

Programowanie i metody numeryczne

Projekt: **Pierścień wirowy w ujęciu eulerowskim**

Paweł Jędrejko
pawel.jedrejko@fuw.edu.pl

1 Wstęp

Pierścienie wirowe są strukturami typowymi dla atmosferycznej konwekcji. Formują się na anomaliach wyporności (regionach podwyższonej temperatury) i, zdolne do przebicia inwersji, unoszą ciepło, wilgoć i zanieczyszczenia do wyższych obszarów. W końcowej fazie prowadzą do powstawania chmur typu cumulus albo cumulonimbus [4], wywierając duży wpływ na ich parametry. Z tego powodu, dynamika termalnych pierścieni wirowych ma duże znaczenie dla numerycznej prognozy pogody i predykcji klimatycznych [1].

Eulerowskie (siatkowe) ujęcie problemu skupia się na bilansie wielkości fizycznych w ustalonym wycinku przestrzeni.

2 Opis zagadnienia

Rozważamy dwuwymiarowy przepływ, wymuszony siłą wyporu $\mathbf{b}$ (przybliżenie Boussinesqa). Rozkład $\mathbf{b}$ jest jednorodny i nieciągły, ograniczony początkowo do okrągłej anomalii o promieniu $R = 1$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=0} = \begin{cases} b_0 \hat{y}, & \text{dla } |\mathbf{r}| \leq R \\ 0, & \text{dla } |\mathbf{r}| > R \end{cases}, \quad (1)$$

która jest w spoczynku:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Przyjmujemy $b_0 = 1$. W późniejszym czasie wyporność jest unoszona przez nieściśliwe pole prędkości $\mathbf{u}$ a dyfuzja wygładza nieciągły rozkład. Przyjmujemy $\nu = \alpha = 10^{-3}$ (choć przy obranym podejściu, dyfuzja numeryczna najprawdopodobniej będzie dominująca).

Zachowanie pędu wyrażone jest przez równanie Naviera-Stokesa:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b}, \quad (3)$$

zachowanie masy przez równanie ciągłości:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

a transport wyporności przez:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \alpha \nabla^2 \mathbf{b}. \quad (5)$$

Problem wygodnie jest rozwiązać w sformułowaniu $\omega - \psi$ (wirowość-funkcja prądu). Równanie wirowości otrzymujemy przez rotację (3):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + \nu \nabla^2 \omega + \nabla \times \mathbf{b}, \quad (6)$$

gdzie

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u}. \quad (7)$$

Równanie (4) jest spełnione przez wprowadzenie:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8)$$

co dalej prowadzi do równania Poissona na funkcję prądu:

$$\nabla^2 \psi = -\omega. \quad (9)$$

Przyjmujemy, że wszystkie warunki brzegowe są periodyczne a dziedzina to kwadrat o boku $8R$.

3 Zarys numerycznego rozwiązania

Dziedzina powinna być zdyskretyzowana przy pomocy $N \times N$ węzłów, gdzie, z uwagi na ograniczenia sprzętowe, przyjmujemy $N = 100$.

Na początku każdego kroku czasowego wyznaczamy nowe wartości ω i b odwołując się do równań (6), (5), gdzie po prawej stronie podstawiamy stare wartości. Długość kroku dobieramy z warunku Couranta:

$$\frac{u \Delta t}{\Delta x} + \frac{v \Delta t}{\Delta y} \leq \text{Co}, \quad (10)$$

który powinien być spełniony dla każdego węzła ($\text{Co} = 0.5$ powinno być bezpieczną wartością; zasadniczo $\text{Co} < 1$). Następnie rozwiązujemy (9) dla nowego pola ω i, wykorzystując (8), wyznaczamy nowe prędkości.

Należy samodzielnie dobrać schematy dyskretyzacji laplasjanu, rotacji i pochodnych w (8). Operator adwekcji $(\mathbf{u} \cdot \nabla)$ powinien być zdyskretyzowany dowolnym schematem stosującym upwinding (A). Podobnie należy dobrać algorytm rozwiązywania równania Poissona. Można przy tym posilkować się funkcjami bibliotecznymi, o ile ma się świadomość jaką metodę numeryczną implementują.

