Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

semestr letni 2023-24

Krzysztof Byczuk

Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, UW
byczuk@fuw.edu.pl
www.fuw.edu.pl/ byczuk

Radosław Przeniosło

Instytut Fizyki Doświadczalnej, Wydział Fizyki, UW
radek@fuw.edu.pl

09-06-2024

Ćwiczenia:
dr Grzegorza Łach
dr Krzysztof Myśliwy

Pokazy:
dr Krzysztof Karpierz
mgr Anita Gardias

Warunki zaliczenia

- Zaliczenie w pierwszym terminie
  1. Prace domowe, 1 na tydzień losowo wybrane z serii za 2p.
  2. Kolokwium, 8 kwietnia, 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
  3. Kolokwium, 27 maj 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
  4. Egzamin, 19 czerwca 2024, sala 1.01, 9:00-13:00, test 10p., 3 zadania po 10p.
- Zaliczenie poprawkowe
  1. Egzamin pisemny poprawkowy
  2. Egzamin ustny poprawkowy, możliwość poprawy oceny w drugim terminie

Wypadkowa ocena na podstawie zebranej liczby punktów w każdym ze sposobów zaliczania po unormowaniu do 100 :

5+ za 99-100p.,
5 za 90-98p.,
4+ za 81-89p.,
4 za 72-80p.,
3+ za 62-71.,
3 za 50-61p.,
2 za 0-49p.

Uwaga: punkty z zaliczenia w pierwszym terminie i poprawkowym nie sumują się.

1 Tydzień I, 26/02-04/03/2024

1.1 Wykład

I. Podstawy termodynamiki fenomenologicznej

$1. *Układy makroskopowe* - przykłady układów makroskopowych będących przedmiotem badań termodynamiki i fizyki statystycznej, definicja miary ilości materii w układzie jednostek SI, definicja jednego mola - jeden mol zawiera dokładnie $N_0 = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ elementów strukturalnych, stała Avogadro $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23}$ 1/mol, przykłady 1 mola substancji.

$2. *Podstawowe pojęcia termodynamiki* - definicje stanu termodynamicznego (makrostanu), równowagi termodynamicznej, ekstensywnych i intensywnych zmiennych termodynamicznych, równanie stanu i proste przykłady, definicja funkcji stanu.

$3. *Zerowa zasada termodynamiki ii temperatura empiryczna* - treść zerowej zasady termodynamiki, istnienie temperatury empirycznej jako konsekwencja zerowej zasady termodynamiki, skale temperatur i praktyczny jej pomiar, skala temperatur oparta na gazie doskonałym, ciśnienie i sposoby jego wyznaczania, jednostki ciśnienia.

$4. *Procesy termodynamiczne* - definicja procesu termodynamicznego, przykłady procesów z ustalonym parametrem, izoprocesy (izotermiczny, izochoryczny, izobaryczny, adiabatyczny, ...), procesy cykliczne, procesy infinitezymalne, definicja procesu odwracalnego (w szerokim i wąskim sensie), procesy pseudostatyczne i kwazistatyczne.

1.2 Pokazy

1. Mole różnych pierwiastków (wraz z molem gazu doskonałego).
2. Termometr gazowy (puszka z powietrzem + U-rurka z denaturatem)
3. Stalowa kulka + stalowa płyta z otworem (zimna się mieści a gorąca się nie mieści)
4. Termometr Galileusza
5. Punkt potrójny wody
6. Rozszerzalność ciał stałych, tj. dylatometr, bimetal
7. Ogrzewanie drutu żelaznego (nie-monotoniczna rozszerzalność termiczna)
8. zależność oporu właściwego od temperatury dla półprzewodnika i metalu
9. pirometr
10. termometr na podczerwień
11. kolba z tłokiem + dziurami + woda

12. wybijanie korka młotkiem + woda
13. zgniatanie puszki z gotująca się woda
14. przyrząd do pokazania zmiany ciśn hydrostat. z głębokoscia
15. pompa próżniowa + rękawiczka gumowa
16. pompa próżniowa + szklanka z woda

1.3 Zadania na ćwiczenia

1. Na podstawie rocznego światowego wydobycia węgla w wysokości 175 eksadżuli oszacować roczny przyrost stężenia CO_2 w atmosferze przy założeniu, że całe wydobycie jest spalane na bieżąco. Wynik wyrazić w ppm (cząsteczkach na milion).

2. Prawo Fouriera przewodnictwa cieplnego jednorodnego ośrodka ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \tag{1}$$

gdzie $T(r,t)$ to lokalna temperatura w ośrodku, Δ oznacza trójwymiarowy Laplasjan, zaś κ to odpowiedni współczynnik. Korzystając z twierdzenia Stokesa uzasadnić stąd prawdziwość tzw. prawo stygnięcia Newtona obiektu umieszczonego w dużym otoczeniu o temperaturze zewnętrznej T_e:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} = \alpha(T_e - \bar{T}) \tag{2}$$

gdzie $\bar{T}$ to średnia temperatura obiektu, a α to pewien współczynnik.

3. Temperatura nad półprzestrzenią o współczynniku stygnięcia α zmienia się jak

$$T(t) = T_0 + A\cos\omega t. \tag{3}$$

Określić przebieg zmian temperatury na głebokości L. Wskazówka: wygodnie jest wyprowadzić odpowiednią postać prawa stygnięcia dla sąsiadujących cienkich pasków.

4. Oszacować wpływ rozszerzalności termicznej szkła na określenie skali termometru rtęciowego skonstruowanego ze sferycznej bańki szklanej połączonej z cienką rurką.

2 Tydzień II, 05-10/03/2024

2.1 Wykład

§5. *Praca, energia wewnętrzna, pierwsza zasada termodynamiki* - definicja infinitezymalnej pracy mechanicznej $đW$, praca jako różniczka (jednoforma, forma Pfaffa) niezupełna, przykłady wyrażeń na pracę w procesach odwracalnych, zmienne $x_i = V,\ N,\ \vec{M},\ \vec{P}, ...$ i siły $F_i = -p,\ \mu,\ \vec{H},\ \vec{E}, ...$ uogólnione oraz związana z nimi praca $đW = \sum_i F_i dx_i$, definicja ciepła $đQ$, definicja energii wewnętrznej $U = U(T, V, N, ...)$ jako ekstensywnej funkcji stanu, zasada zachowania energii w układzie izolowanym (nieistnienie perpetuum mobile pierwszego rodzaju), podukłady termodynamiczne w kontakcie, pierwsza zasada termodynamiki dla podukładu $dU = đW + đQ$, w procesach cyklicznych $\oint dU = W + Q = 0$, analiza ciepła w układzie jednoskładnikowym w różnych zmiennych termodynamicznych, definicja pojemności cieplnej, pojemność cieplna przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu, definicja ciepła właściwego, analiza ciepła właściwego dla gazu doskonałego, równanie adiabaty dla gazu doskonałego.

§6. *II zasada termodynamiki* - obserwacje doświadczalne i konieczność wprowadzenia II zasady termodynamiki, różne sformułowania II zasady termodynamiki: Clausis, Kelvin, Planck i Ostwald. Nieistnienie perpetuum mobile II rodzaju.

§7. *Maszyny cieplne* - definicja silnika cieplnego i pompy cieplnej, definicja sprawności silnika cieplnego i pompy cieplnej, maszyny odwracalne i nieodwracalne, przykład cykl Carnota, twierdzenie Carnota o sprawności cyklicznego silnika odwracalnego, twierdzenie Kelvina o istnieniu termodynamicznej, absolutnej skali temperatur.

2.2 Pokazy

1. Silnik Stirlinga i żarówka.
2. Dwa sprzężone silnika Stirlinga, jeden w trybie pracy, drugi w trybie pompy cieplnej.

2.3 Zadania na ćwiczenia

1. Sprawdzić, czy forma Pfaffa

$$ye^{-z}dx + xe^{-z}dy - xye^{-z}dz$$

jest formą zupełną. Jeżeli tak, to znaleźć funkcję, której jest różniczką w R^3.

2. Sklasyfikować formę Pfaffa

$$đQ = C_V dT + pdV.$$

Znaleźć czynnik całujący μ (t.j., $\mu đQ = dS$) przy założeniu, że p i V spełniają równianie stanu gazu doskonałego $pV = RT$ dla jednego mola, a pojemność cieplna C_V jest stała.

3. Wyprowadzić wyrażenie na pracę infinitezymalną dla a) dielektryka w polu elektrycznym, $đW = \vec{E}d\vec{P}$, b) magnetyka w polu magnetycznym, $đW = \vec{H}d\vec{M}$, oraz c) rozciąganego (ściskanego) pręta/gumy o polu przekroju A spełniającego prawo Hooke'a, $đW = ATdl$, gdzie T jest napięciem.

4. Niech $\{X_i\}$ będzie zbiorem parametrów ekstensywnych, a $\{y_i\}$ zbiorem parametrów intensywnych. Wtedy każda ekstensywna funkcja stanu A spełnia związek

$$A(\lambda X_1, \lambda X_2, ..., y_1, y_2, ...) = \lambda A(X_1, X_2, ..., y_1, y_2, ...),$$

a każda intensywna funkcja stanu a spełnia związek

$$a(\lambda X_1, \lambda X_2, ..., y_1, y_2, ...) = a(X_1, X_2, ..., y_1, y_2, ...),$$

dla $\lambda = 1, 2, ...$ Pokazać, że te stwierdzenia zachodzą dla dowolnej liczby rzeczywistej $\lambda > 0$ przy warunku, że funkcje stanu są ciągłe.

5. Z zerowej zasady termodynamiki wiemy, że dla trzech ciał we wzajemnej równowadze zachodzą zależności

$$F_1(p_2, V_2, p_3, V_3) = 0,$$

$$F_2(p_1, V_1, p_3, V_3) = 0,$$

$$F_3(p_1, V_1, p2, V_2) = 0.$$

Za pomocą odpowiednich matematycznych przekształceń udowodnić, że związki te można sprowadzić do prostszej postaci

$$\Theta_1(p_1, V_1) = \Theta_2(p_2, V_2) = \Theta_3(p_3, V_3),$$

w której zmienne odnoszące się do poszczególnych ciał są rozdzielone.

