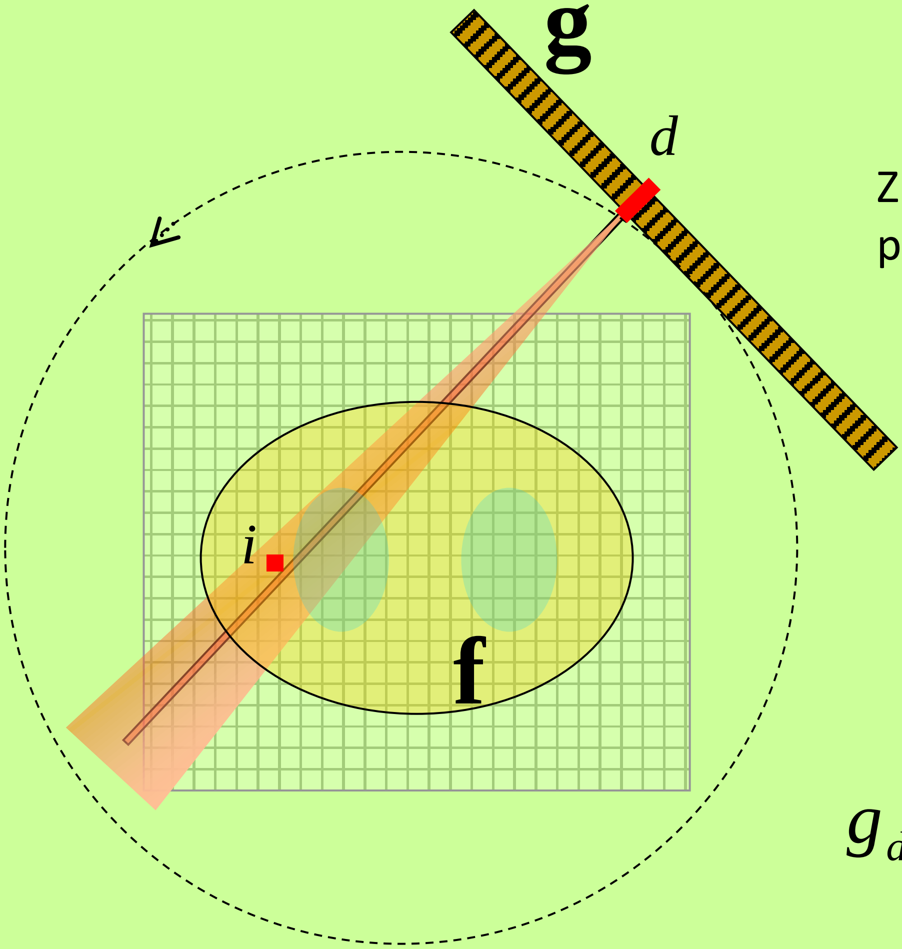
Laboratorium Technik Obrazowania

Krzysztof Kacperski

Zakład Fizyki Medycznej, Centrum Onkologii - Instytut im. Marii Skłodowskiej-Curie

Dyskretyzacja – problem liniowy



Problem:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

Zmierzone projekcje (dane)

Macierz systemu

Rozkład aktywności (niewiadoma)

Układ równań liniowych

h_{id} – prawdopodobieństwo detekcji fotonu z voksela i obiektu w pikselu d detektora

$$g_d = \sum_{i=1}^{N} h_{di} f_i$$

$d = 1,2,\ldots,D$

Rozmiary obiektów:

$\mathbf{g}$: ~ 100x100x100

$\mathbf{f}$: ~ 100x100x100

$\mathbf{H}$: ~ 10^6x10^6

Metody statystyczne

Problem estymacji:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\,\mathbf{f}$$

Próba statystyczna (wektor losowy)

Macierz systemu (dana – stała)

Parametry modelu (zmienna szukana)

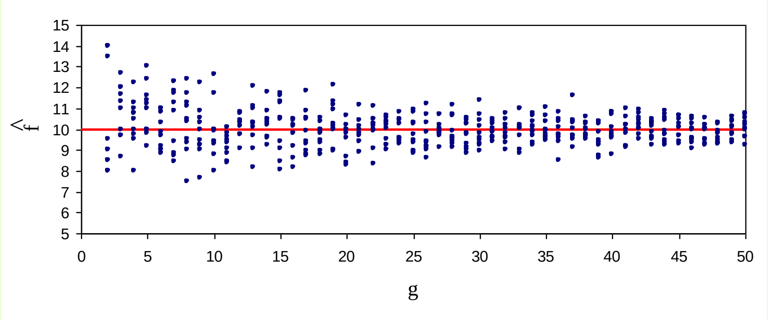
Znaleźć wektor parametrów $\hat{\mathbf{f}}$ - estymator, który „najlepiej pasuje" do zmierzonej próby losowej $\mathbf{g}$

Metody (kryteria) wyznaczania estymatorów:

- Metoda momentów $\hat{\mathbf{f}}: \quad g_d = \sum_{i=1}^{N} h_{di}\,\hat{f}_i \equiv E[g_d]$ ➡ FBP, ART
- Metoda najmniejszych kwadratów $\hat{\mathbf{f}} = \arg\min_{\mathbf{f}} \sum_{d=1}^{D}\left(g_d - \sum_{i=1}^{N} h_{di}\,f_i\right)^2$ ➡ WLS
- Metoda największej wiarygodności (maximum likelihood – ML) $\hat{\mathbf{f}} = \arg\max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{g};\mathbf{f})$ ➡ MLEM

Metody statystyczne

Pożądane cechy estymatorów:



- nieobciążoność $\mathrm{E}[\hat{\mathbf{f}}] = \mathbf{f}$
- zgodność $\hat{\mathbf{f}} \xrightarrow[g_d \to \infty]{} \mathbf{f}$
- efektywność $e(\hat{\mathbf{f}}) = \dfrac{\mathrm{var}(\hat{\mathbf{f}}_{\max\,eff})}{\mathrm{var}(\hat{\mathbf{f}})} \to 1$

Twierdzenie (nierówność) Cramera-Rao:

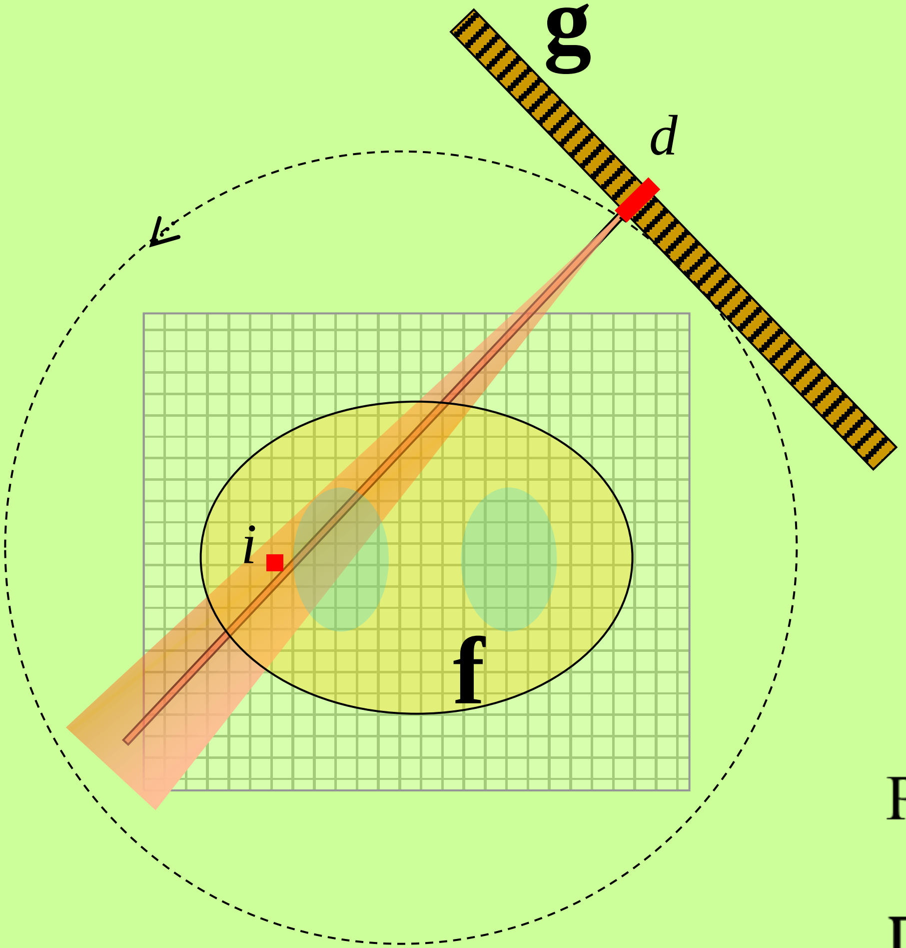
Wariancja dowolnego estymatora nieobciążonego $\hat{\mathbf{f}}$ spełnia nierówność:

$$\mathrm{var}(\hat{f}_i) \geq \frac{1}{E\left[\left(\dfrac{\partial \ln P(g, f_i)}{\partial f_i}\right)^2\right]} \equiv \frac{1}{I(f_i)} \equiv \mathrm{var}(\hat{f}_{i\ \max eff})$$

$I(f)$ – informacja Fishera

Estymator maksymalnej wiarygodności jest estymatorem nieobciążonym, zgodnym, o maksymalnej efektywności

Statystyka rozpadów promieniotwórczych



Średnia liczba zliczeń w pikselu d detektora:

$$\overline{g_d} = \sum_{i=1}^{N} h_{di} f_i$$

Rozkład Poissona prawdopodobieństwa zliczeń :

$$\Pr(g_d; \overline{g_d}) = \frac{\overline{g_d}^{\,g_d} \exp(-\overline{g_d}\,)}{g_d!}$$

Funkcja wiarygodności :

$$\Pr(\mathbf{g}; \mathbf{f}) = \prod_{d=1}^{D} \frac{\overline{g_d}^{\,g_d} \exp(-\overline{g_d}\,)}{g_d!} =$$

$$\prod_{d=1}^{D} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} h_{di} f_i\right)^{g_d} \exp\left(-\sum_{i=1}^{N} h_{di} f_i\right)}{g_d!}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg\max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{g};\mathbf{f}) = \arg\max_{\mathbf{f}} \log[P(\mathbf{g};\mathbf{f})]$$

➡ MLEM

Metoda ML-EM

Jak obliczyć estymator maksymalnej wiarygodności?

Algorytm EM (expectation maximisation): (Dempster, Laird, Rubin 1977)

Estymacja na podstawie „niekompletnych” danych statystycznych

s_{di} — liczba fotonów wyemitowanych z voksela i zarejestrowanych w pikselu d detektora – dane kompletne

$$g_i = \sum_{i=1}^{N} s_{di} \qquad \mathrm{E}[s_{di}] = h_{di} f_i$$

krok E: Oblicz wartość oczekiwaną funkcji wiarygodności:

$$\underset{\mathbf{s}\,|\,\mathbf{g};\hat{\mathbf{f}}^{(n)}}{\mathrm{E}}[\ \ln(P(\mathbf{s};\mathbf{f})\ ]$$

krok M: Kolejną estymację wybierz jako:

$$\hat{\mathbf{f}}^{(n+1)} = \arg\max_{\mathbf{f}} \underset{\mathbf{s}\,|\,\mathbf{g};\hat{\mathbf{f}}^{(n)}}{\mathrm{E}}[\ \ln(P(\mathbf{s};\mathbf{f})\ ]$$

Można pokazać, że algorytm EM zwiększa funkcję wiarygodności w każdym kroku, tzn.

$$P(\mathbf{g};\hat{\mathbf{f}}^{(n+1)}) \geq P(\mathbf{g};\hat{\mathbf{f}}^{(n)})$$

Metoda ML-EM

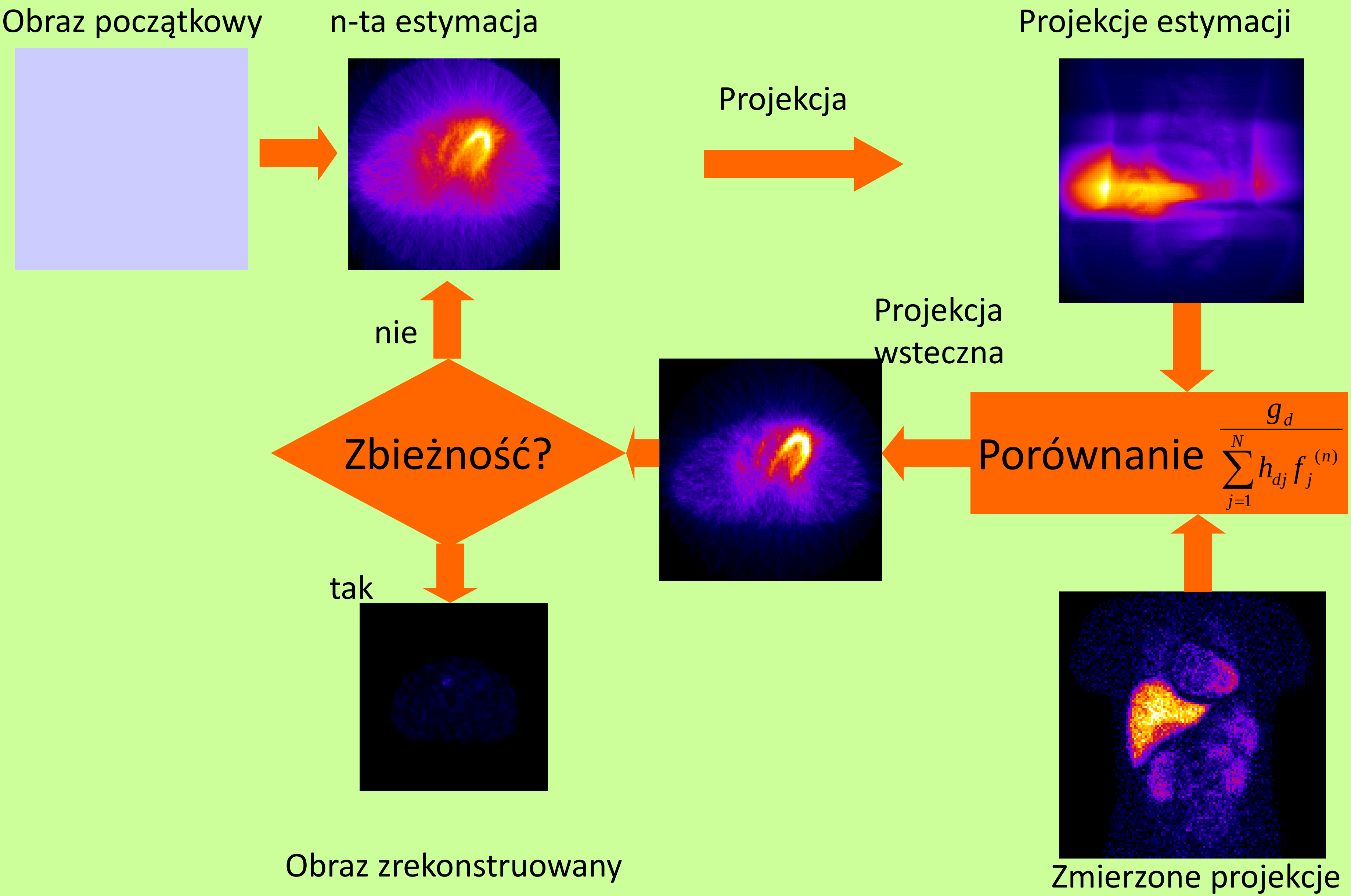
Rozwiązanie -
wzór iteracyjny:

$$f_k^{(n+1)} = f_k^{(n)} \frac{1}{\sum_{d=1}^{D} h_{dk}} \sum_{d=1}^{D} \left[h_{dk} \frac{g_d}{\sum_{j=1}^{N} h_{dj} f_j^{(n)}} \right]$$

$$\boxed{\text{Nowa estymacja obrazu}} = \boxed{\text{Poprzednia estymacja obrazu}} \cdot \frac{1}{\boxed{\text{Norma}}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{Zmierzona projekcja}}}{\boxed{\text{Estymowana projekcja}}} \right)$$

