

Mechanika Ośrodków Ciągłych

semestr letni 2017-18

Krzysztof Byczuk

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, UW
byczuk@fuw.edu.pl
www.fuw.edu.pl/byczuk
01-06-2018

wykład: Piotr Szymczak

Warunki zaliczenia

1. Obecność i aktywność na ćwiczeniach
2. Kolokwium
3. Kolokwium dodatkowe (dla osób mających usprawiedliwioną nieobecność na pierwszym kolokwium)
4. Egzamin pisemny 18/06/2018, g. 9-13, s. 1.38
5. Egzamin ustny
6. Egzamin pisemny poprawkowy
7. Egzamin ustny poprawkowy

1 Tydzień I, 25/02-04/03/2018

1.1 Wykład

1. Pojęcie ośrodka ciągłego i punktu materialnego. Oszacowanie skali, na której dobrze działa przybliżenie ciągłe.
2. Pole przesunięć i tensor deformacji. Związek składowych tego tensora ze zmianą długości i kątów w układzie.

1.2 Zadania na ćwiczenia

Notacja indeksowa

1. konwencja sumacyjna - $\sum_{i=1}^3 a_i x_i \equiv a_i x_i$
2. indeks swobodny - $x'_i = a_{im} x_m \iff x'_i = \sum_{m=1}^3 a_{im} x_m$
3. delta Kroneckera - $\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz 0 dla $i \neq j$. Policzyc: $\delta_{ii} = 3$, $\delta_{ij} T_{jm} = T_{im}$. Kartezjańska baza ortonormalna $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.
4. symbol permutacji - $\epsilon_{ijk} = 1$ dla parzystej permutacji (ijk) oraz -1 dla nieparzystej permutacji (ijk) oraz 0 w pozostałych przypadkach. Iloczyn wektorowy wektorów bazy $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$ oraz wektorów $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ ($a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a}$) oraz $\vec{b} = b_i \vec{e}_i$ jest równy $\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$. Pokazać: $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.
5. działania w notacji indeksowej - podstawienie, mnożenie, zwięzanie $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$.
Zadanie: Jeśli $T_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu E_{ij}$ policzyć $T_{ii} = 3\lambda \theta + 2\mu E_{ii}$.
Zadanie: Jeśli $T_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda (E_{kk}) \delta_{ij}$ policzyć $W = T_{ij} E_{ij} / 2 = \mu E_{ij} E_{ij} + \lambda (E_{kk})^2 / 2$,

$$P = T_{ij} T_{ij} = 4\mu^2 E_{ij} E_{ij} + (E_{kk})^2 (4\mu\lambda + 3\lambda^2).$$

Tensory

1. tensor 2go rzędu - liniowa transformacja wektora $\hat{T}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \hat{T}\vec{a} + \beta \hat{T}\vec{b}$.
2. składowe tensora - $\hat{T}\vec{e}_i = T_{ji} \vec{e}_j$ lub $T_{ij} = \vec{e}_i \cdot \hat{T}\vec{e}_j$. Uwaga na kolejność indeksów, definicja składowych zadaje kolumny macierzy.
Zadanie: Wiedząc, że $\hat{T}\vec{e}_1 = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\hat{T}\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_3$, $\hat{T}\vec{e}_3 = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$ podać T_{ij} .
Zadanie: Tensor \hat{R} reprezentuje obrót o kąt θ wokół osi x_3 . Podać jego składowe.
3. składowe wektora po transformacji - $b_i = T_{ij} a_j$ lub $[\vec{b}] = [\hat{T}][\vec{a}]$ w notacji mnożenia macierzy.
Zadanie: Wiedząc, że $\hat{T}\vec{e}_1 = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\hat{T}\vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\hat{T}\vec{e}_3 = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, oraz $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ podać składowe wektora $\vec{b} = \hat{T}\vec{a}$.
4. suma tensorów - $W_{ij} = T_{ij} + S_{ij}$.
5. iloczyn tensorów - $(\hat{T}\hat{S})_{ij} = T_{ik} S_{kj}$.
6. transpozycja tensora - \hat{T}^T spełnia równanie $\vec{a} \cdot (\hat{T}\vec{b}) = \vec{b} \cdot (\hat{T}^T \vec{a})$ dla dowolnych wektorów. $(\hat{T}\hat{S})^T = \hat{S}^T \hat{T}^T$, $(\hat{T}^T)^T = \hat{T}$, $T_{ij}^T = T_{ji}$.
7. iloczyn tensorowy wektorów - iloczyn tensorowy (prosty, Kroneckera) wektorów \vec{a} i \vec{b} spełnia równanie $(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ dla każdego \vec{c} . Iloczyn $\vec{a} \otimes \vec{b}$ jest tensorem 2go rzędu, transformacją liniową. Znak \otimes często pomijamy. Składowe $(\hat{W})_{ij} = \vec{e}_i \cdot (\vec{a} \otimes \vec{b} \vec{e}_j) = a_i b_j$. Baza przestrzeni tensorów 2go rzędu $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ oraz rozwinięcie $\hat{T} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.

1.3 Zadania domowe

1. Dany jest tensor \hat{T} . Znaleźć taki tensor \hat{T}^* , aby dla dowolnych wektorów \vec{a} i \vec{b} spełniona była relacja: $\hat{T}^*(\vec{a} \times \vec{b}) = (\hat{T}\vec{a}) \times (\hat{T}\vec{b})$.
2. Wiedząc, że $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ pokazać: a) $\epsilon_{ilm} \epsilon_{jlm} = 2\delta_{ij}$, b) $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$, c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
3. Znaleźć składowe tensora \hat{T} w bazie kartezjańskiej jeśli przekształca on dowolny wektor \vec{a} w wektor $\vec{b} = \vec{m}(\vec{a} \cdot \vec{n})$, gdzie $\vec{m} = \sqrt{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/2$ oraz $\vec{n} = \sqrt{2}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/2$.
4. Płaszczyzna odbicia przechodzi przez początek układu współrzędnych. Niech \vec{n} będzie jednostkowym wektorem normalnym do tej płaszczyzny, a \vec{r} wektorem położenia punktu w przestrzeni. a) Pokazać, że odbicie wektora \vec{r} dane jest przez $\hat{T}\vec{r} = \vec{r} - 2(\vec{r} \cdot \vec{n})\vec{n}$, gdzie \hat{T} jest tensorem reprezentującym odbicie względem danej płaszczyzny. b) Niech $\vec{n} = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)/\sqrt{3}$. Znaleźć postać \hat{T} dla tego odbicia, t.j. podać składowe tensora. Znaleźć odbicie wektora $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ w tym przypadku.
- 5.¹ Dane są:

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [B_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokazać bezpośrednim rachunkiem równoważność wzorów w notacji indeksowej i wzorów w notacji

¹Zadanie nieobowiązkowe, dla własnego treningu i nie będzie zbierane.

macierzowej: a) $D_{ji} = B_{ij} \iff [D] = [B]^T$, b) $b_i = B_{ij}a_j \iff [b] = [B][a]$, c) $c_j = B_{ji}a_i \iff [c] = [B][a]$, d) $s = B_{ij}a_i a_j \iff s = [a]^T [B][a]$, e) $D_{ik} = B_{ij}C_{jk} \iff [D] = [B][C]$, oraz f) $D_{ik} = B_{ij}C_{kj} \iff [D] = [B][C]^T$.

