Zadania domowe z Teorii Grup, seria 1

Zad.1 W zbiorze $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych definiujemy działanie $\heartsuit$ nastepujaco: $x \heartsuit y = x + (-1)^x y$. Sprawdzić, czy $(\mathbb{Z}, \heartsuit, 0)$ jest grupą nieabelową.

Zad.2 Niech $(G, \cdot, 1)$ jest dowolną grupą i g jest ustalonym elementem G. Określić na zbiorze G nowe działanie $\spadesuit$ tak, by spełnione były następujące dwa warunki: *i)* $(G, \spadesuit, g)$ jest grupą (z elementem neutralnym g), *ii)* odwzorowanie $f : G \to G$, $f(x) = xg^{-1}$ jest izomorfizmem $(G, \spadesuit, g)$ na $(G, \cdot, 1)$.

Zad.3 W zbiorze $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 1\}$ określamy działanie $*$ jak następuje: $a * b = ab - a - b + 2$. Czy zbiór A z tak określonym działaniem $*$ jest grupą? Jeśli tak to znaleźć element neutralny oraz element odwrotny do dowolnego elementu $g \in A$, a także izomorfizm $h : \mathbb{R}_+ \to A$, gdzie $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ jest grupą ze zwykłym mnożeniem.

Zad.4 Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G. Pokazać, iż relacja

$$a \equiv a' \quad \Leftrightarrow \quad \text{"istnieją elementy } b_1 \in H_1 \text{ i } b_2 \in H_2 \text{ takie, że } a' = b_1 a b_2\text{"}$$

jest relacją równoważności w G; klasy równoważności ze względu na tę relację nazywają się podwójnymi warstwami.

Zad.5 Ile elementów posiada grupa G generowana przez 2 elementy a i b, które spełniają następujące relacje: $a^{-1}ba = b^2$, $b^{-1}ab = a^2$?

Zad.6 Niech $G = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$ z działaniem

$$x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 & \text{dla} \quad x_1 + x_2 < 1 \\ x_1 + x_2 - 1 & \text{dla} \quad x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Udowodnić, że $(G, \oplus)$ jest grupą (znaleźć element neutralny i odwrotny do dowolnego elementu). Pokazać, że każdy element ma skończony rząd.

Zad.7 Pokazać, że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to kwadrat k-cyklu jest cyklem. Znaleźć kwadrat cyklów: (12345678) i (123456789).

Zad.8 Niech G będzie grupą, o jedności oznaczonej przez 1, generowana przez 3 elementy ε, e_1, e_2, spełniające następujące relacje

$$\varepsilon^2 = 1\ , \quad e_i^2 = 1\ , \quad \varepsilon e_i = e_i \varepsilon \quad \text{dla} \quad i = 1, 2$$
$$\text{oraz} \quad e_i e_j = \varepsilon e_j e_i \quad \text{dla} \quad i \neq j = 1, 2\ .$$

Jaki jest rząd grupy G? Zapisać wszystkie elementy G przy użyciu generatorów. Znaleźć klasy elementów sprzężonych w G.

Zad.9 Znaleźć orbity działania (naturalnego) grupy $SU(2)$ na $\mathbb{C}^2$ oraz $SO(2)$ na $\mathbb{R}^2$. Działanie zdefiniowane jest następująco: $SU(2) \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $(a, x) \to ax$, gdzie $a \in SU(2)$, $x \in \mathbb{C}^2$ oraz analogicznie dla grupy $SO(2)$.

Zad.10 Pokazać, że zbiór $G_x = \{a \in G : \gamma_a(x) = x\}$, gdzie γ zadaje działanie grupy G na zbiorze X, jest podgrupą w G.

Zad.11 Niech $(g, x) \mapsto gx \in X$ zadaje działanie grupy G na zbiorze X. Pokazć, że stabilizatory $G_x = \{g \in G :\ gx = x\}$ wszystkich punktów zbioru jednorodnego X są do siebie sprzężone, tzn. $G_{gx} = gG_x g^{-1}$.

Zad.12 Niech x^G określa klasę sprzężoności elementu $x \in G$. Pokazać, że $\#G = \#Z(G) + \sum_{i=q+1}^{n} \#(G/C(x_i^G))$, gdzie $C(x_i^G)$ jest zbiorem elementów G, które są przemienne z x_i^G. Grupa G posiada n klas sprzężoności, w tym q klas jednoelementowych.

Zad.13 Pokazać, że jeżeli H jest podgrupą $Z(G)$ i G/H jest grupą cykliczną to grupa G jest abelowa.

Adam Szereszewski