6. Wyznaczyć zależność energii wewnętrznej U gazu van der Waalsa od temperatury T, objętości V i liczby moli n wiedząc, że dla jednego mola

$$U = \frac{3}{2}RT + \frac{a}{V}.$$

7. Czy rozprężanie gazu do próżni możemy przeprowadzić pseudo-statycznie? Jeżeli tak, to w jaki sposób? Czy będzie to proces kwazi-statyczny?

8. Czas, po którym układ przechodzi ze stanu nierównowagowego do stanu równowagi nazywamy czasem relaksacji. Niech czas relaksacji przy wytrąceniu układu z równowagi przez zmianę parametru a o małą wartość Δa wynosi τ. Jaki warunek musi być spełniony, aby proces polegający na zmianie w czasie parametru a zgodnie z zależnością $a = a(t)$ można było uznać za pseudo-statyczny?

9. Proces Joule'a-Thomsona polega na bardzo powolnym przeciskaniu gazu przez porowatą przegrodę z obszaru (1), gdzie utrzymywane jest ciśnienie p_1, do obszaru (2) o ciśnieniu $p_2 < p_1$. Przy nieskończenie dużej przegrodzie szybkość procesu jest nieskończenie mała. Czy jest to proces odwracalny? Czy jest to proces pseudo-statyczny?

10. W przypadku jednoatomowego gazu doskonałego energia wewnętrzna U w stanie o objętości V i ciśnieniu p wynosi

$$U = \frac{3}{2}pV.$$

Wykazać, że w odwracalnym procesie adiabatycznym przeprowadzonym nad takim gazem zachodzi związek

$$pV^\gamma = \text{const},$$

gdzie γ jest pewną stałą. Wyznaczyć pracę jaką należy wykonać nad takim gazem przy przeprowadzaniu go ze stanu (p_1, V_1) do stanu (p_2, V_2) na drodze adiabatycznej niekoniecznie odwracalnej.

11. Uogólnić wynik z wykłady $C_P = C_V + nR$ dla n moli gazu na dowolny prosty układ termodynamiczny na dwa sposoby:

$$C_P = C_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \{p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\}; \quad (4)$$

$$C_P = C_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \{p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_T\}. \quad (5)$$

12. Dla gazu doskonałego o niezależnym od temperatury cieple właściwym C_v pokazać prawo adiabaty

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (6)$$

oraz obliczyć pracę jaką wykonuje ten gaz w dowolnej (niekoniecznie quasistatycznej) przemianie adiabatycznej ze stanu p_1, V_1 do stanu p_2, V_2.

13. Zakładając że przemieszczanie się powietrza w atmosferze zachodzi quasistatycznie w sposób adiabatyczny, znaleźć postać zależności temperatury od wysokości, zaniedbując wpływ kondensacji pary. Przedyskutować jakościowo co się stanie jeżeli wilgotność jednak uwzględnimy.

2.4 Zadania domowe

Zbieramy 21 marca 2024r. na wykładzie.

1. Pokazać, że dla jednego mola gazu doskonałego o niezależnym od temperatury cieple właściwym przy stałej objętości c_v przy quasi–statycznym rozprężaniu adiabatycznym ze stanu (T_0, V_0) do dowolnej objętości V zachowana jest wielkość

$$\sigma = c_V \ln \frac{U}{U_0} + \frac{Q}{T_0} \quad (7)$$

gdzie U i U_0 oznaczają energię wewnętrzną w stanie końcowym i początkowym, odpowiednio, a Q jest ciepłem pobieranym podczas dokonywanego kwazistatycznie *izotermicznego* rozprężania tego gazu do tej samej końcowej objętości w temperaturze początkowej.

2. Rozważyć ponownie problem określenia temperatury na głębokości L pod powierzchnią gruntu gdy temperatura nad gruntem zmienia się jak

$$T(t) = T_0 + A\cos\omega t. \quad (8)$$

W tym celu zdyskretyzować równanie

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

dzieląc grunt o grubości L na identyczne cienkie paski o grubości Δx oraz przybliżając temperaturę w pasku poprzez $T(x) \approx T_n$ a pochodne na

górnym brzegu przez $\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{n-1}-T_n}{\Delta x}$. Pokazać z twierdzenia Stokesa, że wtedy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\kappa}{\Delta x^2}\left(T_{n-1} + T_{n+1} - 2T_n\right). \tag{10}$$

(zaniedbać strumień przez boczne ścianki) Biorąc Ansatz

$$T_n = \lambda^n e^{i\omega t} \tag{11}$$

znaleźć równanie na λ i rozwiązać je w pierwszym nietrywialnym rzędzie w $\Delta x\sqrt{\frac{\kappa}{\omega}}$. Wybrać to rozwiązanie, które charakteryzuje się malejącą amplitudą. Na koniec wziąć granicę $n \to \infty$ przy ustalonym L i sprawdzić, że spełnione jest równanie (9).

3. Niech x będzie dowolną wielkością będąca funkcją stanu termodynamicznego układu którego stan równowagi jest zadany jednoznacznie przez podanie jego objętości molowej v i temperatury T. Wykazać, że molowe ciepło właściwe przy stałym x spełnia

$$c_x = \left(\frac{\partial u}{\partial_T}\right)_v + \{\left(\frac{\partial u}{\partial_v}\right)_T + p\}\left(\frac{\partial v}{\partial_T}\right)_x \tag{12}$$

3 Tydzień III, 11-17/03/2024

3.1 Wykład

§8. *Entropia i II zasada termodynamiki* - definicja ciepła zredukowanego, znikanie ciepła zredukowanego dla odwracalnego cyklu Carnota, uogólnienie na dowolny cykl odwracalny, matematyczne sformułowanie II zasady termodynamiki dla procesów odwracalnych, istnienie entropii jako funkcji stanu i jej związek z ciepłem i temperaturą $TdS = đQ$, sformułowanie I zasady termodynamiki dla procesów odwracalnych, II zasada termodynamiki dla dowolnych procesów, prawo wzrostu entropii w procesach nieodwracalnych.

II. Zmienne losowe i rozkłady prawdopodobieństwa

§1. *Elementy teorii prawdopodobieństwa* - częstościowa (Laplace'a) definicja prawdopodobieństwa, aksjomatyczna definicja przestrzeni probabilistycznej (Kołmogorov), prawdopodobieństwo warunkowe, zmienne losowe, zmienne losowe ciągłe i dyskretne, gęstość prawdopodobieństwa.

§2. *Funkcje tworzące, momenty, kumulanty i korelacje, centralne twierdzenie graniczne* - definicje średniej, momentów i dyspersji, dygresja o różnych średnich, przykłady średnich: arytmetyczne, geometryczna, harmoniczna, Höldera, funkcja tworząca dla momentów, kumulanty, funkcja tworząca dla kumulantów, wielkości marginalne, momenty i korelacje, zdarzenia niezależne, faktoryzacja gęstości prawdopodobieństwa i korelacji dla zmiennych niezależnych, dodawanie niezależnych zmiennych losowych, centralne twierdzenie graniczne, rozkład Gaussa.

§3. *Prawdopodobieństwo, informacja i entropia* - pojęcie informacji, ilość informacji, średnia ilość informacji, entropia informacyjna Shannona, własności entropii informacyjnej, niezależne źródła informacji, addytywność entropii informacyjnej.

3.2 Pokazy

1. Omówienie PID - proportional integral derivative do stabilizacji pomiarów, np. procesów izotermicznych.

3.3 Zadania na ćwiczenia

1. Wykazać równoważność sformułowań drugiej zasady termodynamiki przez Clausiusa i przez Kelvina.

2. Wyznaczyć sprawność silnika działającego w odwracalnym cyklu Carnota, gdzie czynnikiem roboczym jest gaz doskonały jednoatomowy.

3. Wykazać, że sprawność lodówki działającej w sposób odwracalny wynosi $\omega_c = T_2/(T_1 - T_2)$.

4. Wykazać, że dla dowolnego procesu infinitezymalnego, w którym układowi dostarczane jest ciepło Q od termostatu o temperaturze T, zachodzi nierówność $dS \geqslant Q/T$.

5. Wykazać, że sprawność dowolnego silnika pracującego pomiędzy dwoma termostatami o temperaturach $T_1 > T_2$ nie może być większa od sprawności odwracalnego cyklu Carnota, tzn. $\eta \leqslant 1 - T_2/T_1$.

6. Wykazać, że związek $đQ = TdS$, gdzie T jest temperaturą, określa T i S z dokładnością do transformacji $T' = aT$, $S' = S/a + b$, gdzie a i b to pewne stałe rzeczywiste.

7. Wyznaczyć entropię dla jednoatomowego gazu doskonałego scharakteryzowanego równaniami stanu $pV = nRT$ oraz $U = \frac{3}{2}nRT$.

8. Wyznaczyć w funkcji temperatury T i ciśnienia p potencjał chemiczny μ jednoskładnikowego gazu doskonałego.

3.4 Zadania domowe

Zbieramy 28 marca 2024r. na wykładzie. We wtorek 26 marca jest plan czwartkowy, wiec zbieramy tego dnia.

1. Odwracalny cykl Mayera składa się z adiabatycznego rozprężania, izobarycznego sprężania i izochorycznego ogrzewania. Rozpatrując ten cykl dla jednego mola gazu doskonałego jako czynnika roboczego wyznaczyć cieplny równoważnik pracy, tzn. pokazać, że $R = c_p - c_V$.

2. Czy dla układu fizycznego może być spełniona równość $c_p = c_V$? Jeżeli tak, to podać przykład takiego układu.

3. Gaz van der Waalsa scharakteryzowany jest przez równania stanu

$$(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = RT,$$

$$u = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{v}.$$

Wyznaczyć równanie podstawowe $S = S(U, V, N)$ dla tego gazu.

4 Tydzień IV, 18-24/03/2024

4.1 Wykład

III. Ergodyczność i dochodzenie układu do stanu równowagi

$1. *Przepływ w przestrzeni fazowej w mechanice klasycznej* - Problem nieodwracalności w czasie zjawisk makroskopowych, postawienie problemu, przestrzeń fazowa, ewolucja Hamiltonowska, równania Hamiltona, ogólne układy dynamiczne i ewolucja objętości w przestrzeni fazowej, prędkość bez dywergencji jako warunek na zachowanie objętości w przestrzeni fazowej, spełnienie tego warunku w dynamice Hamiltonowskiej, równanie Liouville'a i jego rozwiązanie w przypadku zależności gęstości od wielkości zachowanych, rozkład mikrokanoniczny.