2 Tydzień II, 05-11/03/2018

2.1 Wykład

1. Interpretacja śladu tensora deformacji.
2. Pojęcie naprężenia.
3. Konstrukcja Cauchy'ego i tensor naprężeń.
4. Bilans pędu w ośrodku ciągłym. Warunki równowagi Cauchy'ego.
5. Bilans momentu pędu. Symetria tensora naprężeń.

2.2 Zadania na ćwiczenia

8. *śląd tensora* - śląd tensora jest zdefiniowany $\text{Tr}(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$. Dla tensora $\hat{T} = T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ mamy $\text{Tr} = T_{ii}$. Własności: $\text{Tr}\hat{T}^T = \text{Tr}\hat{T}$, $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$.

9. *tensor jednostkowy i tensor odwrotny* - tensor jednostkowy zdefiniowany jest $\hat{1}\vec{a} = \vec{a}$. Stąd $[\hat{1}]_{ij} = \delta_{ij}$. Tensor odwrotny, dla $\det(\hat{T})$, spełnia $\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{1}$.

10. *tensor ortogonalny* - transformacja ortogonalna \hat{Q} zachowuje długości wektora i kąty pomiędzy wektorami. Stąd pokazaliśmy, że $\hat{Q}^T\hat{Q} = \hat{1}$ lub $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^T$. Przykład tensor odbić lub tensor obrotu.

11. *transformacja ortogonalna bazy* - transformacja bazy $\vec{e}'_i = \hat{Q}\vec{e}_i = Q_{mi}\vec{e}_m$ lub macierzowo $[\vec{e}'] = [\hat{Q}^T][\vec{e}]$. Interpretacja $Q_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}'_j)$.

12. *transformacja ortogonalna składowych wektora* - $a'_i = Q_{mi}a_m$, macierzowo $[\vec{a}'] = [\hat{Q}^T][\vec{a}]$.

Zadanie: Znaleźć składowe wektora $\vec{a} = 2\vec{e}_1$ w bazie obróconej o 90 stopni wokół osi z.

13. *transformacja ortogonalna składowych tensora* - $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$, macierzowo $[\hat{T}'] = [\hat{Q}^T][\hat{T}][\hat{Q}]$.

Zadanie: Pokazać, że śląd jest niezmiennikiem transformacji ortogonalnej.

14. *transformacyjna definicja tensorów* - jeśli $\vec{e}'_i = \hat{Q}\vec{e}_i$ to zachodzi dla: a) skalarów (tensorów 0 rzędu) $\alpha' = \alpha$, b) wektorów (tensorów 1 rzędu) $a'_i = Q_{mi}a_m$, c) tensorów 2 rzędu $T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}$, d) tensorów 3 rzędu $T'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{rk}T_{mnr}$, itd. (Pseudotensor (tensor osiowy, aksjalny) transformuje się jak np., $T'_{ijk} = \det(\hat{Q})Q_{mi}Q_{jn}Q_{kr}T_{mnr}$).

15. *tensor symetryczny i antysymetryczny* - tensor symetryczny $\hat{T}^T = \hat{T}$, $T_{ij} = T_{ji}$, tensor antysymetryczny $\hat{T}^T = -\hat{T}$, $T_{ij} = -T_{ji}$. Każdy tensor 2 rzędu można jednoznacznie rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną, tzn. $\hat{T} = \hat{T}^S + \hat{T}^A$, gdzie $\hat{T}^S(A) = (\hat{T} \pm \hat{T}^T)/2$.

Zadanie: Pokazać, że śląd iloczynu tensora symetrycznego i antysymetrycznego jest zero.

16. *wektor dualny do tensora symetrycznego* - tensor antysymetryczny ma 3 niezależne składowe. Można więc go zareprezentować przez wektor, zwany wektorem dualnym \vec{t}^A spełniający dla każdego wektora \vec{a}

równanie $\hat{T}^A\vec{a} = \vec{t}^A \times \vec{a}$.

Zadanie: pokazać, że $\vec{t}^A = -\epsilon_{ijk}T_{jk}\vec{e}_i/2$.

Zadanie: dla tensora

$$[\hat{T}] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

znaleźć część symetryczną, antysymetryczną i wektor dualny. Dla wektora $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ sprawdzić spełnioną równość $\hat{T}^A\vec{a} = \vec{t}^A \times \vec{a}$.

Zadanie: Niech \vec{m} jest wektorem równoległym do osi obrotu zadanym przez tensor \hat{R} . Pokazać, że wektor \vec{q} dualny do części antysymetrycznej tensora \hat{R} jest równoległy do \vec{m} .

17. *wartości własne i wektory własne tensora* - $\hat{T}\vec{a} = \lambda\vec{a}$.

18. *wartości i kierunki główne tensora symetrycznego* - $\hat{T}\vec{n}_i = \lambda_i\vec{n}_i$, \vec{n}_i kierunki główne i \hat{T} diagonalny.²

Zadanie: pokazać, że dla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ wektory \vec{n}_1 i \vec{n}_2 są ortogonalne.

19. *główne niezmienniki tensora symetrycznego* - $\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \iff \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, gdzie $I_1 = \text{tr}\hat{T} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $I_2 = [(\text{tr}\hat{T})^2 - \text{tr}(\hat{T}^2)]/2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, $I_3 = \det\hat{T} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ są niezmiennikami tensora z wartościami własnymi λ_i .

2.3 Zadania domowe

1. Pokazać, że wyznacznik macierzy tensora ortogonalnego przyjmuje wartości ± 1 .

2. Tensory, które mają takie same składowe we wszystkich układach współrzędnych ortogonalnych, tzn. nie zmieniają się pod wpływem transformacji ortogonalnej, nazywamy tensorami izotropowymi, zwane też tensorami numerycznymi lub niezmiennicznymi. Przykładem jest skalar. Pokazać, że tensor jednostkowy o składowych δ_{ij} , tensor o składowych $\delta_{ik}\delta_{lm}$ oraz $\epsilon_{ikl}\epsilon_{mnl}$ są tensorami izotropowymi.³

3. Pokazać, że $\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \iff \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, gdzie $I_1 = \text{tr}\hat{T}$, $I_2 = [(\text{tr}\hat{T})^2 - \text{tr}(\hat{T}^2)]/2$, $I_3 = \det\hat{T}$.

4. Ciała sztywne podlega rotacji o kąt θ wokół osi skierowanej wzdłuż jednostkowego wektora \vec{m} . Niech początek układu współrzędnych leży na osi obrotu, a \vec{r} oznacza położenie dowolnego punktu tego ciała. Pokazać, że po obrocie wektor \vec{r} przechodzi na $\hat{R}\vec{r} = (1 - \cos\theta)(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{m} + \cos\theta\vec{r} + \sin\theta\vec{m} \times \vec{r}$, gdzie \hat{R} jest transformacją obrotu. Pokazać, że tensor obrotu ma postać $\hat{R} = (1 - \cos\theta)(\vec{m} \otimes \vec{m}) + \sin\theta\hat{E}$, gdzie \hat{E} jest tensorem antysymetrycznym, którego wektor dualny jest \vec{m} .

