takie możliwe wartości poza diagonalnych elementów macierze Cartana:

$$\begin{array}{rclcccc} n_{ij} & = & 0 & -1 & -2 & -3 \\ n_{ji} & = & 0 & -1, -2, -3 & -1 & -1 \end{array}$$

W szczególności, dla algebr rangi 2 macierze Cartana są

$$\mathsf{A}_1 \times \mathsf{A}_1 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{A}_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{B}_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{G}_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

LEMAT 9.13. *Niech α i β będą nierównoległymi pierwiastkami, niech p będzie największą liczbą całkowitą taką, że $\beta - p\alpha \in R$ i niech q będzie największą liczbą całkowitą taką, że $\beta + q\alpha \in R$. Niech $\mathfrak{s}_\alpha$ będzie jak w § 2.1.1.*

(i) *Jeśli $-p \leqslant k \leqslant q-1$, to odwzorowanie*

$$\mathrm{ad}(X_\alpha) : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$$

jest izomorfizmem.

(ii) *Reprezentacja $\sigma : \mathfrak{s}_\alpha \to \mathsf{End}\, V$, gdzie*

$$V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}, \quad \sigma(X)Y = [X,Y], \quad X \in \mathfrak{s}_\alpha, Y \in V,$$

jest nieprzywiedlna, $\dim V = p+q+1$ *i* $\beta(H_\alpha) = p-q$.

Dowód. Przestrzenie $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ są jednowymiarowe dla $-p \leqslant k \leqslant q$, co dowodzi cz. (i). Wobec

$$[\mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}] \subset \mathfrak{g}_{\beta+(k\pm1)\alpha},$$

element $X_{\beta+q\alpha}$ jest pierwotny, $\sigma(Y_\alpha)X_{\beta-p\alpha} = 0$ oraz

$$\sigma(H_\alpha)X_{\beta+k\alpha} = \beta(H_\alpha) + 2k \quad \text{dla} \quad -p \leqslant k \leqslant q.$$

Wagi elementów

$$X_{\beta-p\alpha}, \quad X_{\beta-(p-1)\alpha}, \ldots, X_{\beta+q\alpha}$$

wynoszą, odpowiednio,

$$\beta(H_\alpha) - 2p, \quad \beta(H_\alpha) - 2p + 2, \ldots, \beta(H_\alpha) + 2q.$$

Kładąc $m = \beta(H_\alpha) + 2q$ otrzymujemy $-m = \beta(H_\alpha) - 2p$, a stąd

$$m = p+q, \quad \beta(H_\alpha) = p-q, \quad \dim V = m+1. \qquad \square$$

WNIOSEK. Jeśli $k > -n_{ij}$, to $\alpha_j + k\alpha_i$ nie jest pierwiastkiem.

2.2.3. *Podalgebra Borela.* Niech R^+ będzie zbiorem pierwiastków dodatnich (zob. §1.6) względem bazy Cartana S. Jeśli

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \qquad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

to

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$$

i zachodzi

Twierdzenie 6. *Przestrzenie $\mathfrak{n}^+$ i $\mathfrak{n}^-$ są nilpotentnymi podalgebrami $\mathfrak{g}$. Przestrzeń $\mathfrak{b}$ jest rozwiązalną podalgebrą $\mathfrak{g}$.*

Dowód. Niech $X \in \mathfrak{n}^+$; dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $\beta \in \mathfrak{h}^*$ jest

$$\mathrm{ad}(X)^k(\mathfrak{g}_\beta) \subset \bigoplus_{\alpha_i \in R^+} \mathfrak{g}_{\beta+\alpha_1+\cdots+\alpha_k}.$$

Dla dostatecznie dużego k, element $\beta+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ jest $\neq 0$ i nie należy do R, więc $\mathfrak{g}_{\beta+\alpha_1+\cdots+\alpha_k} = \{0\}$, co pokazuje, że X jest nilpotentne. Na podstawie Twierdzenia Engela (§2.2.2 w Rozdz. VIII) wynika stąd, że podalgebra $\mathfrak{n}^+$ jest nilpotentna; podobnie dla $\mathfrak{n}^-$. Wobec $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] = \mathfrak{n}^+$, mamy

$$[\mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+, \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}^+] + [\mathfrak{n}^+, \mathfrak{n}^+] \subset \mathfrak{n}^+.$$

Dla odpowiednio dużego $p \in \mathbb{N}$ jest $\mathcal{D}^p\mathfrak{n}^+ = \{0\}$, więc także $\mathcal{D}^p\mathfrak{b} = 0$, czyli: algebra $\mathfrak{b}$ jest rozwiązalna. □

3. Normalizacja Chevalleya i formy rzeczywiste

3.1. Normalizacja Chevalleya. Mając bazę Cartana $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ i elementy $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in R$, spełniające (9.5) i (9.13), można utworzyć bazę (H_i, X_α) algebry $\mathfrak{g}$ kładąc $H_i = H_{\alpha_i}$. Komutatory elementów tej bazy są postaci

$$[H_i, H_j] = 0, \;\; i, j = 1, \ldots, \ell \tag{9.28}$$

$$[H_i, X_\alpha] = \alpha(H_i) X_\alpha \tag{9.29}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} H_\alpha & \text{jeśli } \alpha + \beta = 0 \\ 0 & \text{jeśli } 0 \neq \alpha + \beta \notin R \\ N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} & \text{jeśli } \alpha + \beta \in R \end{cases} \tag{9.30}$$

Na podstawie definicji bazy Cartana widać, że $\alpha(H_i)$ jest liczbą całkowitą. Zachodzi

Twierdzenie (Chevalley). *Można wybrać elementy X_α tak, że*

$$N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta} \quad \textit{oraz} \quad N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}. \tag{9.31}$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w pracy Chevalleya [**11**] i w książce Wojtyńskiego [Wo]. Tutaj zamiast dowodu zilustrujemy twierdzenie przykładem algebry $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$, zob. §1.8. Pierwiastki α_{ij} są takie, że

$$\alpha_{ij}(\mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell\}) = \lambda_i - \lambda_j, \;\; i \neq j.$$

Suma $\alpha_{ij} + \alpha_{kl}$ jest pierwiastkiem $\Leftrightarrow j = k$ albo $i = l$. Wybierając $X_{\alpha_{ij}} = E_{ij} \in \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ otrzymujemy

$$[E_{ij}, E_{jk}] = E_{ik}, \quad \text{więc} \quad N_{ij,jk} = 1$$
$$[E_{ji}, E_{kj}] = -E_{ki}, \quad \text{więc} \quad N_{ji,kj} = -1.$$

3.2. Formy rzeczywiste.

TWIERDZENIE 7. *Każda półprosta algebra Liego ma przynajmniej dwie formy rzeczywiste.*

Dowód. Niech (H_i, X_α) będzie bazą algebry półprostej $\mathfrak{g}$, spełniającą warunki normalizacji Chevalleya (9.31). Niech

$$\mathfrak{l} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}), \tag{9.32}$$

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{h}_\mathbb{R} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathbb{R}(X_\alpha + X_{-\alpha}). \tag{9.33}$$

Następujące dwie algebry są rzeczywiste, a ich kompleksyfikacje są izomorficzne $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{m}, \tag{9.34}$$

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{l} \oplus \mathrm{i}\mathfrak{m} \tag{9.35}$$

Korzystając z (9.28) i $N_{-\alpha,-\beta} = -N_{\alpha,\beta}$ pokazujemy, że

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{l},$$
$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},$$
$$[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset l.$$

□

Pamiętając o tym, że przestrzenie $\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ i $\bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}_\alpha$ są zerowe względem formy Killinga, widać, że indeks tej formy, ograniczonej do $\mathfrak{g}_1$, jest równy randze ℓ algebry.

