

Model tarcia w instrumentach smyczkowych — projekt zaliczeniowy (Programowanie i metody numeryczne)

Tomasz Tarkowski

e-mail: tomasz.tarkowski@fuw.edu.pl

CZERWIEC 2026

CIELEM projektu jest napisanie symulacji prezentującej drgania zamocowanej struny wprawianej w drgania smyczkiem, czyli tzw. ruch Helmholtza [1]. Kiedy smyczek przesuwa się po strunie, naprzemiennie ją chwyta (tzw. faza *stick*) i puszcza (tzw. faza *slip*), co jest opisane odpowiednim jednowymiarowym równaniem falowym:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \delta(x - x_{\text{bow}}) F_{\text{fric}}(v_{\text{rel}}) \quad (1)$$

gdzie $u(x, t)$ jest wychyleniem struny, $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ – tłumieniem lepkiem (przez opór powietrza i straty wewnętrzne), μ – gęstością liniową struny, x_{bow} – położeniem smyczka na strunie, zaś $F_{\text{fric}}(v_{\text{rel}})$ – siłą tarcia zależną od względnej szybkości struny względem smyczka:

$$v_{\text{rel}} = \frac{\partial u}{\partial t} - v_{\text{bow}} \quad (2)$$

gdzie v_{bow} jest szybkością smyczka w układzie laboratorium. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu nieliniowe i właśnie ta nieliniowość nadaje skrzypcom charakterystyczne brzmienie.

Siła tarcia w fazie *stick* wykonuje pracę nad struną przesuując ją w kierunku ruchu, zaś w fazie *slip* — jest dodatkowym czynnikiem tłumiącym. Kluczowym elementem opisu problemu jest odpowiedzenie sformułowanie modelu tarcia F_{fric} między smyczkiem a struną. Istnieją różne podejścia, jednak należy zaznaczyć, że klasyczne modele, choć ważne, niestety nie opisują poprawnie zakresu niskich szybkości oraz zmiany zwrotu smyczkowania. W tym przypadku przyjmujemy więc współczesny model Lund-Grenoble, zwyczajowo nazywany „modelem LuGre”, który lepiej uwzględnia zjawiska dynamiczne i unika wspomnianych problemów [2].

Celem każdego modelu tarcia jest oczywiście podanie formuły na siłę tarcia F_{fric} . Jednakże zanim to zrobimy dla modelu LuGre, wprowadzimy kluczowy element modelu — zmienną stanu z pamięcią oznaczaną symbolem $z(t)$. Zmienna ta opisuje średnie ugięcie *wirtualnych* włosków na powierzchni styku smyczka i struny i podlega ewolucji czasowej:

$$\frac{dz}{dt} = v_{\text{rel}} - \sigma_0 \frac{|v_{\text{rel}}|}{g(v_{\text{rel}})} z \quad (3)$$

gdzie $g(v_{\text{rel}})$ jest funkcją Stribecką:

$$g(v_{\text{rel}}) = F_C + (F_s - F_C) \exp(-(|v_{\text{rel}}|/v_S)^\alpha) \quad (4)$$

gdzie F_s jest siłą tarcia statycznego, F_C – siłą tarcia kinetycznego w modelu Coulomba, v_S – szybkością Stribecką, zaś α – czynnikiem przejścia kształtu.

Zarówno siła tarcia statycznego jak i kinetycznego są opisywane klasycznymi wzorami znanymi z podstaw fizyki:

$$F_s = \mu_s N, \quad F_C = \mu_C N, \quad \mu_s > \mu_C \quad (5)$$

gdzie μ_s oraz μ_C są współczynnikami tarcia odpowiednio statycznego i kinetycznego, zaś N jest siłą nacisku.

Szybkość Stribecką jest wielkością charakterystyczną dla danego układu, która określa granicę między zachowaniem statycznym a dynamicznym. Dla $v_{\text{rel}} \ll v_S$ otrzymujemy bowiem $g \approx F_s$, zaś dla $v_{\text{rel}} \gg v_S$ dostajemy $g \approx F_C$. Dla $v_{\text{rel}} = 0$ otrzymujemy $g = F_s$, co odpowiada klasycznemu oporowi statycznemu przy próbie poruszenia obiektu z miejsca.