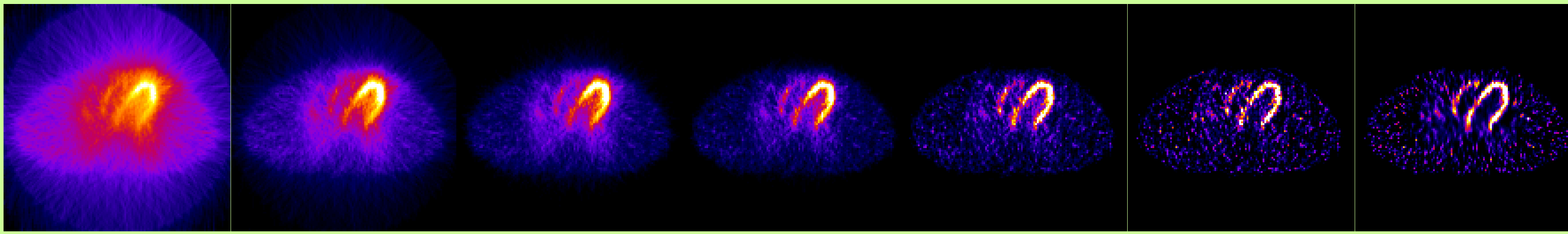
Średnia ważona
po wszystkich projekcjach

Rekonstrukcja iteracyjna ML-EM



Rekonstrukcja iteracyjna ML-EM

Iteracje:



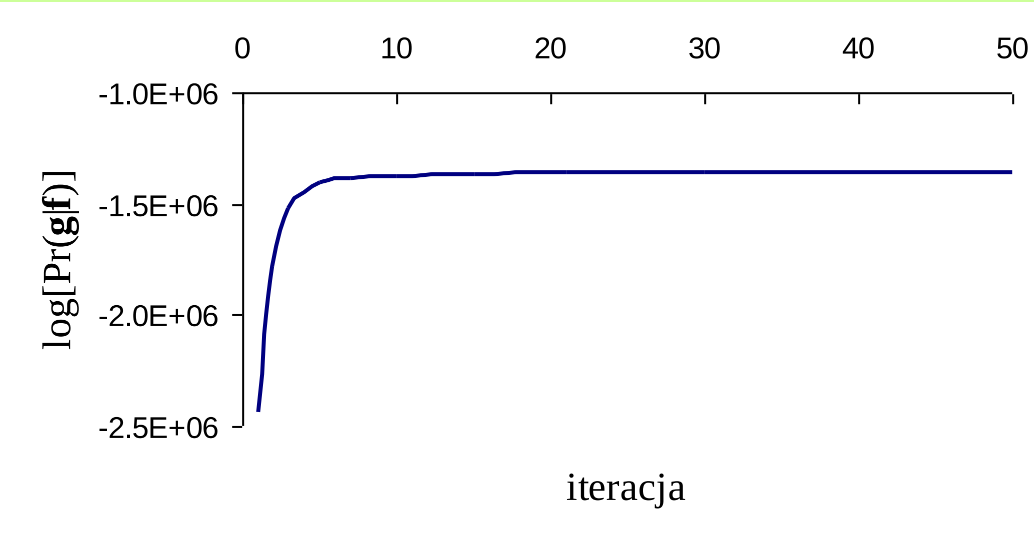
1 2 3 5 10 20 50

Funkcja wiarygodności:

$$\Pr(\mathbf{g};\hat{\mathbf{f}}^{(n)}) = \prod_{d=1}^{D} \Pr(g_d;\hat{\mathbf{f}}^{(n)}) =$$

$$= \prod_{d=1}^{D} \frac{E[g_d]^{g_d} \exp(-E[g_d])}{g_d!}$$

$$\mathrm{E}[g_d] = \sum_{i=1}^{N} h_{di} \hat{f}_i^{(n)}$$



Metoda ML-EM - właściwości

$$f_k^{(n+1)} = f_k^{(n)} \frac{1}{\sum_{d=1}^{D} h_{dk}} \sum_{d=1}^{D} \left[h_{dk} \frac{g_d}{\sum_{j=1}^{N} h_{dj} f_j^{(n)}} \right]$$

- Jeśli $f^{(0)} \geq 0$ to $f^{(n)} \geq 0$ dla każdego n (nie ma ujemnych wartości pikseli)
- Jeśli $f^{(k)} = 0$ to $f^{(n)} = 0$ dla każdego $n > k$
- Metoda nieliniowa: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1} + \boldsymbol{g_2}) \neq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_1}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g_2})$

MLEM vs FBP

analityczne

Filtrowana projekcja wsteczna (FBP)

- oparta na transformacji Fouriera
- liniowa
- szybka
- zakłada uproszczony model fizyczny
- artefakty „prążkowe” przy małej liczbie zliczeń

statystyczne (iteracyjne)

Metoda ML-EM

- uwzględnia statystyczny charakter zmierzonych danych
- pozwala uwzględnić dokładny model fizyczny
- znacznie lepsza jakość obrazu – mniejszy szum
- nieliniowa
- Wolna; wymaga dużej mocy obliczeniowej

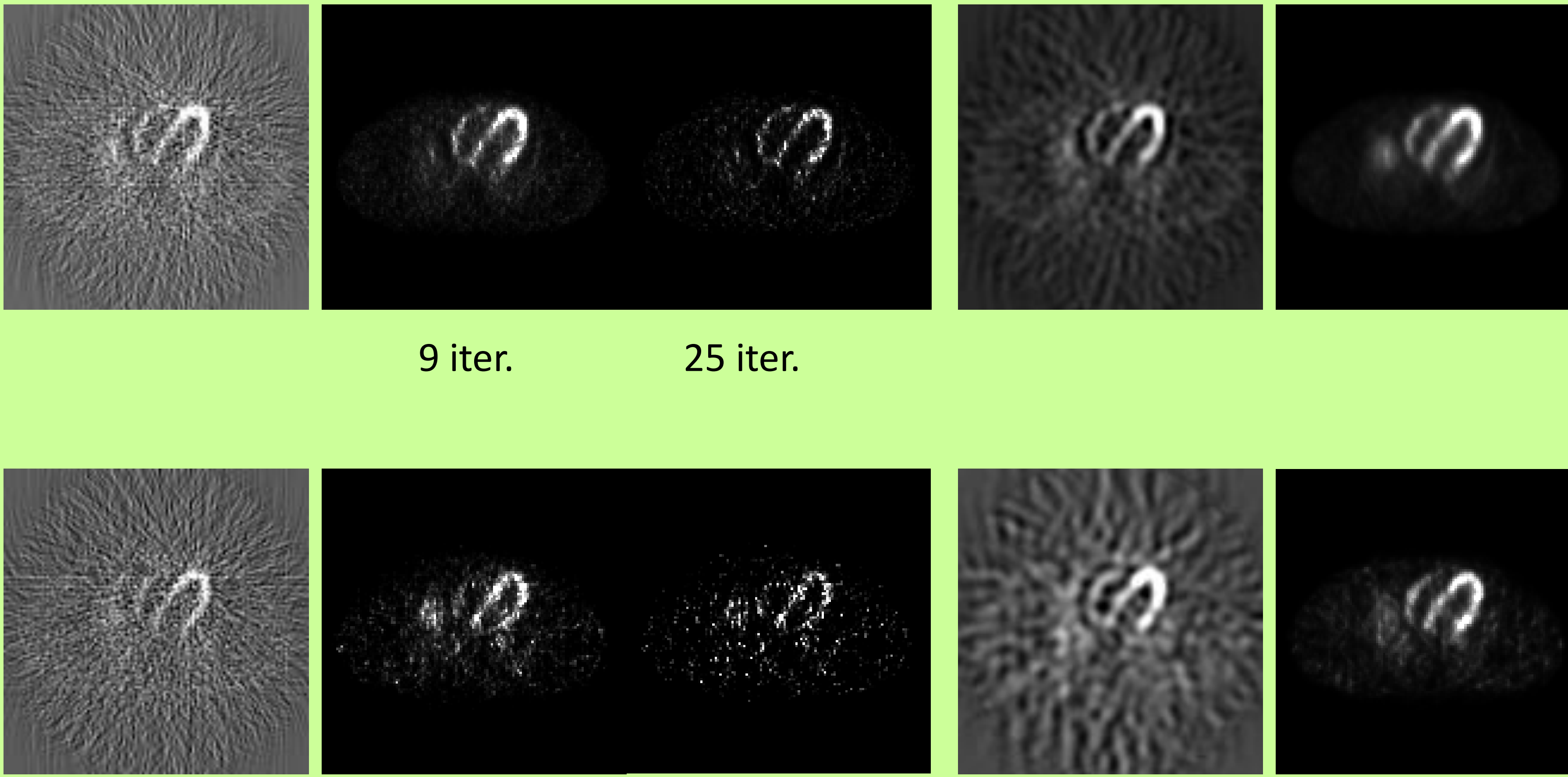
MLEM vs FBP

FBP MLEM FBP + filtr MLEM + filtr

30 min

9 iter. 25 iter.

5 min



Regularyzacja obrazów

„Surowe” metody rekonstrukcji (zarówno analityczne jak i statystyczne) dają zwykle obraz wysoce zaszumiomy. Potrzebne są metody redukcji szumu, zwykle kosztem (możliwie niewielkiego) pogorszenia zdolności rozdzielczej („ostrości”) obrazu.

- Filtrowanie (w dziedzinie współrzędnych obrazu lub częstotliwości przestrzennych)
  - w dziedzinie częstotliwości przestrzennych
  - w dziedzinie współrzędnych obrazu – splot z funkcją (jądrem) filtującą
  - post-iteracyjne
  - śróditeracyjne
- Wykonanie niewielkiej liczby iteracji
- Rekonstrukcja statystyczna MAP (maximum a posteriori)

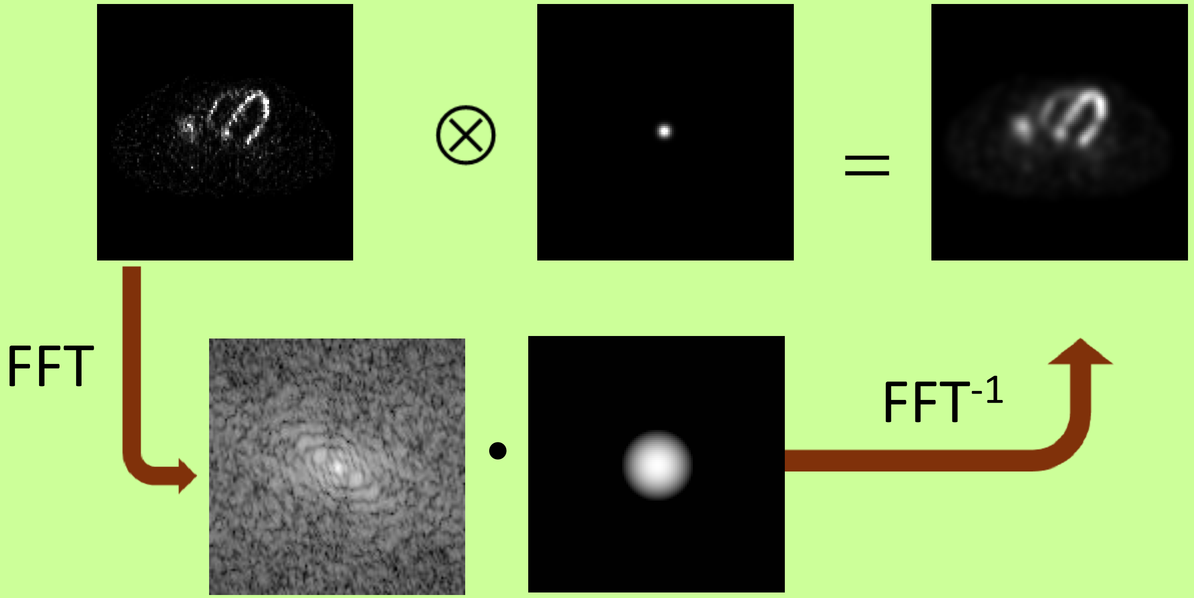
Filtrowanie

W dziedzinie współrzędnych obrazu

$$f_R = f(x,y,z) \otimes w(x,y,z)$$
$$= \iiint f(x-x', y-y', z-z')\, w(x',y',z')\, dx'\, dy'\, dz'$$

W dziedzinie częstotliwości

$$f_R = \mathcal{F}^{-1}\left[F\left(\nu_x,\nu_y,\nu_z\right) W\left(\nu_x,\nu_y,\nu_z\right)\right]$$