$2. *Nieodwracalność a powrót Poincare'go* - założenia i treść twierdzenia o powrocie (Poincare'go).

$3. *Hipoteza ergodyczna, rozkład mikrokanoniczny* - średnia po czasie, średnia po zespole statystycznym, hipoteza ergodyczna, zasada równych prawdopodobieństw a priori, gęstość stanów na powierzchni o ustalonej energii, rozkład mikrokanoniczny.

$4. *Dynamika kwantowa* - operator statystyczny i opis stanów mieszanych, własności operatora statystycznego, kryteria czystości stanu, entropia von Neumanna, operator zredukowane dla układów wielu cząstek, stany niezależne (iloczynowe), stany nieskorelowane i średnie, macierz gęstości w reprezentacji położeniowej i pędowej, funkcja Wignera opisująca rozkład w przestrzeni fazowej.

4.2 Pokazy

1. Gwałtowny wpływ powietrza do próżni w długiej rurze.

4.3 Zadania na ćwiczenia

1. Wybieramy w sposób przypadkowy liczbę leżącą między 0 a 1. Ile wynosi prawdopodobieństwo, że dokładnie pięć spośród dziesięciu pierwszych cyfr po przecinku składać się będzie z cyfr mniejszych od 5?

2. Działo obracające się ze stałą prędkością kątową ω strzela w losowo wybranej chwili. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa położenia punktu trafienia na ekranie znajdującym się w odległości d od działa.

3. Rzucamy w sposób przypadkowy igłą o długości $2l$ na płaszczyznę, na której narysowano proste równoległe odległe o $2a$ ($a > l$). Jakie jest prawdopodobieństwo przecięcia przez igłę którejkolwiek prostej?

4. Na przykładzie cząstek z momentem magnetycznym (spinów) wprowadzić i omówić rozkład dwumienny (Bernoulliego). W odpowiednich granicach wyprowadzić rozkłady Gaussa i Poissona i omówić ich własności, znaleźć funkcję tworzącą dla momentów i kumulantów (gdy istnieją), momenty i kumulanty. Przy okazji przypomnieć, udowodnić wzór Stirlinga.

5. Pokazać, że kumulanty są pewnymi kombinacjami momentów dla K_n z $n = 1, 2, 3, 4$. Podać ogólne wyrażenia.

6. a) Korzystając z tego, że średnia energia kinetyczna gazu doskonałego $E = m\sum_i^N \langle v_i^2\rangle/2N = k_BT/2$ na jeden stopień swobody, gdzie m jest to masa cząstki, T temperatura, a k_B stała Boltzmanna, oraz z centralnego twierdzenia granicznego dla niezależnych zmiennych losowych wyprowadzić rozkład Maxwella (1859) dla prędkości $\vec{v}$, tj.

$$p(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2k_BT}}.$$

b) Znaleźć rozkład Maxwella w zmiennych $v = |\vec{v}|$ i Ω kąt bryłowy, tj.

$$p(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}},$$

$$p(\Omega) = \frac{1}{4\pi}.$$

Znaleźć prędkość typową, średnią i średnia jej kwadratu. c) Znaleźć rozkład energetyczny od $E = mv^2/2$, tj.

$$p(E) = \frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{\pi}(k_BT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{k_BT}}.$$

d) Z przekazu pędu wyprowadzić równanie stanu gazu doskonałego $pV = Nk_BT$ i $pV = \frac{2}{3}U$. e) Z zasady ekstremum entropii $S = -k_B \int d_3v p(\vec{v}) \ln(p(\vec{v})C)$, gdzie C jest pewna stałą gdyż $p(\vec{v})$ jest wymiarowe (!), oraz warunku, że prawdopodobieństwo jest unormowane do jedności i $\langle v_x^2\rangle k_BT/m$ wyprowadzić ponownie rozkład Maxwella. Znaleźć entropię tego gazu (z dokładnością do C).

7. Talia zawiera 52 potasowane karty. a) Jaka jest zawartość informacyjna całej tali? b) Jaka jest zawartość informacyjna 5-kartowego układu pokera wyciąganego losowo z tej talii.

4.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 4 kwietnia 2024r.

1. Dowieść wzór rekurencyjny pomiędzy momentami M_n i kumulantami K_n

$$M_n = \sum_{l=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(l-1)!(n-l)!} M_{n-l} K_l.$$

2. Częstość występowania liter polskiego alfabetu w tekstach można znaleźć w

   `https://sjp.pwn.pl/poradnia/haslo/frekwencja-liter-w-polskich-tekstach;7072.html`

   Na tej podstawie znaleźć entropie informacyjną Shannona liczoną na literę polskiego alfabetu. Jak bardzo ta wartość różni się od przypadku, gdyby każda z liter występowała z takim samym prawdopodobieństwem? Powtórzyć podobną analizę dla przypadku języka angielskiego w oparciu o dane z

   `https://www3.nd.edu/~busiforc/handouts/cryptography/letterfrequencies.html`

   Wyciągnąć i przedyskutować wnioski porównując oba alfabety.

3. Wg "informacji z internetów"wetknięcie po omacku wtyczki USB do gniazdka wymaga przeciętnie trzech prób. Rozważmy model: początkowo wtyczka jest w losowej orientacji (50%/50%). Jeśli orientacja jest niewłaściwa — odwracamy wtyczkę i powtarzamy; jeśli orientacja jest poprawna to z prawdopodobieństwem p uda nam się ją wetknąć w gniazdko, a z prawdopodobieństwem $1-p$ nam się nie uda i wtedy odwracamy wtyczkę i powtórzymy próbę. Ile musi wynosić p aby zgodnie z internetową mądrością potrzeba było średnio trzech prób?

4. (*) Na ćwiczeniach rozważaliśmy błądzenie przypadkowe na półprostej całkowitej: delikwent startował z położenia 0 i z prawdopodobieństwem p zmieniał je o $+1$, a z prawdopodobieństwem $1-p$ zmieniał je o -1. Błądzenie kończyło się spadnięciem w przepaść po osiągnięciu położenia $+1$. Pokazaliśmy, że do spadnięcia dochodzi z prawdopodobieństwem $p/(1-p)$.
   a) oblicz jaka jest średnia liczba kroków wykonanych przez błądzącego przed spadnięciem w przepaść (ograniczamy się tylko do tych którzy faktycznie w przepaść spadli)?
   b) oblicz jaka jest średnia liczba kroków poprzedzających spadnięcie w przepaść jeśli błądzący mógł poruszać się tylko po półce skalnej o szerokości 2 kroków, tj.: startował stojąc na krawędzi przepaści - mógł wykonać dwa kroki w lewo, ale nie więcej. Tak jak we wcześniejszej wersji zadania kroki przybliżające do przepaści wykonywane są z prawdopodobieństwem p, a oddalające od niej z prawdopodobieństwem $1-p$.
   Porównaj i skomentuj zależność średniej liczby kroków od p w przypadkach (a) i (b).

5 Tydzień V, 25-31/03/2024

5.1 Wykład

$5. *Kwantowy układ izolowany - dochodzenie do równowagi* - Hamiltonian niezależny od czasu, zasada zachowania energii w mechanice kwantowej, definicja diagonalnego zespołu statystycznego w kwantowej fizyce statystycznej, zależność czasowa dowolnej obserwabli, wyrazy diagonalne i interferencyjne w funkcjach korelacji i średnich, heurystyczny warunek na znikanie wyrazów interferencyjnych, przybliżenie chaotycznych faz,.

$6. *Kwantowa termalizacja. Hipoteza termalizacji stanów własnych* - Paradoksy unitarnej ewolucji średnich w czasie, koncepcja lokalnych obserwabli, hipoteza (postulat) termalizacji stanów własnych lokalnych obserwabli, rozkład mikrokanoniczny.

IV. Rozkład mikrokanoniczny

$1. *Stacjonarny rozkład mikrokanoniczny w mechanice klasycznej i kwantowej* - maksymalizacja entropii, zasada równych prawdopodobieństw a'priori, gęstość stanów w przestrzeni fazowej, Boltzmann'owska definicja entropii, równoważność powierzchni o objętości w przestrzeni fazowej w granicy termodynamicznej, zasada holograficzna w fizyce statystycznej, długość termiczna fali materii, granica klasyczna i granica kwantowa, kwantowy zespół mikrokanoniczny.

$2. *Zespół mikrokanoniczny dla gazu doskonałego* gęstość stanów dla gazu doskonałego o ustalonej energii E, entropia gazu doskonałego, problem stałej, normalizacja elementu objętości w przestrzeni fazowej, pojawienie się stałej Plancka w rozważaniach klasycznych, problem z addytywnością entropii, paradoks Gibbsa, czynnik permutacyjny dla cząstek nierozróżnialnych, wzór na entropię Sakurai-Tetrode.

5.2 Zadania na ćwiczenia

1. Udowodnić twierdzenie o powrocie Poincare'go.

2. Sprawdzić, że dla operatora statystycznego zachodzą: $\mathrm{Tr}\rho = 1$, $\rho^\dagger = \rho$, $\mathrm{Tr}\rho^2 \leqslant 1$.

3. Dla stanu czystego dwóch fotonów o polaryzacja x i y

$$|\Psi\rangle = \sqrt{p}|x_1 x_2\rangle + \sqrt{1-p}|y_1 y_2\rangle,$$

   gdzie $0 \leqslant p \leqslant 1$, znaleźć operator statystyczny, zredukowane operatory statystyczne i ich entropie. Kiedy stan jest nieskorelowany?

4. Pokazać, że dla układu swobodnego funkcja Wignera spełnia równanie

$$\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial W(q,p,t)}{\partial q} = 0.$$

   Znaleźć rozwiązanie

$$\begin{aligned} W(q,p,t) &= exp(-t\hat{p}/m)W(q,p,t=0) \\ &= W(q-pt/m,p,t=0). \end{aligned}$$

   .

5.3 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 11 kwietnia 2024r.

1.

6 Tydzień VI, 01-07/04/2024

6.1 Wykład

\$3. *Równowaga cieplna i mechaniczna* - fluktuacja energii pomiędzy układami z przegrodą przepuszczającą energię, temperatura bezwzględna wyznaczona z mikroskopowej entropii układu, stabilność rozkładu najbardziej prawdopodobnego, dygresja o ujemnych temperaturach bezwzględnych gdy widmo energetyczne jest ograniczone z góry, równowaga cieplna dla przegrody ruchomej, mikroskopowa definicja ciśnienia, Ii zasada termodynamiki jako prawo, że układ dąży do stanu najbardziej prawdopodobnego.