Forma Killinga jest ujemnie określona na $\mathrm{i}\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, a także na pozostałych składnikach sumy (9.35) gdyż np.

$$(X_\alpha - X_{-\alpha} | X_\alpha - X_{-\alpha}) = -2(X_\alpha | X_{-\alpha}) < 0.$$

Rozkład (9.34) bywa nazywany *rozkładem Cartana drugiego rodzaju rzeczywistej, półprostej algebry* $\mathfrak{g}_1$, zob. Rozdz. 16 §13 w [Wo].

PRZYKŁAD 9.1. Niech $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{R})$, to $\mathfrak{g} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$. Na podstawie definicji

$$\mathfrak{su}(\ell+1) = \{B \in \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C}) \mid B^\dagger + B = 0\}$$

sprawdzamy, że $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{su}(\ell+1)$ jest formą rzeczywistą algebry $\mathfrak{g}$: jeśli $A \in \mathfrak{g}$, to jest rozkład $A = A' + \mathrm{i}A''$, gdzie

$$A' = \frac{A - A^\dagger}{2} \quad \text{oraz} \quad A'' = \frac{A + A^\dagger}{2\mathrm{i}} \quad \text{należą do } \mathfrak{g}_2.$$

Pamiętając, że A^* oznacza macierz transponowaną względem A, kładziemy

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} &= \mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{so}(\ell+1) = \{A \in \mathfrak{g}_1 \mid A + A^* = 0\},\\ \mathfrak{m} &= \{A \in \mathfrak{g}_1 \mid A = A^*\}\end{aligned}$$

i otrzymujemy rozkłady (9.34) i (9.35) dla algebr $\mathfrak{sl}(\ell+1,\mathbb{R})$ i $\mathfrak{su}(\ell+1)$.

3.3. Zwarte algebry Liego. W tym paragrafie $\mathfrak{g}$ oznacza skończenie wymiarową *rzeczywistą* algebrę Liego.

Definicja. Algebra Liego $\mathfrak{g}$ nazywa się *zwartą* jeśli istnieje zwarta grupa Liego G taka, że $G' = \mathfrak{g}$.

Na przykład algebra przemienna $\mathbb{R}$ jest zwarta, bo jest algebrą Liego zwartej grupy $\mathsf{U}(1)$, natomiast algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ nie jest zwarta.

STWIERDZENIE 9.14. *Jeśli algebra* $\mathfrak{g}$ *jest zwarta, to istnieje niezmiennicza, biliniowa, symetryczna i* określona *forma na* $\mathfrak{g}$.

Dowód. Niech G będzie zwartą grupą Liego taką, że $G' = \mathfrak{g}$ i niech $\mathcal{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną biliniową, symetryczną i określoną formą. Na grupie G mamy określone całkowanie,

$$\int_G f(a)\,\mathrm{d}a, \quad \int_G f(a)\,\mathrm{d}a = 1,$$

które jest niezmiennicze,

$$\int_G f(a)\,\mathrm{d}a = \int_G f(ab)\,\mathrm{d}a = \int_G f(ba)\,\mathrm{d}a, \quad \text{dla każdego } b \in G.$$

Iloczyn skalarny

$$(A|B) = \int_G \mathcal{K}(\mathrm{ad}(a)A, \mathrm{ad}(a)B)\,\mathrm{d}a, \quad A, B \in \mathfrak{g}$$

jest niezmienniczy i określony. □

STWIERDZENIE 9.15. *Jeśli* $\mathfrak{g}$ *jest półprostą, zwartą algebrą Liego, to jej forma Killinga jest* ujemnie określona*.*

Dowód. Skoro $\mathfrak{g}$ jest zwarta, to ma niezmienniczą, określoną formę biliniową $(\,|\,)$. Obieramy bazę (e_i) w $\mathfrak{g}$, ortonormalną względem tej formy, $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$. Niezmienniczość tej formy pociąga

$$([A, e_i]|e_j) + (e_i|[A, e_j]) = 0 \tag{9.36}$$

dla każdego $A \in \mathfrak{g}$. Niech $\mathrm{ad}(A)e_i = \sum_k e_k A_{ki}$, to z (9.36) wynika $A_{ij} + A_{ji} = 0$. Dalej,

$$\mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(A)e_i = \textstyle\sum_{k,l} e_l A_{lk} A_{ki},$$

więc

$$\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(A) \circ \mathrm{ad}(A)) = \textstyle\sum_{i,k} A_{ik} A_{ki} = -\sum_{i,k} A_{ik}^2 \leqslant 0. \qquad \square$$

Dowodzi się także, iż jeśli algebra Liego posiada określoną formę niezmienniczą, to jest zwarta. Wynika stąd, że forma rzeczywista (9.35) jest zwarta.

4. Reprezentacje półprostych algebr Liego

Opis reprezentacji algebr półprostych uogólnia przedstawiony tu wcześniej opis dla algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, zob. §7 w Rozdz. VIII.

Używamy oznaczeń jak w §2, więc $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą Cartana algebry $\mathfrak{g}$, $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ – bazą Cartana, R (R^+) – zbiorem pierwiastków (pierwiatków dodatnich). Jeśli $\alpha \in R^+$, to $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ oraz $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$ należy do $\mathfrak{h}$. Piszemy także $X_i = X_{\alpha_i}$, $Y_i = Y_{\alpha_i}$ oraz $H_i = H_{\alpha_i}$ dla $i = 1, \dots, \ell$.

Zamiast mówić, że $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V$ jest reprezentacją, można mówić, że V jest modułem nad $\mathfrak{g}$ („$\mathfrak{g}$-modułem") i pisać Av zamiast $\sigma(A)v$, $A \in \mathfrak{g}$, $v \in V$. Jeśli $\omega \in \mathfrak{h}^*$, to

$$V_\omega = \{v \in V \mid Hv = \omega(H)v \quad \text{dla każdego } H \in \mathfrak{h}.\}$$

Jeśli $V_\omega \neq \{0\}$, to mówi się, że ω jest *wagą* w V i że $v \in V_\omega^\times$ ma wagę ω. Wymiar przestrzeni V_ω nazywa się *krotnością* ω.

STWIERDZENIE 9.16. *Jeśli $\alpha \in R$, to $\mathfrak{g}_\alpha V_\omega \subset V_{\omega+\alpha}$, a suma prosta $V' = \bigoplus_\omega V_\omega$ jest podmodułem modułu V.*

Dowód. Jak w Lemacie 9.2. □

Element $v \in V_\omega^\times$ taki, że $X_\alpha v = 0$ dla każdego $\alpha \in R^+$ (wystarczy: $X_i v = 0$ dla każdego i) nazywa się *elementem pierwotnym* o wadze ω.