Filtrowanie

Post-rekonstrukcyjne:

$$f_k^{(n+1)} = f_k^{(n)} \frac{1}{\sum_{d=1}^{D} h_{dk}} \sum_{d=1}^{D} \left[h_{dk} \frac{g_d}{\sum_{j=1}^{N} h_{dj} f_j^{(n)}} \right] \Rightarrow \boldsymbol{f}^{(final)} \Rightarrow \boldsymbol{f}^{(final)} \otimes \boldsymbol{w}$$

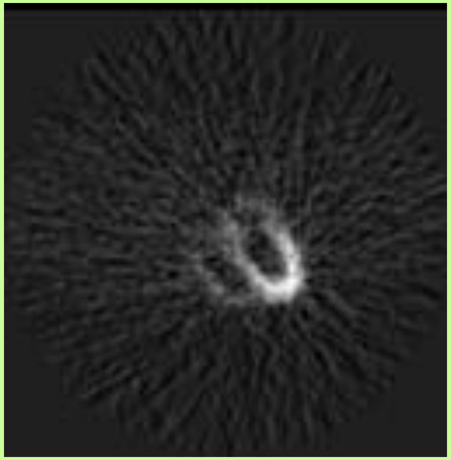
Między-iteracyjne:

$$f_k^{(n+1)} = f_k^{(n)} \frac{1}{\sum_{d=1}^{D} h_{dk}} \sum_{d=1}^{D} \left[h_{dk} \frac{g_d}{\sum_{j=1}^{N} h_{dj} f_j^{(n)}} \right]$$

$$\boldsymbol{f}^{(n)} \otimes \boldsymbol{w}$$

FBP - regularyzacja

Tylko filrt rampowy



$$f(x,y)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^{-1}\left[|\nu|\,P(\nu,\phi)\right]d\phi$$

Nadmierny szum

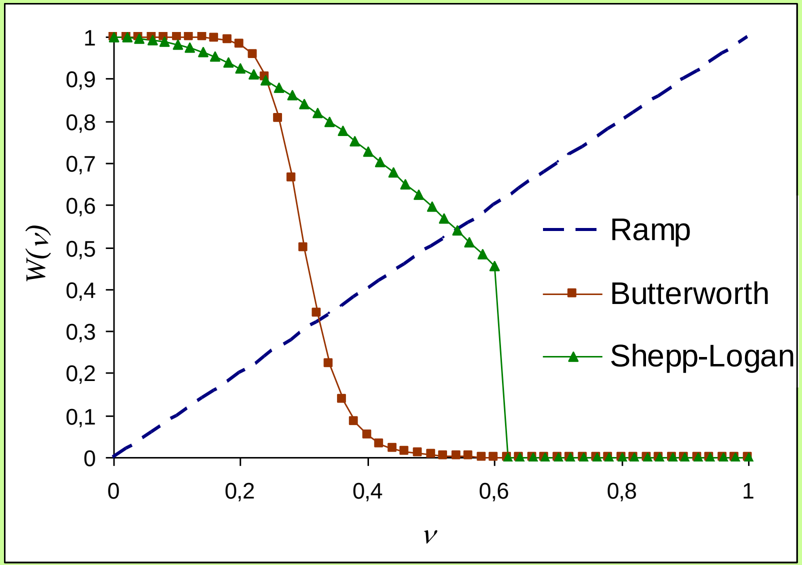
$$f(x,y)=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^{-1}\left[W(\nu)|\nu|\,P(\nu,\phi)\right]d\phi$$

Filrt dolnoprzepustowy

Filrt Butterwortha, $\nu_c=0.25\nu_N$

Butterworth: $$W(\nu)=\frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{2k}}$$

Shepp-Logan $$W(\nu)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)$$



Regularyzacja - rekonstrukcja MAP (Maximum a Posteriori)

ML: $$\hat{\mathbf{f}} = \arg\max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{g};\mathbf{f})$$

MAP: $$\hat{\mathbf{f}} = \arg\max_{\mathbf{f}} P(\mathbf{f} \mid \mathbf{g})$$

$$P(\mathbf{f} \mid \mathbf{g}) = \frac{P(\mathbf{f} \cap \mathbf{g})}{P(\mathbf{g})} = \frac{P(\mathbf{g} \mid \mathbf{f}) P(\mathbf{f})}{P(\mathbf{g})}$$

$$\hat{\mathbf{f}} = \arg\max_{\mathbf{f}} \{\log P(\mathbf{g} \mid \mathbf{f}) + \log P(\mathbf{f})\}$$

Funkcja kosztu Gibbsa:

$$P(\mathbf{f}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta U(\mathbf{f})\right)$$

$$U(f) = \sum_{i,j} w_{ij} V(f_i - f_j)$$

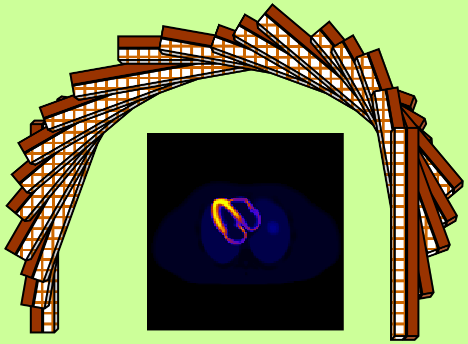
$$V(x) = x^2$$

Algorytm MAP:

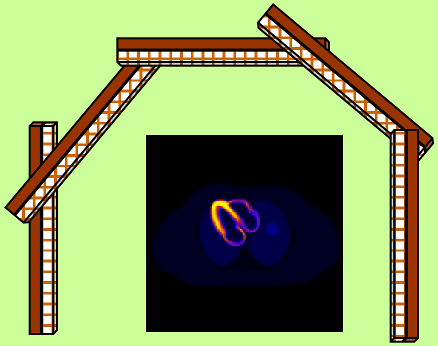
$$f_k^{(n+1)} = \frac{f_k^{(n)}}{\sum_{d=1}^{D} h_{dk}} \sum_{d=1}^{D} \left[h_{dk} \frac{g_d}{\sum_{j=1}^{N} h_{dj} f_j^{(n)} + \beta \frac{\partial U(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}} \right]$$

Przyspieszanie algorytmów iteracyjnych
Algorytm OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximisation)

ML-EM



OSEM



RBI - EM

RAMLA

- P zmierzonych projekcji dzielimy na K podzbiorów (zwykle równej wielkości, rozłącznych)
- Podzbiory powinny być zrównoważone – być „reprezentatywną próbą” pełnego zbioru projekcji
- Obliczając estymację obrazu w n-tej iteracji używamy tylko projekcji z k-tego podzbioru
- szybkość zbieżności jest prawie identyczna jak przy wykorzystaniu pełnego zbioru projekcji

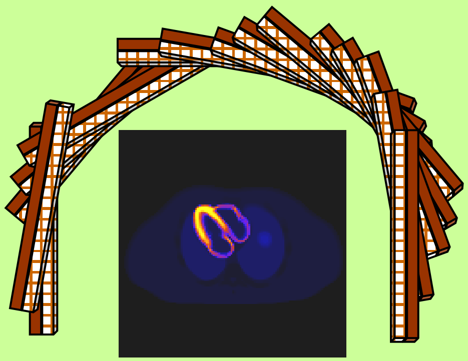
$$f_k^{(n+1)} = \frac{f_k^{(n)}}{\sum_{i \in P_k} h_{ik}} \sum_{i \in P_k} \left[h_{ik} \frac{g_i}{\sum_{j=1}^{N} h_{ij} f_j} \right]$$

$$k = 1, 2, \ldots, K$$

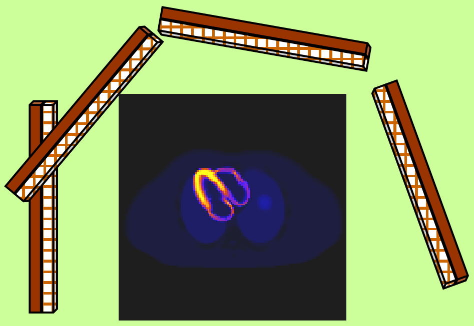
przyspieszenie ≈ liczba podzbiorów projekcji

Przyspieszanie algorytmów iteracyjnych
Algorytm OSEM (Ordered Subsets Expectation Maximisation)

ML-EM



OSEM



Problemy:

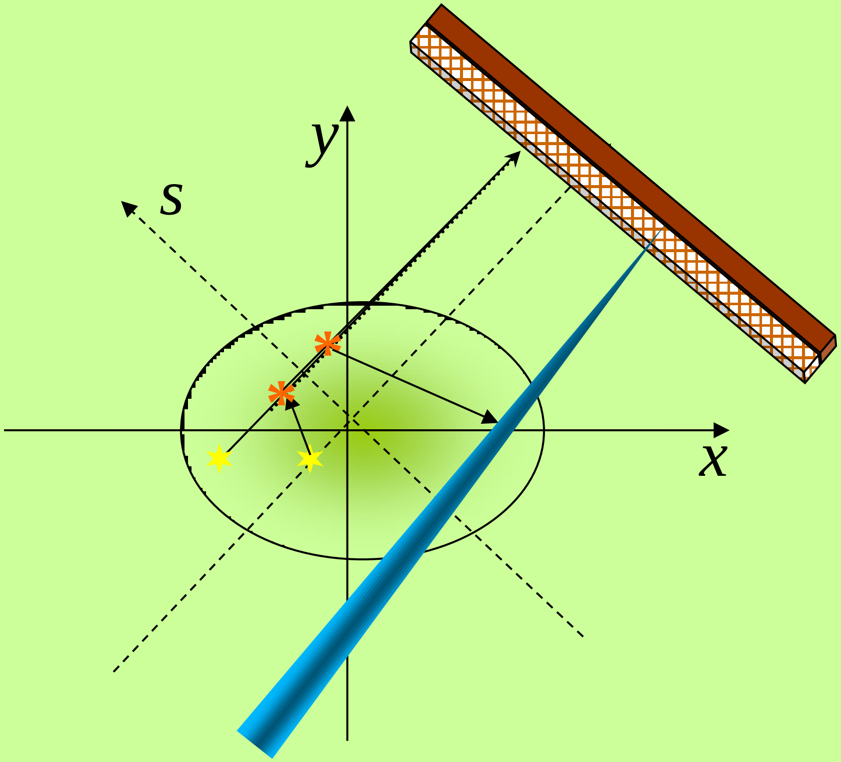
$$f_k^{(n+1)} = \frac{f_k^{(n)}}{\sum_{i \in P_k} h_{ik}} \sum_{i \in P_k} \left[h_{ik} \frac{g_i}{\sum_{j=1}^{N} h_{ij} f_j} \right]$$

$$k = 1, 2, \ldots, K$$

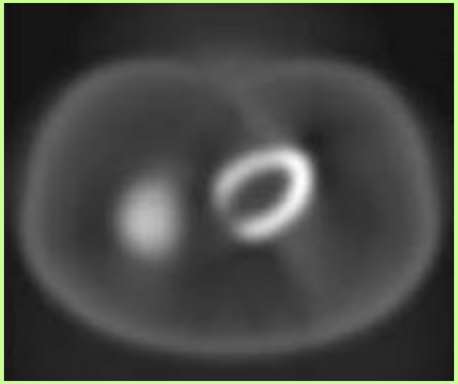
- Brak gwarancji zbieżności; możliwe cykle periodyczne
- Możliwe zerowanie vokseli w obszarach o b. małej liczbie zliczeń
- Problemy przy niezrównoważonych podzbiorach

Efekty fizyczne wpływające na obrazowanie

- Osłabienie promieniowania
- Rozproszenia
- Funkcja odpowiedzi kolimatora/detektora



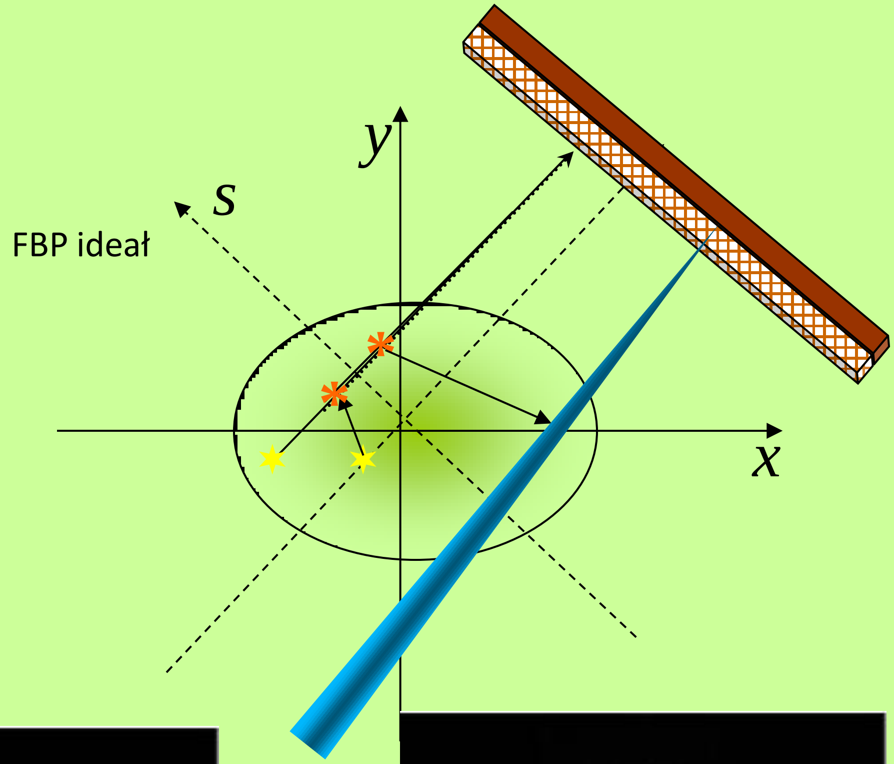
idealny

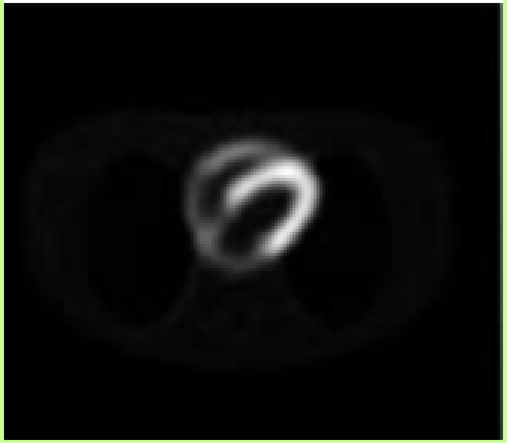


Osłabienie + rozmycie kolimatora + rozproszenia

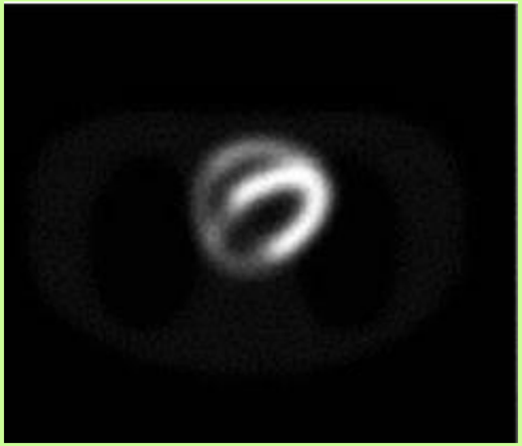
Efekty fizyczne wpływające na obrazowanie

