Zadania domowe z Teorii Grup, seria 2

Zad.1 Niech $\rho_{\mu\nu}$ będą elementami macierzowymi nieprzywiedlnej reprezentacji ρ skończonej grupy G. Obliczyć $\sum_{a\in G}\rho_{\mu\nu}(a)$.

Zad.2 Pokazać, że dla nieprzywiedlnych charakterów χ_i skończonej grupy G zachodzi relacja

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C(g_i)|}=\delta_{rs}\qquad r,s=1,2,3,\ldots,p\ ,$$

gdzie elementy $g_1,g_2,\ldots,g_p$ są reprezentantami klas sprzężoności grupy G, a $C(g_i)$ zbiorem elementów G przemiennych z g_i.

Zad.3 Niech χ będzie charakterem reprezentacji skończonej grupy G, a g elementem rzędu 2. Pokazać, że $\chi(g)$ jest liczbą całkowitą oraz

$$\chi(g)\equiv\chi(e)\ mod\ 2\ .$$

Zad.4 Niech χ będzie nieprzywiedlnym charakterem skończonej grupy G, a $z\in Z(G)$ będzie elementem rzędu m. Udowodnić, że istnieje m-ty pierwiastek z jedynki $\lambda\in\mathbb{C}$ taki, że zachodzi relacja

$$\chi(zg)=\lambda\chi(g)\ ,\qquad \forall g\in G\ .$$

Zad.5 Niech χ będzie charakterem reprezentacji grupy G. Pokazać, że $(\chi_{reg},\chi)=\chi(e)$.

Zad.6 Niech χ będzie charakterem reprezentacji ρ grupy G. Co możemy powiedzieć o rozkładzie ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych, jeśli $(\chi,\chi)=1,2,3,4$?

Zad.7 Znaleźć tablice charakterów wszystkich zespolonych, nieprzywidelnych reprezentacji grup: $\mathbb{Z}_4$, D_4, A_4. Rozłożyć iloczyny tensorowe tych reprezentacji na sumy proste.

Zad.8 Niech G będzie grupą, o jedności oznaczonej przez 1, generowana przez 4 elementy ε,e_1,e_2,e_3, spełniające następujące relacje

$$\varepsilon^2=1\ ,\quad e_i^2=1\ ,\quad \varepsilon e_i=e_i\varepsilon\quad \text{dla}\quad i=1,2,3$$
$$\text{oraz}\quad e_ie_j=\varepsilon e_je_i\quad\text{dla}\quad i\neq j=1,2,3\ .$$

Skonstruować tablicę charakterów wszystkich zespolonych, nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G.

Zad.9 Niech G będzie grupą generowaną przez dwa elementy x, y:

$$G=\langle x,y:\ x^5=y^2=e,\ y^{-1}xy=x^{-1}\rangle.$$

a) Znaleźć rząd grupy G.

ą) Zapisać wszystkie elementy G za pomocą generatorów.

b) Znaleźć klasy elementów sprzężonych.

c) Napisać tablicę charakterów wszystkich zespolonych , nieprzywiedlnych reprezentacji grupy G.

ć) Niech τ_i będzie zespoloną, nieprzywiedlną reprezentacją G. Rozłożyć $\tau_i\otimes\tau_i$ na sumę prostą reprezentacji τ_i.

d) Dana jest 5-wymiarowa reprezentacja ρ grupy G:

$$\rho(x)=\begin{pmatrix}\gamma&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&\gamma^{-1}&0&0\\0&0&0&\gamma^{-2}&0\\0&0&0&0&\gamma^2\end{pmatrix},\quad \rho(y)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \text{gdzie}\quad \gamma=e^{\frac{2\pi i}{5}}.$$

Rozłożyć reprezentację ρ na sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

Adam Szereszewski