V. Potencjały termodynamiczne

\$1. *Transformacja Legendre'a* - konieczność użycia innych zmiennych termodynamicznych niż E, V czy N, definicja transformacji Legendre'a i definicja energii swobodnej Hlemholtza, entalpii, energii swobodnej Gibbsa.

6.2 Zadania na ćwiczenia

kontynuacja zadań z poprzedniego tygodnia.

7 Tydzień VII, 08-14/04/2024

7.1 Wykład

\$2. *Termodynamika kładu w kontakcie z rezerwuarem*- zachowanie układu w kontakcie z termostatem, barostatem oraz ich kombinacją. Pokazałem że odpowiednio potencjały F, H oraz G mają w tych sytuacjach minimum.

\$3. *Relacje Maxwella* - Pokazałem relacje Maxwella i magiczny kwadrat.

\$4. *Warunki stabilności termodynamicznej* - warunki stabilności i wynikające z nich wnioski o cieple właściwym (C_p, C_V) oraz współczynnikach ściśliwości (K_S, K_T) + przykłady.

7.2 Pokazy

Pokaz z zachowaniem nurka Kartezjusza w wodzie o podwyższonym oraz obniżonym ciśnieniu

7.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Microcanonical ensemble - equilibrium conditions* - An isolated system of the energy U, volume V, and number of particles N (microcanonical ensemble) is split with a partition that allows to exchange the energy and particles and change the volumes of subsystems, i.e. U_i, V_i and N_i, with $i = 1,\ 2$, are random variables which are constrained $U_1 + U_2 = U$, $V_1 + V_2 = V$ and $N_1 + N_2 = N$. Let $\Omega_i(U_i, V_i, N_i)$ be the number of microstates corresponding to a given macrostate (U_i, V_i, N_i) of each subsystem. Compute the total number of microstates for a given macrostate of the whole system. Maximizing the corresponding probability, find the equilibrium conditions for those subsystems. Hints: Introduce an entropy $S = k_B \ln \Omega$, temperature $1/T = (\partial S/\partial U)_{V,N}$, pressure $p/T = (\partial S/\partial V)_{U,N}$ and a chemical potential $-\mu/T = (\partial S/\partial N)_{U,V}$.

2. *Number of microstates for a classical ideal gas in microcanonical ensemble* - For a classical ideal gas in three dimensions find $\Omega(U, V, N)$ and $\Gamma(U, V, N)$. Find the corresponding expansions in case of large N.
Hints: $\Gamma(U, V, N) = \int d_{3N}x d_{3N}p/(h^{3N}N!)\Theta(p - \sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m)$,
$\Omega(U, V, N) = (\partial\Gamma(U, V, N)/\partial U)_{V,N}\delta U$, and apply the Stirling formula $n! = n^n e^{-n}$. A schematic derivation and final results are shown at the lecture.

3. *Thermodynamics of an ideal classical gas from microcanonical ensemble* - Applying results of the previous problem, also discussed at the lecture, determine the temperature T, the pressure p and the chemical potential μ for an ideal classical gas in three dimensions. Show the energy equipartition theorem in this example and derive an equation of state for this system.

4. *Harmonic oscillator in microcanonical ensemble* - A system is described by a set of classical harmonic oscillators with the Hamiltonian
$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \vec{r}_i^2 \right).$$
Compute $\Gamma(U, V, N)$, $\Omega(U, V, N)$, entropy, temperature, specific heat, pressure, and chemical potential. Why volume is not present?

5. *Spins in magnetic field, microcanonical ensemble* - An isolated system of $N \gg 1$ localized spins $\hbar/2$ is in an external magnetic field B and is described within a microcanonical ensemble. Find the entropy, internal energy, temperature, magnetization, magnetic susceptibility, specific heat. Discuss results and plot them as a functions of temperature.

6. *Ising spins in canonical ensemble* - Consider a system of N Ising spins in a magnetic field. Derive the partition function and discuss thermodynamics of this system by deriving internal energy, magnetization, free energy, entropy, magnetic susceptibility. Compare microcanonical and canonical description.

7. *Negative absolute temperatures* (This is an additional material if time allowes, it should be presented by tutors.) - Discuss a problem of the existence

and a meaning of a negative absolute temperature in systems of localized spins and in systems with itinerant degrees of freedom. Discuss historical and recent experimental findings. Discuss thermodynamics and, in particular, an energy transfer between two systems if the negative temperatures are allowed.

Literature:
N. Spisak, Foton 132, Wiosna 2016, p. 16;
S. Braun et al., Science 339, p. 52 (2013);
N. Ramsey, Phys. Rev. 103, p. 20 (1956);
M. Klein, Phys. Rev. 104, p. 589 (1956);
D. Frenkel et al., Am. J. Phys. 83, p. 163 (2015) (!!!);
E. Abraham, et al., Phys. Rev. E 95, p. 012125 (2017) (!!!);

7.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 18 kwietnia 2024r.

1. *Two-level system* - It is a very popular model describing localized spins 1/2, photons with polarization or atoms in certain states. For spins 1/2 it is visualized that each particle has a magnetic moment pointing up or down. Write down all possible microstates in the case of $N = 2, 3$, and 4 particles. For the spin system the natural variables describing different macrostates are the total number of particles N and the "magnetization"$M = N_+ - N_-$, where $N_\pm$ is the numer of moments pointing up and down, respectively. Derive a formula for the number of microstates $\Omega(N, M)$, realizing a given macrostate with N and M. Find the total number of states $\Omega(N) = \sum_M \Omega(N, M)$. In the limit of large N show that $\Omega(N, M) \approx \Omega(N, 0)e^{-M^2/2N}$ is Gaussian. Show that $\Omega(N, 0) \approx \sqrt{2/\pi N}2^N$ and estimate its value for $N = 100$. Which are the most probable macrostates?

2. *Gas fluctuations in a cubic box* A cubic box with isolating (adiabatic) walls of length L contains N particles of an ideal gas. Find the dispersion of the centre of mass of the system in equilibrium. How does the dispersion behave with the increasing number of particles in the box?

3. *Rare fluctuation in the air* - An air in a room of dimensions 3m×3m×3m is under a normal conditions (atmospheric pressure and $T = 300$K). Estimate a probability that at a given time in a cubic volume a) 1cm^3, b) 1A° (angstrom) at any place in this room there is no air due to a statistical fluctuation. Hint: $p \sim \exp(-N(v/V))$, where N is a number of particles, V is a volume of the room, and v is a volume of the small cube.

4. (*) *Distribution of particles in a container* - Consider N identical, distinguishable particles occupying k cells. It is a model of a discrete space with particles in it. Microstates are given by the distribution of particles in each cell. Macrostates are characterized by providing numbers of particles n_i in each cell i. Derive the formula for the number of microstates for a given macro-state $\Omega(n_1, n_2, ..., n_k) = N!/n_1!n_2!\dots n_k!$. With a fixed number of particles $N = \sum_i n_i$ show that the most probable distribution of particles is such that in each cell there is $n_i = N/k$ of them. In other words, the distribution is uniform.

8 Tydzień VIII, 15-21/04/2024

8.1 Wykład

VI - Zespół kanoniczny

$1. *Klasyczny zespół kanoniczny* - definicja zespołu kanonicznego, wyprowadzenie rozkładu kanonicznego z rozkładu mikrokanonicznego, czynnik Boltzmannowski, wyprowadzenie rozkładu kanonicznego z zasady maksymalizacji entropii, interpretacja parametru β jako odwrotności temperatury, definicja kanonicznej sumy statystycznej, wyprowadzenie termodynamiki z kanonicznej sumy statystycznej, energia wewnętrzna, entropia, energia swobodna Helmholtza, fluktuacje energii w zespole kanonicznym, związek ich z ciepłem właściwym, równoważność zespołów mikrokanonicznego i kanonicznego w granicy termodynamicznej, mikroskopowa interpretacja pracy i ciepła w procesach odwracalnych, zasada ekwipartycji energii, gaz doskonały w zespole kanonicznym.

$2. *Kwantowy rozkład kanoniczny* - uogólnienie rozkładu kanonicznego na przypadek kwantowy, operator statystyczny w zespole kanonicznym, problem nierozróżnialności cząstek, wyprowadzenie sumy statystycznej dla gazy doskonałego nierozróżnialnych cząstek w kwantowym zespole kanonicznym z pominięciem statystyki cząstek.

$3. *Rozkład Maxwella* - wyprowadzenie rozkładu Maxwella dla gazu doskonałego, własności rozkładu i różne jego przedstawienia, doświadczalne badanie rozkładu Maxwella i jego zastosowanie do wyznaczenia temperatury zimnych atomów.

8.2 Zadania na ćwiczenia

1. Rozważmy prosty układ dla którego równanie podstawowe w reprezentacji energetycznej ma postać:
$$U(S, V, N) = \frac{1}{VN}\left(\frac{S}{3A}\right)^3,$$
gdzie A to pewna stała. Wyznaczyć energię swobodną Helmholtza, entalpię, entalpię swobodną Gibbsa i wielki potencjał termodynamiczny dla tego układu.

2. Wypisać wszystkie możliwe tożsamości Maxwella dla energii swobodnej Helmholtza $F(T, V, N)$ i entalpii swobodnej Gibbsa $G(T, p, N)$.

3. Pokać, że
$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -C_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S.$$

4. Rozważmy paramagnetyk o następujących trzech własnościach:

   - jego objętość nie zmienia się w procesach termodynamicznych ($V = const$),
   - spełnione jest prawo Curie: $\chi_T(T) = a/T$,
   - pojemność cieplna w zerowym polu magnetycznym jest dana wzorem: $C_h(T, 0) = bV/(T^2)$,

   gdzie a i b są dodatnymi stałymi. Znaleźć pojemność cieplną $C_h(T, h)$ dla dowolnej wartości natężenia pola magnetycznego h.