5.⁴ Wykazać, że dla dowolnych \vec{a} i \vec{b} zachodzi $\vec{a}\hat{T}\vec{b} - \vec{a}\hat{T}\vec{a} = -2\hat{T}^A(\vec{a} \times \vec{b})$.

²Łac. tendo, tentendi, tentum, tensum - wydłużać.

³Warto wiedzieć, że każdy izotropowy tensor parzystego n-tego rzędu jest równy kombinacji liniowej tensorów postaci $\delta_{i\alpha_1 i\alpha_2} \dots \delta_{i\alpha_{n-1} i\alpha_n}$, gdzie $\alpha_1 \dots \alpha_n$ stanowią dowolną permutację liczb 1...n. Każdy niezmienniczny tensor nieparzystego n-tego rzędu jest kombinacją liniową tensorów postaci $\epsilon_{i\alpha_1 i\alpha_2 i\alpha_3} \delta_{i\alpha_4 i\alpha_5} \dots \delta_{i\alpha_{n-1} i\alpha_n}$.

⁴Zadanie 5-7 nie są obowiązkowe.

6. Wypisać jawne wzory na składowe tensora 2 rzędu \hat{T}' powstałe z tensora \hat{T} po obrocie układu układu współrzędnych o kąt ϕ wokół osi z. Wsk. $\alpha \cos^2 \phi + \beta \sin^2 \phi = (\alpha + \beta)/2 + ((\alpha - \beta)/2) \cos 2\phi$.

7. Niech $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sa dowolnymi wektorami, a \hat{T} dowolnym tensorem 2 rzędu. Wykazać, że $\vec{a}^2, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{b})^2, \vec{a}\hat{T}\vec{a}$ i $\vec{a}\hat{T}\vec{b}$ sa niezmiennikami przekształceń ortogonalnych.

3 Tydzień III, 12-18/03/2018

3.1 Wykład

1. Liniowy ośrodek elastyczny - związek między deformacją a naprężeniem
2. Stałe elastyczne: stałe Lamego, moduł Younga, liczba Poissona, moduł ścisłości
3. Równania Naviera

3.2 Zadania na ćwiczenia

Elementy analizy wektorowej i tensorowej

1. *funkcja tensorowa od skalara* - $\hat{T} = \hat{T}(t)$, pochodna $d\hat{T}/dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (\hat{T}(t + \Delta t) - \hat{T}(t))/\Delta t$, własności ($\alpha = \alpha(t), \vec{a} = \vec{a}(t)$): $d(\alpha\hat{T})/dt = (d\alpha/dt)\hat{T} + \alpha(d\hat{T}/dt)$, $d(\hat{T}\vec{S})/dt = (d\hat{T}/dt)\vec{S} + \hat{T}(d\vec{S}/dt)$, $d(\hat{T}\vec{a}/dt) = (d\hat{T}/dt)\vec{a} + \hat{T}(d\vec{a}/dt)$, $d(\hat{T}^T)/dt = (d\hat{T}/dt)^T$.

Zadanie: Pokazać, że jeśli $\hat{Q}(t)$ jest tensorem ortogonalnym to tensor $(d\hat{Q}/dt)\hat{Q}^T$ jest antysymetryczny.

Zadanie: Rotacja ciała stałego opisana jest przez tensor obrotu $\hat{R}(t)$. Pokazać, że wektor położenia punktu tego ciała spełnia równanie $d\vec{r}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r}$, gdzie prędkość kątowa $\vec{\omega}$ jest wektorem dualnym do antysymetrycznej części tensora $(d\hat{R}/dt)\hat{R}^T$.

2. *gradient pola skalarnego* - $\phi = \phi(\vec{r})$, zmiana pola ϕ przemieszczenie $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ dana jest $d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$, gdzie $\vec{\nabla}\phi$ oznacza gradient pola ϕ - wektor. We współrzędnych kartezjańskich $\vec{\nabla}\phi = (\partial\phi/\partial x_i)\vec{e}_i$.

3. *gradient pola wektorowego* - $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, zmiana $d\vec{v} = \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{v}(\vec{r}) = (\vec{\nabla}\vec{v})d\vec{r}$, gdzie $(\vec{\nabla}\vec{v}) = (\vec{\nabla} \otimes \vec{v})$ jest tensorem 2go rzędu. We współrzędnych kartezjańskich $(\vec{\nabla}\vec{v})_{ij} = \partial v_j / \partial x_i$.

4. *Dywergencja pola wektorowego i tensorowego* - definicja dla pola wektorowego $\text{div}\vec{v} = \text{tr}((\vec{\nabla}\vec{v})) = \partial v_i / \partial x_i$ - skalar, dla pola tensorowego mamy dla każdego \vec{a} spełnione $(\text{div}\hat{T}) \cdot \vec{a} = \text{div}(\hat{T}^T \vec{a}) - \text{tr}(\hat{T}^T (\vec{\nabla}\vec{a}))$ - wektor. We współrzędnych kartezjańskich $\text{div}\hat{T} = (\partial T_{im} / \partial x_m)\vec{e}_i$. Zadanie: Pokazać, że $\text{div}(\alpha\hat{T}) = \hat{T}(\vec{\nabla}\alpha) + \alpha(\text{div}\hat{T})$.

5. *Rotacja pola wektorowego* - z definicji $\text{rot}\vec{v} = 2\vec{\omega}$, gdzie $\vec{\omega}$ jest wektorem dualnym do części antysymetrycznej tensora $\vec{\nabla}\vec{v}$. We współrzędnych kartezjańskich: $\text{rot}\vec{v} = \epsilon_{ijk}(\partial v_j / \partial x_k)\vec{e}_i$.

Krzywoliniowe współrzędne ortogonalne

1. *współrzędne biegunowe* - definicja, wektory bazy, różniczki, $d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta$, $d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r$, $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$.

Zadanie: gradient funkcji skalarniej $\vec{\nabla}f = (\partial f / \partial r)\vec{e}_r + (1/r)(\partial f / \partial \theta)\vec{e}_\theta$.

Zadanie: gradient wektora

$$[\vec{\nabla}\vec{v}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - v_r) \end{pmatrix}.$$

Zadanie: dywergencja wektora $\text{div}\vec{v} = \partial v_r / \partial r + (1/r)(\partial v_\theta / \partial \theta + v_r)$.

Zadanie: rotacja wektora $\text{rot}\vec{v} = (\partial v_\theta / \partial r + v_\theta / r - (1/r)(\partial v_r / \partial \theta))\vec{e}_3$.

Zadanie: dywergencja tensora 2-rzędu

korzystamy z definicji $(\text{div}\hat{T}) \cdot \vec{a} = \text{div}(\hat{T}^T \vec{a}) - \text{tr}(\hat{T}^T (\vec{\nabla}\vec{a}))$ gdzie przyjmujemy za $\vec{a} = \vec{e}_r$ dostając $(\text{div}\hat{T})_r = \partial T_{rr} / \partial r + (1/r)\partial T_{r\theta} / \partial \theta + (T_{rr} - T_{\theta\theta})/r$ lub za $\vec{a} = \vec{e}_\theta$ dostając $(\text{div}\hat{T})_\theta = \partial T_{\theta r} / \partial r + (1/r)\partial T_{\theta\theta} / \partial \theta + (T_{\theta r} + T_{r\theta})/r$.