- Osłabienie promieniowania
- Rozproszenia
- Funkcja odpowiedzi kolimatora/detektora

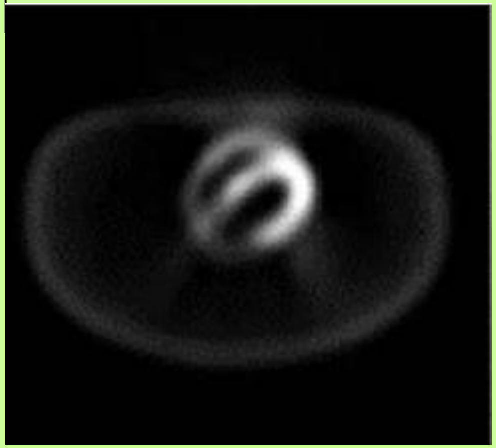




idealny

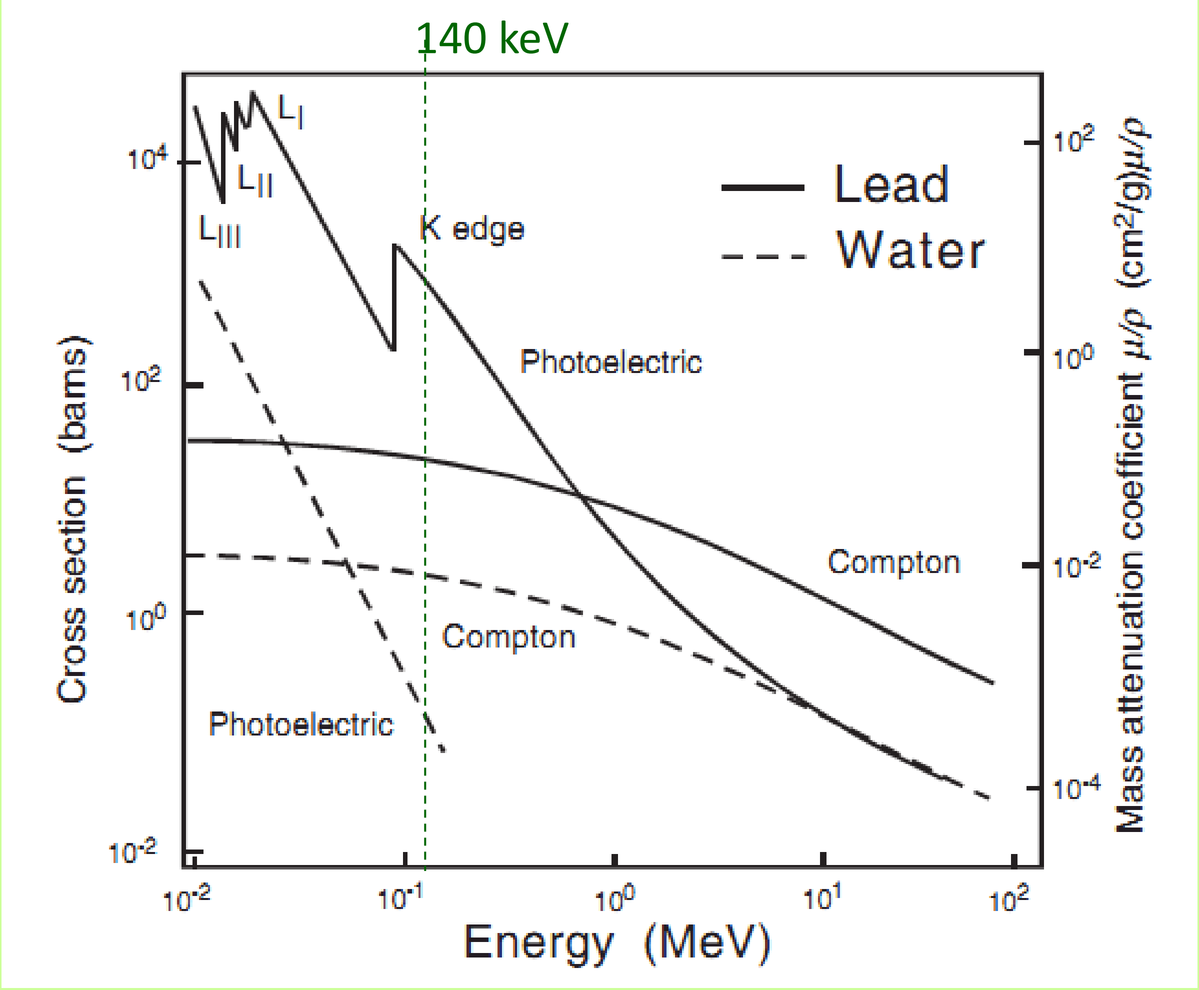


rozmycie kolimatora

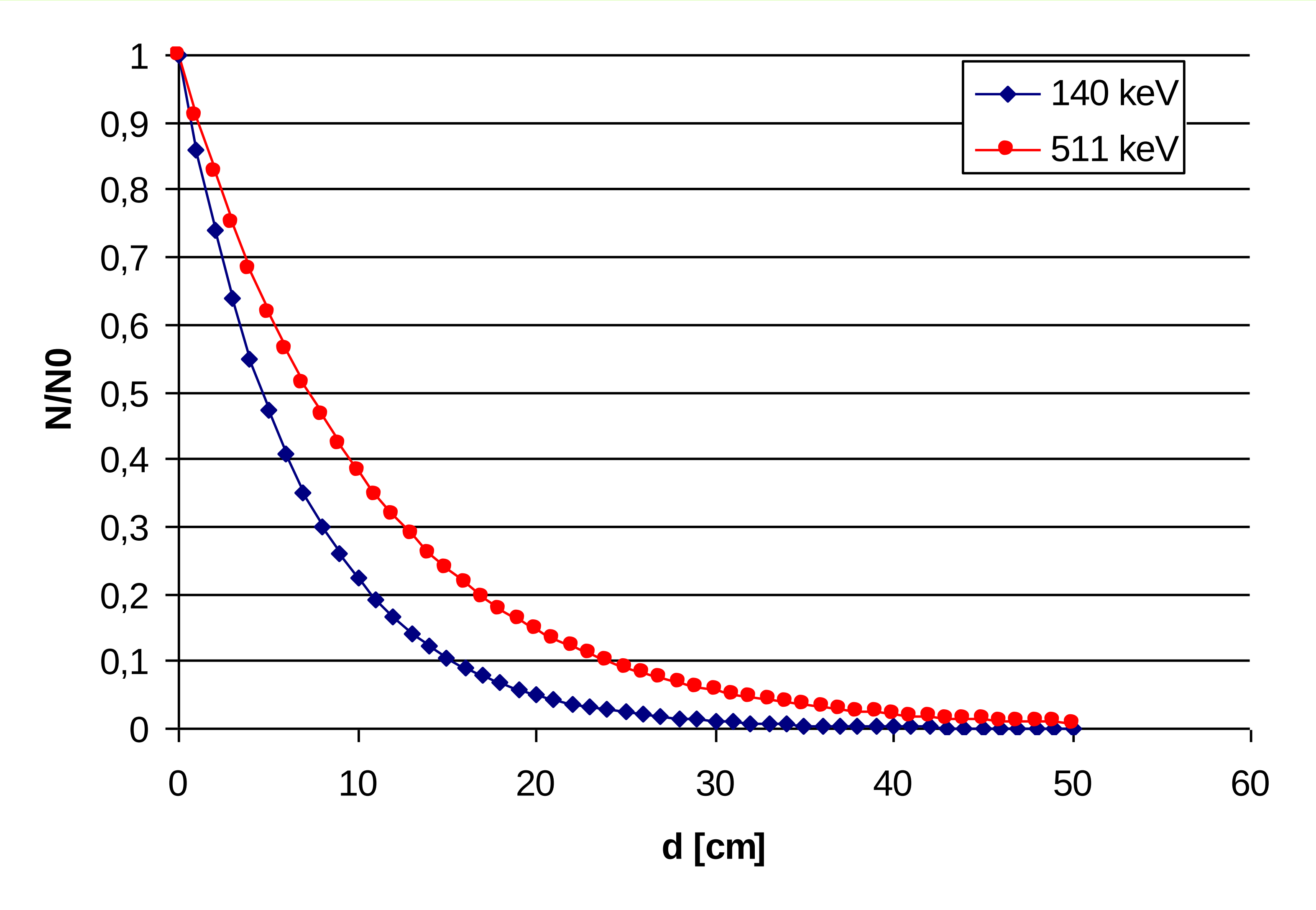


Osłabienie + rozmycie kolimatora

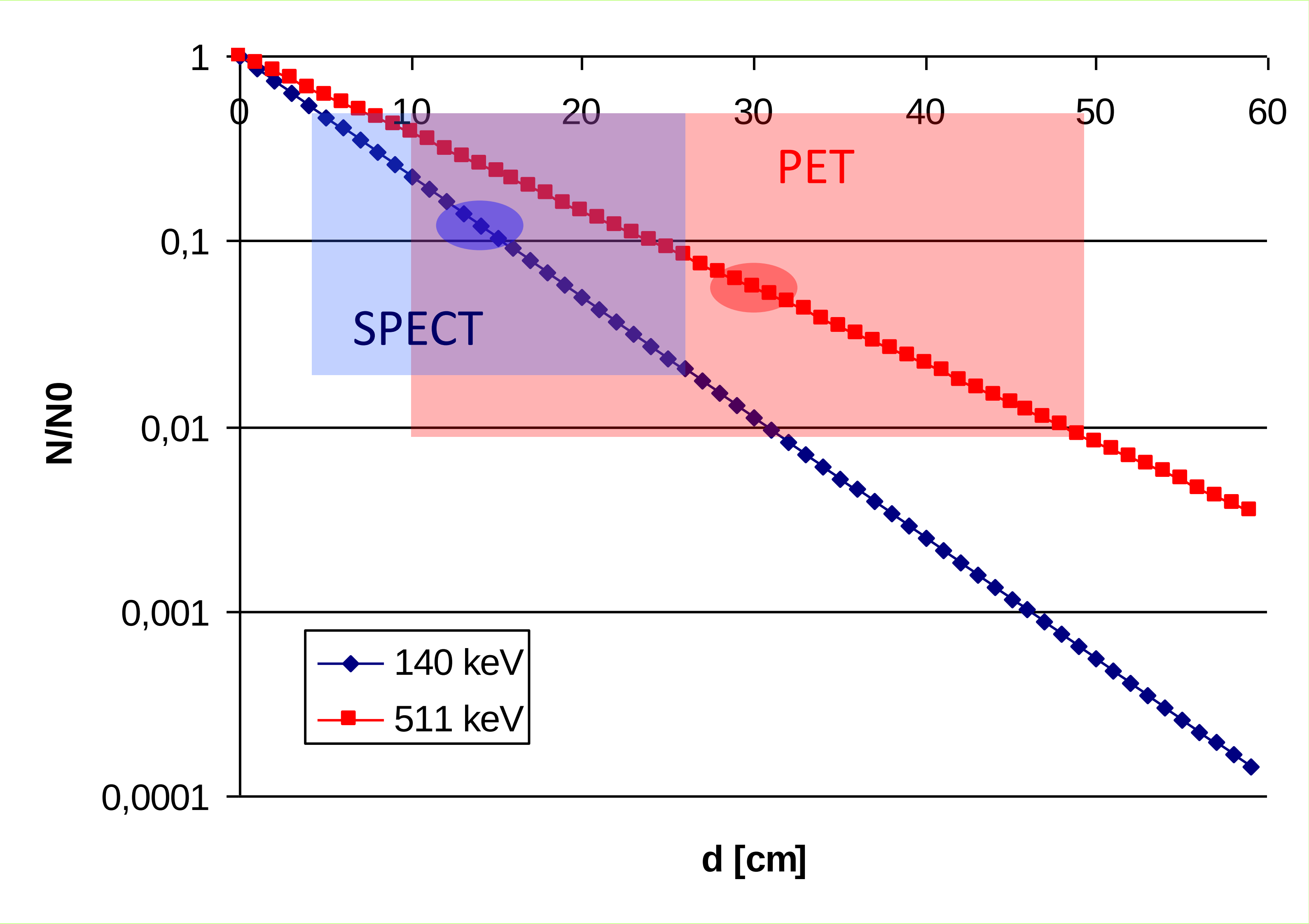
Oddziaływanie promienoiwania γ w tkankach



