O splątaniu kwantowym słów kilka

Krzysztof Byczuk

Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Warszawski

http://www.physik.uni-augsburg.de/theo3/kbyczuk/index.html

30 styczeń 2006

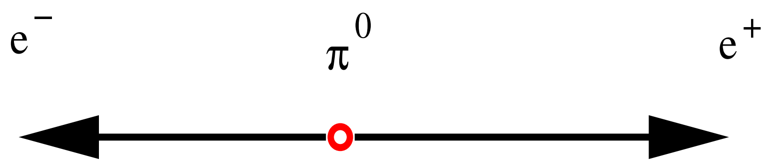
Rozważania Einsteina, Podolskiego i Rosena

Einstein, Podolsky, Rosen (1935)

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-$

$|\Psi\rangle = [|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ - |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+]/\sqrt{2}$

liniowa superpozycja



$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$

$S_{\mathrm{tot}} = 0$ and $S^z = 0$ - kwantowomechaniczny singlet (Bohm 1954)

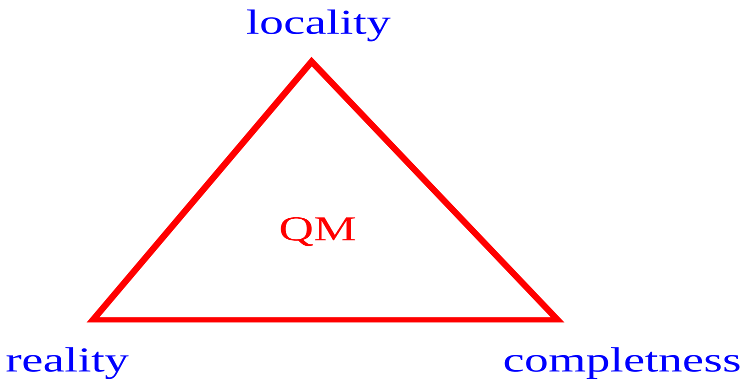
Ortodoksyjny (kopenhadzki) punkt widzenia:

żadna z cząstek nie miała spinu w górę lub w dół do czasu pomiaru: pomiar dla e^- spowodował kolaps funkcji falowej, i natychmiast "wytworzył" spin e^+ oddalonego 20 l.ś.

EPR - $|\Psi\rangle$ nie może być zupełnym opisem fizycznej rzeczywistości z zasadą lokalności

spooky action at a distance, hidden variable, ghost field, ..., aby uratować lokalność teorii

Twierdzenie EPR dzisiaj

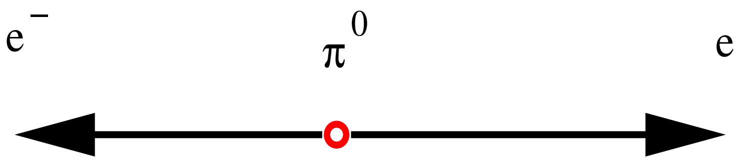


$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_-$$

$$|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle = [|\uparrow\rangle_- \otimes |\downarrow\rangle_+ - |\downarrow\rangle_- \otimes |\uparrow\rangle_+]/\sqrt{2}$$

Verschränkung - entanglement (Schrödinger 1935)

QM jest nielokalna



korelacje na odległość

wyniki niezależnych pomiarów są skorelowane (pozostają we wzajemnej zależności)

nie ma mowy o ponadświetlnym przesyłaniu informacji, energii, etc.

przyroda jest fundamentalnie nielokalna, co się wyraża w subtelnych korelacjach pomiędzy dwiema listami przypadkowych wyników pomiaru spinu

Splątanie dwóch układów w stanie czystym

Niech $\{|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B\} \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ oraz A i B są rozróżnialne.

Dowolny stan

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \gamma_{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B,$$

który nie może być przedstawiony jako iloczyn dwóch stanów nazywany jest stanem splątanym.