3.3 Zadania domowe

1.⁵ Udowodnić tożsamości z punktu 1 z ćwiczeń.

2. Dla pola $\phi = x_1 x_2 + x_3$ znaleźć jednostkowy wektor \vec{n} prostopadły do powierzchni $\phi = \text{const}$ i przechodzącej przez punkt $(2, 1, 0)$.

3. Samodzielnie wyprowadzić wzory na składowe dywergencji tensora, patrz ostatni punkt z ćwiczeń.

4.⁶ Udowodnij następujące tożsamości dla pola skalarnego ϕ , pól wektorowych $\vec{a}, \vec{v}, \vec{u}$ i pola tensorowego \hat{T}

(a) $\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{a}) = \phi \nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla \phi$,

(b) $\vec{\nabla} \times (\phi \vec{a}) = (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{a} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{a}$,

(c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$,

(d) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u})$.

(e) $\text{div}(\phi \hat{T}) = \hat{T}(\vec{\nabla} \phi) + \phi \text{div}\hat{T}$.

5. Dla pola skalarnego ϕ , wektorowego \vec{v} i tensorowego 2-go rzędu \hat{T} znaleźć $\vec{\nabla}\phi, \vec{\nabla}\vec{v}, \text{div}\vec{v}, \text{rot}\vec{v}$ i $\text{div}\hat{T}$ we współrzędnych cylindrycznych.

6. Dla pola skalarnego ϕ , wektorowego \vec{v} i tensorowego 2-go rzędu \hat{T} znaleźć $\vec{\nabla}\phi, \vec{\nabla}\vec{v}, \text{div}\vec{v}, \text{rot}\vec{v}$ i $\text{div}\hat{T}$ we współrzędnych sferycznych.

4 Tydzień IV, 19-25/02/2018

4.1 Wykład

1. skręcanie czyste. Prawo Coulomba - Saint Venanta
2. zasada Saint-Venanta

4.2 Zadania na ćwiczenia

1. *Deformacja ośrodka ciągłego* - Rozważyc deformacje opisaną przez $\vec{x} = \vec{X} + X_1 k \vec{e}_1$, gdzie $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ jest punktem początkowym. Niech $d\vec{X}_1 = dS_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$ i $d\vec{X}_2 = dS_2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$ są punktami początkowymi nieskończenie blisko \vec{X} . Znaleźć $d\vec{x}_1$ i $d\vec{x}_2$ będące obrazami $d\vec{X}_1$ i $d\vec{X}_2$ przy

⁵Zadania 1-3 są nieobowiązkowe

⁶Zadania 4-6 sa obowiązkowe z terminem oddania na ćwiczeniach 28 marca 2018 lub wcześniej. Uwaga 28 marca, w środę jest realizowany plan czwartkowy.

odkształceniu. Znaleźć ich wydłużenie względne i kąt między nimi przy deformacji. Podać rozwinięcie wyników dla małych $k = 10^{-4}$. Wyznaczyć wydłużenie względne i kąt poprzez tensor małych deformacji. Porównać wyniki.

2. *Maksymalna wysokość góry* - Oszacować maksymalną wysokość góry zbudowanej ze skały o gęstości 3000 kg/m^3 jeśli maksymalne naprężenie jakie ta skała może znieść nim się trwale zdeformuje jest 300 MPa . Jaka była by wysokość tej góry na Marsie gdzie przyspieszenie grawitacyjne wynosi $3,7 \text{ m/s}^2$.

Góra o największej wysokości na Ziemi - Manua Kea, 10200 m od podstawy (4200 m npm), wulkan tarczowy na Hawajach, góra (z odkrytych) o największej wysokości w Układzie Słonecznym - Olympus Mons, 21229 m , wulkan tarczowy na Marsie.

Skały wulkaniczne: bazalt - $\rho \sim 2700 - 3200 \text{ kg/m}^3$, $T_{max} \sim 200 - 290 \text{ MPa}$, granit $\rho \sim 2650 - 2750 \text{ kg/m}^3$, $T_{max} \sim 100 - 200 \text{ MPa}$.

3. *Maksymalne naprężenie ścinające* - Znając wartości główne T_i i kierunki główne \vec{e}_i tensora naprężeń \hat{T} znaleźć maksymalną wartość naprężenia ścinającego. Dla przypadku tensora naprężeń o następujących niezerowych elementach

$$[\hat{T}] = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

znaleźć jawnie maksymalne naprężenie ścinające i kąt pod którym skierowana jest płaszczyzna w stosunku do osi głównych. W ostatnim przypadku wykonać obliczenia dla $T_{11} = T_{22} = 0$ oraz $T_{12} = 1000 \text{ Pa}$.

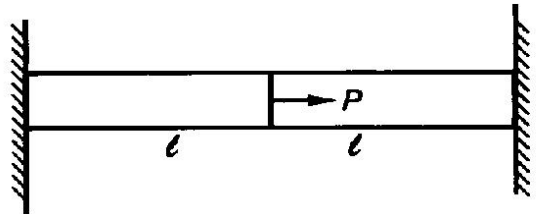
4.3 Zadania domowe

1.⁷ Dane jest przemieszczenie ośrodka opisane przez $u_1 = kX_2^2$, $u_2 = u_3 = 0$. Dla danych punktów O $(0, 0)$, A $(1, 0)$, B $(1, 1)$ i C $(0, 1)$ oraz linii OA, OC, CB i AB wyznaczyć ich przemieszczenia. Znaleźć wektor deformacji \vec{x} dla $d\vec{X}_1 = dX_1\vec{e}_1$ i $d\vec{X}_2 = dX_2\vec{e}_2$, gdzie \vec{e}_i sa wektorami bazy układu kartezjanskiego. Wyznaczyć względne wydłużenie i kąt dla tych wektorów deformacji. Znaleźć tensor małych deformacji i względne wydłużenia i kąt. Dla jakich wartości k opis jest poprawny.

2.⁸ Dla danego przemieszczenia $u_1 = k(2X_1 + X_2^2)$, $u_2 = k(X_1^2 - X_2^2)$, $u_3 = 0$, gdzie $k = 10^{-4}$, znaleźć dla punktów $d\vec{X}_1 = dX_1\vec{e}_1$ i $d\vec{X}_2 = dX_2\vec{e}_2$ leżącymi w pobliżu punktu o wektorze położenia $\vec{X} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ich zdeformowane położenia (tzn. wektory deformacji), względne wydłużenia i kąty względem osi układu i względny pomiędzy wektorami deformacji. Rozwiązać geometrycznie i poprzez tensor małych deformacji.

3. Kompozytowy pręt został utworzony poprzez zespawanie dwóch długich prętów o równych długościach i średnicach i został obciążony osiową siłą

\vec{P} . Znając moduły Younga prętów Y_1 i Y_2 oblicz, jak rozłożona jest siła pomiędzy dwie połowy pręta. Ścianki zewnętrzne są idealnie sztywne i nie ulegają odkształceniu.