Osłabienie promienoiwania γ w tkankach



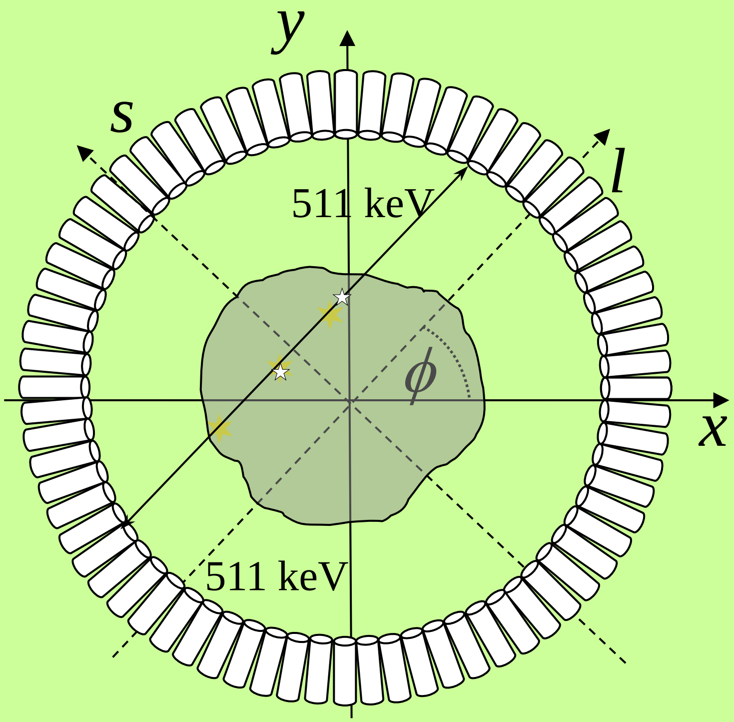
Osłabienie promienoiwania γ w tkankach



Korekcja osłabienia – PET

Osłabienie promieniowania g:

$$N = N_0 e^{-\mu x}$$



Zmierzone projekcje:

$$p(\phi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y')\, d\mathbf{l}'\right] f(x, y)\, d\mathbf{l}$$

$$= \quad \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x', y')\, d\mathbf{l}'\right] \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, d\mathbf{l}$$

Czynnik korekcji – zmierzony np. w CT

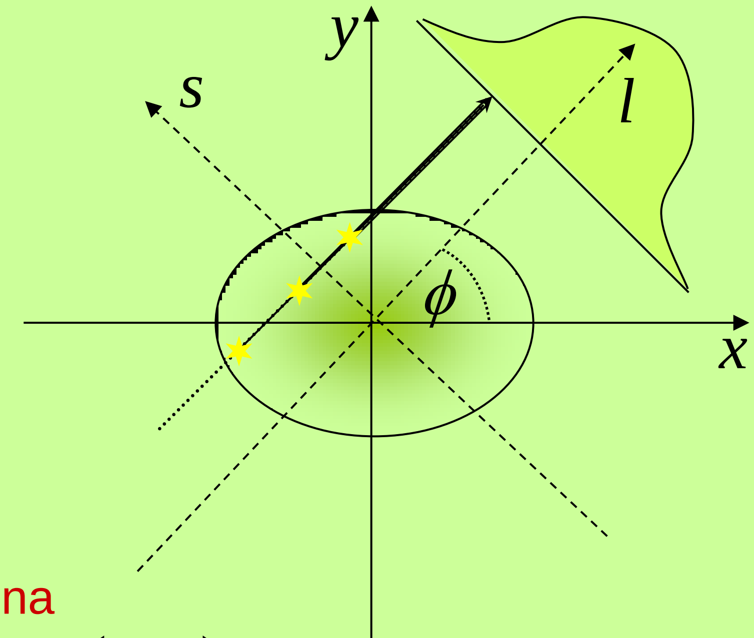
Korekcja osłabienia - SPECT

Zmierzone projekcje:

$$p(\phi,s)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\int_{l}^{\infty}\mu(x',y')\,d\mathbf{l}'\right]f(x,y)\,d\mathbf{l}$$

Rekonstrukcja

Korekcja osłabienia nietrywialna



$\mu(x,y)$ -Mapa współczynników osłabienia (znana)

Zrekonstruowany obraz:

$$\hat{f}(x,y)=\Re[p(\phi,s),\mu(x,y)]$$

Do niedawna nie był znany wzór na odwrotną transformatę Radona z osłabieniem (Novikov 2000)

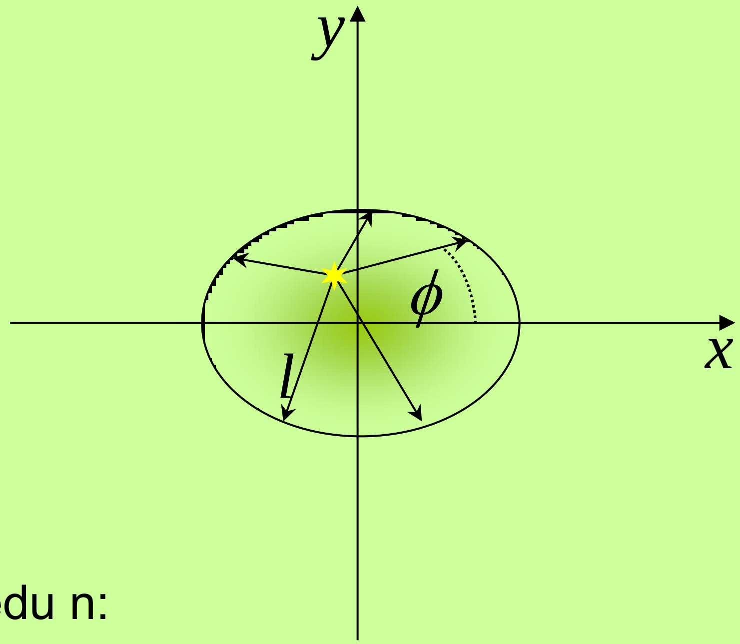
Skomplikowany wzór

Silne wzmacnianie szumów!

Korekcja osłabienia – metoda Changa

Metoda przybliżona – post-rekonstrukcyjna

$\mu(x, y)$ -Mapa współczynników osłabienia (znana)



Dla każdego punktu (x,y) w zrekonstruowanym obrazie $\hat{f}(x,y)$ obliczamy średni czynnik osłabienia:

$$TF(x,y) = \int_{\phi=0}^{2\pi} \exp\left(-\int \mu(\vec{l}(\phi))dl \right) \, d\phi$$

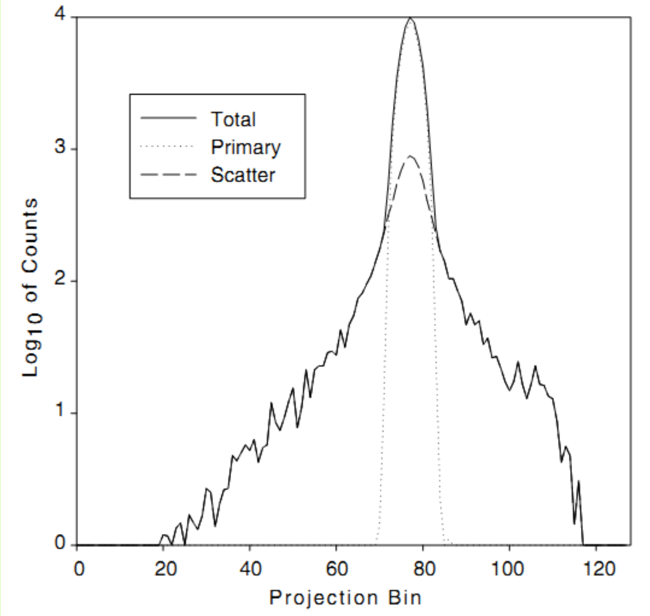
Korekcja rzędu zero:

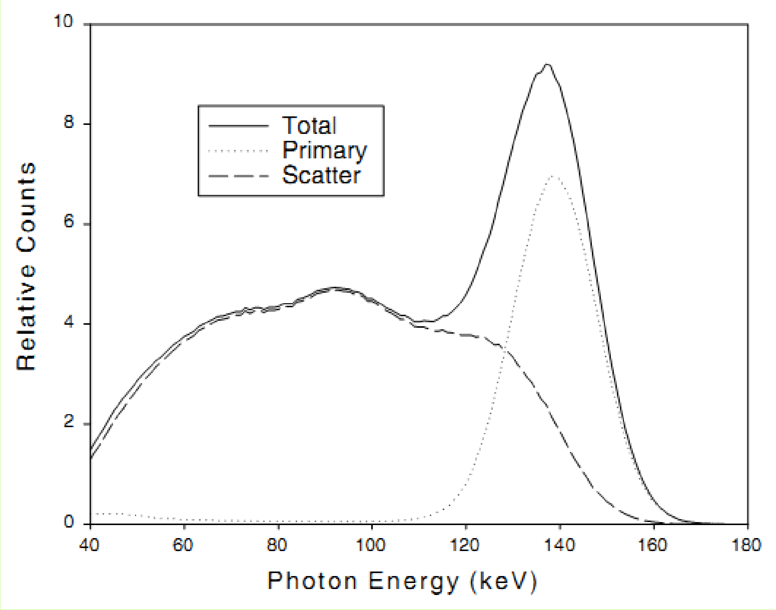
$$\hat{f}_{AC} = \widehat{f} \cdot TF$$

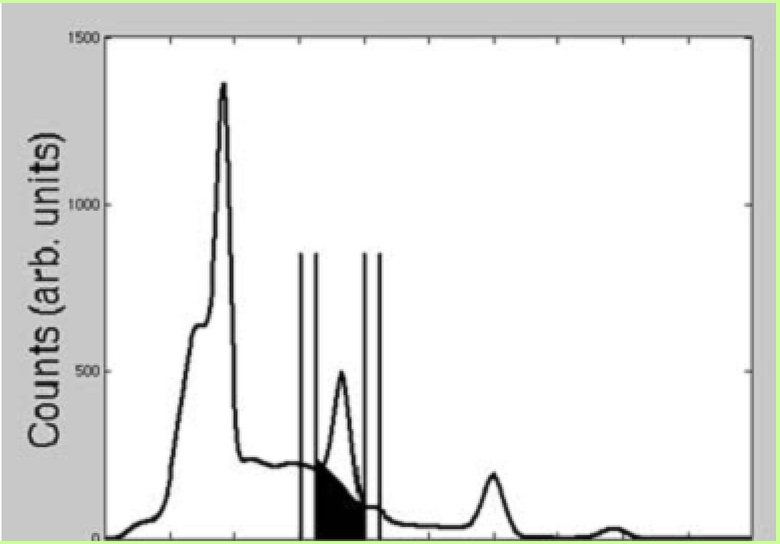
Korekcja rzędu n:

- Oblicz projekcję $f^{(n-1)}$
- Oblicz błąd g - $f^{(n-1)}$ aa
- Zrekonstruuj obraz błędu
- $f^{(n)} = f^{(n-1)} + \mathrm{TF} \cdot \mathrm{Rec}(g - f^{(n-1)})$

Korekcja fotonów rozproszonych



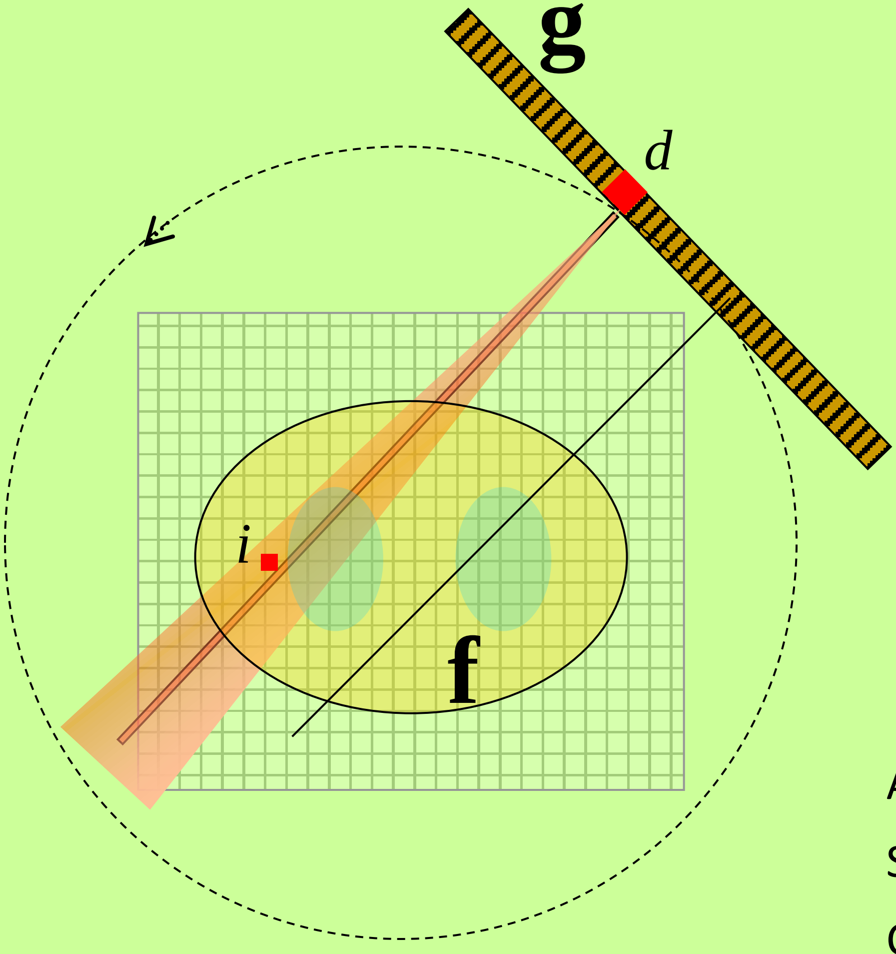




Metoda TEW (Triple Energy Window)

$$S_{scatter} = \frac{S_H + S_L}{2}$$

Rekonstrukcja iteracyjna – modelowanie efektów fizycznych



$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

h_{id} – prawdopodobieństwo detekcji fotonu z voksela i obiektu w pikselu d detektora

