

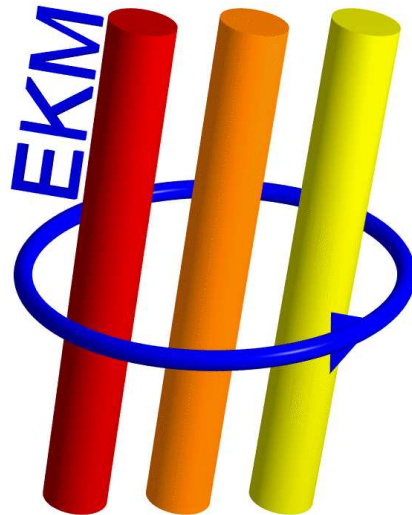
LewitronTM - czyli o lewitacji bez nadprzewodnika

Krzysztof Byczuk

Institute of Physics, EKM, Augsburg University, Germany

<http://www.physik.uni-augsburg.de/theo3/kbyczuk/index.html>

14 wrzesień 2006



Lewitacja

Internetowa Encyklopedia Wikipedia:

Lewitacja to stan, w którym ciało pozostaje w spoczynku jednocześnie nie mając kontaktu fizycznego z żadnym innym ciałem.

- marzenie człowieka od dawnych czasów
- 1780000 stron www z hasłem 'levitation' w google
- Ogłoszenia różne: *At the Central Florida School of Levitation, we teach you to overcome gravity! Despite what scientists say, gravity is not an inescapable force: it is a frame of mind. Control your mind, and you control your weight.*

jest też ostrzeżenie:

Don't be without Gravity Insurance!

- pomysł aby wykorzystać magnesy trwałe i ładunki elektryczne (już dzieci wiedzą, że z magnesami to się nie udaje)



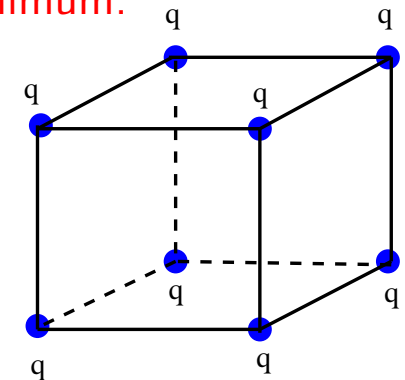
Twierdzenie Earnshaw'a (1842)

Stabilna lewitacja jest niemożliwa ...

W pustej przestrzeni nie istnieje taka statyczna konfiguracja pól elektrycznych, magnetycznych i grawitacyjnych aby energia potencjalna posiadała lokalne minimum.

Przykład: (*Elektrodynamika*, D.J. Griffiths - zad. 3.2)

Na pozór wydaje się, że ładunek umieszczony w środku tego układu będzie w równowadze stabilnej, ponieważ jest odpychany od każdego z rogów jednakowo.



W którym miejscu w tej 'elektrostatycznej butelce' znajduje się dziura?

Twierdzenie Earnshaw'a - dowód

Twierdzenie Earnshaw'a jest konsekwencją prawa Gaussa dla pól bezźródłowych i bezwirowych

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad \text{gdzie np. } \mathbf{F} = e\mathbf{E}$$

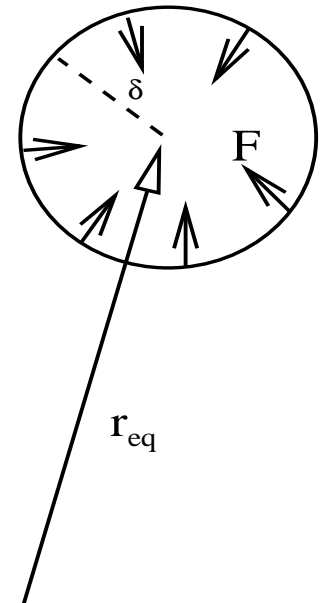
Dowód: a.a.