4. Rozważ pręt o cylindrycznym przekroju, obciążony osiowym naprężeniem $T_{11} = -\sigma$. Jaki będzie rozkład naprężeń, jeśli powierzchnia boczna pręta zostanie ustalona, tzn. nie będzie mogła się przemieścić? Pokaż, że efektywny moduł Younga $(E_Y)_{eff} = T_{11}/E_{11}$ jest równy $(E_Y)_{eff} = E_Y(1 - \nu)/(1 - 2\nu)(1 + \nu)$, gdzie ν jest modułem Poissona.

5. W jaki sposób pęka kreda przy skręcaniu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, znajdź maksymalne naprężenia ściskające i ścinające dla walca skręcanego przez równe, przeciwnie skierowane momenty sił przyłożone do denek. W którym miejscu walca są one osiągnane? Na jaką płaszczyznę wewnątrz walca działa maksymalne naprężenie ścinające?

5 Tydzień V, 26/03-01/04/2018

5.1 Wykład

1. postaci tensora deformacji i tensora naprężeń dla zginania
- 2.- prawa Eulera-Bernoulliego i definicji bending stiffness

5.2 Zadania na ćwiczenia

1. Określić odkształcenie cienkiego pręta przy zginaniu.

Odp. warunki równowagi $u_{zz} = -y/R = T_{zz}/E$, $u_{xx} = u_{yy} = -(\nu/E)T_{zz}$, stąd $u_x = \nu xy/R$, $u_y = z^2/2R + \nu(y^2 - x^2)/2R$, $u_z = -yz/R$, dyskusja.

2. Określić odkształcenie pełnej kuli o promieniu R po działaniem własnego pola grawitacyjnego.

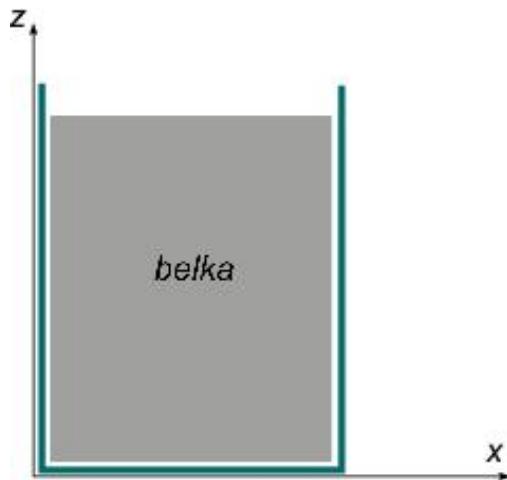
Odp. siła na jednostkę masy $\vec{f} = -g(r/R)\vec{e}_r$, warunek równowagi $\vec{f} + \mu\vec{\nabla}^2\vec{u} + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) = 0$, $\vec{\nabla}^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$, $\vec{u} = u_r(r)\vec{e}_r$, $u_r(r=0)$ skończone, $T_{rr}(r=R) = 0$, i dostajemy $u_r(r) = -(g\rho R/10)((1 + \nu)(1 - 2\nu)/E(1 - \nu))r((3 - \nu)/(1 + \nu) - r^2/R^2)$, dyskusja.

⁷Nieobowiązkowe

⁸Zadania 2-5 są z terminem oddania do 5 kwietnia. Do ich rozwiązywania skorzystać z przykładów zrobionych na wykładzie.

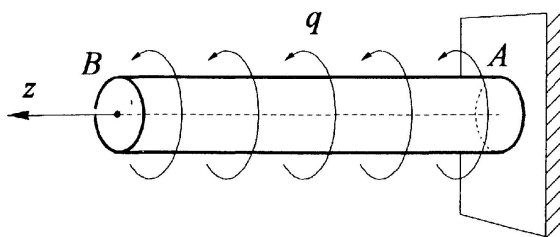
5.3 Zadania domowe

1.⁹ Rozważyć nieskończeni długą (w kierunku osi y) elastyczną belkę o gęstości ρ i o przekroju prostokąta o wysokości h , która znajduje się w polu grawitacyjnym $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Belka umieszczona jest w pojemniku, którego ściany są idealnie śliskie. W płaszczyźnie $z = 0$ umieszczony jest denko pojemnika. Ścianki pozwalają na ruch belki równoległe do swojej płaszczyzny, nie pozwalają natomiast na ruch w kierunku prostopadłym. Znaleźć naprężenia i odkształcenia belki pod wpływem własnego ciężaru. Naskicuj kształt zdeformowanej belki. Czy istnieje jakaś charakterystyczna skala długości dla takiego odkształcenia?



2. Czy dla mikrotubul korzystne jest posiadanie pustego wnętrza? Oblicz stosunek mas i stosunek sztywności zginania dla pustej mikrotubuli o promieniu wewnętrznym 11.5 nm i zewnętrznym 14 nm, oraz dla pełnej mikrotubuli w kształcie walca o tym samym promieniu. Jak najefektywniej wykorzystac białka dla uzyskania sztywnej struktury - utworzyć jedną wypełnioną mikrotubule czy kilka o kształcie rury?

3. Na walec o promieniu R i długości l , przytwierdzony do ściany w płaszczyźnie A tak, że nie może się obracać, działa stały moment skręcający na jednostkę długości walca q . Znajdź kąt odchylenia ϕ końca walca (denka B).



⁹Zadania 1-3 są obowiązkowe z terminem oddania do 12 kwietnia

6 Tydzień VI, 02-08/04/2018

6.1 Wykład

6.2 Zadania na ćwiczenia

1. Znaleźć całkowitą siłę i moment siły działający na zgiętą belkę.

odp. $\vec{F} = \int T_{zz} dS_z \vec{e}_z = -(E/R) \int y dy = 0$ gdyż środek układu odniesienia wybieramy w środku geometrycznym figury, $\vec{M} = -(EI/R) \vec{e}_x$, $I = \int y^2 dS$ - moment bezwładności na jednostkę masy.

2. Prawo Eulera-Bernoulliego - $M_b = -M_x = EI/R = EI\kappa$, κ - krzywizna, EI - sztywność na zginanie. Dla prostokąta $I = 4ab^3/3$, dla elipsy $I = \pi ab^3/4$, dla rurki $I = \pi(b^4 - a^4)/4$.

3. Znaleźć ugięcie jednocalowej rurki ($2a = 2,54$ cm, $2b = 3,36$ cm) o długości 1 m gdy zawiesimy na jej końcu masę 75 kg.

4. Przykłady z mikroświata: Mikrotubule - długość 25 nm, średnica 25 nm, $E > 130 - 150$ MPa, sztywność $1 - 40 \cdot 10^{-24}$ Nm²; nanorurki węglowe (jednościenne - SWNT - $2R \approx 0,4 - 3$ nm, wielościenne - MWNT - $2R \approx 1,4 - 100$ nm, liny - ropes - $2R \approx 250$ nm) - $E_{MWNT} \approx 10^3$ GPa, $E_{SWNT} \approx 100$ GPa, porównanie z $E_{Al} = 70$ GPa, $E_{stal} = 210$ GPa, $E_{plastik} = 1$ GPa, $E_{diament} = 1000$ GPa.

