Programowanie i metody numeryczne

Ćwiczenia 14.

Równania różniczkowe cząstkowe.

Zadanie 1. Przewodnictwo cieplne metalowej płytki.

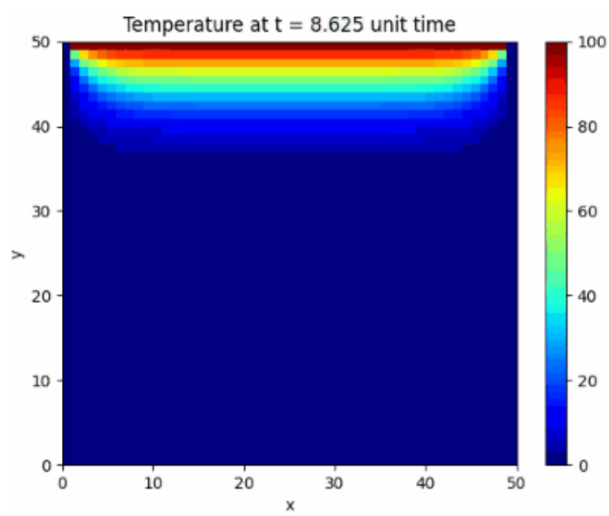
Równanie przewodnictwa cieplnego opisuje przepływ ciepła w ośrodku materialnym. Przyjmuje ono postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \Delta T = 0,$$

gdzie $T = T(t, \mathbf{r})$ jest temperaturą w punkcie o wektorze wodzącym $\mathbf{r}$ w chwili t, zaś α – charakteryzującą materiał stałą nazywaną *współczynnikiem wyrównania temperatury* lub *dyfuzyjnością cieplną*, określającą tempo, z jakim przebiegają zmiany temperatury w danym materiale. Po uzupełnieniu tego równania o warunki początkowe, czyli zadaniu rozkładu temperatury w ośrodku w chwili $t = 0$, oraz warunki brzegowe, czyli zadaniu ustalonego, niezmiennego rozkładu temperatury na brzegu obszaru, jesteśmy w stanie wyznaczyć rozkład temperatury w ośrodku w dowolnej chwili $t > 0$.

Rozważmy cienką metalową płytkę w kształcie kwadratu. Przyjmujemy, że w chwili początkowej $t = 0$ płytka miała temperaturę T_0. Do górnej krawędzi płytki przyłożono w chwili początkowej ciało o temperaturze T_1, do krawędzi prawej – ciało o temperaturze T_2, do krawędzi dolnej – ciało o temperaturze T_3, zaś do krawędzi lewej – ciało o temperaturze T_4; zakładamy przy tym, że ciała te utrzymują stałą temperaturę oraz że temperatury T_k, $k = 0, 1, 2, 3, 4$, znajdują się w przedziale od 0^oC do 100^oC.

Napisz program `heat`, który posługując się metodą różnic skończonych rozwiąże równanie przewodnictwa cieplnego dla omówionej płytki i wyznaczy rozkład temperatury wewnątrz płytki w dowolnej chwili $t > 0$. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania sześć liczb zmiennoprzecinkowych odpowiadających wartościom, odpowiednio, α, T_0, T_1, T_2, T_3 i T_4. Przyjmij krok przestrzenny (identyczny na obu osiach przestrzennych) $\delta x = 1$, krok czasowy $\delta t = \delta x^2/4\alpha$ oraz rozmiar płytki $l = 50\delta x$.



Wynikiem działania programu powinna być animacja przedstawiająca zmiany temperatury w płytce (lub zestaw grafik przedstawiających kolejne klatki takiej animacji). Każda klatka animacji ma przedstawiać kwadrat reprezentujący płytkę pokryty kolorami odpowiadającymi temperaturze w węzłach – jak na przykładowym rysunku obok.

Zadanie 2. Potencjał elektryczny.

Równanie Poissona to niejednorodne liniowe równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu postaci

$$\Delta f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}),$$

gdzie Δ to n–wymiarowy laplasjan, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest znaną funkcją, zaś $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – niewiadomą. Równanie to opisuje wiele różnych procesów zachodzących w przyrodzie – na przykład potencjał elektryczny $\phi = \phi(\mathbf{x})$ pochodzący od zadanego rozkładu ładunku elektrycznego o gęstości $\rho = \rho(\mathbf{x})$ jest zadany właśnie przez równanie Poissona:

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}).$$

Uzupełniając to równanie o warunki brzegowe, czyli zadając ustalony potencjał na brzegu pewnego obszaru przestrzeni, jesteśmy w stanie wyznaczyć potencjał w dowolnym punkcie tego obszaru.

Rozważmy obszar w postaci nieskończenie długiej „rury” o przekroju poprzecznym w kształcie kwadratu o boku długości 1 – dzięki symetrii jest to problem dwumiarowy. Załóżmy bez straty ogólności, że rura ta ciągnie się wzdłuż osi Oz, równanie Poissona przyjmie wówczas postać

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,\, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x,\, y) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(x,\, y),$$

a dziedziną funkcji $\phi = \phi(x,\, y)$ i $\rho = \rho(x,\, y)$ jest

$$\Omega = [0,\, 1]^2 = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\, y \le 1\right\}.$$

Przyjmiemy $\epsilon_0 = 1$,

$$\rho(x,\, y) = 4\pi^2(y^2\cos(2\pi x) + x^2\sin(2\pi y)) - 2(\sin(2\pi y) + \cos(2\pi x))$$

oraz warunki brzegowe

$$\phi(x,\, 0) = 0, \quad \phi(x,\, 1) = \cos 2\pi x, \quad \phi(0,\, y) = y^2, \quad \phi(1,\, y) = \sin 2\pi y + y^2.$$

a) Udowodnij (symbolicznie, niekoniecznie używając do tego komputera), że funkcja

$$\phi(x,\, y) = x^2\sin 2\pi y + y^2\cos 2\pi x$$

jest rozwiązaniem naszego równania przy tych warunkach brzegowych. Następnie narysuj rozwiązanie, tworząc wykres tego samego typu, co w przypadku klatki animacji w zadaniu 1.

b) Napisz program `potj`, który posługując się metodą różnic skończonych rozwiąże to równanie i wyznaczy potencjał elektryczny w każdym punkcie obszaru Ω. W celu rozwiązania otrzymanego układu równań algebraicznych posłuż się metodą iteracyjną Jacobiego.

W pierwszym kroku rozwiązania iteracyjnego przyjmij, że potencjał wewnątrz płytki jest równy 0. Zaproponuj odpowiednie kryterium stopu. Znajdź rozwiązania dla różnych wartości kroku przestrzennego $\delta x = \delta y \equiv h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{64}$ i narysuj je (w sposób opisany w punkcie a).

Narysuj ponadto wykres błędu przybliżenia $\epsilon = \sup|\phi_{\text{numeryczne}} - \phi_{\text{analityczne}}|$ jako funkcji kroku h.

c) Napisz program `potgs`, różniący się od programu `potj` tylko tym, że zamiast metody Jacobiego ma wykorzystywać metodę Gaussa-Seidala. Czy wpłynęło to zauważalnie na poprawę jakości rozwiązania lub szybkość jego zbieżności?

Opracowanie: Bartłomiej Zglinicki.