niech istnieje punkt równowagi stabilnej. Wtedy

- w punkcie równowagi \mathbf{r}_{eq} zachodzi $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{eq}) = 0$
- jeśli \mathbf{r}_{eq} jest punktem równowagi stabilnej to w otoczeniu tego punktu siła $\mathbf{F}(\mathbf{r}_{eq} + \delta)$ musi być zwrócona w stronę \mathbf{r}_{eq}
- ale z prawa Gaussa mamy

$$\int_{S=\{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{eq}|=\delta\}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) d_3r = 0$$

czyli zachodzi sprzeczność. \square



Zobaczyć znaczy uwierzyć - czyli lewitacja w praktyce



diamagnetyk ($\chi < 0$) w polu magnetycznym (HFML, Nijmegen, Holandia)

nadprzewodnik w polu magnetycznym (Oslo University, Norwegia)



lewitron (Festiwal Nauki, Wydz. Fizyki, Uniwersytet Warszawski)

nie są to lewitacje statyczne

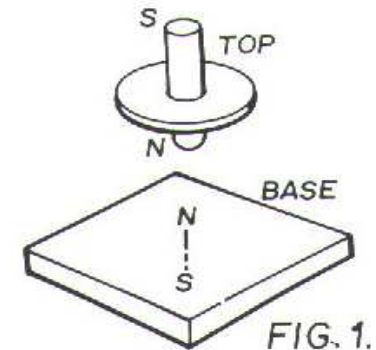
Budowa i działanie lewitronu

Historia:

- odkrycie/wynalazek: Roy Harring U.S. Patent 4,382,245 (1983)
- teoria działania: M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **425**, 1207 (1996)

Lewitron dostępny w regularnej sprzedaży:

- magnes stały (ceramiczny)
- magnetyczny bączek (około 18g)
- płytki do unoszenia
- ciężarki (2 po 3g, 3 po 1g, 2 po 0,4g, 1 po 0,2g i 2 po 0,1g)
- elektryczny rozrusznik
- instrukcja obsługi



Jak on w zasadzie (nie)działa?

- Siła odpychająca pomiędzy dwoma magnesami równoważy siłę ciężkości.
- Czy jest to równowaga stabilna?
- Energia potencjalna

$$U(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) + mgz$$

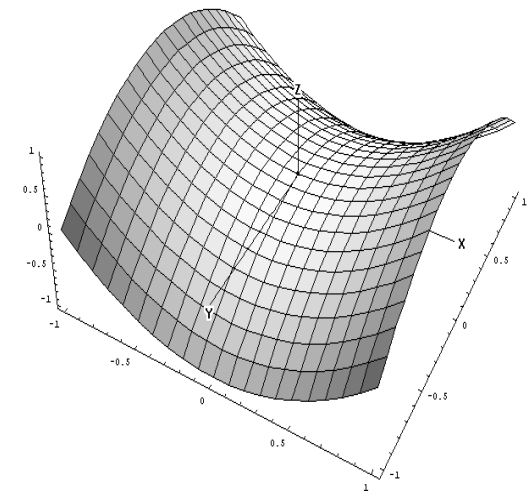
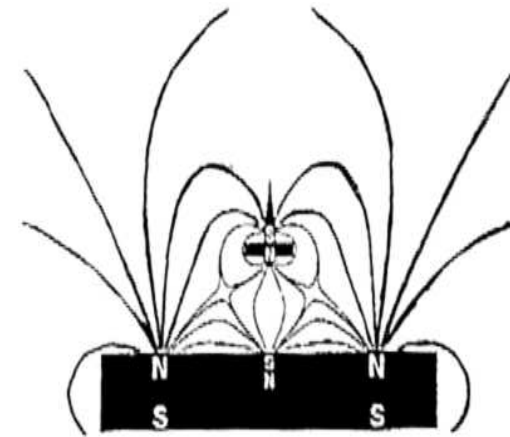
musi mieć **lokálne minimum** (μ jest momentem dipola magnetycznego bączka).

- Dla pól magnetycznych w pustej przestrzeni zachodzi dla każdej składowej $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$, z czego wynika, że

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 0,$$

czyli może istnieć jedynie **punkt siodłowy** (a nie lokalne minimum)!

- Jest to wszystko w zgodzie w tw. Earnshaw'a.



Jak on więc działa?

M.V. Berry (także: M.D. Simon *et al.*, oraz S. Gov *et al.*)

