Lewitron™ – prosta zabawka fizyczna o wyrafinowanej teorii działania, część I

Krzysztof Byczuk

Uniwersytet Augsburski, Niemcy,
i
Uniwersytet Warszawski, Polska

Twierdzenie Earnschaw'a

Lewitacją nazywamy stan, w którym ciało pozostaje w spoczynku jednocześnie nie mając bezpośredniego kontaktu z żadnym inny ciałem fizycznym. Osiągnięcie stanu lewitacji statycznej nie jest jednak możliwe.

Jednoimienne bieguny magnesów odpychają się. Wydaje się więc, że można byłoby umieścić wystarczająco silne magnesy, jeden nad drugim tak, aby ten na górze unosił się swobodnie w powietrzu bez żadnego bezpośredniego wsparcia. Doświadczenie pokazuje, że to się nigdy nie udaje. Zawsze górny magnes obraca się i zostaje przyciągnięty przez dolny.

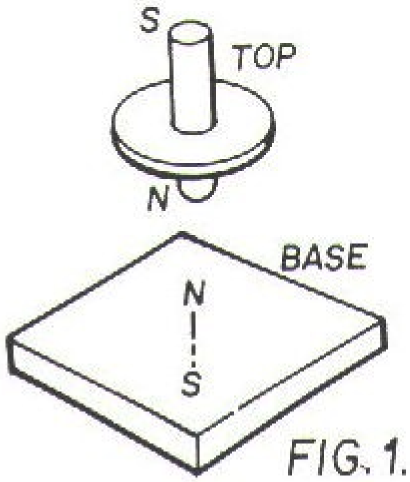
W 1842 roku Samuel Earnschaw udowodnił zaskakujące twierdzenie:

w pustej przestrzeni nie istnieje żadna statyczna (czyli nie zmieniająca się w czasie) konfiguracja pól elektrycznych, magnetycznych i grawitacyjnych dla której energia potencjalna posiadała by lokalne minimum.

Oznacza to, że niezależnie od sposobu wzajemnego ustawienia ładunków elektrycznych, dipoli magnetycznych i mas w obszarach pomiędzy nimi energia potencjalna pól nie ma lokalnego minimum. Jeśli nie istnieje lokalne minimum, to ciało fizyczne nigdy nie będzie znajdowało się w stanie równowagi trwałej. Z punktu widzenia mechaniki Newtona i elektrodynamiki klasycznej statyczna lewitacja nie jest więc możliwa.

Lewitron

W latach 90 pojawiła się w sprzedaży zabawka o nazwie Levitron™. Zabawka składa się z dużego i silnego magnesu stałego wykonanego z materiałów ceramicznych oraz małego bączka także wykonanego z magnesu o symetrii osiowej. Masa bączka wynosi około 18g. W zestawie jest też kilka pierścieni o masach 3, 1, 0,4, 0,2 i 0,1 gramów. Dodatkowo znajduje się w komplecie plastikowa płytka oraz w niektórych wersjach mały silniczek do wprawienia bączka w ruch obrotowy.



Rys. Schemat budowy lewitronu. Zasadnicze elementy to duży magnes w podstawie oraz magnetyczny bączek. Bieguny magnesów muszą być do siebie przeciwnie skierowane.

Zabawa polega na rozkręceniu bączka na płytce umieszczonej nad magnesem stałym. Następnie umiejętnie unosimy płytkę z kręcącym się bączkiem do momentu, aż zacznie on sam unosić się w polu grawitacyjnym, wirując nad magnesem. Wtedy płytkę odsuwamy. W tym stanie *lewitacji dynamicznej* bączek pozostaje około 2-3 minut.

Rys. Kolejne etapy wprowadzania bączka w stan dynamicznej lewitacji: i) rozkręcamy bączek na plastikowej płytce, ii) unosimy płytkę do góry, iii) odsuwamy płytkę pozostawiając bączka wirującego w powietrzu.