5. Granica sprężystości dla rurki o promieniu a . Znaleźć wartości graniczne dla spinacza biurowego gdy $a = 0,5 - 2$ mm

odp. $T_g = Ea/R$ stąd $R > aE/T_g$, $M_b < \pi a^3 T_g/4$, $R_g \approx 0,25 - 1$ m.

6. Energia sprężysta na jednostkę długości.

odp. $d\mathcal{E}/dl = EI/2R^2 = M_b^2/2EI$.

7. Odkształcenie cienkich prętów bez skręcania. Warunki małej deformacji bez skręcania $|dy(z)/dz| \ll 1$, lokalna równowaga sił $dF_y/dz = -K_y$, $dF_z/dz = -K_z$ i momentów sił $dM_x/dz = F_y$, moment zginający $M_x = -EI d^2 y/dz^2$. Dla poziomego pręta $K = EI d^4 y/dz^4$ i rozwiązanie $y(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 + Kz^4/24EI$.

6.3 Zadania domowe

1.¹⁰ Obliczyć przemieszczenie, tensor deformacji i tensor naprężeń w rurce poddanej zewnętrznemu ciśnieniu p jeśli jej końce są umocowane na stałe w ścianach. Czy ścianka rurki może się faktycznie zwięzić?

2. Określić odkształcenie powłoki kulistej o promieniu zewnętrznym R_1 i wewnętrznym R_2 , wewnątrz której panuje ciśnienie p_1 , a ciśnienie na zewnątrz wynosi p_2 . Zbadać przypadki graniczne. Określić deformacje powłoki wykonanej ze stali o grubości 5 cali i umieszczonej na dnie Rowu Mariańskiego 10911 ± 40 m p.p.m. jeśli wewnątrz utrzymuje się ciśnienie jak na powierzchni morza. Brakujące dane odszukać samodzielnie.

3. Okrągła rura o nieskończonej długości ma zamocowana powierzchnię zewnętrzną. Rura jest obciążona równomiernym, osiowym naprężeniem stycznym do

¹⁰Terminem oddawania zadań 1-3 jest 19 kwietnia 2018.

wewnętrznej powierzchni. Znaleźć rozkład naprężeń stycznych i normalnych na zewnętrznej powierzchni rury.

7 Tydzień VII, 9-15/04/2018

7.1 Wykład

omawiany materiał ćwiczeniowy

7.2 Zadania na ćwiczenia

1. Odształcenia cienkich prętów, przykłady: poziomo zawieszony pręt w ścianie, belka podparta na końcach (most), jazmo.
2. Wyboczenia, niestabilność na wyboczenie, kryterium Eulera, warunek na siłę krytyczną $F_n = n^2\pi EI/L^2$, przykład drewniana laska o długości 1m i średnicy 2cm.
3. Tensor naprężeń a ciśnienie, konwencja znakowa.
4. Prawo Pascala jego dwóch.
5. Globalne warunki równowagi w cieczy, ciśnienie hydrostatyczne.
6. Lokalne warunki równowagi.
7. Paradoks hydrostatyczny: ciśnienie w butelce.
8. Prawo Archimedes, dowód.
9. Ciecz barotropowa, podstawowe własności.
10. Zadanie: Kula w barotropowej cieczy i w jednorodnym polu grawitacyjnym z uwzględnieniem słabego pola grawitacyjnego od tej kuli.
11. Ogólne warunki stabilności ciał pływających.

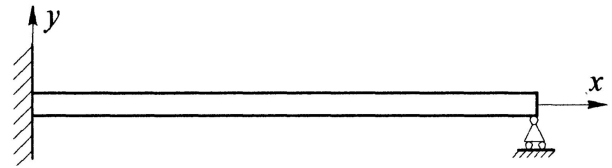
7.3 Zadania domowe

1.¹¹ Znaleźć równania na warunek mechanicznej równowagi gazowej gwiazdy o gęstości ρ spełniającej prawa dla gazu barotropowego $p = C\rho^{6/5}$. Wziąć pod uwagę, że potencjał grawitacyjny gwiazdy spełnia równanie Poissona ze stałą grawitacji G . Masa całkowita gwiazdy jest M . Znaleźć rozkład ciśnienia względem promienia gwiazdy. Wyniki porównać z przypadkiem $\rho = \rho_0 = const$. Gwiazda się nie obraca.

2. Cylindryczne ciało o promieniu r , długości l i masie M jest przywiązane liną do dna naczynia, wypełnionego cieczą o gęstości ρ . Jeśli gęstość ciała ρ_1 jest mniejsza od gęstości cieczy, znajdź siłę naprężenia liny.

3. Jednorodny poziomy pręt o długości l , module Younga E i momencie powierzchni przekroju I został przymocowany na jednym końcu do sztywnej ściany, a drugi jego koniec znajduje się na przegubie, który pozwala na obrót pręta, ale nie pozwala na jego przesunięcie (rysunek poniżej). Znajdź kształt pręta w przybliżeniu małych wygięć i naskicuj go. Znajdź miejsce odpowiadające maksymalnemu wychyleniu i jego wielkość w stosunku do długości pręta.

¹¹Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 26 kwietnia 2018



8 Tydzień VIII, 16-22/04/2018

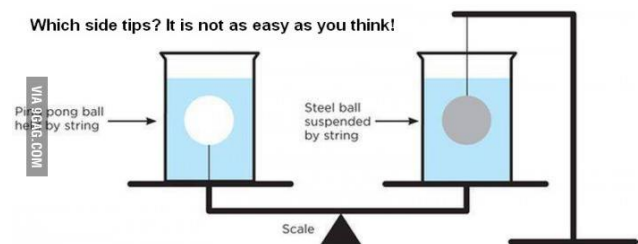
8.1 Wykład

pochoźna substancjalna
równania Eulera
prosty model rozszerzającego się Wszechświata

8.2 Zadania na ćwiczenia

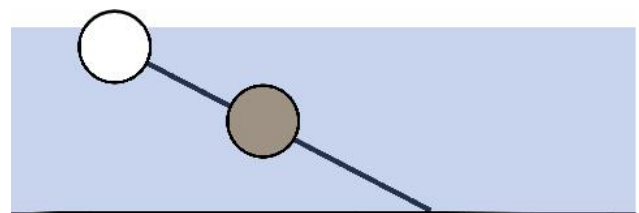
1. Definicje środka ciężkości i środka wyporu. Warunki równowagi. Analiza stabilności ciał pływających po powierzchni cieczy. Wyznaczenie metacentrum ciała. Przykład: Płaska kółka o eliptycznym kształcie. Przykład: Stabilność pływającego prostopadłościanu na wodzie.

2. W którą stronę przechyli się waga szalkowa?



8.3 Zadania domowe

1.¹² Dwie kulki o jednakowych rozmiarach, jedna lekka, a druga ciężka, przymocowano do cienkiego pręta, przy czym kulke ciężka dośrodku pręta, a lekka do jednego z końców. Po zanurzeniu do niezbyt głębokiej wody swobodny koniec pręta opiera się o dno. Sam pręt jest pochylony, a z wody wystaje tylko część lekkiej kulki, przy czym stosunek objętości części wynurzonej do objętości całej kulki wynosi n . Czy układ ten będzie pływał, czy też utonie, gdy przeniesiemy go na głęboką wodę? Masę lekkiej kulki i pręta należy traktować jako znikomo małe.