STWIERDZENIE 9.17. *Jeśli V jest $\mathfrak{g}$-modułem, a $v \in V$ jest elementem pierwotnym o wadze ω oraz $E = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})v \subset V$, to*

(i) *E jest podmodułem (tzn. nośnikiem reprezentacji algebry $\mathfrak{g}$) i*

$$E = \operatorname{span}\{Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} v\} \quad \textit{gdzie} \quad \beta_i \in R^+,\ m_i \in \mathbb{N};$$

(ii) *wagi elementów E są postaci*

$$\omega - \textstyle\sum_i^\ell p_i\alpha_i, \ \ p_i \in \mathbb{N}; \tag{9.37}$$

(iii) *ω jest wagą o krotności 1;*

(iv) *podmoduł E jest nierozkładalny.*

Szkic dowodu. (i) Mając wyrażenie postaci $XY \dots XY \dots Yv$, gdzie wszystkie, na ogół różne, elementy $X \in \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$ i $Y \in \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$, używając reguł komutacyjnych przenosimy X na prawo i korzystamy z $Xv = 0$;

(ii) Na mocy Stwierdzenia 9.16 waga elementu $Y_\alpha v$ jest $\omega - \alpha$, więc waga elementu $Y_{\beta_1}^{m_1} \dots Y_{\beta_k}^{m_k} v$ jest $\omega - \sum_i m_i\beta_i$, ale $\beta_i = \sum_j l_{ij}\alpha_j$, gdzie $\alpha_j \in S$;

(iii) v jest elementem o krotności 1 bo, na mocy (ii), równość $\omega - \sum_i m_i\beta_i = \omega$ pociąga $m_i = 0$;

(iv) Istotnie, niech $E = E_1 \oplus E_1$ i odpowiednio $v = v_1 + v_2$, to

$$X_\alpha v_1 + X_\alpha v_2 = X_\alpha v = 0$$

oraz

$$\omega(H)v = \omega(H)v_1 + \omega(H)v_2,$$

gdyby v_1 i $v_2 \neq 0$, to przeczyłoby to (iii), więc E_1 albo $E_2 = \{0\}$. □

TWIERDZENIE 8. *Jeśli V jest nierozkładalnym $\mathfrak{g}$-modułem, zawierającym element pierwotny v o wadze ω, to*

(i) *każdy element pierwotny o tej samej wadze jest proporcjonalny do v; jego waga nazywa się* największą *albo* dominującą*;*

(ii) *wagi elementów V są postaci* (9.37)*;*

(iii) *dwa nieprzywiedlne $\mathfrak{g}$-moduły V_1 i V_2, zawierające elementy pierwotne o wagach ω_1 i ω_2, są izomorficzne wtedy, i tylko wtedy, gdy $\omega_1 = \omega_2$.*

Szkic dowodu. (i) i (ii) Istotnie, $E = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v = V$ bo V jest nieprzywiedlny; możemy zastosować część (ii) Stwierdzenia 9.17, więc jeśli v' jest elementem pierwotnym o wadze ω', to $\omega' = \omega - \sum p_i\alpha_i$, ale także $\omega = \omega' - \sum p_i'\alpha_i$, stąd $p_i = 0$;

(iii) Jeśli istnieje izomorfizm $f : V_1 \to V_2$, $f(Xv) = Xf(v)$, $v \in V_1$, $X \in \mathfrak{g}$, to $Hf(v_1) = f(Hv_1) = f(\omega_1(H)v_1) = \omega_1(H)f(v_1)$ oraz $X_\alpha f(v_1) = 0$ dla $\alpha \in R^+$, więc $v_2 = f(v_1)$ jest elementem pierwotnym V_2 o wadze $\omega_2 = \omega_1$; na odwrót, mając elementy pierwotne $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$, oba o tej samej wadze, rozpatrujemy $v = v_1 + v_2 \in V = V_1 \oplus V_2$ oraz $E = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$; rzut $V \to V_i$, $i = 1, 2$ rozszerza się do izomorfizmu $E \to V_i$, więc moduły V_1 i V_2 są izomorficzne. $\square$

TWIERDZENIE 9. *Niech V będzie $\mathfrak{g}$-modułem skończonego wymiaru, to*

(i) *istnieje rozkład $V = \bigoplus_{\pi\in\mathfrak{h}^*} V_\pi$;*

(ii) *jeśli π jest wagą, to $\pi(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ dla każdego $\alpha \in R$;*

(iii) *jeśli $V \neq \{0\}$, to V zawiera element pierwotny;*

(iv) *jeśli V jest generowany przez element pierwotny, to jest nierozkładalny.*

Szkic dowodu.

(i) Jeśli $\pi \neq \pi'$, to $V_\pi \cap V_{\pi'} = \{0\}$;

(ii) Istotnie, niech $\alpha \in R^+$,

$$\mathfrak{s}_\alpha = \operatorname{span}\{X_\alpha.Y_\alpha, H_\alpha\} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), \tag{9.38}$$

to V jest $\mathfrak{s}_\alpha$-modułem skończonego wymiaru, więc wartości własne H_α są liczbami całkowitymi, czyli $\pi(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$;

(iii) Dowód przebiega jak dla $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$;

(iv) Jeśli V jest generowany przez element pierwotny v, $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$, to V jest nierozkładalny, co wynika z części (iv) Stwierdzenia 9.17. $\square$

TWIERDZENIE 10. *Niech V będzie $\mathfrak{g}$-modułem nieprzywiedlnym, zawierającym element o największej wadze ω, to V jest skończenie wymiarowy wtedy, i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha \in R^+$ jest $\omega(H_\alpha) \in \mathbb{N}$.*

Szkic dowodu. Warunek jest konieczny, bo element pierwotny v modułu V jest także elementem pierwotnym podalgebry (9.38); warunek jest dostateczny, co wynika z części (ii) Twierdzenia 9. $\square$

Wagi podstawowe. Niech (ϖ_i) będzie bazą $\mathfrak{h}^*$ dualną względem bazy (H_i), $\langle H_i, \varpi_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, \ell$. Wagi $\varpi_i, i = 1, \ldots, \ell$, nazywają się *podstawowymi* (fundamentalnymi), a odpowiadające im reprezentacje – *reprezentacjami podstawowymi.*

Mając $\mathfrak{g}$-moduły V_1 i V_2 można utworzyć $\mathfrak{g}$-moduły $V_1 \oplus V_2$ i $V_1 \otimes V_2$. Jeśli $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$, to $X(v_1 \otimes v_2) = (Xv_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes Xv_2$. Podobnie dla $\bigwedge^j V$:

$$X(v_1 \wedge \cdots \wedge v_j) = \textstyle\sum_i v_1 \wedge \cdots \wedge Xv_i \wedge \cdots \wedge v_j.$$

Mając reprezentację $\mathfrak{g} \to \mathsf{End}\, V$ definiujemy moduł dualny $\mathfrak{g} \to V^*$ przez $X \mapsto -X^*$ (bo $[X,Y]^* = -[X^*, Y^*]$).

