Programowanie i metody numeryczne

Ćwiczenia 4.

Równania nieliniowe.

Zadanie 1. Metoda bisekcji.

Napisz funkcję `root_bisection`, która metodą bisekcji znajduje przybliżone rozwiązanie równania $f(x) = 0$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ leżące w przedziale $[a, b] \subset I$ z dokładnością ϵ. Funkcja ta powinna przyjmować jako argumenty implementację funkcji $f(x)$ i liczby rzeczywiste a, b i ϵ oraz zwracać znalezione rozwiązanie.

Korzystając z tej funkcji wykonaj następujące polecenia.

a) Napisz program `sinbisection` znajdujący rozwiązanie równania $\sin x = 0$ leżące w przedziale $[-1, 2]$ z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$. Program powinien wypisywać na standardowe wyjście znalezione rozwiązanie oraz czas wykonywania obliczeń.

b) Napisz program `sqrtbisection` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać funkcję $f(x)$ oraz liczby a i b.

c) Napisz program `sqrtbisection` znajdujący miejsca zerowe funkcji

$$f_1(x) = (x-1)^5 \qquad \text{oraz} \qquad f_2(x) = (x-1)(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1).$$

   Czy wyniki się różnią? Dlaczego?

Zadanie 2. Metoda Newtona.

Napisz funkcję `root_newton`, która metodą Newtona znajduje przybliżone rozwiązanie równania $f(x) = 0$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ leżące w pobliżu $x_0 \in I$ z dokładnością ϵ. Funkcja ta powinna przyjmować jako argumenty implementację funkcji $f(x)$, jej pochodnej $f'(x)$ i liczby rzeczywiste x_0 i ϵ oraz zwracać znalezione rozwiązanie.

Korzystając z tej funkcji wykonaj następujące polecenia.

a) Napisz program `sinnewton` znajdujący rozwiązanie równania $\sin x = 0$ leżące w pobliżu $x_0 = -1$ z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$. Program powinien wypisywać na standardowe wyjście znalezione rozwiązanie oraz czas wykonywania obliczeń.

b) Napisz program `sqrtnewton` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać funkcję $f(x)$ oraz liczbę x_0.

c) Wstawiając do ogólnego wzoru na iterację w metodzie Newtona konkretną postać funkcji $f(x)$ odpowiadającą zadaniu znalezienia wartości $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$, wybraną przez Ciebie w poprzednim punkcie, wyprowadź wzór iteracyjny służący do numerycznego obliczania pierwiastka kwadratowego. Metoda obliczania $\sqrt{x}$ oparta na tym wzorze jest nazywana *metodą Herona*.

   Napisz program `sqrtheron` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ, wykorzystujący metodę Herona. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać liczbę x_0 – możesz wykorzystać wnioski z poprzedniego punktu.

   Czy obliczenia prowadzone metodą Herona są szybsze od tych opartych bezpośrednio na metodzie Newtona?

Zadanie 3. Metoda Steffensena.

Napisz funkcję `root_steffensen`, która metodą Steffensena znajduje przybliżone rozwiązanie równania $f(x) = 0$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ leżące w pobliżu $x_0 \in I$ z dokładnością ϵ. Funkcja ta powinna przyjmować jako argumenty implementację funkcji $f(x)$ i liczby rzeczywiste x_0 i ϵ oraz zwracać znalezione rozwiązanie.

Korzystając z tej funkcji wykonaj następujące polecenia.

a) Napisz program `sinsteffensen` znajdujący rozwiązanie równania $\sin x = 0$ leżące w pobliżu $x_0 = -1$ z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$. Program powinien wypisywać na standardowe wyjście znalezione rozwiązanie oraz czas wykonywania obliczeń.

b) Napisz program `sqrtsteffensen` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać funkcję $f(x)$ oraz liczbę x_0.

Zadanie 4. Metoda siecznych.

Napisz funkcję `root_secant`, która metodą siecznych znajduje przybliżone rozwiązanie równania $f(x) = 0$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ leżące w przedziale $[a, b] \subset I$ z dokładnością ϵ. Funkcja ta powinna przyjmować jako argumenty implementację funkcji $f(x)$ i liczby rzeczywiste a, b i ϵ oraz zwracać znalezione rozwiązanie.

Korzystając z tej funkcji wykonaj następujące polecenia.

a) Napisz program `sinsecant` znajdujący rozwiązanie równania $\sin x = 0$ leżące w przedziale $[-1, 2]$ z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$. Program powinien wypisywać na standardowe wyjście znalezione rozwiązanie oraz czas wykonywania obliczeń.

b) Napisz program `sqrtsecant` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać funkcję $f(x)$ oraz liczby a i b.

Zadanie 5. Metoda Riddersa.

Napisz funkcję `root_ridders`, która metodą Riddersa znajduje przybliżone rozwiązanie równania $f(x) = 0$ dla pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ leżące w przedziale $[a, b] \subset I$ z dokładnością ϵ. Funkcja ta powinna przyjmować jako argumenty implementację funkcji $f(x)$ i liczby rzeczywiste a, b i ϵ oraz zwracać znalezione rozwiązanie.

Korzystając z tej funkcji wykonaj następujące polecenia.

a) Napisz program `sinridders` znajdujący rozwiązanie równania $\sin x = 0$ leżące w przedziale $[-1, 2]$ z dokładnością $\epsilon = 10^{-6}$. Program powinien wypisywać na standardowe wyjście znalezione rozwiązanie oraz czas wykonywania obliczeń.

b) Napisz program `sqrtridders` znajdujący wartość $\sqrt{x}$ dla dowolnej liczby $x \in \mathbb{R}_+$ z zadaną dokładnością ϵ. Program powinien przyjmować jako argumenty wywołania liczby x i ϵ oraz wypisywać na standardowe wyjście znaleziony pierwiastek oraz czas wykonywania obliczeń.

   Przed przystąpieniem do pisania kodu zastanów się, w jaki sposób wybrać funkcję $f(x)$ oraz liczby a i b.

Zadanie 6. Cząstka w skończonej studni potencjału.

Cząstka o masie m i energii $E < 0$ znajduje się w potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |x| \geq L, \\ -V_0 & \text{gdy } |x| < L, \end{cases} \qquad \text{gdzie } L \in \mathbb{R}_+.$$

Można wykazać, że dopuszczalne wartości energii $\tilde{E}$ tej cząstki *obliczane względem dna studni* spełniają jedno z równań:

$$k \cdot \tan(kL) = \alpha, \qquad \text{lub} \qquad k \cdot \cot(kL) = -\alpha,$$

gdzie

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad \text{oraz} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Napisz program `well` przyjmujący jako argumenty wywołania wartości L i V_0 i wypisujący na standardowe wyjście kolejne stany energetyczne elektronu w podanym potencjale.

W celu przeprowadzania obliczeń numerycznych wykorzystaj odpowiednie funkcje biblioteczne udostępnianie przez język programowania lub pakiet obliczeń naukowych, z którego korzystasz.

Wskazówka. Na każdej gałęzi tangensoidy i cotangensoidy leży dokładnie jedno rozwiązanie.

Opracowanie: Bartłomiej Zglinicki.