Oczywiście wprowadzenie bączka w stan tej dynamicznej lewitacji wymaga pewnej wprawy, bardzo dokładnego ustawienia magnesu trwałego w poziomie oraz dobrania ciężaru bączka za pomocą dołączonych pierścieni. Ważne też jest aby bączek wirował z odpowiednią prędkością kątową. Nie może ona być zbyt wolna, ale też nie może być zbyt szybka.

Lewitron został wynaleziony i opatentowany przez Roy'a Harring'a w 1983 roku w USA. Teoretyczne zrozumienie jak działa lewitron pojawiło się dopiero w 1996 roku. W dalszej części wyjaśnimy zasadę działania lewitronu.

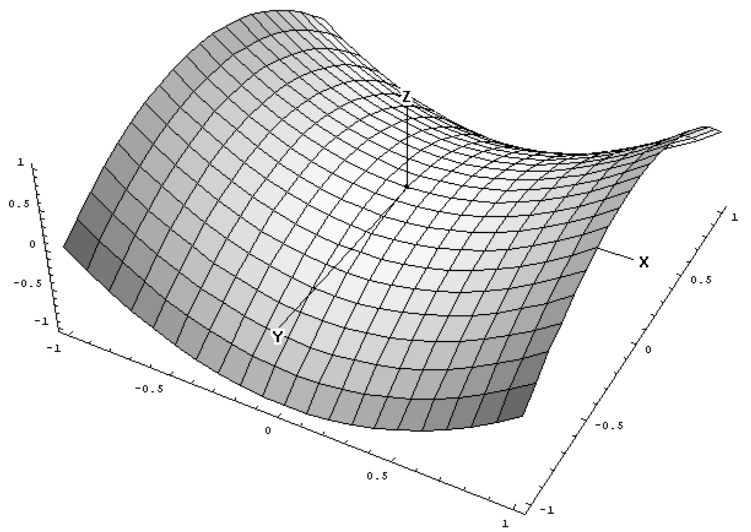
Jak lewitron (nie) działa

Aby bączek unosił się w polu grawitacyjnym musi na niego działać siła równoważąca przyciąganie ziemskie. Dlatego jednoimienne bieguny magnesu w podstawie i w bączku muszą być zwrócone przeciwnie do siebie, jak na rysunku. Gdyby bączek nie wirował to natychmiast odwróciłby się i spadł na podstawę. Ponieważ wiruje to posiada moment, który jest zachowany. Dlatego się nie przewraca. Jest jednak problem z istnieniem równowagi trwałej takiego układu. Bardzo dobrze to widać gdy próbujemy dostroić zabawkę do działania. Przy nieudanych próbach zauważamy, że wirujący bączek faktycznie się nie odwraca (moment pędu jest zachowany), jednakże wypływa z obszaru nad magnesem i spada poza podstawą.

Jeśli bączek ma moment magnetyczny μ i masę m to znajdując się w polu magnetycznym o indukcji $B(r)$, która zależy od danego punktu w przestrzeni, oraz w polu grawitacyjnym o natężeniu g posiada energię potencjalną

$$U(r) = -\mu \cdot B(r) + mgz ,$$

gdzie z jest wysokością nad powierzchnią Ziemi. W pustej przestrzeni pola magnetyczne i grawitacyjne spełniają twierdzenie Earnschaw'a. Oznacza to, że energia potencjalna nie ma lokalnego (i tym samym globalnego) minimum. Można pokazać, że posiada ona punkt siodłowy tak, jak dwuwymiarowa funkcja $f(x,y) = x^2 - y^2$ przedstawiona na rysunku. W kierunku osi x ma ona minimum tak, jak parabola o ramionach do góry, a w kierunku y ma ona maksimum tak, jak parabola o ramionach w dół. Gdy bączek znajdzie punkt równowagi trwałej wzdłuż jednego kierunku, to ucieka z tego obszaru w kierunku prostopadłym gdyż względem niego była to równowaga nietrwała.