5. Proces Joule - Thomsona (dławienie gazu) polega na powolnym przeciskaniu gazu poprzez porowatą przegrodę (dławik) z jednego podukładu do drugiego przy ustalonych wartościach ciśnień w obu podukładach (równych odpowiednio p_A i p_B , $p_A > p_B$) i przy adiabatycznym osłonięciu całego układu. Stałość ciśnień gazu w każdym z podukładów zapewniona jest dzięki powolnemu ruchowi tłoków ograniczających te podukłady. Ruch tłoka w podukładzie o większym ciśnieniu związany jest ze zmniejszaniem jego objętości w trakcie przechodzenia gazu przez porowatą przegrodę; w podukładzie o mniejszym ciśnieniu ruchowi tłoka towarzyszy zwiększanie jego objętości. Przejściu przez dławik w tym procesie towarzyszy zmiana temperatury gazu:

   $$(T_B - T_A) = \mu_{JT}(p_B - p_A),$$

   gdzie $\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{H,N}$ nosi nazwę współczynnika Joulea-Thomsona. Krzywą inwersji nazywamy krzywą w przestrzeni stanów zadaną równaniem $\mu_{JT}(T, p) = 0$. Wyznaczyć współczynnik μ_{JT} , krzywą inwersji, a także maksymalną i minimalną temperaturę inwersji dla gazu van der Waalsa.

6. Sprawdzić stabilność mechaniczną 1 mola gazu van der Waalsa. Następnie przedyskutować konstrukcję Maxwella dla tego gazu wykorzystując odpowiednie potencjały termodynamiczne. Zinterpretować uzyskany diagram fazowy.

7. Gaz znajduje się w zbiorniku z ruchomym tłokiem i jest w równowadze cieplnej oraz mechanicznej z otoczeniem o zadanej temperaturze T i ciśnieniu p. W wyniku jakiego zewnętrznego działania tłok adiabatycznie (odwracalnie) przesuną się na zewnątrz, a zatem zmalało ciśnienie gazu. Opisać jak układ zareaguje na tę zmianę.

8. Pokać, że dla $k \neq i$ spełniona jest nierówność

   $$\left(\frac{\partial X_i}{\partial y_i}\right)_{X_k} < \left(\frac{\partial X_i}{\partial y_i}\right)_{y_k},$$

   gdzie $(S, V, N, ...) = (X_1, X_2, X_3, ...)$ oraz $(T, -p, \mu, ...) = (y_1, y_2, y_3, ...)$. Zinterpretuj ten wynik dla $\kappa_S < \kappa_T$ odwołując się do reguły przekory Le Chateliera-Brauna.

8.3 Zadania domowe

zbieramy 25 kwietnia 2024r.

1. *Chain of rods* - N rods o length a are connected together one to each other (the end of one to the beginning of the next) forming a chain. The first rod and the last one are hung on fixed points remote by a distance l, where $l < Na$ and l/a is a natural number. Find the number of possible microstates Ω for a given macrostate $l = |N_+ - N_-|a$, where $N_\pm$ is the number of rods pointed to the right/left. Estimate the entropy $S = k_B \ln \Omega$ at large N. This model is the simplest one embodying the essential property of the rubber elasticity. In particular, one can compute the tension $X = (\partial F/\partial l)_T = -T(\partial S/\partial l)_T \sim (k_B T/Na^2)l$ at large N, which obeys the Hook's law. Hints: rods are infinitely thin and placed parallel to each other. It is possible that rods are on both sides of the boundary fixed points. The number of possible microstates we can find similarly as in the problem with the Ising spins.

2. Statistical sum satisfies the relation $\ln Z = aT^\alpha V$, where a and α are positive constants. Calculate specific heat at constant volume of this system.

3. Consider N magnetic moments, which have two allowed orientations $\pm\mu$ in an external magnetic field B (the energy of each dipole can take values $\pm\mu B$). Within the canonical ensemble, find the relative dispersion of the magnetization $\sigma_M/M = \sqrt{\langle M^2\rangle - \langle M\rangle^2}/\langle M\rangle$.

9 Tydzień IX, 22-28/04/2024

9.1 Wykład

VII - Rozkład Plancka i jego zastosowania

$1. *Rozkład Plancka - wyprowadzenie dla pojedynczego oscylatora* - postulat Plancka o kwantyzacji energii pojedynczego drgającego modu, wyprowadzenie rozkładu prawdopodobieństwa w zespole kanonicznym, suma statystyczna, średnia liczba modów w danej temperaturze (rozkład Plancka) energia wewnętrzna, ciepło właściwe, energia swobodna, entropia.

$2. *Promieniowanie ciała doskonale czarnego* - pole elektromagnetyczne w rezonansowej wnęce, relacja dyspersji, kwantowanie poziomów energii dla każdego modu pola elektromagnetycznego, gęstość energii wewnętrznej, prawo Stefana-Boltzmanna, stała Stefana-Boltzmanna, termodynamika promieniowania, równanie stanu, gęstość spektralna i prawo przesunięć Wiena, granice klasyczna i UV, średnia liczba fotonów w wnęce w funkcji temperatury, promieniowanie z wnęki rezonansowej przez nieskończenie mały otwór, strumień energii promieniowania z funkcji temperatury, współczynniki emisji i absorpcji, prawo Kirchhoffa i jego dowód, uniwersalność rozkładu Plancka dla promieniowania elektromagnetycznego, absorpcja, emisja spontaniczna i wymuszona, współczynniki Einsteina, zasada równowagi szczegółowej, związek współczynników

Einsteina z współczynnikami emisji i absorpcji, wielkości fotometryczne, względna wrażliwość oka ludzkiego, strumień świetlny, lumen, światłość źródła światła, kandela.

9.2 Pokazy

Obserwacja różnych substancji o różnej temperaturze za pomocą kamery na podczerwień.

9.3 Zadania na ćwiczenia

1. Niech x oznacza jakąś ze składowych pędu lub położenia uogólnionego jednej z molekuł. Wykazać, że
$$\Big\langle x\frac{\partial H}{\partial x}\Big\rangle_{\rm MC} = k_BT,$$
gdzie $\langle,\rangle_{\rm MC}$ oznacza średniowanie względem rozkładu mikrokanonicznego. Zauważmy, że wynik nie zależy od zespołu statystycznego. Na wykładzie wyprowadziliśmy to samo w ramach zespołu kanonicznego.

2. Wykorzystując wynik poprzedniego zadania wykazać twierdzenie o wiriale mówiące, że
$$pV = Nk_BT - \frac{1}{3}\Big\langle \sum_{(ij)} \vec{r}_{ij}\frac{\partial V(\vec{r}_{ij})}{\partial \vec{r}_{ij}}\Big\rangle,$$
gdzie ogólny Hamiltonian jest w postaci
$$H = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^{N} U(\vec{r}_i) + \sum_{(ij)} V(\vec{r}_{ij}),$$
a $U(\vec{r}_i)$ opisuj potencjał związany z istnieniem ścianek, a $V(\vec{r}_{ij})$ jest dwucząstkowym potencjałem oddziaływania między cząstkami.

3. *Work microscopically and macroscopically in the canonical ensemble* - Assuming that the energy level $\epsilon_i(X)$ changes with the change of the control parameter X introduce a microscopic force $F_i = -d\epsilon_i/dX$ and a microscopic work $đW_i = F_i dX$. Derive an equation for the macroscopic work $đW = k_BT(\partial \ln Z/\partial X)dX$. Discuss this result for ideal gas in a box of volume ($đW = -pdV$) and for Ising spins in a magnetic field ($đW = MdB$).

4. *Work, heat, entropy and exact forms* - Recollect the first and the second laws of thermodynamics ($dU + đW = đQ$, and $đQ = TdS$), where $đW$ is the work performed by the system. Discuss the difference between the state function U and its differential dU and the not state functions $đW$ and $đQ$. Provide a physical interpretation. Show that $dU + đW$ is not an exact form (use $đW = k_BT(\partial \ln Z/\partial X)dX$ and $U = -(\partial \ln Z/\partial\beta)$. Show that $\beta(dU + đW)$ is an exact form with the integration factor $S/k_B = \ln Z - \beta(\partial \ln Z/\partial\beta)$. Show the equivalence of S with the thermodynamic entropy $S = -(\partial F/\partial T)_{X,N}$.

5. *Classical ideal gas of two-atom molecules* - Ideal gas is composed of molecules with two atoms of mas m_1 and m_2. Atoms inside a molecule interact with each other with the potential of model (expanded) form $V(r) = V(r_0)+(1/2)m\omega_0\xi^2$, with $\xi = r - r_0$. For a single molecule find the kinetic energy in relative and center of mass coordinates. Then find the partition function and discuss each contributing terms. For the translationally invariant part use the earlier results for a monoatomic ideal gas. For rotational and vibrational degrees of freedom show that $Z_1^{\rm rot} = 2Ik_BT/\hbar^2$ and $Z_1^{\rm vib} = k_BT/\hbar\omega_0$, where $I = mr_0^2$.

6. *Classical ideal gas of two-atom molecules - thermodynamics* - For a gas of diatomic molecules find: internal energy, specific heat at constant volume, Helmholtz free energy, pressure and equation of state, entropy.

9.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 9 maja 2024.

1. A system can be in states of energies $0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, 2\epsilon$. Calculate the internal energy of this system and the specific heat at temperature T.

2. *Tonks gas* – 1D system consists of N small indistinguishable segments, each of them of mass m and length σ moving along a section of length L ($L >> N\sigma$). The segments do not pass through each other. Treating the system as classical, calculate the canonical statistical sum, Helmholz free energy and equation of state of the gas created by such segments. Hints: assume the interacting potential between segments in a form $u(x - x') = 0$ if $|x - x'| \geqslant \sigma$ and $u(x - x') = \infty$ if $|x - x'| < \sigma$, and the hard wall boundary potential $v(x) = 0$ if $\sigma/2 \geqslant x \geqslant L - \sigma/2$ and $v(x) = \infty$ if $x < \sigma/2$ or $x > L - \sigma/2$. Firstly, compute the position dependent part of the partition function as the segments are distinguishable, i.e. their coordinates are ordered $x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_{N-1} \leqslant x_N$, and then multiply the results by $N!$. Do not forget about $N!$ term in the denominator in $dpdq$ measure.