- splątanie kwantowe jest konsekwencją zasady superpozycji i nie ma klasycznego odpowiednika
- splątania kwantowe są kwantowymi korelacjami
- żaden stan splątany nie może być wytworzony ze stanu iloczynowego za pomocą operacji lokalnych i klasycznej komunikacji (LOCC)

Ważny przykład: stany splątane Bell'a

- klasyczny układ dwupoziomowy (0 lub 1) koduje jeden bit informacji
- w QM układ dwupoziomowy może być jednocześnie w 0 i 1 (spin, polaryzacja, wir)
- w ogólności nazywamy taki układ kwantowym bitem czyli qubit (czytaj: *qiubit*) - Schumacher (1995)

Stany Bell'a - maksymalnie spleciony stan dwóch qubitów

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|01\rangle - |10\rangle\right]$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|01\rangle + |10\rangle\right]$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle - |11\rangle\right]$$

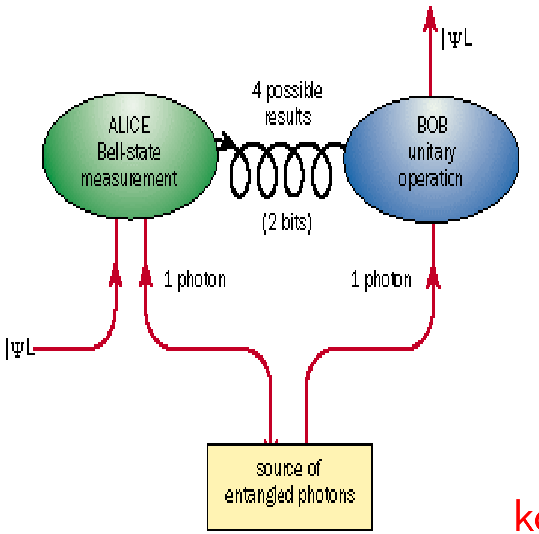
$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle + |11\rangle\right]$$

Kwantowa teleportacja

Bennett *et al.* (1993), photons (1998-2005), atoms (2004)

Alice i Bob dzielą jeden stan splątany, np. $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$. Alice chce wysłać do Boba wszystkie informacje o nieznanym stanie $|\Phi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, który aktualnie posiada, tak aby Bob mógł go odtworzyć u siebie używając cząstek ze swojego laboratorium. To nazywamy kwantową teleportacją. Stan kwantowy, który ma Alice będzie zniszczony. Co będzie ze wspólnym stanem splątanym?

$$|\Phi\rangle|\Phi^+\rangle \sim [|\Phi^+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |\Phi^-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |\Psi^+\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |\Psi^-\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)]$$



A: wykonuje rzutowy pomiar na swoich 2 qubitach - LO

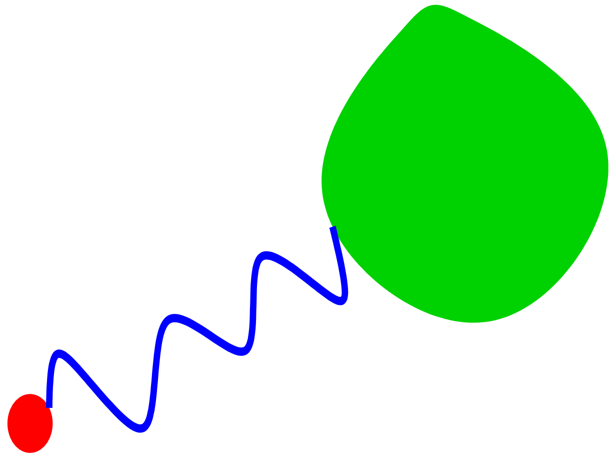
A: informuje Boba o wyniku (jeden z 4) - CC

B: w zależności od wyniku A, B wykonuje 1 lub σ_x lub/i σ_z - LO

koszt: jeden stan Bella jest zjedzony!