Wszystkie efekty fizyczne można uwzględnić w macierzy systemu $\mathbf{H}$

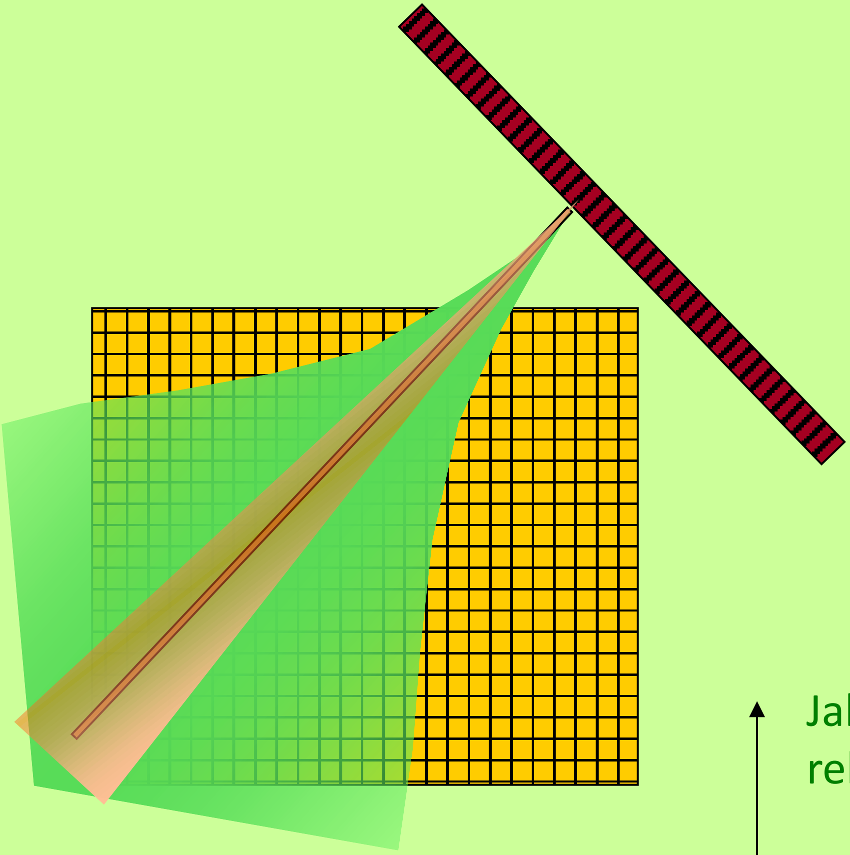
Attenuation correction (AC)

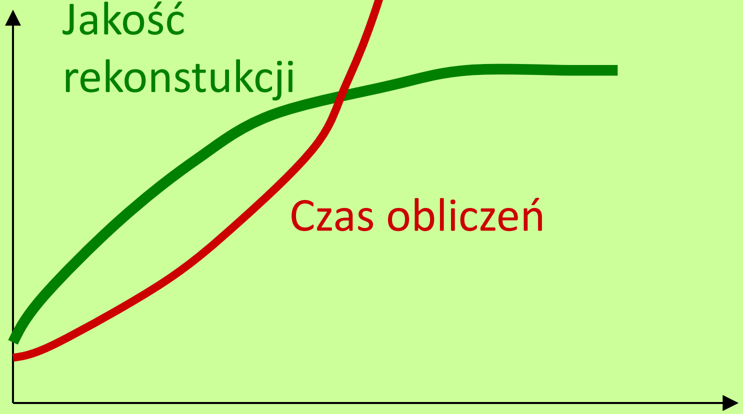
Scatter correction

Collimator resolution modelling
Collimator-detector response modelling
Resolution recovery

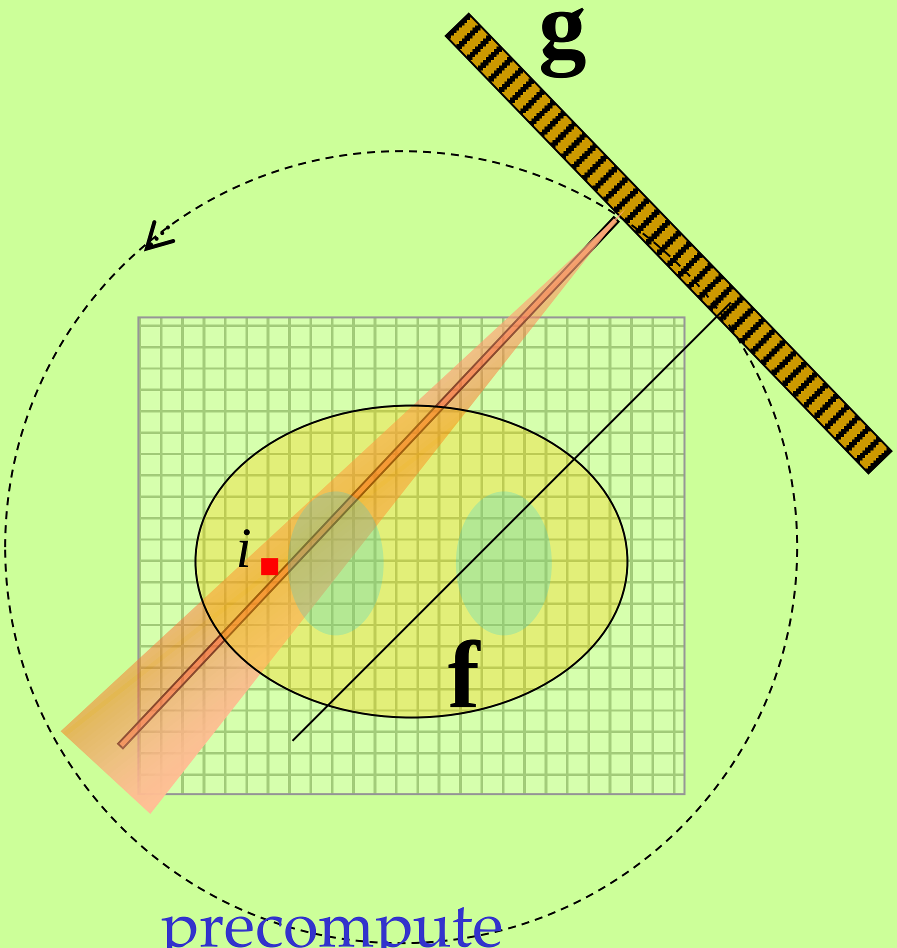
Rekonstrukcja iteracyjna – modelowanie efektów fizycznych

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$





Implementacja algorytmów iteracyjnych



Obliczanie projekcji

- Ray tracing
- Oparte na obrotach obrazu
- Obliczenie macierzy systemu

precompute

+ Fast iterations
− Large RAM required
− Slow disc access

compute "on the fly"

+ Less RAM required iterations
− Slow iterations

Ocena jakości obrazów

Problem złożony

klasyfikacja | estymacja

Parametry ilościowe:

- Zdolność rozdzielcza
- kontrast
- Poziom szumu:
  - Wariancja; współczynnik zmienności
- Średni błąd kwadratowy
- Widmo mocy; SNR

Metody statystyczne są nieliniowe

⇓

Parametry ilościowe zależą od obrazu

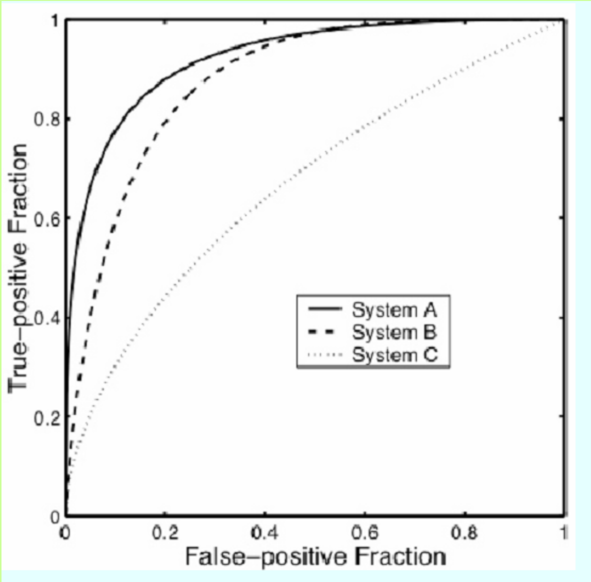
Optymalnie:

Miary jakości odnoszące się do konkretnego problemu klinicznego

Analiza ROC
(Receiver Operating Characteristics)

Obserwatorzy numeryczni

Obserwator kanałowy Hotellinga

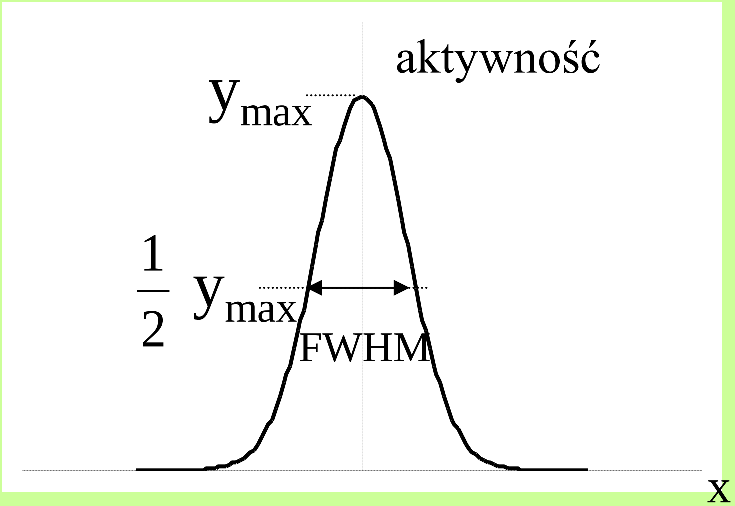


Ocena jakości obrazów

Odtworzenie sygnału

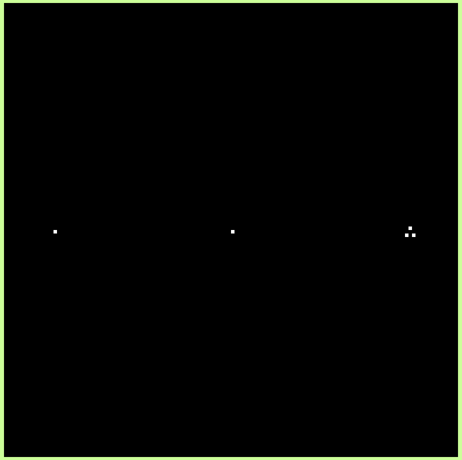
$$\text{obraz} = \text{obiekt}(x, y, z) \otimes PSF(x, y, z)$$

Zdolność rozdzielcza:

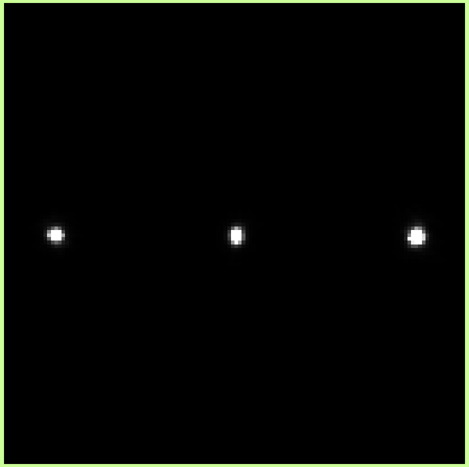


Szerokość połówkowa
(FWHM – Full Width at Half Maximum)

Dla funkcji Gaussa: FWHM ≈ 2.35 σ



Oryginał



Rekonstrukcja

Ocena jakości obrazów

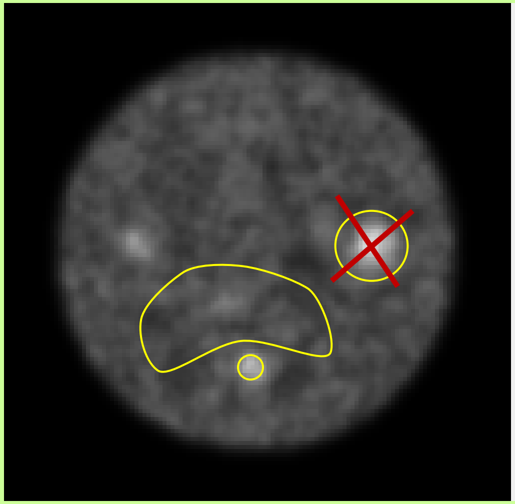
Odtworzenie sygnału

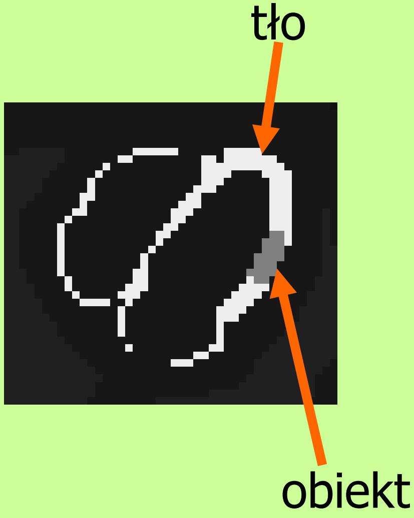
Kontrast:

$$C = \frac{NL - NB}{NB}$$

NL – średnia amplituda w obszarze obiektu (guza, defektu)

NB – średnia amplituda w obszarze tła

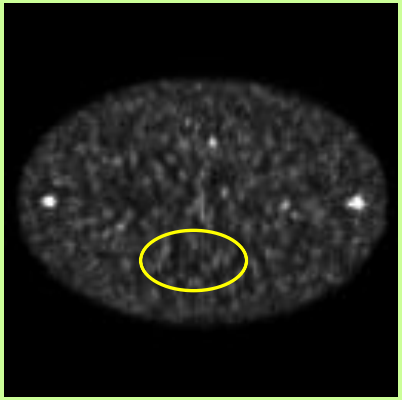




Współczynnik odtworzenia kontrastu:
(Contrast recovery coefficient)

$$CRC = \frac{C_{rec}}{C_{org}}$$

Ocena jakości obrazów



Poziom szumu:

Średnie odchylenie standardowe:
(dla pojedynczego voksela k)

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{M} \left(f_k^{(j)} - \bar{f}_k \right)^2}{M}}$$

Po zespole statystycznym
(M kopiach obrazu różniących się realizacją szumu)