Załóżmy, że znamy reprezentacje podstawowe V_i, o wektorach z największą wagą v_i, $i = 1, \ldots, \ell$,

$$Hv_i = \varpi_i(H) v_i, \quad H \in \mathfrak{h}.$$

Możemy utworzyć $\mathfrak{g}$-moduł

$$\bigotimes^{p_1} V_1 \otimes \cdots \otimes \bigotimes^{p_\ell} V_\ell, \quad p_i \in \mathbb{N} \tag{9.39}$$

i wziąć

$$v = \bigotimes^{p_1} v_1 \otimes \cdots \otimes \bigotimes^{p_\ell} v_\ell$$

tak, że

$$Hv = (p_1 \varpi_1 + \cdots + p_\ell \varpi_\ell)(H) v.$$

Stąd: $\mathfrak{g}$-moduł $E = \mathcal{U}(\mathfrak{g})v$ jest nośnikiem reprezentacji o wadze $p_1\varpi_1 + \cdots + p_\ell \varpi_\ell$.

Iloczyn $v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$ jest tensorem symetrycznym; ta własność symetrii zachowuje się przy działaniu elementów $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, np.

$$X(v \otimes v \otimes \cdots \otimes v) = (Xv) \otimes v \otimes \cdots \otimes v + \cdots + v \otimes v \otimes \cdots \otimes Xv$$

też jest tensorem symetrycznym. Wynika stąd, że w iloczynie (9.39) wystarczy używać symetrycznych iloczynów tensorowych $\mathsf{S}^p V$, zob. §2.5 w Rozdz. I.

5. Przykłady reprezentacji

5.1. Reprezentacje algebry $\mathbf{A}_\ell = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$.

5.1.1. Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$. Używając oznaczeń §1.8, jako bazę przestrzeni $\mathfrak{h}$ można wziąć $(H_1, \ldots, H_\ell)$, gdzie H_i jest dane przez (9.10). Na podstawie (9.11) widać, że baza dualna (ϖ_i) spełnia

$$\varpi_i(H) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i.$$

Np. dla reprezentacji definiującej algebrę $\mathfrak{sl}(\ell+1, \mathbb{C})$ w $V = \mathbb{C}^{\ell+1}$ wektor e_1 jest pierwotny, bo jest anihilowany przez $X_i = E_{i\,i+1}$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, \ell$. Wobec $He_1 = \lambda_1$, jego wagą jest ϖ_1. Ogólnie, reprezentacja tej algebry w $\bigwedge^k V$, $k = 1, \ldots, \ell$, ma jako wektor pierwotny $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ i wagę ϖ_k, co widać z

$$H(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = He_1 \wedge \cdots \wedge e_k + \cdots + e_1 \wedge \cdots \wedge He_k = \varpi_k(H) e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$$

oraz

$$X_i e_j = E_{i\,i+1} e_j = \delta_{i+1\,j} e_i = e_{j-1}$$

więc $X_i(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = 0$ dla każdego i oraz $k = 1, \ldots, \ell$.

Reprezentacje podstawowe można zaznaczać na diagramie Dynkina:

5.1.2. Grupa $\mathsf{SU}(3)$, której algebrą Liego jest $\mathfrak{su}(3) \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ odgrywa ważną rolę w teorii silnych oddziaływań (grupa „koloru”). $\mathsf{SU}(3)$ zachowuje formę hermitowską $h : \bar{V} \to V^*$. Reprezentacja definiująca $V = \mathbb{C}^3$ opisuje kwarki, a reprezentacja V^*, równoważna $\bar{V}$ – antykwarki. Rozkładając iloczyn tensorowy $V \otimes V^* = \mathsf{End}\, V$ na składowe nieprzywiedlne,

$$\mathsf{End}\, V = \mathbb{C} \oplus \mathsf{End}_0\, V, \quad \text{gdzie} \quad \mathsf{End}_0\, V = \{A \in \mathsf{End}\, V \mid \operatorname{tr} A = 0\},$$

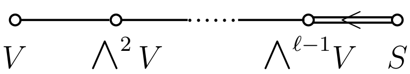
więc $\dim_{\mathbb{C}} \mathsf{End}_0\, V = 8$, otrzymuje się reprezentację trywialną (skalarną), odpowiadającą mezonowi η' oraz reprezentację ośmiowymiarową (oktet mezonów: cztery K, trzy π i η_0).

Bariony buduje się z trzech kwarków,

$$\begin{aligned} V \otimes (V \otimes V) &= V \otimes (\textstyle\bigwedge^2 V \oplus \mathsf{S}^2 V), \quad \textstyle\bigwedge^2 V \sim V^*, \\ &= \mathbb{C} \oplus \mathsf{End}_0\, V \oplus \mathsf{S}^3 V \oplus \mathsf{End}_0\, V, \end{aligned}$$

5.2. Reprezentacje algebry $\mathsf{B}_\ell = \mathfrak{so}(2\ell+1, \mathbb{C})$. Wszystkie reprezentacje podstawowe algebr B_ℓ i D_ℓ wygodnie jest zrealizować w odpowiednich algebrach Clifforda, zob. §2.7 w Rozdz. I.

5.2.1. Pokażemy, że reprezentacje podstawowe algebry B_ℓ są jak następuje:



Tutaj $V = \mathbb{C}^{2\ell+1}$, a S jest 2^ℓ-wymiarową reprezentacją spinorową. Algebrę $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2\ell+1, \mathbb{C})$ można utożsamić z $\bigwedge^2 V = [V, V] \subset \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$. Przestrzeń V zanurzamy w $\mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$ tak, jak to zostało opisane na str. 33.

5.2.2. Niech teraz $(e_1, \ldots, e_{2\ell+1})$ będzie bazą ortonormalną w V.

Wprowadzamy rozkład Witta przestrzeni $V \subset \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$, jak w §2.7.4 na str. 34. W tym celu konstruujemy bazę zerową (Witta)

$$(k_1, \ldots, k_\ell, l_1, \ldots, l_\ell, e_{2\ell+1}),$$

kładąc

$$k_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} + \mathrm{i} e_{2i}), \quad l_i = \tfrac{1}{2}(e_{2i-1} - \mathrm{i} e_{2i}), \quad i = 1, \ldots \ell,$$

tak, że

$$k_i k_j + k_j k_i = 0, \quad l_i l_j + l_j l_i = 0, \quad k_i l_j + l_j k_i = \delta_{ij},$$

gdzie iloczyny wektorów obliczane są w algebrze Clifforda. Podprzestrzenie

$$K = \operatorname{span}\{k_1, \ldots, k_\ell\}, \quad L = \operatorname{span}\{l_1, \ldots, l_\ell\}$$

są prostopadłe do $e_{2\ell+1}$, całkowicie zerowe i maksymalnego wymiaru oraz zachodzi rozkład Witta (1.37). Jako bazę w algebrze $[V, V]$ można wziąć zbiór $\ell(2\ell+1)$ elementów

(9.40) $k_i k_j,\ \ l_i l_j,\ \ k_i l_j,\ \ l_i k_j,\ \ (1 \leqslant i < j \leqslant \ell), \qquad k_i l_i - l_i k_i\ \ (i = 1, \ldots, \ell)$

oraz

$$k_i e_{2\ell+1} \quad \text{i} \quad l_i e_{2\ell+1}, \quad (i = 1, \ldots, \ell).$$