Stan mieszany

- operator gęstości $\hat{\rho} = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ opisuje układ sprzężony do innego układu, do którego nie mamy dostępu
- stan czysty - maksymalna wiedza $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$
- stan mieszany - statystyczna wiedza, mieszanie różnych stanów czystych może dawać ten sam operator gęstości, czyli ten sam stan mieszany
- stany z różnych zespołów mające ten sam operator gęstości są eksperymentalnie nierozróżnialne
- gdy układ czysty jest splątany wtedy każdy z podukładów jest w stanie mieszanym, np.



$$|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$$

zredukowany operator gęstości

$$\hat{\rho}_A = Tr_B \hat{\rho} = Tr_B |\Psi\rangle\langle\Psi| = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1|$$

Definicja pozytywna: Dwa układy w stanie czystym są splątane gdy z punktu widzenia każdego z nich z osobna są one w stanie mieszanym

Splątanie dwóch układów w stanie mieszanym

Stan mieszany nie jest splątany jeśli istnieje wypukły rozkład opertatora gęstości w stany iloczynowe, t.j.

$$\hat{\rho} = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$$

z

$$|\Psi_n\rangle = |\Psi_n^A\rangle|\Psi_n^B\rangle$$

dla każdego n.

$$\hat{\rho}_{sep} = \sum_n p_n \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$$

- mieszanina stanów separowalnych jest zawsze separowalna
- mieszanina stanów splątanych nie musi być stanem splątanym (przykład)

Mieszanina stanów Bell'a

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11| =$$

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle\langle 0|_A \otimes |0\rangle\langle 0|_B + |1\rangle\langle 1|_A \otimes |1\rangle\langle 1|_B\right]$$

- ten separowalny stan mieszany może być otrzymany przez zmieszanie maksymalnie splątanych stanów Bella
- mieszanie niszczy splątanie

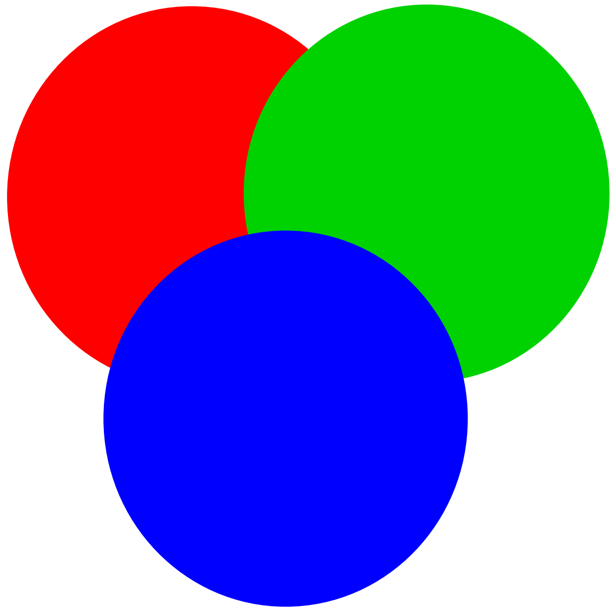
Przykład: Stan Werner'a

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}(1-\lambda)\hat{Id} + \lambda|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$$

jest splątany gdy $|\lambda| > 1/3$.

Splątany stan GHZ

Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)



$$|\Psi_{abc}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_a 0_b 0_c\rangle + |1_a 1_b 1_c\rangle\right)$$

oczywiście jest splątany

ale

$$\hat{\rho}_{bc} = Tr_a|\Psi_{abc}\rangle\langle\Psi_{abc}| = \frac{1}{2}\left(|0_b 0_c\rangle\langle 0_b 0_c| + |1_b 1_c\rangle\langle 1_b 1_c|\right)$$

b i c nie są splątane! (to samo dotyczy par ac i ab)

Jeśli a wykona pomiar na stan $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ wtedy

$$|\Psi^{\pm}_{bc}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0_b 0_c\rangle \pm |1_b 1_c\rangle\right)$$

jest stanem splątanym; a musi poinformować o pomiarze b i c za pomocą CC!

Splątanie i III zasada termodynamiki

splątanie w układzie wielu cząstek

Tw. Nernsta (III zasada termodynamiki) $S(T) \longrightarrow S_0 = const$, lub równoważnie $C_V(T) = T(\partial S(T)/\partial T)_V \longrightarrow 0$ gdy $T \longrightarrow 0$.