3. The probability density function of measuring the value E of an internal energy of a classical ideal gas, which remains in the thermal equilibrium with a thermostat of temperature T, can be written as
$$\rho(E) = \frac{E^a \exp(-\beta E)}{\int_0^\infty E^a \exp(-\beta E)\mathrm{d}E},$$
where
$$a = \frac{3N}{2} - 1, \quad \beta = \frac{1}{k_BT}.$$
Using this function calculate the mean energy and derive the most probable value of the energy. Show that the two are indistinguishable for the classical ideal gas.

4. (*) Prove the Dalton's law (which states that in a mixture of non-reacting gases, the total pressure is equal to the sum of the partial pressures of the individual gases) for a mixture of classical gasses using the canonical ensemble. Hint: Calculate the statistical sum for the mixture of gasses and make use of the definition of the pressure for one-component gas.

10 Tydzień X, 29/04-05/05/2024

10.1 Wykład

$3. *Ciepło właściwe ciał stałych* - kryształ harmoniczny, ciepło właściwe kryształu, eksperyment i teoria klasyczna, model Einsteina, model Debye'a, mody Goldstone'a, dyspersja modu dźwiękowego, odcięcie Debye'a w pędach i częstościach, energia wewnętrzna i ciepło właściwe w niskich temperaturach, fonony, zasada emergencji w układach złożonych.

10.2 Zadania na ćwiczenia

kontynuacja zadań z poprzedniego tygodnia.

10.3 Zadania domowe

1. *Classical gas of electric dipoles in an electric field* - For a classical gas of electric dipoles $\vec{d}$ in the electric field $\mathcal{E}$ find partition function, Helmholtz free energy, and polarization. The interacting potential between the dipoles and the field is $V = -\vec{d}\cdot\vec{\mathcal{E}}$ and masses of the ions are m_1 and m_2. A dipol is made out of two atoms which charges are distributed such that on one ends there is a charge q and on the opposite end the charge is $-q$.

2.

11 Tydzień XI, 06-12/05/2024

11.1 Wykład

VIII Wielki rozkład kanoniczy

$1. *Potencjał chemiczny* - rodzaje oddziaływań/kontaktu termodynamicznego, oddziaływanie termiczne, oddziaływanie chemiczne (dyfuzyjne), przykład potencjału chemicznego w obwodzie z naładowaną baterią, równowaga pomiędzy układami w kontakcie chemicznym, energia swobodna i termodynamiczna definicja potencjału chemicznego, definicja potencjału chemicznego w układach wieloskładnikowych i wielofazowych, przykład potencjału chemicznego dla gazu doskonałego,

11.2 Pokazy

11.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Maxwell distribution - characteristics* - Find the typical (the most probable) velocity, the averaged velocity, the averaged square velocity and the dispersion form the Maxwell distribution in three dimensional space. Estimate those quantities for an oxygen gas at normal conditions. Lecture part.

2. *Correlations in an ideal gas* The measure of (in)dependence of two random variables is their correlation. Find the correlation function between two components of velocity

$$C(v_x, v_y) = \langle v_x v_y \rangle - \langle v_x \rangle \langle v_y \rangle$$

for an ideal gas assuming a Maxwell velocity distribution. Can you guess the result before calculating?

3. *Barometric formula* - Find the formula describing how the pressure of the ideal gas in a uniform gravitational field changes with the altitude and the temperature.

4. *Rotated cylinder with the ideal gas* - An ideal gas is in the cylindrical container of height h and radius R, which rotates with the angular velocity ω with respect to symmetry axis. Find the pressure acting on the cylinder wall. The number of particles N and the temperature T are given.

5. Find the center of gravity of an ideal gas in the cylinder in the uniform gravity field g at the temperature T. An atomic mass m is given.

6. *Quantum harmonic oscillator* - For a single harmonic oscillator find the partition function, the average number of excitations, the internal energy, the specific heat, the free energy, the entropy, and discuss the low- and high- temperature limits. Lecture part.

7. A one-dimensional quantum harmonic oscillator is in thermal equilibrium with a heat bath at temperature T.
(a) What is the mean oscillator's free energy as a function of T?
(b) What is the root mean-square fluctuation ΔE in energy?
(c) How do the above quantities behave for low and high T?

8. *Electromagnetic radiation of a resonance cavity* - An electromagnetic radiation is captured inside an resonance cavity of cubic shape with the length L and the temperature T, where metallic walls are perfect conductors. Find the partition function, the average number of excitations, the internal energy, the specific heat, the free energy, the entropy, and discuss the low- and high- temperature limits. Lecture part.

9. *Photons in the Universe* - Estimate the average number per volume of photons in the Universe. Assume its temperature to be 3K. Estimate the entropy per volume of the Universe.

10. The Sun constant is 1360 J/m^{2}s and describes amount of energy approaching from Sun to Earth in a unit of time and per unit of area. The distance Sun-Earth is $1.3 \cdot 10^{11}$m and the Sun radius is $7 \cdot 10^8$m. Find the total power of the Sun and its temperature.

11. Find an approximate formula for the Wien's shift law.

11.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 23 maja 2024r.

1. A mixture of l ideal gases, with different atomic masses $m_{i=1,\dots,l}$ are closed in a cylinder of the radius R and the height h in a gravitational field of the Earth. Find the position of the center of gravity of this mixture.

2. *The Maxwell distribution* For the Maxwell distribution of gas particle velocities in an ideal gas

$$\rho(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

where T is the temperature and m is the mass of a gas particle
(a) find the typical (average) velocity of a gas particle,
(b) find the average relative velocity of two particles $|\mathbf{v}_{12}| = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$. Comment on the relation between the two results.

3. Calculate the temperature of the surface of the Earth on the assumption that as a black body in thermal equilibrium it re-radiates as much thermal radiation as it receives from the Sun. Assume also that the surface of the Earth is at a constant temperature over the day-night cycle. Use $T_{sun} = 5800K$, $R_{sun} = 7 \cdot 10^8 m$ and the distance between the Earth and the Sun $D_{ES} = 15 \cdot 10^{10} m$. How this result compares with the measured average temperature on Earth equal to around $288K$ (or around 15° C)?

   What is the average temperature on the Mars planet, if the distance between the Mars and the Sun is ca. 1.5 times larger than the distance between the Earth and the Sun.

4. (*) *Greenhouse effect.* Most of the Sun's radiation passes through the atmosphere. On the other hand, Earth's atmosphere contains gases which absorb most of the infrared radiation, emitted by the Earths surface. This leads to the increase of the Earth's temperature and is called the "greenhouse effect."

   Consider the atmosphere to be a thin layer transparent to the sun's radiation, and perfectly absorbent to all the Earth's radiation. Assume that the atmosphere radiates half of its energy outward to space and half of it inward back to Earth. The Earth is in radiative equilibrium with the Sun and the atmosphere. The atmosphere is in radiative equilibrium with the Earth (as it absorbs no Sun's radiation). The separation between the atmosphere and the Earth's surface is negligible. Calculate the temperature of the Earth. How result of this simple model compares with the measured average temperature on the Earth?

12 Tydzień XII, 12-19/05/2024

12.1 Wykład

trzy interpretacje potencjału chemicznego, bodziec do dyfuzji cząstek, energia dodania pojedynczej cząstki, tempo reakcji chemicznych.

$2. *Dyfuzja, osmoza, przemiany fazowe z ciepłem utajnionym - opis termodynamiczny* - transparencje Radka Przeniosło.

$3. *Potencjał chemiczny a entropia - relacje termodynamiczne* - wyprowadzenie wzoru na potencjał chemiczny z entropii i inne zależności termodynamiczne na potencjał chemiczny oraz ciśnienie, pierwsza zasada termodynamiki.

$4. *Wielki zespół statystyczny - rozkład Gibbsa* - wyprowadzenie rozkładu Gibbsa, wielka suma statystyczna, termodynamika w wielkim zespole statystycznym.

$5. *Wielki potencjał termodynamiczny* - wielki potencjał termodynamiczny, wyprowadzenie pierwszej zasady termodynamiki, podsumowanie potencjałów termodynamicznych.

$6. *Fluktuacje liczby cząstek w wielkim zespole termodynamicznym* - równoważność zespołów statystycznych w granicy termodynamicznej. Przykład klasyczny gaz doskonały.

12.2 Pokazy

12.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Two-atomic molecule and separation of degrees of freedom* - On the quantum mechanical ground justify that the energy of a tow-atom molecule H_2^+ reads $E_{\mathbf{K},J,\nu} = \hbar^2 K^2/2m_s + \hbar\omega(\nu+1/2) + \hbar^2 J(J+1)/2I + V_0$, where m_s is a mass of the system, ω is the resonant frequency of oscillations, I is the moment of inertia, V_0 is the potential energy at the equilibrium. Quantum numbers: $\mathbf{K}$ continuous wave vector, $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ and $J = 0, 1, 2, 3, \dots$ Forget the spins of electrons and nucleus and apply the Born-Oppenheimer approximation.

2. *Quantum theory of specific heat for ideal gas of two-atomic molecules* - Assuming that one can separate different degrees of freedom in a two-atom molecule one can write the partition function as $Z = Z_{trans} Z_{vib} Z_{rot} Z_{electr}$, where each term represents contributions from translational, oscillation, rotation, and electronic degrees of freedom, respectively. Find contributions from oscillational and rotational degrees of freedom to the

specific heat and discuss low and high temperature limits. Discuss the typical temperature dependence of the specific heat and characteristic energy/temperature scales.

3. Oświetlenie (natężenie oświetlenia) jest to stosunek strumienia świetlnego do pol powierzchni, na którą pada światło, t.j. $E = \Phi/A$. Jednostką oświetlenia jest lux, 1 lux = 1 lumen/1 m^2. Rozważyć dwie lampy o światłościach $I_1 = 100$ cd i $I_2 = 400$ cd umieszczone w odległości $l = 1$ m. Gdzie na linii łączącej te lampy należy umieścić ekran, aby: 1) Oświetlenie obydwu stron ekranu było jednakowe? 2) Oświetlenie tej samej strony ekranu dawane przez każdą z lamp osobno było takie samo?

4. Punktowe źródło światła S umieszczono w odległości h od ekranu. W odległości d od źrodła ustawiono idealnie odbijające płaskie zwierciadło, które tworzy kąt $\beta = \pi/4$ z płaszczyzną ekranu. Ile razy wzrosło oświetlenie w punkcie A, będący rzutem na ekranie promienia odbitego od zwierciadła, po ustawieniu zwierciadła w odległości d takiej, że stosunek $d/h = x$?