5.2.3. Podalgebra Cartana $\mathfrak{h} \subset [K, L]$ składa się ze wszystkich elementów postaci

$$H = \sum_{i=1}^{\ell} \tfrac{1}{2}\lambda_i [k_i, l_i], \quad \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Baza (ε_i) w $\mathfrak{h}^*$ może być określona przez $\varepsilon_i(H) = \lambda_i$. Aby znaleźć pierwiastki obliczamy $[H, k_i k_j]$, $[H, k_i l_j]$, itd. Np.

$$\text{jeśli } m \neq i \text{ i } n \neq i, \text{ to} \quad [k_i l_i - l_i k_i, k_m k_n] = 0,$$

$$[\tfrac{1}{2}(k_i l_i - l_i k_i), k_i k_j] = k_i k_j.$$

Te i podobne rachunki prowadza do

$$[H, k_i k_j] = (\lambda_i + \lambda_j) k_i k_j, \tag{9.41}$$

$$[H, l_i l_j] = -(\lambda_i + \lambda_j) l_i l_j, \tag{9.42}$$

$$[H, k_i l_j] = (\lambda_i - \lambda_j) k_i l_j, \tag{9.43}$$

$$[H, l_i k_j] = -(\lambda_i - \lambda_j) l_i k_j, \tag{9.44}$$

$$[H, k_i e_{2\ell+1}] = \lambda_i k_i e_{2\ell+1} \tag{9.45}$$

$$[H, l_i e_{2\ell+1}] = -\lambda_i l_i e_{2\ell+1}. \tag{9.46}$$

5.2.4. *Pierwiastki i baza Cartana.* Wynika stąd, że pierwiastki są postaci

$$\varepsilon_i \;\; (1 \leqslant i \leqslant \ell), \quad \varepsilon_i + \varepsilon_j, \;\; \varepsilon_i - \varepsilon_j, \;\; -\varepsilon_i + \varepsilon_j, \;\; -\varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant \ell).$$

Jako bazę Cartana można wziąć formy

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \;\; \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell \;\text{ oraz }\; \alpha_\ell = \varepsilon_\ell.$$

Pierwiastki dodatnie to ε_i $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ oraz $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ i $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant \ell)$, mianowicie

$$\varepsilon_i = \alpha_\ell + \alpha_{\ell-1} + .. + \alpha_i,$$
$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{dla} \quad i < j.$$

Na podstawie (9.41)-(9.46) widać, że podprzestrzeń $\bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ ma jako bazę zbiór ℓ^2 elementów

$$k_i k_j, \;\; k_i l_j \;\; (1 \leqslant i < j \leqslant \ell), \;\; k_i e_{2\ell+1} \;\; (1 \leqslant i \leqslant \ell). \tag{9.47}$$

Obliczając $\mathcal{K}^{-1}(\alpha_i)$ otrzymujemy

$$H_i = \tfrac{1}{2}[k_i, l_i] - \tfrac{1}{2}[k_{i+1}, l_{i+1}] \quad (i = 1, \ldots, \ell - 1),$$
$$H_\ell = [k_\ell, l_\ell].$$

Z warunku $\langle H_i, \varpi_j \rangle = \delta_{ij}$ znajdujemy wagi podstawowe,

$$\varpi_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad i \leqslant \ell - 1, \tag{9.48}$$

$$\varpi_\ell = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\ell). \tag{9.49}$$

Teraz możemy zrealizować odpowiadające tym wagom reprezentacje. Pomocny jest

Lemat 9.18. *Jeśli*

$$X \in \bigwedge^2 V = [V, V] \subset \mathcal{C}\ell(V, h)$$

i

$$W \in \bigwedge^k V \subset \mathcal{C}\ell(V, h),$$

to $[X, W] \in \bigwedge^k V$.

Istotnie, jeśli $X \in \bigwedge^2 V$, to

$$a(t) = \exp tX \in \mathsf{Spin}(V, h),$$

więc

$$a(t)Wa(t)^{-1} \in \bigwedge^k V.$$

Różniczkując $a(t)Wa(t)^{-1}$ względem t w punkcie $t = 0$ otrzymuje się $[X, W]$.

Reprezentacja ς definiująca algebrę $\mathfrak{g} = [V, V]$ dana jest jako homomorfizm

$$\varsigma : [V, V] \to \mathsf{End}\, V, \quad \varsigma(X)v = [X, v], \;\; X \in [V, V], \; v \in V.$$

Wektor $v_1 = k_1$ ma wagę ω_1

$$\varsigma(H)v_1 = [H, k_1] = [\tfrac{1}{2}\lambda_1[k_1, l_1], k_1] = \omega_1(H)$$

i jest pierwotny, gdyż jeśli X jest jednym z wektorów (9.47), to $\varsigma(X)k_1 = 0$.

Ogólniej, wektor

$$v_r = k_1k_2 \ldots k_r \quad \text{czyli (zob. (1.35) na str. 32)} \quad k_1 \wedge k_2 \wedge \cdots \wedge k_r$$

jest pierwotny dla każdego $r = 1, \ldots, \ell$. Dla każdego $r = 1, \ldots, 2\ell{+}1$ można utworzyć reprezentację

$$\wedge^r\varsigma : \mathfrak{g} \to \mathsf{End} \wedge^r V$$

taką, że jeśli $X \in [V, V]$ i $u_1, \ldots, u_r \in V$, to

$$\wedge^r\varsigma(X)(u_1 \wedge \cdots \wedge u_r) = (\varsigma(X)u_1) \wedge \cdots \wedge u_r + \cdots + u_1 \wedge \cdots \wedge \varsigma(X)u_r.$$

Jeśli $r < \ell$, to r-wektor v_r ma wagę ϖ_r gdyż

$$\begin{aligned}\wedge^r\varsigma(H)v_r =& [H, k_1] \wedge \cdots \wedge k_r + \cdots + k_1 \wedge \cdots \wedge [H, k_r] \\ =& (\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)v_r = \varpi_r(H)v_r.\end{aligned}$$

Ale dla $r = \ell$ wobec (9.49) mamy

$$\wedge^\ell\varsigma(H)v_\ell = 2\varpi_\ell(H)v_\ell,$$

więc reprezentacja $\wedge^\ell\varsigma$ nie jest podstawowa.

5.2.5. *Reprezentacja spinorowa.* Reprezentację podstawową o wadze ϖ_ℓ realizujemy, jako reprezentację w przestrzeni spinorów, w prosty sposób uogólniając konstrukcję przedstawioną w §1.2.

Rozszerzając zanurzenie $V \to \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$ do zanurzenia

$$\bigwedge L \to \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1),$$

definiujemy przestrzeń spinorów

$$S = \bigwedge L v_\ell \subset \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1) = \mathbb{C}(2^\ell),$$

która jest *minimalnym lewym ideałem* algebry $\mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$. Istotnie, pamiętając o zanurzeniu (1.38) mamy

$$K \bigwedge L \subset (\bigwedge L)K \oplus \bigwedge L, \quad L \bigwedge L \subset \bigwedge L,$$

oraz

$$e_{2\ell+1} = e_1 e_2 \dots e_{2\ell-1} e_{2\ell} = \mathrm{i}^\ell (k_1 + l_1)(k_1 - l_1) \dots (k_\ell + l_\ell)(k_\ell - l_\ell) \in \bigwedge K \bigwedge L,$$

więc, dla każdego $v \in V \subset \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1)$, zachodzi $vS \subset S$.