¹²Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 10 maj 2018

2. W basenie pływa łódka. Jak zmieni się poziom wody w basenie, jeśli z łódki do basenu zostanie wyrzucony kamień? Co stanie się z poziomem wody w basenie, jeśli z łódki wyrzucimy do wody drewnianą belkę, która pływa po powierzchni? Co stanie się z poziomem wody w basenie, jeśli w dnie łódki wywiercimy mały otwór i zacznie ona toąć? Jeśli poziom wody w basenie zmieni się przy tym, to w którym momencie rozpocznie się ta zmiana? Wskazówka: Zastanów się, jak będzie wyglądała ta sytuacja, jeśli cały basen z łódką, belką i kamieniami postawimy na wadze.

3. Belka o długości L i przekroju w kształcie trójkąta równoramiennego o wysokości h i kącie w wierzchołku przy tej wysokości równym 2α (ramiona o równej długości wychodzą z tego wierzchołka) wykonana z materiału o gęstości ρ_1 pływa w cieczy o gęstości $\rho_0 > \rho_1$. Znaleźć warunki stabilności, stosunek ρ_1/ρ_0 aby belka pływała wierzchołkiem z kątem 2α do dołu lub do góry. Ile wynosi najmniejszy kąt rozwarcia aby belka mogła pływać stabilnie na oba sposoby.

9 Tydzień IX, 23-29/04/2018

9.1 Wykład

9.2 Zadania na ćwiczenia

1. Dany jest ruch ciała

$$x_1 = X_1 + ktX_2$$

$$x_2 = X_2$$

$$x_3 = X_3,$$

gdzie x_i są to współrzędne przestrzenne (Eulera) a X_i są to współrzędne materialne (Lagrange'a), stała k ma wymiar s^{-1} . Jeśli pole temperatury w opisie przestrzennym ma postać $T(\vec{x}) = \Theta(x_1 + x_2)$, gdzie stała Θ ma wymiar K/m a) znaleźć materialny opis temperatury, b) wyznaczyć prędkość i tempo zmiany temperatury dla wybranej czastki, c) wyznaczyć punkt b) bezpośrednio korzystając z pochodnej śledczej.

2. Cało sztywne obraca się z prędkością katową $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_3$. Wyznaczyć przyspieszenie dośrodkowe korzystając z pochodnej śledczej.

3. Dla danego pola prędkości $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)/(\tau + t)$, gdzie stała τ ma wymiar s , znaleźć a) przyspieszenie, b) trajektorie cząstek.

4. Zanurzona w idealnej cieczy kapsuła o promieniu R_0 wybucha, w wyniku czego w cieczy powstaje rozszerzająca się wnęka kulista o promieniu $R(t)$, przy czym $R(t=0) = R_0$. Pokazać, że ciśnienie cieczy na brzegu wneki spełnia związek

$$p(t) = p_\infty + \rho(Rd^2R/dt^2 + (3/2)(dR/dt)^2).$$

Następnie zakładając, że cała energia wybuchu E jest uwolniona w sposób natychmiastowy w $t=0$, wyliczyć końcowy rozmiar wneki R_f oraz czas po jakim zostanie osiągnięty.

9.3 Zadania domowe

1.¹³ Rozważyc ruch ośrodka

$$x_1 = X_1$$

$$x_2 = X_2 + (\sin \pi t/T)(\sin \pi X_1/L)$$

$$x_3 = X_3.$$

a) Jaki jest wymiar stałych T i L ? Dalej przyjmując ich wartości równe jeden. b) W $t=0$ włókno ośrodka rozciąga się od punktu $(0,0,0)$ do $(1,0,0)$. Naszkicować jego zdeformowany kształt w chwilach $t=1/2, 1$ i $3/2$. c) Znaleźć prędkość i przyspieszenie w opisie materialnym i przestrzennym.

2. Dane jest pole prędkości ośrodka

$$I) \vec{v}(\vec{x}) = \frac{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad II) \vec{v}(\vec{x}) = \frac{-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

oraz pole temperatury $T(\vec{x}) = \Theta(x_1^2 + x_2^2)$. a) Wyznaczyć prędkość w kilku charakterystycznych położeniach i określić ogólną naturę tych pól prędkości. Jak wyglądają izotermy? b) W punkcie $(1,1,0)$ wyznaczyć przyspieszenie cząstki materialnej i pochodną materialną (śledczą) pola temperatury.

3. Z idealnej, nieściśliwej i wypełniającej całą przestrzeń cieczy usunięto w sposób nagły kulę o promieniu a . Znaleźć czas po którym ciecz wypełni powstałą wnekę. Gęstość cieczy ρ i ciśnienie w nieskończoności p_0 są dane.

10 Tydzień X, 30/04-06/05/2018

10.1 Wykład

weekend majowy bez zajęć

10.2 Zadania na ćwiczenia

10.3 Zadania domowe

11 Tydzień XI, 07-13/05/2018

11.1 Wykład

na ćwiczeniach i wykładzie było potencjalne przepływy płaskie cieczy idealnej metoda potencjału zespolonego, potem opływ walca, paradoks d'Alemberta, opływ kuli - stacjonarny i niestacjonarny i pojęcie masy dodanej.

11.2 Zadania na ćwiczenia

11.3 Zadania domowe

1.¹⁴ Liniowy wir o natężeniu Γ umieszczony jest w odległości d od sztywnej płaskiej ściany $x=0$. Znajdź potencjał zespolony odpowiadający takiemu przepływowi. Znajdź funkcję prądu i kształt linii prądu. Wskazówka: Sprawdź, czy w powyższej sytuacji da się zastosować metodę obrazów.

¹³Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 17 maj 2018

¹⁴Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 24 maj 2018

2. Pokaż, że problem bezwirowego przepływu wokół walca o promieniu R można sprowadzić do rozwiązania dwuwymiarowego równania Laplace'a na potencjał prędkości, które we współrzędnych cylindrycznych przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$

z warunkami

$$\Phi \sim Ur \cos \theta, \text{ dla } r \rightarrow \infty$$

oraz

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \text{ dla } r = R,$$

a następnie rozwiąż to równanie metodą separacji zmiennych dla przypadku znikającej cyrkulacji pola prędkości wokół walca.

3. Rozważmy model Wszechświata, będący uogólnieniem modelu omawianego na wykładzie, zawierającego oprócz 'zwykłej' materii 'ciemną energię' o gęstości ρ_0 , stałą w czasie i jednorodną w przestrzeni. W tym wypadku wyrażenie na 'energii', wyprowadzone na wykładzie, zmieni się następująco

$$E = \frac{1}{2} \dot{a}^2 - G \frac{M + M_0}{a} = \frac{4\pi}{3} G a^2 (\rho_c - (\rho + \rho_0)),$$

gdzie $M_0 = (4/3)\pi\rho_0 a^3$, ρ jest gęstością 'zwykłej' materii, która spełnia równanie ciągłości, a ρ_c jest zdefiniowaną na wykładzie gęstością krytyczną.