Symulacja powinna obejmować czas do $T = 7$. Podczas jej trwania, należy monitorować wielkości kilku całek, których wartość można wyznaczyć analitycznie:

- całkowita cyrkulacja:

$$\Gamma = \int_A \omega dA = 0 \quad (11)$$

- całkowita siła wyporu:

$$B = \int_A b dA = \pi \quad (12)$$

- całkowity impuls:

$$L = -\frac{1}{2} \int_A x \omega dA = B t \quad (13)$$

4 Zarys implementacji

Kod powinien być napisany w sposób czytelny z deskryptywnymi nazwami zmiennych i funkcji. Komentarze są również mile widziane. W ramach możliwości powinien mieć modułową strukturę, podzieloną na funkcje. Poprawia to czytelność, ułatwia testowanie i pozwala unikać duplikacji. Poniżej funkcje, które muszą znaleźć się w kodzie:

- `lapPeriodic`, `curlPeriodic`, `divPeriodic`, `gradPeriodic` – dyskretne operatory: Laplace’a, rotacji, dywergencji i gradientu działające na wybrane pole
- `upwindPeriodic` – dyskretyzacja wyrazu adwekcyjnego $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi$. Funkcja powinna przyjmować jako argument, zarówno unoszone pole (ϕ) , jak i pole unoszące $(\mathbf{u})$
- `vortEqRHS` – wyznacza prawą stronę równania wirowości (6); w ramach możliwości, odwołuje się do `lapPeriodic` itp.
- `buoyEqRHS` – wyznacza prawą stronę równania transportu wyporności (5)
- `uFromPsi` – wyznacza prędkość z funkcji prądu (8)
- `solvePoissonPeriodic` – rozwiązuje równanie Poissona wybraną metodą numeryczną.
- `dtFromCo` – wyznacza długość kroku w czasie Δt na podstawie warunku Couranta (10)
- `dFlowDt` – wyznacza zmianę w czasie ω i b , odwołując się do `vortEqRHS`, `buoyEqRHS` (tak naprawdę, łączy te funkcje w jedną)
- `timeStepper` – wykonuje jeden krok w czasie, aktualizując parametry przepływu. Funkcja, zgodnie z którą ewoluuje przepływ powinna być przyjmowana jako jeden z argumentów o domyślnej „wartości” równej `dFlowDt`. Długość kroku Δt powinna również być przyjmowana jako argument.

- `computeL`, `computeB`, `computeGamma` – wyznaczają wartości całek (13), (12), (11)
- `toFile` – zapisuje do pliku wszystkie dane potrzebne do narysowania przepływu (ω , b)
- `plotFlow` – rysuje dwa pola: ω z lewej i b z prawej (subplot). Zaznacza czas, podpisuje osie itd. Do wykresu wirowości należy dodać linie prądu (streamlines), które można wygenerować gotową funkcją (całkującą $\mathbf{u}$ albo znajdującą $\psi = \text{const}$)

4.1 Testy

W celu zweryfikowania implementacji przeprowadzone powinny być testy opisane niżej. W szczególnym przypadku, gdy któryś z testów nie nadaje się do wybranej metody, można go zmodyfikować albo zaproponować inny. Ważne, żeby test pozwalał stwierdzić czy funkcja działa poprawnie.

Rozważmy pole wirowe Taylora-Greena:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} \sin(x) \cos(y) e^{-2\nu t} \\ -\cos(x) \sin(y) e^{-2\nu t} \end{bmatrix}, \quad x, y \in [0, 2\pi). \quad (14)$$

Pole jest analitycznym rozwiązaniem równania Naviera-Stokesa i można dla niego wyznaczyć poniższe wielkości:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -2 \cos(x) \sin(y) e^{-2\nu t} \\ 2 \sin(x) \cos(y) e^{-2\nu t} \end{bmatrix}, & (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \sin(x) \cos(x) e^{-4\nu t} \\ \sin(y) \cos(y) e^{-4\nu t} \end{bmatrix}, \\ \omega &= 2 \sin(x) \sin(y) e^{-2\nu t}, & \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, & \psi &= \sin(x) \sin(y) e^{-2\nu t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Wykorzystamy je do testowania wybranych funkcji.

