Programowanie i metody numeryczne

Ćwiczenia 9.

Całkowanie: kwadratury interpolacyjne.

Zadanie 1. Porównanie kwadratur interpolacyjnych.

Napisz program `qint` obliczający numerycznie wartości kilku całek o znanej wartości analitycznej różnymi kwadraturami omówionymi na wykładzie. Porównaj dokładność tych kwadratur.

Zadanie 2. Adaptacyjna kwadratura trapezów.

Rozważmy zadanie obliczenia przybliżonej wartości całki oznaczonej

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką. Niech S_N^T i S_N^S będą aproksymacjami wartości tej całki uzyskanymi za pomocą, odpowiednio, złożonej kwadratury trapezów i złożonej kwadratury Simpsona, opartych na podziale przedziału $[a, b]$ na N podprzedziałów tej samej długości $h = (b - a)/N$.

Błąd przybliżenia wartości całki I uzyskanego za pomocą złożonej kwadratury Simpsona, S_N^S, jest mniej więcej h^{-2} razy mniejszy od błędu przybliżenia wartości tej całki za pomocą złożonej kwadratury trapezów, S_N^T. Sugeruje to, że wielkość

$$E_N = \left|S_N^S - S_N^T\right|$$

będzie dobrym oszacowaniem błędu kwadratury trapezów $\varepsilon_N^T = \left|I - S_N^T\right|$.

a) Napisz program `traperr`, którego celem będzie zbadanie, czy E_N rzeczywiście jest dobrym estymatorem błędu ε_N^T.

   Program ten powinien przyjmować jako argument wywołania liczbę naturalną K oraz, dla kilku całek, których wartość można wyznaczyć analitycznie, obliczać E_N i ε_N^T dla $N = 1, 2, \ldots, K$. Wynikiem działaniu programu powinny być wykresy wielkości $\delta = E_N - \varepsilon_N^T$ dla każdej z całek.

   Spróbuj znaleźć całkę, dla której E_N zawodzi, co oznacza, że, przynajmniej dla pewnych N, δ jest istotnie mniejsza od zera.

b) Napisz funkcję `int_trap_ad`, implementującą adaptacyjną złożoną kwadraturę trapezów, wykorzystując E_N jako estymator błędu. Funkcja ta może wykorzystywać rekurencję.

   Korzystając z tej funkcji, napisz program `trapad`, przyjmujący jako argumenty wywołania liczbę naturalną N oraz liczbę rzeczywistą r i obliczający za pomocą złożonej kwadratury trapezów wartości następujących całek, których analityczne wartości są znane:

$$I_1 = \int_0^1 \cos(rx)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_{-1}^1 rx^2\,\mathrm{d}x, \qquad I_3 = \int_0^1 \mathrm{e}^{rx}\,\mathrm{d}x.$$

   Program powinien dla każdej z całek wypisywać jej wartość analityczną, obliczoną wartość numeryczną, oszacowanie błędu E_N i rzeczywisty błąd ε_N^T.

   Możesz dodać więcej całek – np. jedną z tych, dla których E_N nie jest dobrym estymatorem błędu.

Zadanie 3. Całki niewłaściwe.

Napisz program `intimproper`, przyjmujący jako argumenty wywołania liczbę naturalną K nie wiekszą niż 5, liczbę naturalną N oraz liczbę rzeczywistą r i obliczający numeryczne wartości całek

$$I_1 = \int_0^1 x^r \ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+r}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi\sqrt{e}}, \qquad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{1+100x^2} = -\frac{\ln 10}{20}.$$

Dla każdej z nich wykorzystaj złożoną kwadraturę Simpsona opartą na N podprzedziałach (wraz z odpowiednimi zabiegami sprowadzającym zadanie obliczenia tych całek do zadania obliczania całek właściwych), dla całek I_2 oraz I_3 – dodatkowo odpowiednią K–punktową kwadraturę Gaussa.

Program powinien wypisywać na standardowe wyjście obliczone wartości (dla każdej z metod), wartości analityczne oraz ich różnicę.

Zadanie 4. Kwadratury Romberga.

Napisz funkcję `int_romberg`, obliczającą całkę

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją gładką, metodą Romberga opartą o złożoną kwadraturę trapezów

Następnie napisz program `intromberg`, który obliczy przybliżone wartości kilku całek o znanych wartościach analitycznych, wykorzystując Twoją funkcję oraz odpowiednią funkcję biblioteczną. Porównaj wyniki obu podejść z wartością analityczną.

Opracowanie: Bartłomiej Zglinicki.