Rys. Punkt siodłowy dwuwymiarowej funkcji $f(x,y) = x^2 - y^2$.

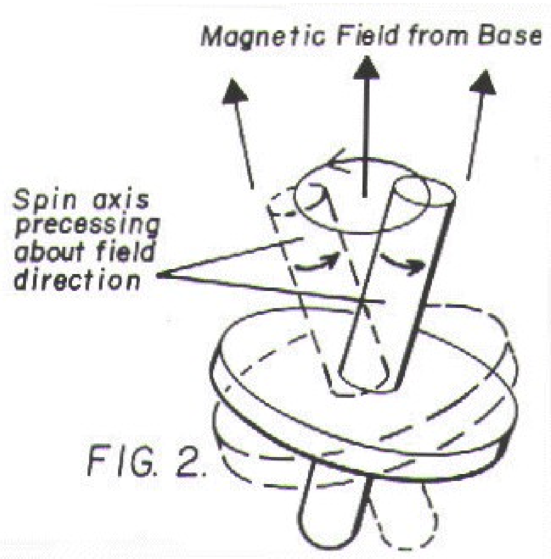
Jak więc lewitron naprawdę działa

Lewitujący bączek wykonuje trzy rodzaje ruchów: szybki ruch obrotowy wokół własnej osi, wolniejszą precesję osi obrotu, oraz powolny ruch środka masy bączka na boki. Doświadczalne oszacowanie charakterystycznych częstości tych ruchów daje dla ruchu wirowego $f_{wirowy} \approx 25Hz$, dla precesji $f_{precesja} \approx 5Hz$ i dla ruchów bocznych $f_{boczny} \approx 1Hz$. *Skale czasowe dla tych trzech rodzajów ruchu są różne:*

$$f_{boczny} << f_{precesja} << f_{wirowy}\,.$$

Mówimy o separacji skal czasowych w tym układzie. Jeśli w układzie zachodzi separacja typowych czasów dla różnych procesów to można zastosować przybliżenie adiabatyczne.

Precesja osi lewitronu zachodzi szybciej niż ruch na boki. Efekt żyroskopowy w ciągły sposób ustawia oś precesji bączka do lokalnego kierunku zewnętrznego pola magnetycznego $B(r)$. Uśredniony po czasie moment magnetyczny bączka jest zawsze ustawiony antyrównolegle do zewnętrznego pola i siły magnetyczne przeciwdziałają siłom grawitacji. Można sobie wyobrazić, że bączek powoli porusza się na boki, a szybka precesja zawsze znajduje nową oś precesji dla danego położenia bączka.



Rys. Precesja osi bączka wokół lokalnego kierunku pola magnetycznego.

W optymalnych warunkach, czyli gdy bączek jest w stanie lewitacji dynamicznej, wielkość

$$\mu \cdot B(r)$$

jest niezmiennikiem adiabatycznym układu. Innymi słowy, dla dostatecznie długich czasów wielkość ta jest stała (niezmienna w czasie). Dzięki temu energię potencjalną całego układu można zapisać jako funkcję długości wektora indukcji pola magnetycznego $B(r) = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$, czyli $U = U(B(r))$. Taka funkcja ma lokalne minimum i tym samym istnieje punkt równowagi trwałej. Równowaga stabilna jest więc efektywnie osiągana. Pozostaje to w zgodzie z twierdzeniem Earnschaw'a gdyż układ jest w rzeczywistości dynamiczny.

Zakończenie

Zakończymy nasze rozważania ogólna uwagą metodologiczną. Okazuje się, że aby zrozumieć fizyczne podstawy działania lewitronu należy odwołać się do języka matematyki i pojęcia niezmiennika adiabatycznego. Bez tej teoretycznej analizy nie moglibyśmy zrozumieć i wyjaśnić dlaczego lewitron naprawdę działa. To matematyka dostarczyła nam odpowiednich narzędzi aby zrozumieć działanie lewitronu.