1. `testDivPeriodic`, `testCurlPeriodic`, `testGradPeriodic` – należy zdykretyzować dziedzinę przy pomocy różnych liczb węzłów N i na każdej wyznaczyć wynikowe pola dla tego samego czasu, np. $t = 0$. Następnie sprawdzić, czy średnia arytmetyczna z bezwzględnej wartości błędu E skaluje się z N tak jak powinna dla wykorzystanego schematu numerycznego. Wynik powinien być przedstawiony na wykresie $\log_{10}(|E|)$ od $\log_{10}(N)$. Należy również wyznaczyć współczynnik nachylenia spodziewanej prostej (np. regresją liniową) i zestawić go z predykcją teoretyczną.
2. `testLapPeriodic`, `testUpwindPeriodic` – jak w poprzednim przypadku, sprawdzić, czy średnia wartość bezwzględna błędu skaluje się zgodnie z teorią dla wybranego schematu. Osobno dla u i v
3. `testSolvePoissonPeriodic` – wywołuje `solvePoissonPeriodic` aby wyznaczyć ψ . Należy przedstawić końcowy błąd rozwiązania (średnia arytmetyczna z wartości bezwzględnej), który nie powinien przekraczać 10^{-5} . Jeśli wykorzystana była metoda iteracyjna to również zależność błędu od iteracji na wykresie.

4. `testTimeStepper` – dla jednowęzłowej ($N = 1$) „siatki”, z warunkiem początkowym:

$$\omega \Big|_{t=0} = 1, \quad b \Big|_{t=0} = 0 \quad (16)$$

wykonać n_t kroków w czasie o długości Δt , takich żeby końcowy czas był równy $T = 15$ (bez względu na warunek Couranta). Funkcja `timeStepper` powinna otrzymać jako argument funkcję, która następująco określa ewolucję pól:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -b, \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \omega$$

Analityczne rozwiązanie dla czasu T to:

$$\omega = \sin(T), \quad b = \cos(T)$$

Sprawdzić, czy przy różnych wartościach n_t (ale stałym T), błąd rozwiązania skaluje się zgodnie z teorią, osobno dla ω i b .

5 Wyniki

W ramach projektu należy przedstawić uzyskaną ewolucję pierścienia wirowego oraz wyniki testów. Najlepiej, jeśli będą zebrane w jednym pliku (np. pdf) załączonym do kodu.

5.1 Ewolucja pierścienia wirowego

- a) Rysunki przepływu wygenerowane przez `plotFlow` dla reprezentatywnych kroków czasowych. Każdy rysunek powinien mieć zaznaczony czas
- b) Wykresy $\Gamma(t)$, $B(t)$, $L(t)$. Na liniach powinny być drobne markery, które zaznaczają konkretny pomiar.

5.2 Testy

Rezultaty poniższych testów i powiązane rysunki.

1. `testDivPeriodic`, `testCurlPeriodic`, `testGradPeriodic`
2. `testLapPeriodic`, `testUpwindPeriodic`
3. `testSolvePoissonPeriodic`
4. `testTimeStepper`

Bibliografia

- [1] D. Grosvenor i in. “A study of the effect of overshooting deep convection on the water content of the TTL and lower stratosphere from Cloud Resolving Model simulations”. W: *Atmos. Chem. Phys.* (2007).
- [2] E. Hinch. *Think Before You Compute*. Cambridge University Press, 2020. Rozd. 10.
- [3] F. Moukalled, L. Mangani i M. Darwish. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2015. Rozd. 11.
- [4] R. Plant i J-I. Yano. *Parametrization of Atmospheric Convection*. T. 1. Imperial College Press, 2016. Rozd. 1.