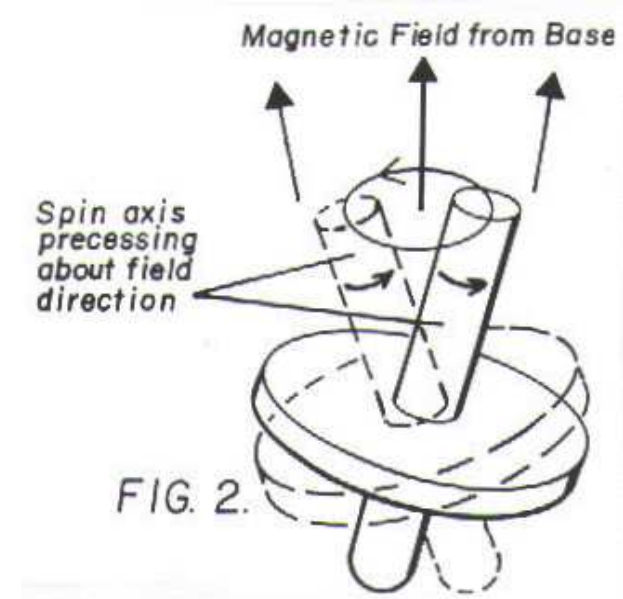
Gdy bączek unosi się nad magnesem to wykonuje:

- drgania na boki z częstością $\nu_{\text{boczne}} \sim 1\text{Hz}$
- precesję osi obrotu z częstością $\nu_{\text{precesja}} \sim 5\text{Hz}$
- ruch obrotowy z częstością $\nu_{\text{obroty}} \sim 25\text{Hz}$

separacja skal czasu

$$\nu_{\text{obroty}} \gg \nu_{\text{precesja}} \gg \nu_{\text{boczne}}$$

Efekt żyroskopowy w ciągły sposób ustawia oś precesji bączka magnetycznego w stosunku do lokalnego zewnętrznego pola magnetycznego $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (przybliżenie adiabatyczne). Uśredniając po czasie, moment magnetyczny μ jest ustawiony antyrównoległe do linii sił lokalnego pola magnetycznego.



Niezmiennik adiabatyczny

Df. **Niezmiennik adiabatyczny** jest to wielkość fizyczna, która pozostaje (w przybliżeniu) stała w czasie gdy parametry charakteryzujące układ zmieniają się powoli (adiabatycznie) w czasie.

Przykład:

Wahadło matematyczne o masie m . Długość wahadła zmienia się powoli

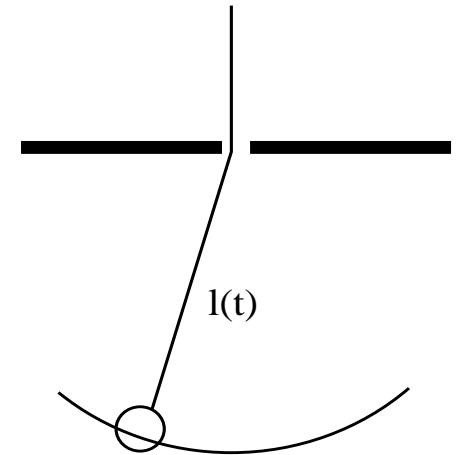
$$\frac{1}{l(t)} \frac{dl(t)}{dt} \ll \frac{1}{T}.$$

Wtedy wielkość

$$E(t) \sqrt{l(t)} = \text{const}$$

jest **niezmiennikiem adiabatycznym** układu. Podobnie $T(t)/\sqrt{l(t)} = \text{const}$ (ponieważ $T = 2\pi\sqrt{l/g}$) oraz $E(t)T(t) = \text{const}$.

□



Niezmiennik adiabatyczny lewitronu

W optymalnych warunkach równowagi wielkość

$$\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

jest niezmiennikiem adiabatycznym układu.

Gdy istnieje (przybliżony) niezmiennik adiabatyczny to energia potencjalna jest jedynie funkcją długości $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ (a nie wektora \mathbf{B}) i posiada lokalne minimum

$$U = U(|\mathbf{B}(\mathbf{r})|).$$

Efektywnie równowaga stabilna może być osiągnięta.

Pozostaje to w zgodzie z tw. Earnshaw'a gdyż układ jest dynamiczny.