Twierdzenie (Wiesniak *et al.* (2005)): Tylko gdy splątanie jest obecne w niskich temperaturach, twierdzenie Nernsta może być spełnione.

dowód (szkic): a.a.
stan separowalny daje ograniczenie E_B na energię stanu podstawowego $U(T = 0) \geqslant E_B$ i dlatego dla stanów separowalnych (średnie pole)

$$C = \frac{\partial U(T)}{\partial T} =_{T\to 0} \gamma \frac{U(T) - E_0}{T} \geqslant \gamma' \frac{E_B - E_0}{T^{1(2)}}$$

gdzie mamy 1 dla układów bez szczliny energetycznej, i 2 dla układów ze szczeliną.
Tylko gdy $E_B = E_0$ może zachodzić $C(T) \longrightarrow 0$
W ogólności $C(T) \longrightarrow \infty$ dla stanów separowalnych.$\square$

Splątanie wokół nas

Niech $E(\hat{\rho})$ będzie miarą (ilością) splątania w układzie wielocząstkowym

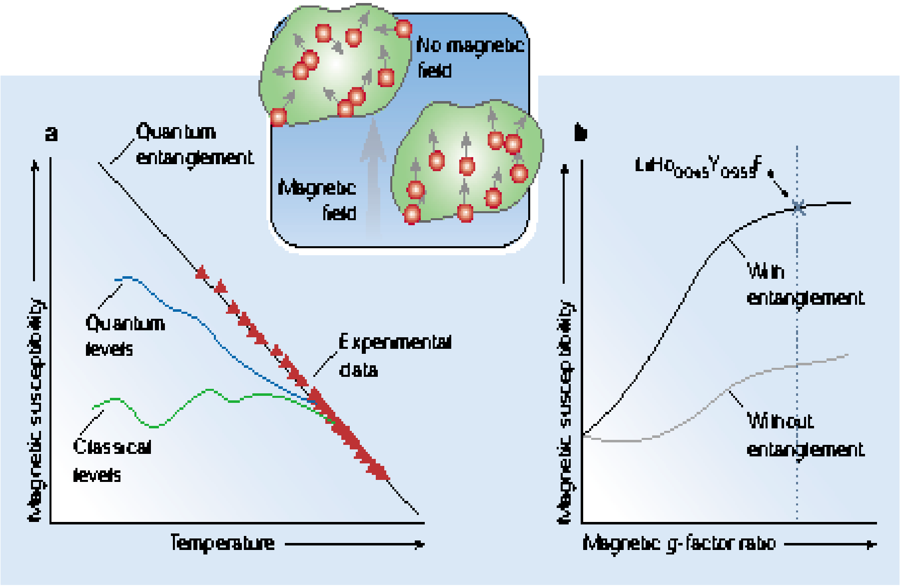
podatność magnetyczna zależy od $E(\hat{\rho})$

$$\chi = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial B^2}, \qquad \chi_{sep} - \chi = \frac{\partial^2 E(\hat{\rho})}{\partial B^2} + \beta \frac{\partial^2 \langle H_{MF-H} \rangle_H}{\partial B^2}$$

$LiHo_{0,045}Y_{0,955}F_4$ magnetyczna sól (Nature 03)

- bez pola magnetycznego układ nieuporządkowany
- w polu magnetycznym uporządkowanie większe

  niż przewidywania średniego pola



kwantowe korelacje - splątanie obecne w niskich T

Zakończenie

- Splątanie - koncepcja opisująca korelacje kwantowe
- Splątanie jest źródłem (resource) dla pewnych operacji, klasycznie niemożliwych (kwantowa teleportacja, przerzucanie splątania, obliczenia kwantowe, kwantowa kryptografia, itd.)
- Materia makroskopowa jest pełna kwantowego splątania
- Jak je wykorzystać???
- Podane przykłady stanów splątanych mogłyby znaleźć się w materiale "Mechaniki kwantowej I"
- Wiele jest nadal problemów do rozwiązania: miara splątania, układy identycznych cząstek, ...

Literatura:

1. M. Wiesniak *et al.*, quant-ph/0508193
2. S. Glish *at al.*, Nature 425, 48 (2003)
3. A. Einstein *et al.*, Phys. Rev. **41**, 777 (1935)
4. M.B. Plenio *et al.*, Cont. Phys. **39**, 431 (1998)