Parametr α matematycznie jest wartością większą od zera, jednak dla badanych materiałów zwykło się przyjmować wartość z przedziału $[1, 2]$ przy czym wartość $\alpha = 2$ jest wyborem standardowym i użytym w oryginalnej pracy na temat modelu LuGre.

Siła tarcia w modelu LuGre jest opisywana formułą:

$$F_{\text{fric}}(v_{\text{rel}}) = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v_{\text{rel}} \quad (6)$$

gdzie parametry σ_0 , σ_1 i σ_2 odpowiadają odpowiednio za sztywność (efekt sprężyny), tłumienie (amortyzację) i lepkość (efekt miodu) włosków. Model LuGre zapewnia opis siły tarcia, który jest numerycznie przystępny, ponieważ siła tarcia w sposób ciągły przechodzi przez punkt $v_{\text{rel}} = 0$. Dla kontrastu, zwykły model siły tarcia statycznej dla szybkości zerowej i różnej od niej siły kinetycznej dla szybkości niezerowej ma oczywiście nieciągłość w zerze, co prowadzi do tzw. sztywności numerycznej równań i wymusza stosowanie ekstremalnie małych kroków czasowych lub zaawansowanych algorytmów niejawnych.

Zadanie projektowe polega na napisaniu symulacji drgań struny o długości L zamocowanej na obydwu końcach, co odpowiada jednorodnym warunkom brzegowym Dirichleta:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (7)$$

Przyjmij, że w chwili początkowej struna znajduje się w położeniu równowagi i spoczywa:

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (8)$$

Włoski modelu tarcia w chwili $t = 0$ są całkowicie odprężone:

$$z(0) = 0 \quad (9)$$

Program powinien numerycznie rozwiązywać układ sprzężonych równań: cząstkowego równania falowego oraz zwyczajnego równania ewolucji zmiennej stanu $z(t)$. Symulację należy przeprowadzić dla struny o zadanych parametrach fizycznych, pobudzanej smyczkiem poruszającym się ze stałą prędkością v_{bow} .

W ramach projektu należy wykonać co najmniej jedno z poniższych zadań:

- stworzyć wizualizację drgań struny w formie animacji (np. pliku wideo lub dynamicznego wykresu)

- wygenerować plik audio (np. w formacie WAV) na podstawie wychylenia struny w wybranym punkcie blisko mostka $x \approx 0$
- wyznaczyć widmo częstotliwościowe drgań w stanie ustalonym przy wykorzystaniu dyskretnej transformaty Fouriera (DFT/FFT)

Odbiorca kodu źródłowego powinien mieć możliwość łatwej zmiany parametrów użytych w obliczeniach. Inspirowane skrzypcami (i w szczególności otwartą struną A tego instrumentu) sugestie wartości parametrów użytecznych do testowania rozwiązania znajdują się poniżej:

$$\sigma_0 = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad \sigma_1 = 200 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}, \quad \sigma_2 = 0,4 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad (10)$$

$$\mu_s = 0,4, \quad \mu_c = 0,2, \quad N = 0,5 \text{ N} \quad (11)$$

$$c = 288,64 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_s = 1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}, \quad v_{\text{bow}} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (12)$$

$$\gamma = 2 \text{ s}^{-1}, \quad \mu = 0,65 \frac{\text{g}}{\text{m}} \quad (13)$$

$$L = 32,8 \text{ cm}, \quad x_{\text{bow}} = 2 \text{ cm} \quad (14)$$

$$\alpha = 2 \quad (15)$$

Należy zwrócić uwagę na spójność jednostek (SI) podczas implementacji. Jeśli podane parametry generują zbyt dużą złożoność obliczeniową podczas testowania, należy je dostosować do możliwości komputera posiadanego przez osobę rozwiązującą przy zachowaniu realizmu obliczeń.

- [1] H. Helmholtz. „On the motion of the strings of a violin”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 21.141 (1861), 393–396. doi: 10.1080/14786446108643076.
- [2] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Astrom, P. Lischinsky. „A new model for control of systems with friction”. *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.3 (1995), 419–425. doi: 10.1109/9.376053.