Teoretyczny model lewitronu

Energia potencjalna

$$U(\mathbf{r}) = mgz(t) - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

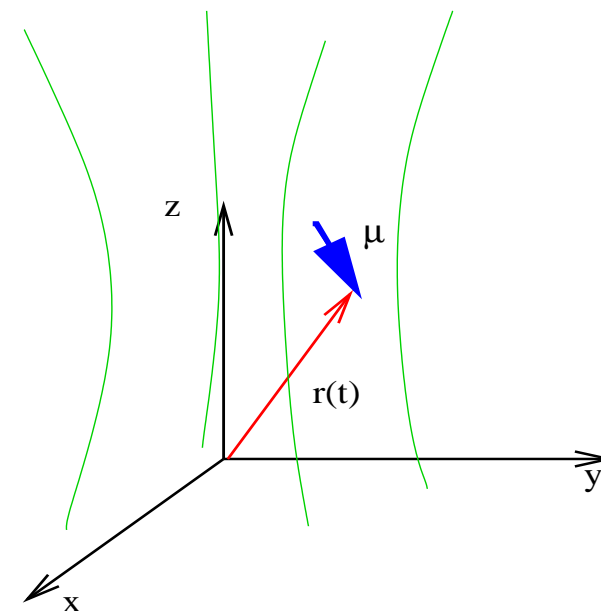
Równania ruchu

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad \text{gdzie } \mathbf{F} = -\nabla U = -mg\hat{e}_z + \nabla\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{r}(t)), \quad \text{gdzie } \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

Dwa przybliżenia:

- szybkie obroty $\nu_{\text{obroty}} \gg \nu_{\text{precesja}}$
- szybka precesja $\nu_{\text{precesja}} \gg \nu_{\text{boczne}}$



Szybkie obroty $\nu_{\text{obroty}} \gg \nu_{\text{precesja}}$

$$\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\mu}$$

czyli

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega} \frac{\boldsymbol{\mu}}{\mu}$$

R-nia ruchu na \mathbf{L} można wyrazić przez długość $B(t) = |\mathbf{B}(t)|$ oraz chwilowy kierunek pola $\mathbf{b}(t)$ “widziany” przez bączka

$$\mathbf{B}(t) = B(t)\mathbf{b}(t).$$

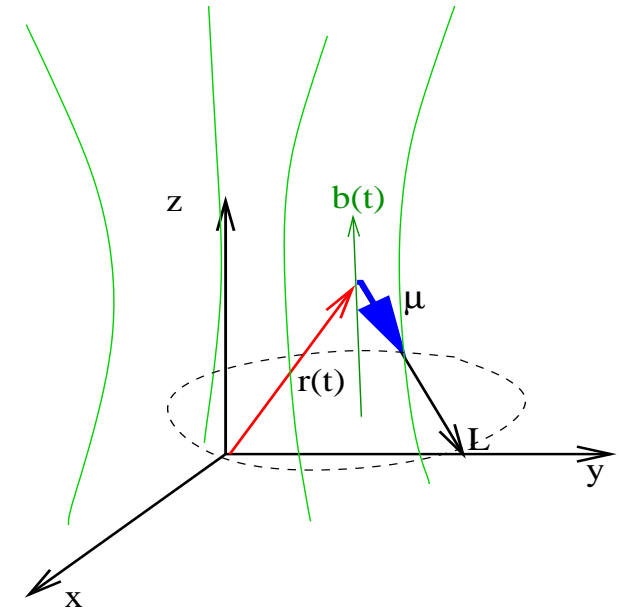
Stąd

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \Omega(t)\mathbf{b}(t) \times \mathbf{L}(t),$$

gdzie

$$\Omega(t) = -\frac{\mu B(t)}{I\omega} = -\frac{\mu B(t)}{L}.$$

Precesja bączka wokół chwilowej osi $\mathbf{b}(t)$ z zachowaniem długości \mathbf{L} .



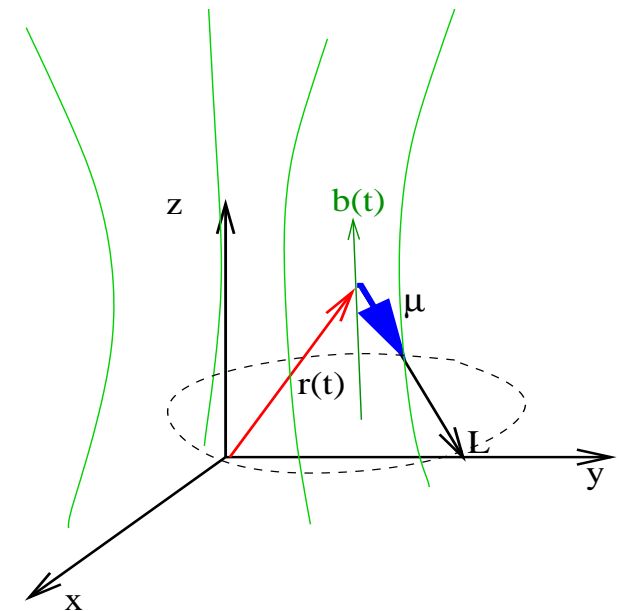
Szybka precesja $\nu_{\text{precesja}} \gg \nu_{\text{boczne}}$