5. Żarówka znajduje się w odległości l od ekranu. Między żarówka i ekranem, w odległości x od żarówki, umieszczono soczewkę o ogniskowej f, tak, ze jej oś optyczna pokrywa się z linią przechodząca przez źródło i prostopadłą do ekranu. Średnica soczewki jest mała w porównaniu z f. Ile razy wzrośnie oświetlenie na ekranie w punkcie odległym o l od żarówki? Traktować żarówkę jako punktowe i izotropowe źródło, a soczewkę jako idealną.

12.4 Zadania domowe

Zbieramy na wykładzie 6 czerwca 2024r.

1. Atomy gazu doskonałego emitują monochromatyczne promieniowanie o częstości ν_0, w układzie spoczynkowym emitującego atomu. W skutek termicznego ruchu atomów i efektu Dopplera obserwujemy przesunięcie częstości w układzie obserwatora. Oblicz rozkład natężenia promieniowania $I(\nu)$ gazu złożonego z N atomów i temperaturze T. Wsk. W celu normalizacji przyjmij, że całkowita energia wypromieniowywana na sekundę dana jest przez $I_0 N$, gdzie I_0 jest stałą.

2. Wyprowadzić prawo Plancka dla promieniowania elektromagnetycznego w ośrodku dyspersyjnym o współczynniku załamania $n = n(\nu)$, zależnym od częstości promieniowania. Wsk. dla ośrodka dyspersyjnego przyjąć, że związek pomiędzy częstością ν a liczbą falową k jest w postaci $k = 2\pi\nu n(\nu)/c$, gdzie c jest prędkością światła.

3. W pewnym d-wymiarowym ciele stałym istnieją kwantowe wzbudzenia (fale) o relacji dyspersji $\epsilon(k) = A(k/k_0)^n$, gdzie A jest to pewna stała o wymiarze energii, k jest liczbą falową, k_0 jest stałą o wymiarze liczby falowej. Pokazać, że w niskich temperaturach wzbudzenia te dają wkład do ciepła właściwego proporcjonalny do $T^{d/n}$, gdzie T jest temperaturą. Wsk. energie danego modu traktujemy jako skwantowaną, tak jak w teorii Plancka lub Debye'a.

4. (*) Sumę statystyczną w zespole kanonicznym można wyrazić przez gęstość stanów (transformata Laplace'a)

$$Z(\beta) = \sum_i e^{-\beta E_l} = \int_0^\infty e^{-\beta E}\Omega(E)dE.$$

Odwrotność tej relacji daje gęstość stanów (odwrotna transformata Laplace'a)

$$\Omega(E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} Z(\beta')e^{\beta' E}d\beta'$$

dla $\beta > 0$. Wyznacz $\Omega(E)$ dla jednoatomowego gazu doskonałego, dla którego suma statystyczna jest równa

$$Z(\beta) = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m}{\beta h^2}\right)^{\frac{3}{2}N}.$$

Podaj pełne matematyczne wyprowadzenie, omawiając w szczegółach jak wykonywane są odpowiednie całki konturowe dla $E < 0$ i $E \geqslant 0$ oraz N parzystego i nieparzystego.

13 Tydzień XIII, 20-26/05/2024

13.1 Wykład

IX. Idealne gazy kwantowe

\$1. *Funkcja falowa układu wielu cząstek* - nierozróżnialność identycznych cząstek kwantowych, symetryczność funkcji falowej ze względu na permutacje identycznych cząstek, bozony i fermiony, zasada Pauliego.

\$2. *Rozkłady Fermiego-Diraca i Bosego-Einsteina* - obsadzenie jednocząstkowych stanów kwantowych, rozkłady Fermiego-Diraca i Bosego-Einsteina, wielki potencjał termodynamiczny dla fermionów i bozonów.

\$3. *Kwantowe poprawki do równania stanu klasycznego gazu doskonałego* - wyprowadzenie poprawek kwantowych do równania stanu klasycznego gazu doskonałego.

13.2 Pokazy

13.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Chemical potential for ideal gas* - Using the Helmholtz free energy, find a chemical potential for an ideal gas assuming that the the energy of a molecule is a sum of kinetic, rotation, oscillation and electronic energies.

2. *Chemical potential in chemical reactions* - In chemical reactions molecules can decay or can be created, this is symbolically described by the equation $\sum_{i=1}^{r} b_i B_i \leftrightarrow \sum_{i=r+1}^{M} b_i B_i$, where B_i is a

molecule symbol and b_i is the smallest integer according to conservation of atomic numbers. Let $\nu_i = -b_i$ for $i = 1, ..., r$ and $\nu_i = b_i$ for $i = r+1, ..., M$. Show that in thermodynamical equilibrium for isothermal ($T = const$) and isochoric ($V = const$) reactions $\sum_{i=1}^{M} \nu_i \mu_i = 0$, where μ_i is a chemical potential for the ith molecule. Illustrate with examples.

3. *Law of mass action* - Derive the law of mass action (Guldberg, Waage, 1867) $\prod_{i=1}^{M} n_i^{\nu_i} = K(T)$, where $n_i = N_i/V$ is a density of the ith molecule, and find an explicit expression for the equilibrium constant $K(T)$. Treat molecules as classical ideal gases. Illustrate with examples.

4. *Changes of the free energy in chemical reactions* - Show that in thermal equilibrium it is obeyed $\prod_{i=1}^{M} N_i^{\nu_i} = \exp(-\Delta F_0/k_B T)$ for any chemical reaction, where ΔF_0 is the change of the free energy of the system.

5. *Model of adsorption* - As a simple model of adsorption consider an ideal classical gas and a surface with N holes. In every hole there might be maximally one particle and then its energy is $-\epsilon < 0$. Find the covering coefficient $k = \bar{N}/M$, where $\bar{N}$ is the average number of particles adsorbed on the surface. Hint: use grand canonical ensemble.

6. A metal surface can adsorb gas atoms of mass m. It requires work ϕ to remove a single atom from the metal. The adsorbed atoms may freely move on the metal surface, so that they constitute a two-dimensional gas. The metal was brought to a contact with a (three-dimensional) gas of fixed temperature T and pressure p. Find the (surface) density of atoms adsorbed in the metal. Treat both the metal and the environment as classical, monatomic ideal gases with atomic masses m.

13.4 Zadania domowe

1. Give explicit formulas for the law of mass action and the equilibrium constant for the reactions:

$$N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2$$

$$2H_2 + O_2 \leftrightarrow 2H_2O$$

2. Calculate explicit form of the relation $\sum_{i=1}^{M} \nu_i \mu_i = 0$ for the reactions

$$ClNO_2 + NO \leftrightarrow NO_2 + ClNO$$

$$N_2O_4 \leftrightarrow 2NO_2$$

3. A neutral gas consists of N_e electrons e^-, N_p protons p^+, and N_H Hydrogen atoms H. An electron and a proton can combine to form Hydrogen

$$e^- + p^+ \leftrightarrow H.$$

At fixed temperature and volume, the free energy of the system is $F(T, V; N_e, N_p, N_H)$. we can define a chemical potential for each of the three species as

$$\mu_i = \frac{\partial F}{\partial N_i}.$$

By minimizing the free energy, together with suitable constraints on the particle numbers, show that the condition for equilibrium is

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H.$$

Such reactions usually take place at constant pressure, rather than constant volume. What quantity should you consider instead of F in this case?

14 Tydzień XIV, 27/05-02/06/2024

14.1 Wykład

$4. *Gaz fermionów w zerowej temperaturze* - stan podstawowy nieoddziałujących fermionów, energia Fermiego, wektor fermiego, długość Fermiego, morze Fermiego, prędkość Fermiego,

14.2 Pokazy

14.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Grand canonical ensemble - ideal gas* - Consider non-relativistic ideal classical gas in the grand canonical ensemble in three space dimensions. Find: (a) the partition function, (b) the grand canonical thermodynamic potential, (c) the average number of particles, (d) the pressure, (e) the entropy, (f) the internal energy.

2. *Ideal gas in the grand canonical ensemble* - For an ideal classical gas show that: (a) $\bar{N} = -\beta\Phi(T, V, \mu)$, (b) the probability of finding exactly N particles is given by a Poisson law $P_N = e^{-\bar{N}} \bar{N}^N / N!$.

3. *Ideal gas in the gravity field - the grand canonical ensemble* - derive a formula expressing a density of particles at the level $z = H$ with respect to the ground level $z = 0$ assuming the uniform gravity field $U(z) = mgz$. Derive the barometric formula for the pressure.

4. *Ideal quantum gases - grand canonical ensemble* - Show explicitly that the averaged occupation of the kth orbital is given by $n_k = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1}$, i.e. by Fermi-Dirac and Bose-Einstein distribution functions, respectively for fermions and bosons.

14.4 Zadania domowe

1. *Grand canonical ensemble - ultra-relativistic ideal gas* - Consider ultra-relativistic ideal classical gas in the grand canonical ensemble in three space dimensions. The dispersion relation is $\epsilon_p = cp$, where

c is a given velocity constant and p is a length of the momentum. Find: (a) the partition function, (b) the grand canonical thermodynamic potential, (c) the average number of particles, (d) the pressure, (e) the entropy, (f) the internal energy.

2. *Fluctuation of particle number i grand canonical ensemble* - Derive the formula for the variance of particle number $\sigma_N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$ in the grand canonical ensemble and show that the relative fluctuation of the particle umber $\sigma_N / \langle N \rangle \sim 1/\sqrt{\langle N \rangle}$ vanishes in the thermodynamic limit.

3. Show that the entropy in the grand canonical ensemble can be written as $S = -k_B \sum_j P_j \log P_j$, where $P_j = \Xi^{-1} \exp(-\beta E_j + \beta \mu N_j)$.

4. At a given temperature T, a surface with N_o adsorption centers has $N \leqslant N_o$ absorbed molecules. Suppose that there is no interaction between molecules. Calculate the chemical potential of the adsorbed gas.

15 Tydzień XV, 03-09/06/2024

15.1 Wykład

elementarne oszacowania pędu i energii dla fermionów w stanie podstawowym, energia wewnętrzna morza Fermiego, ciśnienie, problem stabilności doskonałego gazu fermionów, stabilność białych karłów w astrofizyce.