Reprezentacja spinorowa $\sigma : [V, V] \to \mathsf{End}\, S$ dana jest wzorem

$$\sigma(X)\varphi = X.\varphi, \quad \text{gdzie} \quad X \in [V, V] \subset \mathcal{C}\ell_0(2\ell+1), \quad \varphi \in S,$$

a kropka oznacza mnożenie elementów (parzystej) algebry Clifforda – czyli macierzy należących do $\mathbb{C}(2^\ell)$.

Spinor $v_\ell = k_1 \dots k_\ell$ jest pierwotnym elementem o wadze ϖ_ℓ gdyż, dla każdego i, zachodzi $[k_i, l_i]k_i = k_i$, więc

$$\begin{aligned}\sigma(H)v_\ell &= \textstyle\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2}\lambda_i [k_i, l_i] k_1 \dots k_\ell \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell) k_1 \dots k_\ell = \varpi_\ell(H) v_\ell,\end{aligned}$$

oraz, jeśli X jest jednym z elementów (9.47), to $\sigma(X)v_\ell = 0$.

5.3. Reprezentacje algebry $\mathsf{C}_\ell = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$. Na podstawie Przykładu 1.12 (str. 23) wiemy, że symplektyczna algebra Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C})$ składa się ze wszystkich macierzy

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}(2\ell), \quad A, B, C \in \mathbb{C}(\ell), \tag{9.50}$$

takich, że macierze B i C są symetryczne, $B^* = B$ i $C = C^*$. Podalgebra Cartana

$$\mathfrak{h} = \{\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \mid \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_\ell\} \subset \mathbb{C}(\ell)\}$$

jest ℓ-wymiarowa. Stosując oznaczenia takie jak w ustępie 1.8 i kładąc

$$E_i = E_{ii} - E_{i+\ell\, i+\ell},$$

element podalgebry Cartana można zapisać w postaci

$$H = \sum_i \lambda_i E_i$$

i wprowadzić bazę (ε_i) przestrzeni $\mathfrak{h}^*$ taką, że

$$\langle H, \varepsilon_i \rangle = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

$(\varepsilon_i)_{1,\dots,\ell}$ a z warunku $\langle H_i, \varpi_j \rangle = \delta_{ij}$ – wagi podstawowe, mianowicie $\varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$, $i = 1, \dots, \ell$.

Obliczając komutatory takie jak $[H, E_{i\,\ell+j} + E_{j\,\ell+i}]$ znajdujemy pierwiastki:

$$2\varepsilon_i, \ -2\varepsilon_i \ \ (1 \leqslant i \leqslant \ell),$$
$$\varepsilon_i + \varepsilon_j, \ \varepsilon_i - \varepsilon_j, \ -(\varepsilon_i + \varepsilon_j), \ -(\varepsilon_i - \varepsilon_j),$$

oraz bazę Cartana

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell, \ \alpha_\ell = 2\varepsilon_\ell.$$

Dodatnie pierwiastki to $2\varepsilon_i$ oraz $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, $i < j$. Np.

$$2\varepsilon_1 = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_{\ell-1}) + \alpha_\ell.$$

Kładąc

$$H_i = \mathcal{K}^{-1}(\alpha_i)$$

otrzymujemy bazę (H_i) podalgebry Cartana,

$$H_i = E_i - E_{i+1}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, \ell - 1 \text{ oraz } H_\ell = E_\ell.$$

Z równości

$$H = \textstyle\sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_1 + \dots + \lambda_i) H_i \quad \text{oraz} \quad \langle H_i, \varpi_j \rangle = \delta_{ij}$$

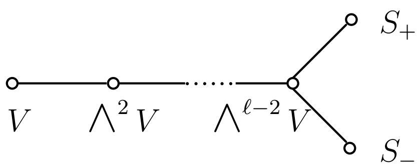
otrzymujemy wagi podstawowe,

$$\varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Diagram Dynkina algebry C_ℓ jest postaci 

Niech $\sigma : \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) \to \mathsf{End}\, V$, $V = \mathbb{C}^{2\ell}$, będzie reprezentacją definiującą; jest ona nieprzywiedlna, element $e_1 \in V$ jest pierwotny i ma wagę ϖ_1. Reprezentacja $\wedge^k \sigma : \mathfrak{sp}(2\ell, \mathbb{C}) \to \mathsf{End} \bigwedge^k V$ dla $k = 2, \dots, \ell$ jest rozkładalna i zawiera składową podstawową o wadze ϖ_k; zob. Rozdz. VIII §13.3 w [Bb] lub §17.2 w [**21**].

5.4. Reprezentacje algebry $\mathbf{D}_\ell = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$. Pokażemy, że dla $\ell \geqslant 3$ podstawowe reprezentacje algebry $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$ są jak następuje:



Tutaj $V = \mathbb{C}^{2\ell}$, a S_+ i S_- to dwie przestrzenie (reprezentacje) spinorów (Weyla), obie o wymiarze $2^{\ell-1}$. Konstrukcje przebiegają podobnie jak dla algebr B_ℓ. Używamy zanurzenia przestrzeni V w algebrę Clifforda $\mathcal{C}\ell(2\ell) = \mathbb{C}(2^\ell)$.

5.4.1. Algebrę D_ℓ można utożsamić z $[V,V] \subset \mathcal{C}\ell(2\ell,\mathbb{C})$. Wprowadzamy w V bazę Witta $(k_1,\ldots,k_\ell,l_1,\ldots,l_\ell)$, gdzie wektory zerowe k_i oraz l_i ($i = 1,\ldots,\ell$), są takie jak w § 5.2.2. Rozkład Witta jest $V = K \oplus L$. Jako bazę w D_ℓ można wziąć zbiór $\ell(2\ell-1)$ elementów (9.40). Podalgebra Cartana $\mathfrak{h}$ i baza przestrzeni $\mathfrak{h}^*$ są takie jak dla B_ℓ, zob. §5.2.3. Pierwiastki są postaci

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ \ \varepsilon_i - \varepsilon_j,\ \ -\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ \ -\varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad i < j.$$

Jako bazę Cartana można wziąc

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,\ \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \alpha_{\ell-1} = \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell \ \text{ oraz } \ \alpha_\ell = \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell.$$

Pierwiastki dodatnie są postaci $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ i $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ dla $i < j$, mianowicie

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1} \quad \text{dla} \quad i < j$$

oraz

$$\begin{aligned} \varepsilon_i + \varepsilon_j =& \varepsilon_i - \varepsilon_j + 2(\varepsilon_j - \varepsilon_{\ell-1}) + \alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell \quad \text{dla} \quad j \leqslant \ell - 2, \\ \varepsilon_i + \varepsilon_{\ell-1} =& \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_\ell \quad \text{dla} \quad i < \ell - 1, \\ \varepsilon_i + \varepsilon_\ell =& \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{\ell-2} + \alpha_\ell \quad \text{dla} \quad i < \ell - 1 \\ \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell =& \alpha_\ell. \end{aligned}$$

