

Wzory Turinga — projekt zaliczeniowy (Programowanie i metody numeryczne)

Tomasz Tarkowski

e-mail: tomasz.tarkowski@fuw.edu.pl

CZERWIEC 2026

W swojej pracy z roku 1952 Alan Turing wykazał, że zjawisko dyfuzji (opisywane równaniami Ficka) może w odpowiednich warunkach prowadzić do spontanicznego powstawania wzorów geometrycznych [1]. Model ten opiera się na mechanizmie *niestabilności dyfuzyjnej*, wynikającej z oddziaływania dwóch substancji. Aktywator (V) jest substancją stymulującą własną produkcję poprzez dodatnie sprzężenie zwrotne. Z kolei inhibitor (U) hamuje proces namnażania aktywatora. Niestabilność Turinga występuje w sytuacji, gdy współczynnik dyfuzji inhibitora jest znacznie większy niż w przypadku aktywatora. Prowadzi to do powstawania lokalnych skupisk aktywatora, ograniczanych przestrzennie przez otaczający je inhibitor. Teoria Turinga pozwoliła wyjaśnić mechanizmy powstawania wzorów (kropek, pasów czy spiral) w świecie przyrody i stała się jednym z fundamentów matematycznego opisu morfogenezy.

Pierwotna koncepcja Turinga, oparta na liniowych równaniach reakcji, została rozszerzona przez Graya i Scotta o nieliniowe oddziaływanie postaci $U + 2V \rightarrow 3V$. Zmiana ta pozwoliła na uzyskanie znacznie bogatszej dynamiki układu [2–4]. W modelu Graya-Scotta mechanizm hamowania produkcji aktywatora (V) różni się od oryginalnego ujęcia Turinga. Proces ten opiera się na lokalnym wyczerpywaniu zasobów: aktywator powstaje bezpośrednio z inhibitora (U), co prowadzi do spadku stężenia tego ostatniego i w konsekwencji do samoistnego zatrzymania reakcji. Ewolucję stężeń obu substancji w czasie opisuje poniższy układ równań:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - uv^2 + F(1 - u) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v + uv^2 - (F + k)v \quad (2)$$

gdzie u oraz v oznaczają odpowiednio stężenie inhibitora i aktywatora, D_u oraz D_v to współczynniki dyfuzji, F jest szybkością zasilania układu inhibitorem, natomiast k określa tempo rozpadu aktywatora. Przyjrzyjmy się poszczególnym składnikom tych równań:

1. Człony typu $D\nabla^2$ opisują dyfuzję — proces, w którym cząsteczki z czasem przechodzą z obszaru o większym stężeniu do obszaru o mniejszym stężeniu.
2. Reakcja chemiczna $U + 2V \rightarrow 3V$ jest reprezentowana przez człony $\pm uv^2$. Prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki U jest proporcjonalne do stężenia u , natomiast prawdopodobieństwo jednoczesnego spotkania dwóch cząsteczek V — do kwadratu stężenia v^2 .
3. Człon $+F(1 - u)$ odpowiada za dopływ nowej porcji inhibitora z zewnątrz badanego układu. Gdy stężenie substancji U jest niewielkie, dopływ jest intensywny, natomiast gdy stężenie zbliża się do jedności — dopływ zanika.

4. Substancja V jest usuwana z układu na dwa sposoby — jest to opisane przez człon $-(F + k)v$. Składnik $-Fv$ odpowiada za wypłukiwanie, natomiast część $-kv$ — za tempo rozpadu V .

Wzory Turinga pojawiają się w szczególnej sytuacji balansu, gdzie autokataliza uv^2 napędzana dopływem $F(1 - u)$ idealnie konkuruje z procesem zaniku V . Warunkiem koniecznym powstania trwałych struktur przestrzennych pozostaje szybsza dyfuzja inhibitora względem aktywatora ($D_u > D_v$).

Zadanie projektowe polega na zaimplementowaniu symulacji dynamiki modelu Graya-Scotta dla geometrii prostokąta lub kwadratu z okresowymi warunkami brzegowymi oraz na przetestowaniu jej dla wybranych zestawów parametrów. W celu prezentacji wyników należy stworzyć wizualizację stężenia aktywatora w formie animacji (np. pliku wideo lub dynamicznego wykresu). Aby podnieść jakość wizualną generowanego obrazu, należy zastosować mechanizm interpolacji danych. Dodatkowo na animacji powinna być wyświetlana całkowita ilość aktywatora w badanym obszarze, wyznaczona drogą całkowania numerycznego. Warunki początkowe powinny uwzględniać lokalne zaburzenie stężeń, wprowadzone np. poprzez nałożenie wartości losowych z rozkładu normalnego na jednorodne tło. Obliczenia należy wykonać dla współczynników dyfuzji:

$$D_u = 2 \cdot 10^{-5}, \quad D_v = 10^{-5} \quad (3)$$

oraz następujących par parametrów (F, k):

$$(F, k) \in \{(0,025, 0,055), (0,030, 0,062), (0,010, 0,047), (0,060, 0,0615), (0,037, 0,060), (0,040, 0,070)\} \quad (4)$$

Dopuszczalne jest zaproponowanie własnych wartości parametrów prowadzących do ciekawych rezultatów morfologicznych. Odbiorca kodu źródłowego powinien mieć możliwość łatwej zmiany parametrów użytych w obliczeniach.

- [1] A. M. Turing. „The chemical basis of morphogenesis”. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences* 237.641 (1952), 37–72. doi: 10.1098/rstb.1952.0012.
- [2] P. Gray, S. K. Scott. „Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: Isolates and other forms of multistability”. *Chemical Engineering Science* 38.1 (1983), 29–43. doi: 10.1016/0009-2509(83)80132-8.
- [3] P. Gray, S. K. Scott. „Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: Oscillations and instabilities in the system $A + 2B \rightarrow 3B$; $B \rightarrow C$ ”. *Chemical Engineering Science* 39.6 (1984), 1087–1097. doi: 10.1016/0009-2509(84)87017-7.
- [4] P. Gray, S. K. Scott. „Sustained oscillations and other exotic patterns of behavior in isothermal reactions”. *The Journal of Physical Chemistry* 89 (1985), 22–32. doi: 10.1021/j100247a009.