\$5. *Gaz idealnych fermionów w niskich temperaturach* - rozwinięcie Sommerfelda dla fermionowych wielkości fizycznych, energia wewnętrzna i ciepło właściwe, znikanie liniowe ciepła właściwego dla idealnych fermionów, masa efektywna, przykłady . fermionowych układów fizycznych.

\$6. *Quasicząstki fermionowe i elementy teorii cieczy Fermiego-Landaua* - koncepcja słabo oddziałujących quasicząstek fermionowych jako elementarne wzbudzenia oddziałujących fermionów, niskoenergetyczne rozwinięcie funkcjonału energii wewnętrznej, zrenormalizowana masa efektywna, parametry Landaua, renormalizacja ciepła właściwego, ściśliwości, podatności Pauliego, prędkości dźwięku.

\$7. *Kondensacja Bosego -Einsteina* - makroskopowe obsadzenie stanu podstawowego oddziałujących bozonów, zachowanie się potencjału chemicznego w niskich temperaturach, osadzenie stanu podstawowego i stanów wzbudzonych, liczba bozonów w stanach wzbudzonych, temperatura krytyczna, własności bozonów w kondensacie, funkcja falowa kondensatu, spójność fazowa, analogia z laserem, eksperymentalna weryfikacja kondensacji Bosego-Einsteina, pułapki magnetooptyczne, schładzanie atomów, metoda obserwacji kondensatu.

15.2 Pokazy

15.3 Zadania na ćwiczenia

1. *Ideal quantum gases - grand canonical ensemble* - For ideal bosons and fermions derive integral expressions for: (a) the partition function, (b) the grand canonical thermodynamic potential, (c) the average number of particles, (d) the pressure, (e) the entropy, (f) the internal energy. Introduce the necessary polylogaritmic functions $g_n(z)$ and $f_n(z)$ for bosons and fermions, respectively.

2. *Ideal quantum gases at hight temperature - grand canonical ensemble* - For ideal bosons and fermions we have derived integral expressions for: (a) the partition function, (b) the grand canonical thermodynamic potential, (c) the average number of particles, (d) the pressure, (e) the entropy, (f) the internal energy. In the high temperature limit find explicitly quantum corrections to the chemical potential, the internal energy and the pressure. Discuss the results and the role of quantum statistics on pressure.

3. *Ideal fermions at low temperatures - Sommerfeld expansion* - Derive a low temperature expansion for the general integral $\int d\epsilon H(\epsilon) f(\epsilon)$, where $f(\epsilon)$ is the Fermi-Dirac function. Write down explicitly terms up to $(k_B T)^4$ order.

4. *Ideal fermions at low temperatures - thermodynamics* - Derive expressions in the low temperature expansion up to $(k_B T)^2$ order for the chemical potential, and optionally if time allows, for the internal energy, the specific heat, the entropy, and the Helmholtz free energy for ideal fermions. Hint, express everything for a general density of states $\rho(\epsilon)$ and in the end take it for free fermions in three dimensions.

15.4 Zadania domowe

1. *Ideal quantum gases at hight temperature - grand canonical ensemble* - For ideal bosons and fermions with ultrarelativistic dispersion relation $\epsilon_p = cp$ derive integral expressions for: (a) the partition function, (b) the grand canonical thermodynamic potential, (c) the average number of particles, (d) the pressure, (e) the entropy, (f) the internal energy. In the high temperature limit find explicitly quantum corrections to the chemical potential, the internal energy and the pressure. Discuss the results and the role of quantum statistics on pressure.

2. *Ideal fermions at low temperatures - thermodynamics* - Derive expressions in the low temperature expansion up to $(k_B T)^4$ order for the chemical potential, the internal energy, the specific heat, the entropy, and the Helmholtz free energy for ideal fermions. Hint, express everything for a general density of states $\rho(\epsilon)$ and in the end take it for free fermions in three dimensions.

16 Tydzień XVI, 10-17/06/2024

16.1 Wykład

16.2 Pokazy

16.3 Zadania na ćwiczenia

1. Wyprowadzić wyrażenie na podatność magnetyczna Pauliego dla idealnego gazu fermionów w stanie podstawowym, przyjąć oddziaływanie z polem magnetycznym w postaci Hamiltonianu Zeemana. Wyjaśnić dlaczego podatność Pauliego nie zawiera $\hbar$ i dlaczego nie można wykonać przejścia do granicy klasycznej. Przy okazji wspomnieć i naszkicować dowód twierdzenia Borna - van Leewen o nieistnieniu spontanicznego magnetyzmu w mechanice klasycznej.

2. *Bosons at low temperatures* - 1. represent a grand thermodynamical potential by a polilogarithmic function and derive formal expressions for the particle density, pressure, internal energy. Discuss properties of the $g_\alpha(z)$ functions vs. z - the activity. 2. find the explicit formula for the T_{BEC} condensation temperature, derive expression for the activity z, 3. derive an expression for the density of bosons inside the condensed fraction, 4. derive an equation for pressure and the equation of state.

3. *Ising model - antiferromagnetic mean-field solution* - Using mean-field approximation solve the Ising model with antiferromagnetic exchange coupling. Determine the Neel temperature.

4. *Vapor pressure* - Assuming that the vapor is an ideal gas and that the latent heat q is constant show tat on the coexistence line between a liquid and a gas on the phase diagram $p(T) \sim e^{-q/RT}$.

5. *Critical point* - Find the critical pressure p_c, temperature T_c and molar volume v_c when the gas becomes a liquid for the first time if the equation of states is

   (a) *van der Waals*

   $$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2},$$

   (b) *Dieterici (only if time allows)*

   $$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} e^{-\frac{na}{RTV}}.$$

   Express those equation of states in therms of the reduced variables $\pi = p/p_2$, $\tau = T/T_c$, and $\phi = v/v_c$. Note $v = V/n$.

6. Show, that for a phase transition between the phase 1 to the phase 2 the latent heat changes with the temperature T as

   $$\frac{dQ}{dT} = c_p^{(1)} - c_p^{(2)} - \frac{Q}{T} + Q\frac{v_2\alpha_p^{(2)} - v_1\alpha_p^{(2)}}{v_2 - v_1},$$

   where $c_p^{(i)}$ is the heat capacity of the i-th phase at constant pressure and $\alpha_p^{(i)}$ is the thermal expansion coefficient of the i-th phase, and $v_i = V_i/n$. Show that the approximate expression if the phase 2 is an ideal gas is given by

   $$\frac{dQ}{dT} = c_p^{(1)} - c_p^{(2)}.$$

   (Hint, then $v_2 \gg v_1$).

16.4 Zadania domowe

1. *Pauli paramagnetism* - Derive expressions in the low temperature expansion up to $(k_BT)^2$ for the magnetic susceptibility of ideal fermions in three dimensions. Assume Zeeman type of interaction between magnetic moments of fermions and external magnetic induction. Hint, $T = 0$ case was discussed during the lecture.

2. Consider tow dimensional bosons and show that the Bose-Einstein condensation occurs only at $T = 0$. Discuss thermodynamics of such bosons. Show that in one dimension the Bose-Einstein is impossible.

3. Supposing that the dispersion relation is $\epsilon_k = ak^\alpha$ and the system is d dimensional, derive a condition for α when the Bose-Einstein condensation can occur at $T > 0$ case.

4. *Ising model - exact solution* - Solve $d = 1$ Ising model with a) open boundary condition, b) with periodic boundary condition. Compute the specific heat.

5. Consider the ferromagnetic Ising model where the spin S_i can take one of the $2L + 1$ values: $-L, -L + 1, ..., L - 1, L$. Solve this model within the mean-field approximation. Rescale the exchange coupling $J \to J/2L$ and consider the limit when $L \to \infty$. Find some arguments for showing that the mean-field solution is an exact one in this limit.

6. Consider an Ising model with long-range exchange coupling, i.e..

   $$E(\{S_i\}) = -\frac{J}{2N}\left(\sum_{i=1}^N S_i\right)^2 - h\sum_{i=1}^N S_i.$$

   Find the exact solution of this model in the thermodynamic limit. This solution is of mean-field character. Hint: using the Gaussian identity

   $$\int dx e^{-\alpha x^2 - \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$$

   you can linearized the interaction term

   $$e^{\frac{\beta J}{2N}\left(\sum_{i=1}^N S_i\right)^2} =$$

   $$= \left(\frac{N\beta J}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm\, e^{-\frac{1}{2}N\beta J m^2 + \beta J m \sum_i S_i}$$

and express the partition function as

$$Z = \left(\frac{N\beta J}{2\pi}\right)^{1/2} \int dm\, e^{-\frac{1}{2}N\beta J m^2} \times$$

$$\times \left(\sum_{S=\pm 1} e^{\beta(h+Jm)S}\right)^N .$$

For large N determine this integral using the saddle point method.

7. *Quasiparticles and the specific heat* - Find the specific heat at low temperatures of quasiparticles in d-dimensions with the dispersion relation $\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_0 (k/k_0)^\alpha$, where $\mathbf{k} = 2\pi/L[n_1, n_2, ...n_d]$, L is the system length and n_i are integers. The exponent $\alpha > 0$ and ϵ_0 has energy unit and k_0 has momentum unit. In condensed matter systems one can design or tailor such excitations that at low energy limit their dispersion relation might have an arbitrary power law. One of such examples are excitations of one-dimensional interacting electrons, known as Luttinger liquids.

8. *Thermal radiation of q-ons* - Consider a hypothetical excitations in three dimensions with linear dispersion relation $\epsilon_p = cp$, such that a maximal numer of excited quanta is $q \geqslant 1$. The case of $q = \infty$ corresponds to either photons or phonos. In case of magnetic excitations of a magnetic, so called a spin waves, the maximal number of excited modes is constrained by the spin and then $q = 2s + 1$. derive the partition function, the averaged number of excitations and discuss limits, the internal energy, the specific heat at constant V, the Helmholtz free energy, the entropy, the pressure, the equation of state, the average number of excitations in volume V. Discuss different limits of q and compare with known results for photons.

Literatura

- Ch. Kittel, H. Kroemer, Thermal Physics.
- J. P. Casquilho, P.I.C. Teixeira, Introduction to statistical physics.
- K. Huang, Statistical mechanics.
- F. Schwabl, Statistical mechanics.
- R.H. Swendsen, An introduction to statistical mechanics and thermodynamics.
- F. Reif, Statistical physics.
- F. Mandl, Statistical physics.
- H.B. Callen, Thermodynamics.