Podprzestrzeń $\bigoplus_{\alpha\in R^+} \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ ma jako bazę zbiór $\ell(\ell-1)$ elementów

$$k_i k_j,\ \ k_i l_j \ \ (1 \leqslant i < j \leqslant \ell).$$

Podobnie jak w §5.2.4 otrzymujemy

$$\begin{aligned} H_i =& \tfrac{1}{2}[k_i, l_i] - \tfrac{1}{2}[k_{i+1}, l_{i+1}] \quad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,\ell-1, \\ H_\ell =& \tfrac{1}{2}[k_{\ell-1}, l_{\ell-1}] + \tfrac{1}{2}[k_\ell, l_\ell]. \end{aligned}$$

Z warunku $\langle H_i, \varpi_j \rangle = \delta_{ij}$ znajdujemy wagi podstawowe,

$$\begin{aligned} \varpi_i &= \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i \quad \text{dla} \quad i \leqslant \ell - 2, \\ \varpi_{\ell-1} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\ell-1} - \varepsilon_\ell), \\ \varpi_\ell &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{\ell-1} + \varepsilon_\ell) \end{aligned}$$

Reprezentacje podstawowe buduje się podobnie jak dla algebr B_ℓ. Ogólnie, dla każdego $i = 1,\ldots,\ell$ jest reprezentacja w $\bigwedge^i V$ z wektorem pierwotnym $v_i = k_1 \ldots k_i$. Dla $i \leqslant \ell - 2$ ta reprezentacja jest nierozkładalna i ma wagę ϖ_i.

Reprezentacje w $\bigwedge^{\ell-1} V$ i $\bigwedge^\ell V$ nie są podstawowe,

$$[H, v_{\ell-1}] = (\varpi_{\ell-1} + \varpi_\ell)(H) v_{\ell-1}, \quad [H, v_\ell] = 2\varpi_\ell(H) v_\ell.$$

5.4.2. *ℓ-wektory samo- antysamo-dualne.* Niech $\eta \in \bigwedge^{2\ell} V$ będzie elementem objętości unormowanym tak, że $\eta^2 = 1$. Zastępując, w razie potrzeby, element η przez $-\eta$, można uzyskać

$$\eta k_1 \ldots k_\ell = k_1 \ldots k_\ell. \tag{9.51}$$

Przestrzeń $\bigwedge^\ell V$ rozkłada się na przestrzenie ℓ-wektorów samo- i antysamodualnych,

$$\bigwedge^\ell V = \bigwedge^\ell_+ \oplus V \bigwedge^\ell_- V,$$
$$\bigwedge^\ell_\pm V = \{w \in \bigwedge^\ell V \mid \eta.w = \pm w\}$$

Jeśli

$$X \in [V,V], \quad \text{to} \quad \eta.X.\eta^{-1} = X,$$

a stąd, dla $w \in \bigwedge^\ell V$ jest

$$\eta.[X,w] = [X,\eta.w]$$

czyli: działanie X zachowuje samo- (antysamo-) dualność ℓ-wektorów, więc reprezentacja $\bigwedge$ rozkłada się,

$$\bigwedge = \bigwedge_+ \oplus \bigwedge_-, \quad \bigwedge_\pm : [V,V] \to \mathsf{End} \bigwedge^\ell_\pm V.$$

Element $v_\ell = k_1 \dots k_\ell$ jest wektorem dominującym reprezentacji $\bigwedge^\ell_+$ o wadze $2\varpi_\ell$, a wektor $k_1 \dots k_{\ell-1} l_\ell$ odgrywa taką rolę dla reprezentacji $\bigwedge^\ell_-$ i ma wagę $2\varpi_{\ell-1}$.

5.4.3. *Reprezentacje spinorowe.* Rozkładamy przestrzeń $\bigwedge L$ na podprzestrzenie multiwekorów parzystego i nieparzystego stopnia,

$$\bigwedge L = \bigwedge^+ L \oplus \bigwedge L^-, \quad \bigwedge^+ L = \textstyle\sum_{0 \leqslant 2p \leqslant \ell} \bigwedge^{2p} L, \quad \bigwedge^- L = \textstyle\sum_{0 \leqslant 2p < \ell} \bigwedge^{2p+1} L,$$

$$\dim \bigwedge^+ L = \dim \bigwedge^- L = 2^{\ell-1},$$

i definiujemy $2^{\ell-1}$-wymiarowe przestrzenie spinorów jako

$$S_\pm = \bigwedge^\pm L.k_1 k_2 \dots k_\ell \subset \mathcal{C}\ell(2\ell, \mathbb{C}).$$

Wobec $\eta \bigwedge^\pm L \eta^{-1} = \pm \bigwedge^\pm L$ oraz (9.51) mamy: jeśli $\phi \in S_\pm$ i $v \in V$, to

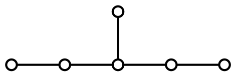
$$\eta.\phi = \pm\phi \quad \text{oraz} \quad v.\phi \in S_\mp.$$

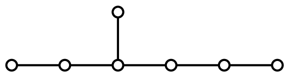
Wynika stąd, że $[V,V].S_\pm \subset S_\pm$, można więc zdefiniować reprezentacje algebry $[V,V]$ w przestrzeniach S_+ i S_- przez mnożenie w algebrze Clifforda: jeśli $X \in [V,V]$ i $\varphi \in S_\pm$, to $X.\varphi \in S_\pm$. Spinor $\phi_\ell = k_1 \dots k_\ell \in S_+$ jest elementem pierwotnym o wadze ϖ_ℓ. Podobnie spinor $\phi_{\ell-1} = l_\ell k_1 \dots k_\ell \in S_-$ ma wagę $\varpi_{\ell-1}$. Oba te spinory są czyste (*pure*, lub *simple* w terminologii Cartana [**10**]). Ogólniej, spinor $\phi \neq 0$ jest *czysty* jeśli przestrzeń

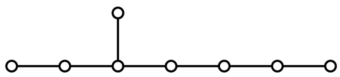
$$\{v \in V \mid v.\phi = 0\}$$

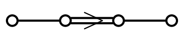
– która jest całkowicie zerowa – jest maksymalnego wymiaru, tzn. ℓ jeśli $\dim V = 2\ell$ albo $2\ell + 1$.

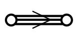
6. Diagramy Dynkina i wymiary algebr E, F, G

E_6

78

E_7

133

E_8

248

F_4

52

G_2


Zadania

Zadanie 9.1. Wiedząc, że reprezentacja $\bigwedge^\ell V$ $(V = \mathbb{C}^{2\ell})$ algebry $\mathsf{D}_\ell = \mathfrak{so}(2\ell, \mathbb{C})$ rozkłada się na sumę dwóch reprezentacji nieprzywiedlnych, znaleźć wagi dominujące obu tych reprezentacji.

Zadanie 9.2. Pokazać,że reprezentacja $\bigwedge^{\ell-1} V$ algebry, o której mowa w poprzednim zadaniu, występuje w rozkładzie na składniki nieprzywiedlne iloczynu $S_+ \otimes S_-$ reprezentacji spinorowych. W szczególności, dla $\ell = 2$, reprezentacja $S_+ \otimes S_-$ jest równoważna V.

