

# Lewitron<sup>TM</sup> – prosta zabawka fizyczna o wyrafinowanej teorii działania, część II

Krzysztof Byczuk

Uniwersytet Augsburgski, Niemcy,  
i  
Uniwersytet Warszawski, Polska

## Model teoretyczny lewitronu

W części pierwszej wyjaśniliśmy fizyczne podstawy działania lewitronu pomimo, że twierdzenie Earnshaw'a z pozoru tego zabrania. W dalszej części chcemy sformułować matematyczny model lewitronu i go przeanalizować.

Wyobraźmy sobie, że bączek jest punktem materialnym o masie  $m$ , momencie magnetycznym  $\mu$  i momencie bezwładności wzdłuż osi obrotu  $I$ . Położenie bączka określa wektor wodzący  $r(t)$ , który zależy od czasu  $t$ . Bączek porusza się w zewnętrznym polu grawitacyjnym i magnetycznym. Wtedy energia potencjalna bączka wynosi

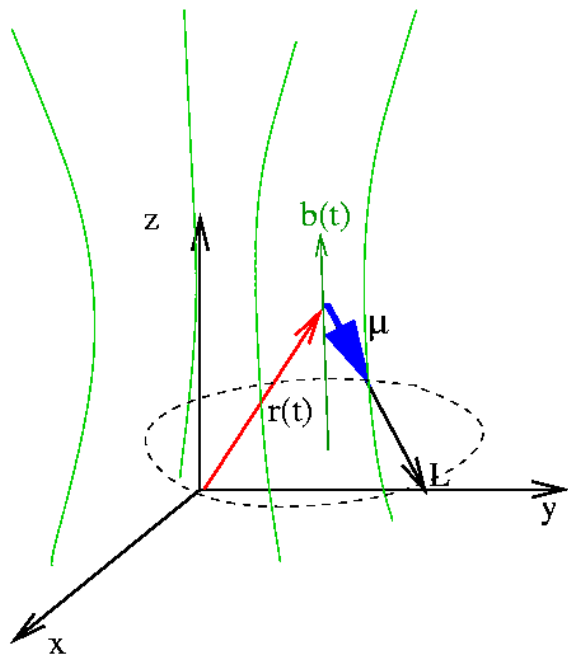
$$U(r(t)) = mgz(t) - \mu \cdot B(r(t)).$$

Równania ruchu bączka są następujące:

$$\frac{dp(t)}{dt} = F(\vec{r}(t))$$
$$\frac{dL(t)}{dt} = M(\vec{r}(t)).$$

Wielkości  $p$  i  $L$  to odpowiednio pęd i moment pędu bączka,  $M(r) = \mu \times B(r)$  jest momentem siły działającej na dipol magnetyczny bączka, a  $F(r) = -\nabla U(r) = -mg\hat{e}_z + \nabla[\mu \cdot B(r)]$  jest siłą działająca na bączek i równą zmianie energii potencjalnej ze znakiem ujemnym (symbol  $\nabla$  oznacza gradient, czyli zmianę danej funkcji skalarnej wzdłuż poszczególnych osi kartezjańskiego układu współrzędnych). Rozwiązanie tego układu równań przy zadanych warunkach początkowych oraz zadanej postaci pola indukcji magnetycznej jest bardzo trudnym zadaniem, choć okazuje się, że możliwym do zrealizowania w całkiem ogólnych przypadkach.

Tutaj analizę tych równań przeprowadzimy w przypadku gdy bączek unosi się nad magnesami zachodzi separacja skal czasowych, czyli  $f_{\text{boczny}} \ll f_{\text{precesja}} \ll f_{\text{wirowy}}$ .



Rys. Teoretyczny model lewitronu. W zewnętrznym polu magnetycznym porusza się bączek magnetyczny o masie  $m$ , momencie bezwładności  $I$ , i momencie magnetycznym  $\mu$ . Chwilowe położenie bączka opisuje wektor wodzący  $r(t)$ .

## Szybkie obroty

Zbadamy konsekwencje pierwszego przybliżenia, że obroty wokół osi są szybsze niż precesja, czyli gdy  $f_{precesja} \ll f_{wirowy}$ . Wtedy możemy założyć, że moment pędu bączka jest równoległy do prędkości kątowej ruchu wirowego, a ona z kolei jest równoległa do momentu magnetycznego bączka, czyli

$$L \parallel \omega \parallel \mu.$$

Możemy to zapisać następująco  $\vec{L} = I\vec{\omega} = I\omega \frac{\vec{\mu}}{\mu}$ , gdzie wielkości bez strzałek oznaczają długości odpowiedniej wielkości wektorowej.