(a) Znajdź równanie opisujące zmianę 'energii' w czasie \dot{E} i pokaż, że warunek stałości energii implikuje następującą równość

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi}{3} G(\rho - 2\rho_0).$$

(b) Czy taki Wszechświat może być stacjonarny (z czynnikiem skali niezależnym od czasu)? Kiedy tak się dzieje? Jak zinterpretujesz sytuację, w której $2\rho_0 > \rho$?

(c) Rozważ następnie sytuację w której $\rho_0 < \rho_c/3$. Pokaż, że jeśli w pewnej chwili $2\rho_0 < \rho < \rho_c$, to początkowo Wszechświat będzie się rozszerzał coraz wolniej, ($\ddot{a} < 0$), jednak w pewnym momencie (jakim?) jego prędkość rozszerzania zacznie się zwiększać. Ostatnie obserwacje kosmologiczne pokazują, że proces taki ma miejsce również i w przypadku naszego Wszechświata.

12 Tydzień XII, 14-20/05/2018

12.1 Wykład

12.2 Zadania na ćwiczenia

1. Znaleźć czas jaki zajmuje wypływ cieczy z cylindrycznego naczynia o promieniu podstawy R i wysokości h przez otwór o promieniu $r \ll R$ w następujących przybliżeniach: a) powierzchnia cieczy porusza się z zerową prędkością, b) powierzchnia cieczy porusza się ze skończoną prędkością, zgodnie z prawem da Vinci (zasada zachowania masy), $A_0 v_0 = A v$, gdzie A_i to pola przekroju, c) powierzchnia cieczy porusza się zgodnie z przybliżeniem kwazistatycznym.

2. Rurka Pittota i jej zastosowania do pomiaru prędkości przepływu.

3. Przepływ lepkiej cieczy pod wpływem gradientu prędkości.

4. Przepływ lepkiej cieczy pod wpływem ciśnienia.

5. Przepływ lepkiej cieczy w polu grawitacyjnym.

12.3 Zadania domowe

1.¹⁵ Znaleźć okres drgań wahadła matematycznego (malutka kulka zrobiona z materiału o gęstości ρ_1 na nici o długości l , umieszczonego w nielepkiej nieściślnej cieczy o gęstości ρ_0 ($\rho_1 > \rho_0$)).

2. Ciecz doskonała obraca się w polu grawitacyjnym ze stałą prędkością kątową Ω tak, że prędkość w układzie laboratoryjnym ma postać $u = \Omega(-y, x, 0)$. Znaleźć powierzchnie stałego ciśnienia, a co za tym idzie (kładac $p = p_{\text{atm}}$) również kształt powierzchni wody w wirującym wiadrze. Zgodnie z prawem Bernoulliego wielkość $p/\rho + \frac{1}{2}u^2 + gz$ jest stała, a więc powierzchnia stałego ciśnienia spełnia równanie

$$z = \text{const} - \frac{\Omega^2}{2g}(x^2 + y^2).$$

Ale to oznacza, że poziom wody jest najwyższy w środku obracającego się wiadra. Co tu się nie zgadza? Jakie jest prawdziwe równanie powierzchni stałego ciśnienia i dlaczego?

3. Z lejka w kształcie odwróconego stożka o wysokości h i promieniu podstawy R wypływa ciecz przez otwór na dnie o promieniu $r \ll R$. Znaleźć czas po którym naczynie będzie całkowicie puste. Znaleźć odpowiedź na dwa sposoby (przy założeniu, że powierzchnia cieczy porusza się z zerową prędkością i przy założeniu kwazistacjonarnego opadania poziomu cieczy, jak na ćwiczeniach). Porównać wyniki z analogicznymi wynikami z ćwiczeń dla walca o promieniu podstawy R i wysokości h .

13 Tydzień XIII, 21-27/05/2018

13.1 Wykład

13.2 Zadania na ćwiczenia

1. Przepływ lepkiej cieczy w polu grawitacyjnym, cd.
2. Przepływ Poiseuille'a i prawo Hagen-Poiseuille'a.
3. Laminarny przepływ cylindryczny.

13.3 Zadania domowe

1.¹⁶ Przeanalizuj opływ bąbelka cieczą o lepkości η i prędkości $U\vec{e}_x$ w nieskończoności przy małych liczbach Reynoldsa. W tym celu skorzystaj z formalizmu funkcji prądu Stokesa dla opływów osiowosymetrycznych,

¹⁵Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 7 czerwca 2018

¹⁶Terminem oddawania rozwiązań zadań 1-3 jest 14 czerwca 2018

wyprowadzonego na wykładzie. Zastąp warunek przylegania (który nakładaliśmy na powierzchnię kuli) warunkiem zerowania się naprężeń ścinających, tj. ($t_\theta = 0$ dla $r = a$). Pokaż, że funkcja prądu ma wtedy postać

$$\Psi = \frac{1}{2}U(r^2 - ar) \sin^2 \theta,$$

i że naprężenia normalne na powierzchni bąbelka wynoszą $t_r = 3\eta U a^{-1} \cos \theta$. Następnie pokaż, że siła oporu działająca na bąbelek wynosi

$$F = 4\pi\eta U a.$$

2. Spadek ciśnienia Δp w odcinku rury o długości L konieczny do transportu strumienia masy $\rho_0 Q$ w przepływie Poiseuille'a jest zupełnie analogiczny do spadku napięcia przy przepływie prądu przez przewodnik. W analogii z prawem Ohma definiuje się opór hydrodynamiczny rury R jako

$$R = \frac{\Delta p}{\rho_0 Q}.$$

Pokazać, że tak zdefiniowany opór jest addytywny przy łączeniu rur szeregowo i addytywny w odwrotnościach, gdy rury połączymy równolegle.

3. Prostopadłościenna rura o wymiarach: wysokość d , szerokość W , długość L , nachylona jest pod kątem α (pomiędzy bokiem o długości L) do poziomu Ziemi. Pomiędzy końcami rury jest przyłożone ciśnienie Δp , a przyspieszenie ziemskie \vec{g} jest stałe. Znaleźć rozkład ciśnienia w rurze i pole prędkości przepływu cieczy o lepkości kinematycznej ν . Wyznaczyć różnicę ciśnień Δp , która spowoduje zatrzymanie przepływu cieczy w tej rurze. Jaką postać ma wtedy rozkład ciśnienia i podać jego interpretację. Przyjąć, że w środku geometrycznym rury panuje ciśnienie atmosferyczne p_0 .

14.1 Wykład

14.2 Zadania na ćwiczenia

14.3 Zadania domowe

15 Tydzień XV, 204-10/06/2018

15.1 Wykład

15.2 Zadania na ćwiczenia

15.3 Zadania domowe

16 Tydzień XVI, 11-17/05/2018

16.1 Wykład

16.2 Zadania na ćwiczenia

16.3 Zadania domowe

14 Tydzień XIV, 28/05-03/06/2018

czwartek 30/05/18 wolny od zajęć,

Literatura

- D. Fleisch, *A student's guide to vectors and tensors*
- B. K. Poczelin, *Analiza wektorowa dla inżynierów*
- E. Karaśkiewicz, *Zarys teorii wektorów i tensorów*
- W. M. Lai, D. Rubin, E. Krempl, *Introduction to continuum mechanics*
- B. Lautrup, *Physics of Continuous Matter - Exotic and Everyday Phenomena in the Macroscopic*