Ramka: Szkic dowodu twierdzenia Earnschaw'a

Dowód intuicyjny: Umieśćmy takie same ładunki w wierzchołkach sześcianu. Umieszczony w środku ładunek tego samego znaku będzie w stanie równowagi, gdyż ze wszystkimi sześcioma ładunkami oddziałuje tak samo. Narysujmy linie sił pola od tych sześciu ładunków. Widzimy, że rozbiegają się one do nieskończoności wzdłuż prostopadłych do boków osi symetrii sześcianu. Ładunek umieszczony w środku ucieknie z pułapki wzdłuż tych linii jeśli zostanie minimalnie przesunięty z geometrycznego środka układu. Środek ten nie jest punktem równowagi trwałej.

Dowód matematyczny: oparty jest na twierdzeniu Gaussa i wymaga znajomości analizy wektorowej.

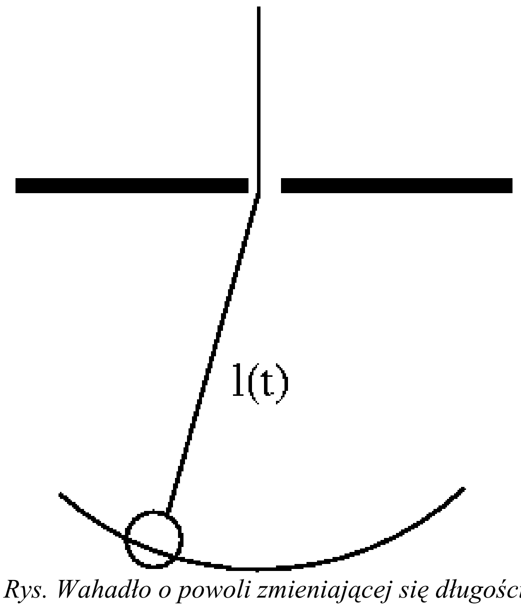
Ramka: Niezmiennik adiabatyczny.

Bardzo ważnymi wielkościami w fizyce są te, które nie zmieniają się w czasie. Są to tak zwane wielkości zachowane. Przykładami są energia, pęd lub moment pędu dla izolowanego układu fizycznego. Gdy układ nie jest izolowany i oddziałuje z otoczeniem, na przykład jeden z parametrów układu zmienia się w czasie, to wspomniane wielkości nie są już zachowane. Gdy parametr układu zmienia się dużo wolniej niż typowe czasy innych procesów w tym układzie, to pewne wielkości fizyczne mogą być w przybliżeniu zachowane. To znaczy w dostatecznie długim czasie można je traktować jako stałe. Nazywamy je niezmiennikami adiabatycznymi.

Jako przykład rozważmy wahadło matematyczne, którego długość zmienia się powoli w stosunku do okresu drgań. Powolna zmiana długości wahadła oznacza, że

$$\frac{1}{l(t)}\frac{dl(t)}{dt} << \frac{1}{T},$$

gdzie l *jest chwilową długością wahadła, a* $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ *okresem jego drgań. Energia układu* E *nie jest stała. Ale wielkość* $E(t)\sqrt{l(t)}$ *jest w przybliżeniu stała. To jest właśnie niezmiennik adiabatyczny wahadła o zmiennej długości. Można łatwo zauważyć, że inne wielkości jak* $T(t)/\sqrt{l(t)}$ *lub* $E(t)T(t)$ *są też niezmiennikami adiabatycznymi.*



Rys. Wahadło o powoli zmieniającej się długości.

□

Literatura

1. M.V. Berry, Proc. R. Soc. London A 452, 1207 (1996).
2. M.D. Simon, L.O. Heflinger i S.L. Ridgway, Am. J. Phys. 65, 286 (1997).
3. T.B. Jones, M. Washizu i R. Gans, J. Appl. Phys. 82, 883 (1997).
4. H.R. Dullin i R.W. Easton, Physica D 126, 1 (1999).

Autor dziękuje za wsparcie DFG SFB 484.