Dodatek A Upwinding

Rozważmy problem adwekcji skalaru ϕ przez nieściśliwe pole prędkości $\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(\nabla \cdot \mathbf{u})\phi \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (18)$$

Wykorzystując (18), można wyrazić (17) jako:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi). \quad (19)$$

Dyskretyzując (19) zamiast (17) możemy uzyskać schemat, który jest zachowawczy. Oznacza to, że błędy strumieni między węzłami, choć niezerowe (skutkiem dyskretyzacji), wzajemnie się znoszą. Można to podejście wciąż postrzegać jako specjalny przypadek metody różnic skończonych, jednak wygodniej jest o tym myśleć, jako o metodzie objętości skończonych. W tym przypadku, każda objętość ma środek w węźle i ścianki w połowie odległości między węzłami. W jej obrębie, równanie wyrażamy w formie całkowej i korzystamy z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego. W związku z tym, potrzebujemy wartości nie w węzłach a na ściankach. Zależnie od sposobu interpolacji na ścianki, uzyskamy schemat różnych rzędów dokładności. Przykładowo, wykorzystując liniową interpolację, dla objętości i (o środku w węźle i):

$$\left. \frac{\partial u\phi}{\partial x} \right|_i = \left(\underbrace{\frac{u_{i+1}\phi_{i+1} + u_i\phi_i}{2}}_{\text{strumień na prawej ściance}} - \underbrace{\frac{u_i\phi_i + u_{i-1}\phi_{i-1}}{2}}_{\text{strumień na lewej ściance}} \right) \frac{1}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (20)$$

Ponieważ sąsiednie objętości współdzielą strumienie (z przeciwnym znakiem), to niezależnie od błędów dyskretyzacji schemat jest zachowawczy.

Przyjmijmy, że część płynu znaczonego jest tuszem (o takiej samej gęstości), którego stężenie wyraża $\phi \in [0, 1]$. Schemat (20) zapewnia, że całkowita objętość tuszu, zgodnie z fizyką, nie zmieni się w procesie adwekcji. Rozważmy

jednak dwie sąsiednie objętości, takie, że w lewej nie ma tuszu w ogóle, w prawej jest tusz, a prędkość na ścianie pomiędzy nimi, zwrócona jest w prawo. Schemat (20) wskaże niefizyczny strumień tuszu z objętości gdzie go nie ma i skutkujący ujemnym stężeniem. W celu uniknięcia tego typu problemów stosuje się upwinding ([3], [2]) tzn. ϕ próbkowane jest „pod wiatr” - z kierunku z którego przypyływa. Poniżej dwa wybrane schematy:

$$\frac{\partial u\phi}{\partial x}\Big|_i = \left(u_P\phi_P - u_L\phi_L\right)\frac{1}{\Delta x} + H,$$

$$u_L = \frac{u_{i-1} + u_i}{2}, \quad u_P = \frac{u_{i+1} + u_i}{2},$$

np. w wersji pierwszorzędowej (ϕ z najbliższego węzła „pod wiatr”):

$$\phi_L = \begin{cases} \phi_{i-1}, & \text{dla } u_L \geq 0 \\ \phi_i, & \text{dla } u_L < 0 \end{cases} \quad \phi_P = \begin{cases} \phi_i, & \text{dla } u_P \geq 0 \\ \phi_{i+1}, & \text{dla } u_P < 0 \end{cases},$$

$$H = \mathcal{O}(\Delta x)$$

albo drugorzędowej (ekstrapolacja ϕ na ściankę z dwóch węzłów „pod wiatr”):

$$\phi_L = \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_{i-1} - \frac{1}{2}\phi_{i-2}, & \text{dla } u_L \geq 0 \\ \frac{3}{2}\phi_i - \frac{1}{2}\phi_{i+1}, & \text{dla } u_L < 0 \end{cases} \quad \phi_P = \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_i - \frac{1}{2}\phi_{i-1}, & \text{dla } u_P \geq 0 \\ \frac{3}{2}\phi_{i+1} - \frac{1}{2}\phi_{i+2}, & \text{dla } u_P < 0 \end{cases},$$

$$H = \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

analogicznie wygląda dyskretyzacja pionowych strumieni (unoszonych składową v).