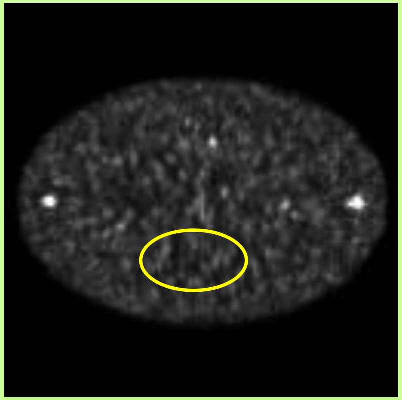
Współczynnik zmienności:
(Coefficient of Variation)

$$COV_k = \frac{\sigma_k}{\bar{f}_k}$$

Średni COV na wybranym obszarze:

$$\overline{COV} = \frac{\sum_{k \in L} COV_k}{NL}$$

Ocena jakości obrazów



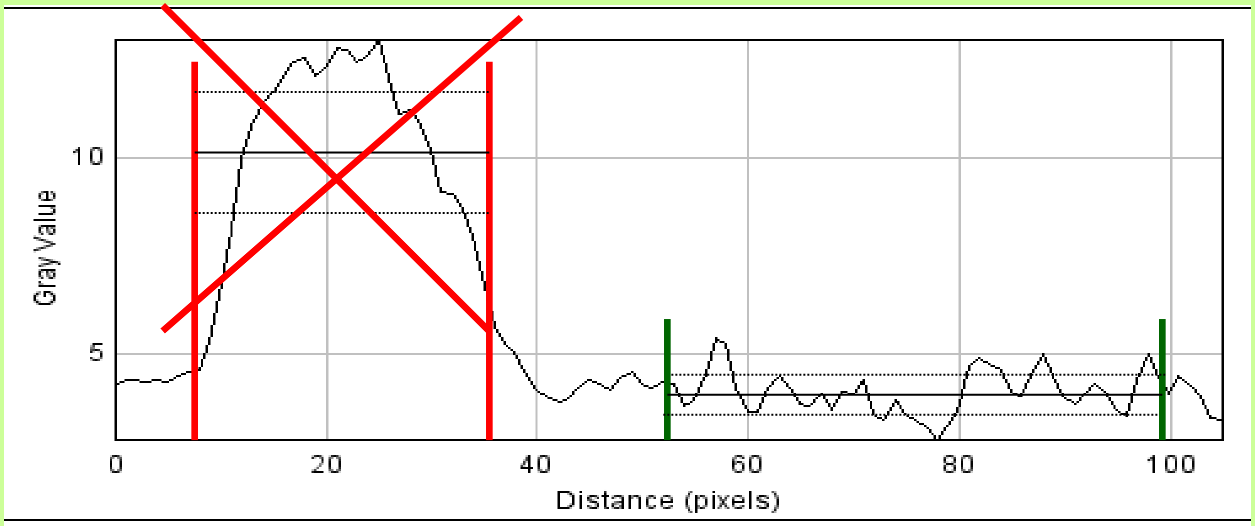
Poziom szumu   Przybliżenie:

Dla obszaru **<u>o jednorodnej aktywności</u>** średnie odchylenie standardowe i wartość średnią możemy liczyć po obszarze na jednym obrazie, zamiast po M kopiach obrazu (zespole statystycznym)

Średnie odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i \in ROI} (f_i - \bar{f})^2}{N_{ROI} - 1}}$

Współczynnik zmienności:
(Coefficient of Variation)

$$COV = \frac{\sigma}{\bar{f}}$$



Ocena jakości obrazów

sygnał + szum:

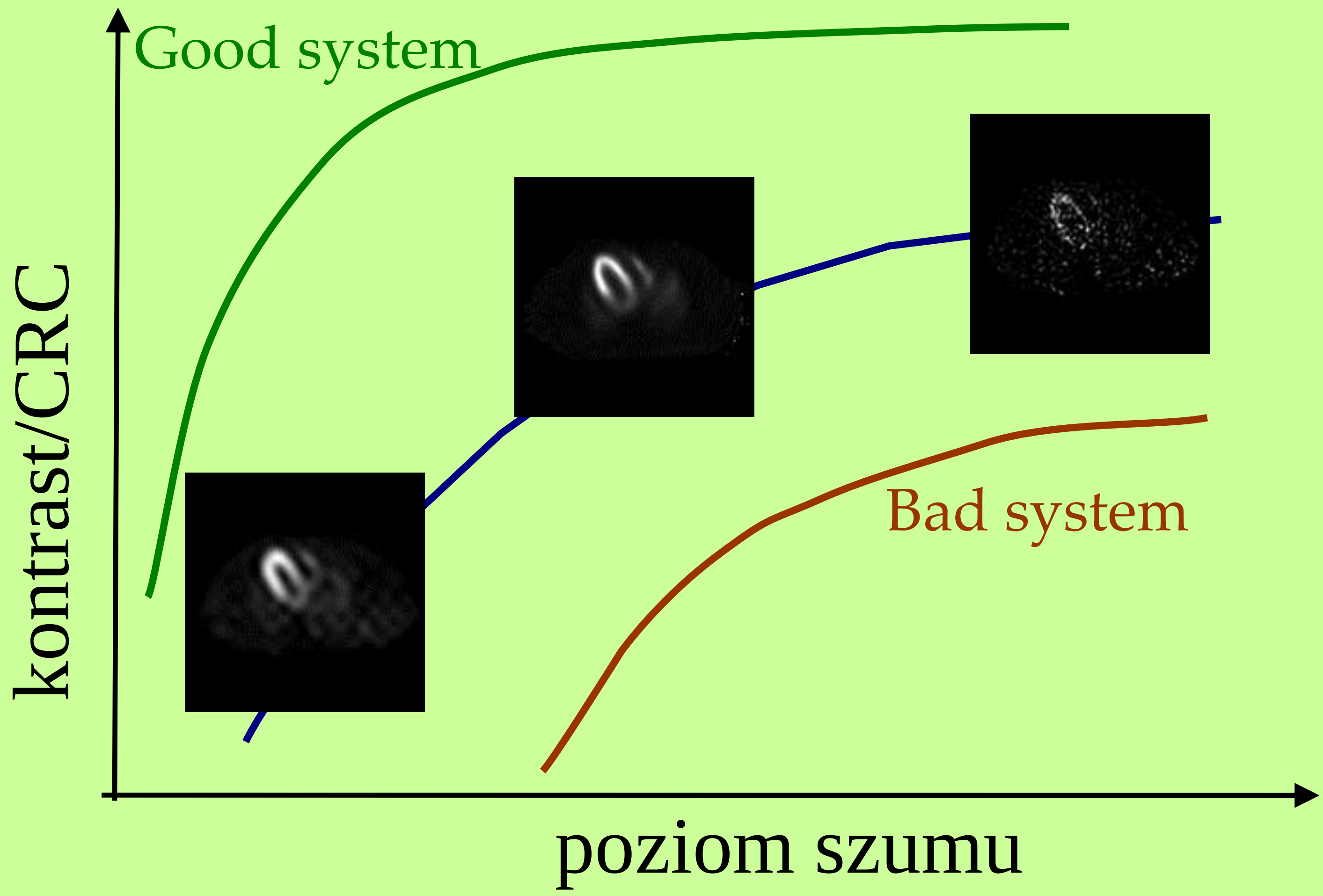
Średni błąd kwadratowy:

$$MSE = \frac{\sum_{i \in L} \left(f_i^{rec} - f_i^{org} \right)^2}{\sum_{i \in L} \left(f_i^{org} \right)^2}$$

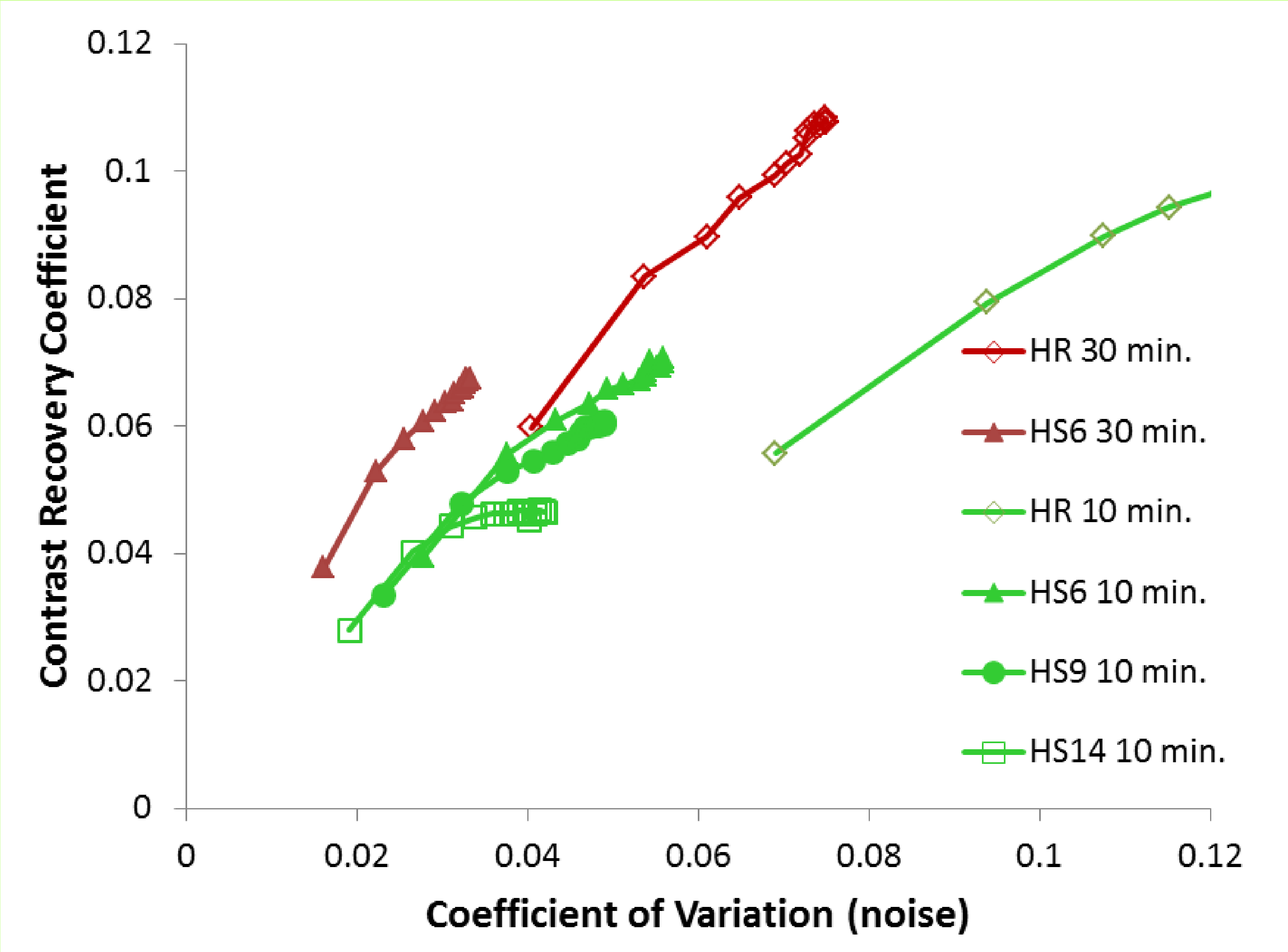
Stosunek sygnału do szumu (SNR),
Stosunek kontrastu do szumu (CNR):

$$CNR = \frac{\left| \langle f_{guz} \rangle - \langle f_{tlo} \rangle \right|}{\sqrt{\mathrm{var}(f_{tlo})}}$$

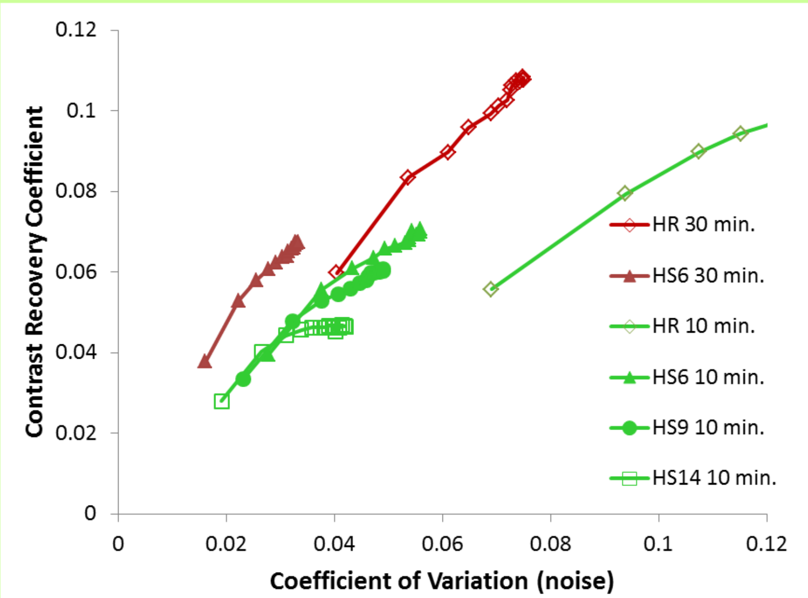
Kompromis: rozdzielczość - szum; krzywe kontrast-szum



Krzywe kontrast-szum



Krzywe kontrast-szum

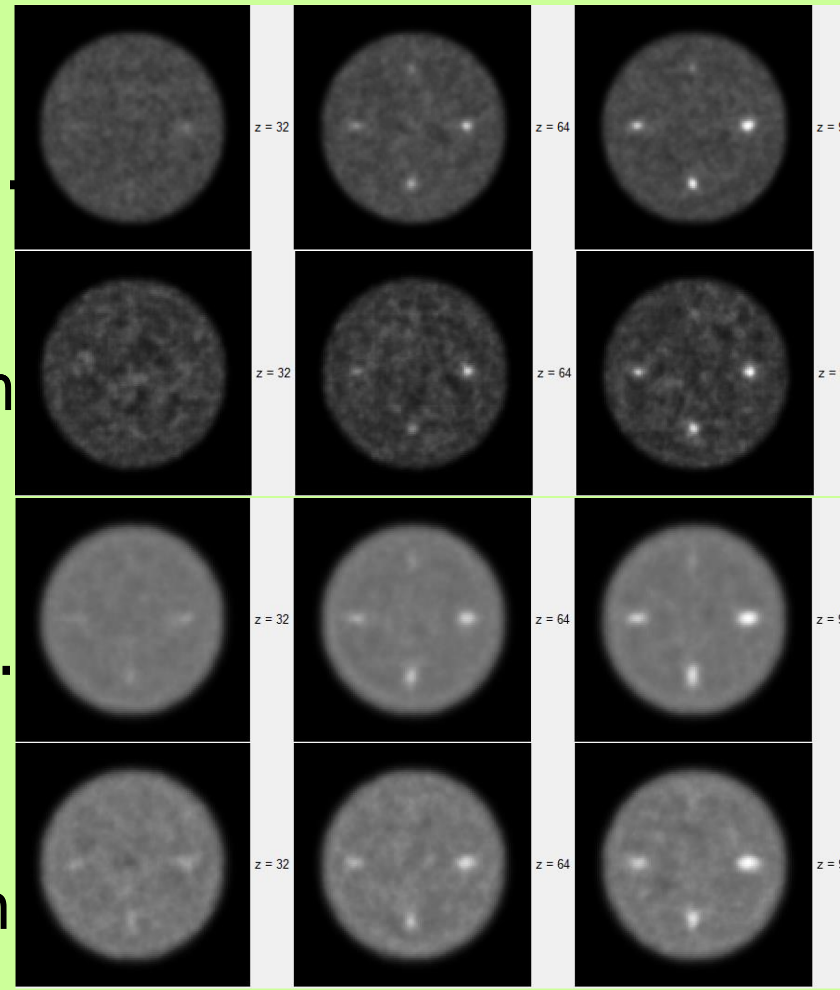


HR
30 min.