W tym przybliżeniu, równania ruchu na  $L$  będą zależeć od długości wektora indukcji magnetycznej  $B(t)$  oraz od chwilowego kierunku pola magnetycznego  $b(t)$ , gdzie  $B(t) = B(t)b(t)$ . Stąd równanie ruchu na moment pędu przyjmuje postać

$$\frac{dL(t)}{dt} = \Omega(t) b(t) \times L(t),$$

gdzie  $\Omega(t) = -\frac{\mu B(t)}{I\omega} = -\frac{\mu B(t)}{L}$ . Równanie to opisuje precesję wektora momentu pędu  $L$

wokół chwilowej osi obrotu  $b(t)$ . Precesja ta zachodzi z prędkością kątową  $\Omega$ . Długość wektora momentu pędu jest w tym ruchu precesyjnym zachowana.

## Szybka precesja

Drugim przybliżeniem, opartym na obserwacji, jest założenie, że precesja jest dużo szybsza niż ruchy boczne środka masy bączka,  $f_{\text{precesja}} \gg f_{\text{boczne}}$ . Oznacza to, że

$$|\Omega(t)| \gg \left| \frac{db(t)}{dt} \right|.$$

Warunek ten prowadzi do wniosku, że wektory momentu pędu  $L$  oraz chwilowej osi obrotu  $b(t)$  są ze sobą tak powiązane, że kąt pomiędzy nimi jest stały. To jest właśnie niezmiennik adiabatyczny dla wirującego bączka. Skoro kąt jest stały, oraz moment pędu jest zachowany, to oznacza to, że iloczyn skalarny  $b \cdot L$  jest stały w czasie. Rozumując dalej zauważymy, że wielkość  $\mu_B = \mu \cdot b$  też jest niezmiennikiem. W takim razie energię potencjalną układu można będzie wyrazić tylko przez długość indukcji pola magnetycznego

$$U(r(t)) = mgz - \mu(t) \cdot B(t) = mgz - \mu(t) \cdot b(t) B(t) = mgz - \mu_B B(t).$$

Pokazaliśmy, korzystając z dwóch przybliżeń, że efektywnie energia potencjalna wirującego bączka zależy jedynie od długości indukcji zewnętrznego pola magnetycznego. A taka funkcja może posiadać lokalne minimum i tym samym punkt stabilnej równowagi.

## Zgodność warunków

Zauważmy, że pierwszy warunek, że ruch wirowy jest szybszy od precesji  $f_{\text{wirowy}} \gg f_{\text{precesja}}$  oznacza, że prędkość kątowna  $\omega$  musi być duża. Drugi warunek, że precesja jest szybsza niż ruchy boczne  $f_{\text{precesja}} \gg f_{\text{boczne}}$  oznacza, że  $\Omega = \mu_B / I\omega$  musi być duże. Te dwa warunki mogą być spełnione tylko w pewnym zakresie prędkości kątowych co dawać będzie ograniczenia dolne i górne na tę wielkość

$$\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}.$$

Faktycznie, doświadczenia z lewitronem pokazują, że nie może on wirować ani za wolno, ani za szybko. Jest to konsekwencja istnienia właśnie tych teoretycznych ograniczeń i dlatego wygodnie jest uruchamiać zabawkę za pomocą dołączonego rozrusznika. Musi on jednak mieć naładowane baterie aby rozkręcać bączek do optymalnej prędkości.

## Zakończenie

Można kontynuować analizę rozważając szczególne przypadki. Na przykład, czytelnik może wyznaczyć samodzielnie gdzie znajduje się obszar stabilnego minimum na osi pionowej, jeśli pole magnetyczne jest wytwarzane przez pojedynczą pętlę prostopadłą do osi, w której płynie stały prąd o danym natężeniu. Można też spróbować rozwiązać układ równań numerycznie i przeanalizować zachowanie się lewitronu w tym przypadku.

## Literatura

1. M.V. Berry, Proc. R. Soc. London A 452, 1207 (1996).
2. M.D. Simon, L.O. Heflinger i S.L. Ridgway, Am. J. Phys. 65, 286 (1997).
3. T.B. Jones, M. Washizu i R. Gans, J. Appl. Phys. 82, 883 (1997).
4. H.R. Dullin i R.W. Easton, Physica D 126, 1 (1999).
5. K. Byczuk, Delta xx, yyy (2006).

Autor dziękuje za wsparcie DFG SFB 484.