$$|\Omega(t)| \gg \left| \frac{db(t)}{dt} \right|$$

- Wtedy \mathbf{L} oraz \mathbf{b} są ze sobą związane tak, że $\mathbf{L} \cdot \mathbf{b}$ jest niezmiennikiem adiabatycznym (kąt między \mathbf{L} i \mathbf{b} jest stały).
- Także wielkość $\mu_B \equiv \boldsymbol{\mu}(t) \cdot \mathbf{b}(t)$ jest niezmiennikiem adiabatycznym.
- Energia potencjalna

$$U(\mathbf{r}) = mgz - \boldsymbol{\mu}(t) \cdot \mathbf{B}(t) = mgz - \boldsymbol{\mu}(t) \cdot \mathbf{b}(t)B(t) = mgz - \mu_B B(t)$$

zależy jedynie od długości $|\mathbf{B}|$ i tym samym może posiadać lokalne minimum!



Zgodność warunków

Zauważmy, że

- szybkie obroty $\nu_{\text{obroty}} \gg \nu_{\text{precesja}}$ oznacza, że ω duże
- szybka precesja $\nu_{\text{precesja}} \gg \nu_{\text{boczne}}$ oznacza, że $\Omega = \mu_B / I\omega$ duże

Prędkość kątowna z jaką wiruje bączek musi mieć zarówno dolne jak i górne ograniczenie

$$\omega_{\min} \lesssim \omega \lesssim \omega_{\max}$$

aby zachodziła lewitacja dynamiczna.

Obszar stabilności na osi OZ

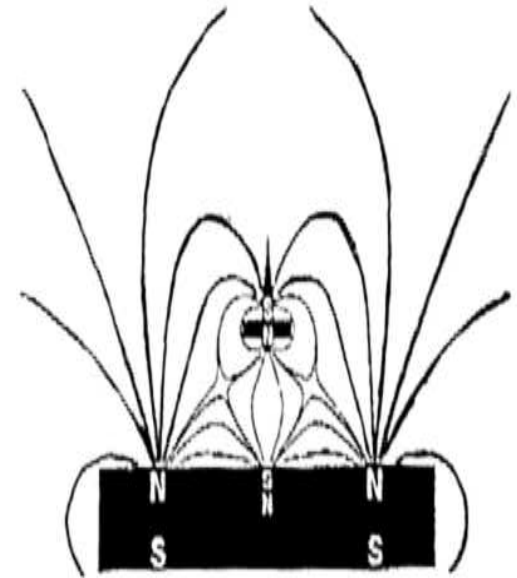
Istnienie ekstremum:

$$-mg + \mu \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(0, z_0)}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}(0, z_0)}{\partial \rho} = 0.$$

Istnienie lokalnego minimum:

$$\frac{\partial^2 B(0, z_0)}{\partial z^2} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 B(0, z_0)}{\partial \rho^2} > 0.$$

$B = \sqrt{B_\rho^2 + B_z^2}$ oraz założona osiowa symetria \mathbf{B} .



Pętla z prądem

Jako **przykład** można rozważyć pole magnetyczne pochodzące od pojedynczej pętli z prądem o promieniu a , t.j.

$$B_z(0, z) = \frac{B_0 a^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Wtedy punkt stabilności musi spełniać prosty warunek

$$\frac{a}{2} < z_0 < \frac{a}{\sqrt{2}}$$

gdzie z_0 zależy jawnie od m , μ , ω oraz B_0 .

W praktyce obszar gdzie może leżeć minimum mieści się tylko w granicach 0,5cm.

Zakończenie

- Lewitron działa dzięki **niezmiennikom adiabatycznym**
- Wszystko jest w zgodzie z **tw. Earnshaw'a**
- Ściśle rozwiązywalne modele lewitronu redukują się do teorii z niezmiennikiem adiabatycznym
- **Doskonała zabawka edukacyjna dla wszystkich**
- Podobieństwo do magnetycznych pułapek atomowych używanych do otrzymywania kondensatów Bosego - Einsteina

Literatura:

1. M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **452**, 1207 (1996);
2. M.D. Simon *et al.*, Am. J. Phys. **65**, 286 (1997);
3. T.B. Jones, J. Appl. Phys. **82**, 883 (1997);
4. H.R. Dullin *et al.*, Physica D **126**, 1 (1999);
5. K. Byczuk, Delta (w druku) (2006).