HR
10 min

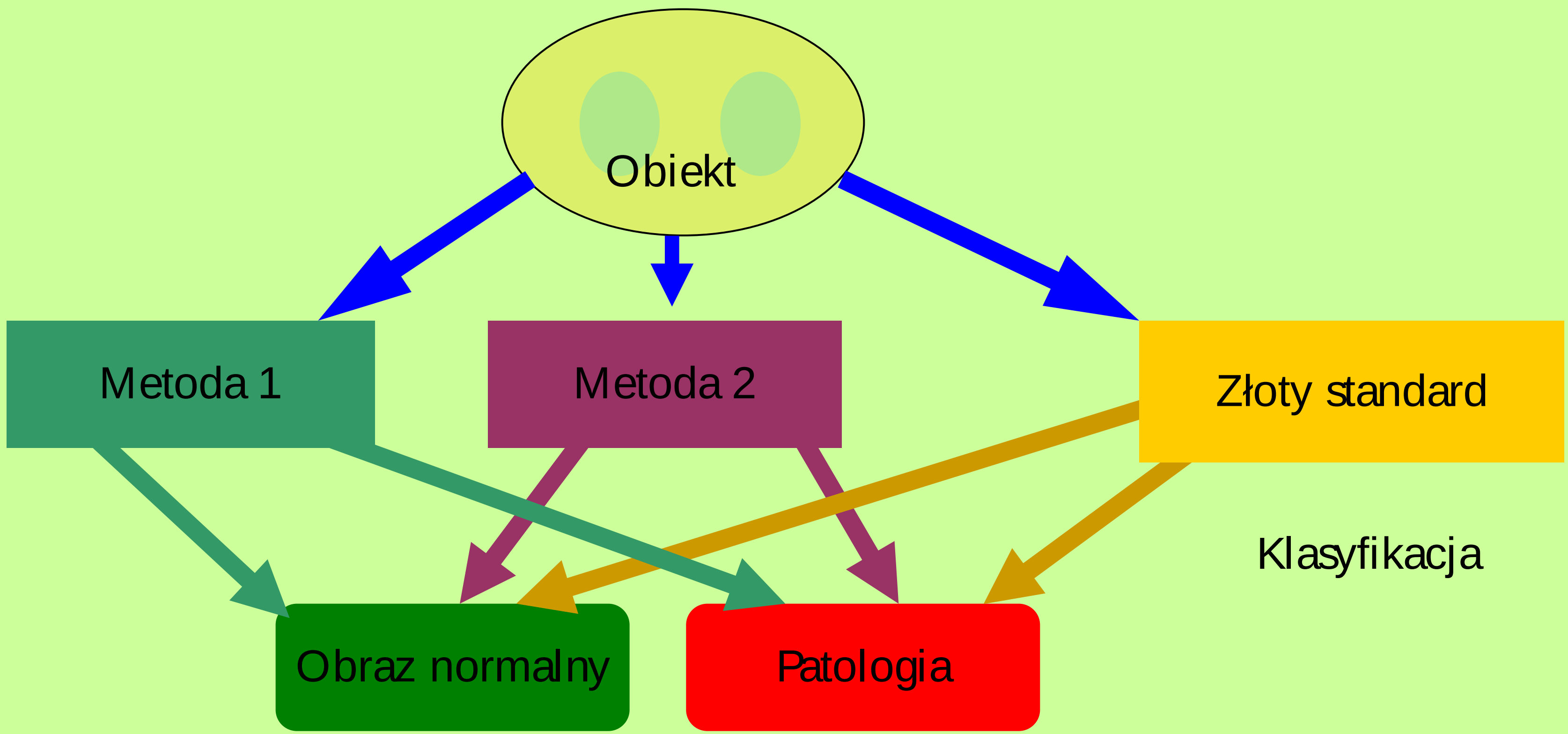
HS9
30 min.

HS9
10 min



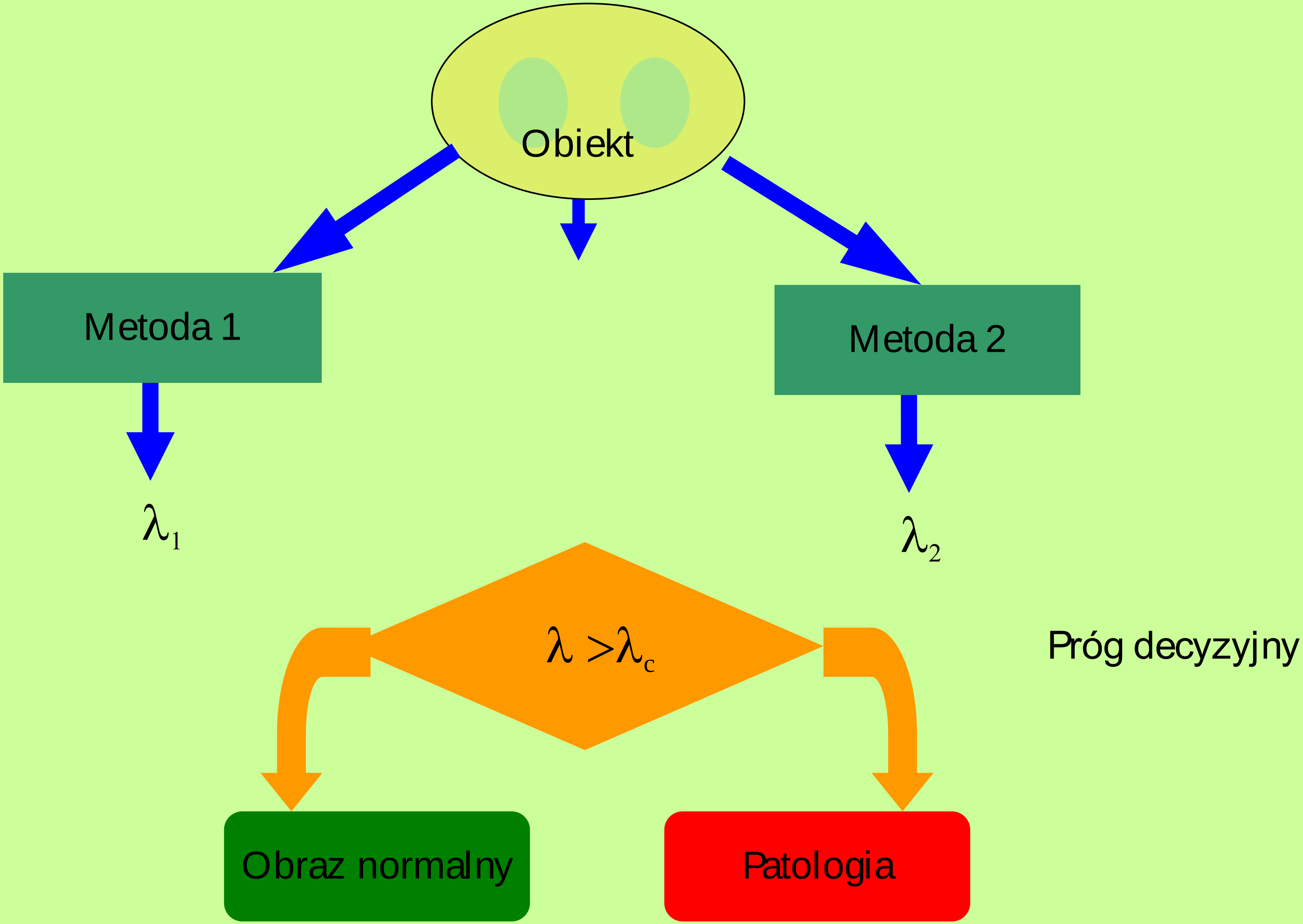
Metodologia ROC

Ocena jakości obrazu oparta na kryterium skuteczności diagnostycznej, odnosząca się do konkretnego problemu klinicznego

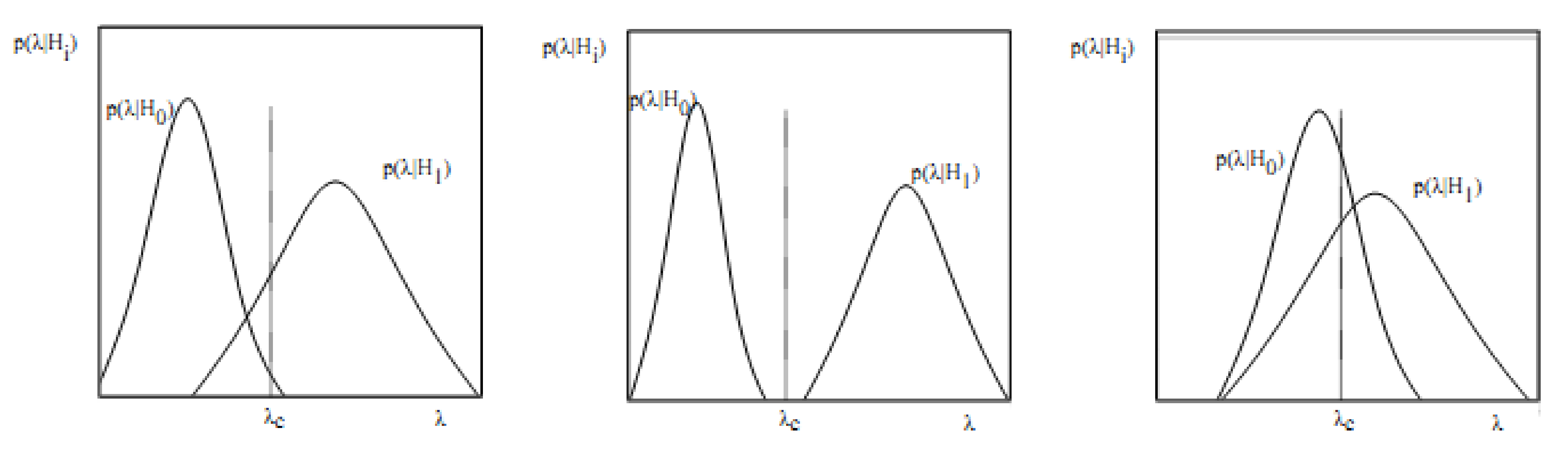


Analiza ROC
(Receiver Operating Characteristics)

Metodologia ROC



Metodologia ROC



Możliwe wyniki:

TP – true positive

TN – true negative

FP – false positive

FN – false negative

$$\text{swoistość} = \frac{TN}{TN + FP} 100\%$$

$$\text{czułość} = \frac{TP}{TP + FN} 100\%$$

Metodologia ROC

$$\text{swoistość} = \frac{TN}{TN + FP} 100\%$$

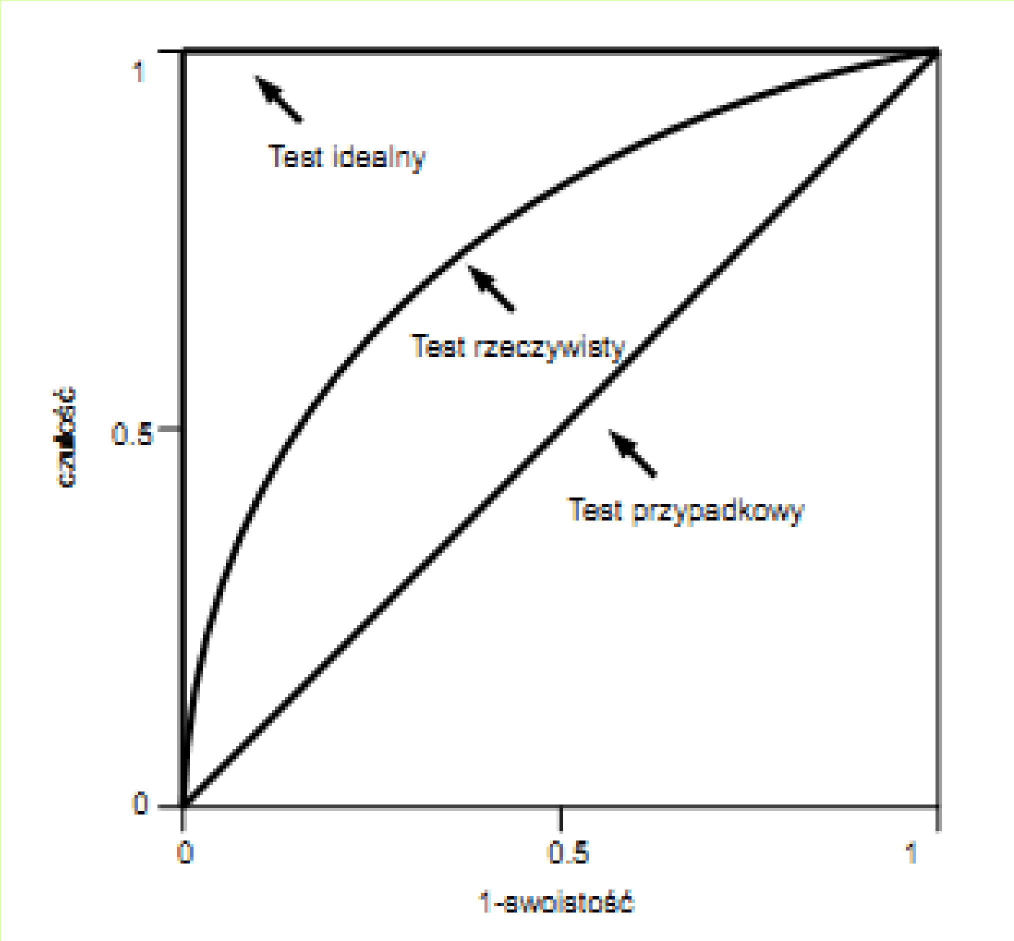
$$\text{czułość} = \frac{TP}{TP + FN} 100\%$$

Możliwe wyniki:
TP – true positive

TN – true negative

FP – false positive

FN – false negative



Krzywe ROC
(Receiver Operating Characteristics)

Miara jakości metody: AUC (area under curve)

Nowe technologie sprzętowe w medycynie nuklearnej