1. R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York, 1967.
2. M. A. Akivis and B. A. Goldberg, *Élie Cartan (1869-1951)*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 123, American Mathematical Society, 1993.
3. H. Aslaksen, *Quaternionic determinants*, Mathematical Intelligencer **18** (1996), no. 3, 57–65.
4. J. C. Baez, *The octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **39** (2002), 145–205.
5. V. Bargmann, *Zur Theorie des Wasserstoffatoms: Bemerkungen zur gleichnamigen Arbeit von V. Fock*, Z. Physik **99** (1936), 576–582.
6. A. Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią*, Biblioteka Matematyczna t. 48, PWN, Warszawa, 1979.
7. A. Białynicki-Birula, *Zarys algebry*, Biblioteka Matematyczna t. 63, PWN, Warszawa, 1987.
8. M. Cahen, S. Gutt, and A. Trautman, *Pin structures and the modified Dirac operator*, J. Geom. Phys. **17** (1995), 283–297.
9. A. Cannas da Silva, *Symplectic geometry*, Handbook of differential geometry. Vol. II, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006, pp. 79–188.
10. É. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 643 et 701, Hermann, Paris, 1938, English transl.: *The Theory of Spinors*, Hermann, Paris 1966.
11. C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J. (2) **7** (1955), 14–66.
12. A. J. Coleman, *Groups and Physics – Dogmatic Opinions of a Senior Citizen*, Notices of the AMS **44** (1997), no. 1, 8–17.
13. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.
14. L. Corwin, Y. Ne'eman, and S. Sternberg, *Graded Lie algebras in mathematics and physics (Bose–Fermi symmetry)*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975), no. 3, 573–603.
15. S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four-dimensional topology*, J. Differential Geom. **18** (1983), 279–315.
16. E. B. Dynkin, *The structure of semi-simple algebras*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **2** (1947), no. 4(20), 59–127.
17. E. S. Fedorov, *The symmetry of regular systems of figures*, Zapiski Imperatorskogo S. Petersburgskogo Mineralogichesgo Obshchestva (Proceedings of the Imperial St. Petersburg Mineralogical Society) **28** (1891), 1–146, tłumaczenie angielskie: David and Katherine Harker (trans.), *Symmetry of Crystals*, American Crystallographic Association Monograph No. 7, Bufallo, N.Y.: American Crystallographic Association, 1971, str. 50-131.
18. V. Fock, *Zur Theorie der Wasserstoffatoms*, Z. Physik **98** (1935), 145–154.
19. P. G. O. Freund, *Introduction to supersymmetry*, Cambridge University Press, 1986.
20. A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms. Part I*, Indag. Math. **18** (1956), 338–359.
21. W. Fulton and J. Harris, *Representation theory: A first course*, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer, New York, 1991.
22. Robert Geroch, *Spinor structure of space-times in general relativity. I*, J. Mathematical Phys. **9** (1968), 1739–1744.
23. ______, *Spinor structure of space-times in general relativity. II*, J. Mathematical Phys. **11** (1970), 342–348.
24. H. Goldstein, *Prehistory of the "Runge–Lenz" vector*, Amer. J. Phys. **43** (1975), 737–738.
25. ______, *More on the prehistory of the Laplace or Runge–Lenz vector*, Amer. J. Phys. **44** (1976), 1123–1124.
26. R. Griess, *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982), 1–102.

27. V. Guillemin and S. Sternberg, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge U. P., 1984.
28. A. Haefliger, *Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **243** (1956), 558–560.
29. S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
30. L. Hulthén, *Über die quantenmechanische Herleitung der Balmerterme*, Z. Physik **86** (1933), 21–23.
31. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, 2nd ed., Springer, 1972.
32. L. Infeld and B. L. van der Waerden, *Die Wellengleichung des Elektrons in der Allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. **9** (1933), 380–402.
33. H. B. Lawson Jr. and M. L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton U. P., Princeton, 1989.
34. M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4ème sér. **1** (1968), 161–270.
35. M. Kervaire, *A Manifold which does not admit any Differentiable Structure*, Comm. Math. Helv. **34** (1960), 304–312.
36. W. Killing, *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Zweiter Theil*, Math. Ann. **33** (1869), 1–48.
37. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, vol. I and II, Interscience, New York, 1963 and 1969.
38. T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, G. T. M. Vol. 67, American Mathematical Society, 2005.
39. S. Mac Lane, *Categorical algebra*, Bull. Am. Math. Soc. **71** (1965), 40–106.
40. ———, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.
41. S. Lang, *Algebra*, PWN, Warszawa, 1984, (tłum. z ang.).
42. P. S. Laplace, *Traité de mécanique céleste*, vol. I Première Partie, Livre II, J. B. M. Duprot, 1799.
43. P. Libermann and C.-M. Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Mathematics and its Applications, vol. 35, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987, Translated from the French by B. E. Schwarzbach.
44. Ю. И. Манин, *Калибровочные поля и комплексная геометрия*, Наука, Москва, 1984.
45. J. E. Marsden and A. Weinstein, *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (1974), 121–130.
46. J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64** (1956), 399–405.
47. J. Milnor, *Spin structures on manifolds*, Enseign. Math. **9** (1963), 198–203.
48. H. Minkowski, *Die grundgleichungen für die electromagnetischen vorgänge in bewegten körpern.*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1908), 53–111, Minkowski, Hermann (1952) "Space and Time" in Lorentz, Hendrik A., Albert Einstein, Hermann Minkowski, and Hermann Weyl, The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity. New York: Dover, pp. 75-91.
49. F. D. Murnaghan, *The dimensions of the irreducible representations of a finite group*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37** (1951), 441–2.
50. E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Göttinger Nachr. (1918), 235–257.
51. W. Pauli, *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik.*, Z. Physik **36** (1926), 336–363.
52. R. Penrose, *A spinor approach to general relativity*, Ann. Physics **10** (1960), 171–201.

53. R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and space-time*, vol. 1 and 2, Cambridge U. P., Cambridge, 1984 and 1986.
54. S. Pokorski, *Gauge field theories*, Cambridge U. P., 2000.
55. A. M. Schönflies, *Krystallsysteme und Krystallstructur*, Teubner, Leipzig, 1891.
56. J. A. Schouten, *Zur generellen Feldtheorie. Raumzeit and Spinraum*, Z. Physik **81** (1933), 405–417.
57. S. Sternberg, *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
58. E. Study, *Zur Theorie der linearen Gleichungen*, Acta Math. **42** (1920), 1–6.
59. J. L. Synge, *Relativity: The special theory*, North-Holland, Amsterdam, 1955.
60. A. H. Taub, *Review of the book* Relativity: The special theory *by J. L. Synge. New York, Interscience,1956.*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 420–423.
61. A. Trautman, *The geometry of gauge fields*, Czech. J. Phys. **B29** (1979), 107–116.
62. ———, *Clifford algebras and their representations*, Encyclopedia of Mathematical Physics Vol. 1 (J.-P. Françoise, G. L. Naber and S.T. Tsou, ed.), Elsevier, Oxford, 2006, p. 518.
63. V. S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 2004.
64. B. L. van der Waerden, *Spinoranalyse*, Nach. Ges. Wiss. Götingen, math. phys. Kl. (1929), 100–109, Presented by R. Courant on 26 July 1929.
65. ———, *Algebra II*, Springer-Verlag, Berlin, 1967, Fünfte Auflage.
66. ———, *Algebra I*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Achte Auflage der Modernen Algebra.

Skorowidz