

Zadania domowe z Teorii Grup w Fizyce, seria 2

Zad. 1. Wykorzystując tablicę charakterów grupy permutacji S_4 rozłożyć iloczyny tensorowe reprezentacji nieprzywiedlnych na sumy reprezentacji nieprzywiedlnych.

Zad. 2. Skonstruować tablicę charakterów wszystkich zespolonych, nieprzywiedlnych reprezentacji grupy D_4 oraz grupy Pauliego $\mathcal{P}$, zdefiniowanej w poprzedniej serii zadań. Rozłożyć iloczyny tensorowe $\tau_i \otimes \tau_j$ reprezentacji nieprzywiedlnych τ_i tych grup na sumy proste reprezentacji nieprzywiedlnych.

Zad. 3. Niech ρ będzie reprezentacją regularną grupy D_3 . Wyznaczyć i wypisać wszystkie macierze reprezentacji ρ w bazie standardowej e_a takiej, że $e_a(b) = \delta_{ab}$, $a, b \in D_3$. Skonstruować endomorfizmy P_i stanowiące układ operatorów rzutowych na podprzestrzenie $V_i \subset V$, w których działają reprezentacje nieprzywiedlne τ_i grupy D_3 . Znaleźć bazy przestrzeni V_i .

Zad. 4. Pokazać, że następujący zbiór komutatorów

$$\begin{array}{llll} [e_1, e_2] = e_5, & [e_1, e_3] = e_6, & [e_1, e_4] = e_7, & [e_1, e_5] = -e_8, \\ [e_2, e_3] = e_8, & [e_2, e_4] = e_6, & [e_2, e_6] = -e_7, & [e_3, e_4] = -e_5, \\ [e_3, e_5] = -e_7, & [e_4, e_6] = -e_8, & \text{pozostałe} & [e_i, e_j] = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 8) \end{array}$$

zadaje strukturę 8-wymiarowej algebry Liego $\mathfrak{g}$. Znaleźć podalgebrę $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Zad. 5. Udowodnić, że algebra $\mathfrak{o}(3)$ jest prosta.

Zad. 6. Znaleźć 2-wymiarową reprezentację zespolonej algebry $sl(2, \mathbb{C})$. Wyznaczyć taką jej bazę $\{H, X_1, X_2\}$, że $ad_H X_i := [H, X_i] = \alpha_i X_i$ (bez sumowania po i), $i = 1, 2$, $\alpha_i = \text{const}$.

Zad. 7. Znaleźć algebrę grupy $SU(3)$ i wyznaczyć jej stałe struktury.

Zad. 8. Znaleźć obraz algebry $sl(2, \mathbb{R})$ przy odwzorowaniu $\exp : sl(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$. Czy funkcja $\exp$ w tym przypadku jest surjekcją, injekcją?

Zad. 9. Wyznaczyć algebrę grupy izometrii dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej i Minkowskiego.

Wskazówka: Grupa izometrii jest iloczynem półprostym grupy obrotów i grupy przesunięć i można ją reprezentować w postaci macierzy

$$\begin{pmatrix} R & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie R jest macierzą obrotu, a $\vec{v}$ przesunięciem.

Zad. 10. Znaleźć formę Killinga algebry $gl(n, \mathbb{R})$. Wybrać bazę $(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$.

Zad. 11. Pokazać, że forma Maurera-Cartana ω grupy $SU(2)$ sparametryzowanej następująco:

$$\text{i) } SU(2) \ni g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

$$\text{ii) } SU(2) \ni g = \cos(\psi/2) + i \sin(\psi/2) n_i \sigma_i, \quad n_i n_i = 1$$

rozkłada się w bazie (e_i) algebry $su(2)$. W przypadku ii) sparametryzować n_i oraz wyznaczyć formę Maurera-Cartana $\omega = \omega^i e_i$, lewoniezmiennicze pola wektorowe i lewoniezmienniczą miarę na grupie $SU(2)$.

Zad. 12. Jakim elementom grupy $SU(2)$ odpowiadają obroty wokół osi X, Y, Z przy homomorfizmie $h : SU(2) \rightarrow SO(3)$? Pokazać, że $\ker h = \{-\mathbb{I}, \mathbb{I}\}$.

Zad. 13. Niech

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + ix_4 & x_2 - ix_3 \\ -x_2 - ix_3 & x_1 - ix_4 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Udowodnić, że

$$\sigma(\mathbf{x}) \mapsto a\sigma(\mathbf{x})b^\dagger,$$

gdzie $a, b \in SU(2)$, zadaje homomorfizm

$$h : SU(2) \times SU(2) \rightarrow O(4).$$

Znaleźć jądro tego homomorfizmu oraz obraz elementu $(a_0, b_0) \in SU(2) \times SU(2)$, gdzie

$$a_0 = \begin{pmatrix} e^{i(\lambda+\omega)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\lambda+\omega)} \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} e^{i(\lambda-\omega)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\lambda-\omega)} \end{pmatrix}, \quad \lambda, \omega \in \mathbb{R}.$$